

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 03.02.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\Sigma$
erreichbare Punkte	12.5	10	17.5	5	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**



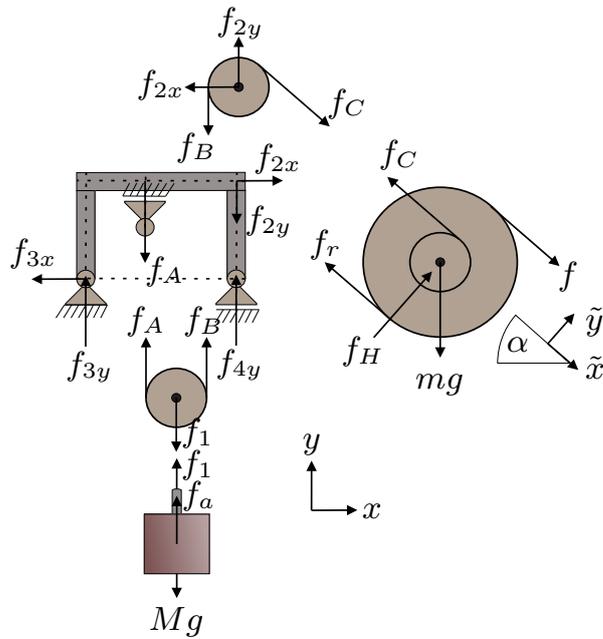


Abbildung 2: Schnittskizze des Systems.

Lösung:

- a) Schnittskizze: siehe Abbildung 2.
- b)  $f_1 = Mg - f_a = (M - \rho_f V)g$
- c)  $f_A = f_B = f_C = \frac{1}{2}(M - \rho_f V)g$
- d)  $f_r = \frac{1}{4} \frac{r-R}{R} (M - \rho_f V)g + \frac{1}{2} mg \sin \alpha$   
 $f = \frac{1}{4} \frac{r+R}{R} (M - \rho_f V)g - \frac{1}{2} mg \sin \alpha$
- e)  $f_{3x} = \frac{\cos \alpha}{2} (M - \rho_f V)g$   
 $f_{3y} = \frac{3r-h \cos \alpha}{2d} (M - \rho_f V)g$   
 $f_{4y} = \frac{1}{2} \left( \frac{h \cos \alpha}{d} + 2 + \sin \alpha - \frac{3r}{d} \right) (M - \rho_f V)g$
- f)  $f_H = mg \cos \alpha$   
 $\mu_H > \frac{|f_r|}{f_H}$

2. Ein Wassermolekül kann näherungsweise wie in Abbildung 3 modelliert werden: Zwei homogene, kugelförmige Massen  $m_H$ , die sich in  $y$ -Richtung bewegen können, sind an Punkten 1 und 2 miteinander über eine lineare Feder mit Federkonstante  $c_{HH}$  und entspannter Länge  $l$  verbunden. Zudem sind beide Massen über lineare Federn mit Federkonstanten  $c_{OH}$  und entspannten Längen  $l$  mit dem Koordinatenursprung 0 verbunden. Die Abstände der Massen 1 und 2 zum Punkt 0 in  $x$ -Richtung betragen jeweils  $d$ . Durch einen Laser wird auf Masse 2 eine externe Kraft  $f$  ausgeübt. **Hinweis:** Die Unterpunkte a,b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P. |

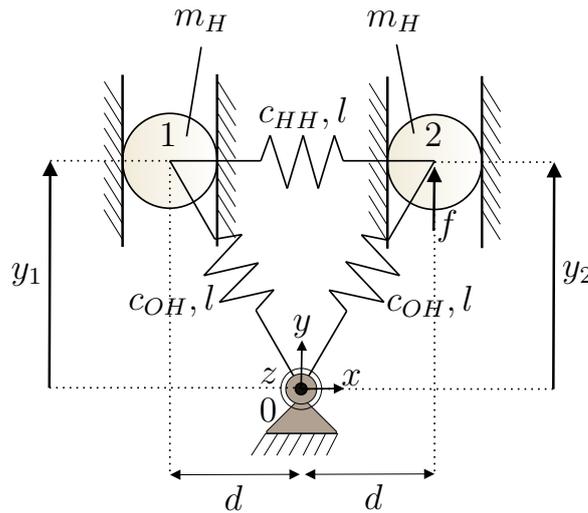


Abbildung 3: Modell eines Wassermoleküls.

- a) Schneiden Sie die beiden Massen 1 und 2 frei und fertigen Sie Schnittskizzen an. Geben Sie die Bewegungsgleichungen an, wobei Rotationen der Massen nicht berücksichtigt werden sollen. **Hinweis:** Übersehen Sie die externe Kraft  $f$  nicht! 4.5 P. |
- b) Nehmen Sie nun  $l = 0$  an. Berechnen Sie die Werte für  $y_1$  und  $y_2$ , bei denen das System ruht, d.h.  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$ . 2 P. |
- c) Nehmen Sie nun an, dass sich eine Kugel mit Masse  $m_H$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  mit einer Schwerpunktgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0^S(t_0) = [v_0, v_0, 0]^T$  und einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  um eine Drehachse durch den Schwerpunkt frei durch den Raum bewegt. Berechnen Sie die konstante Kraft  $\mathbf{f}_0^S$  sowie das konstante Drehmoment  $\tau$  entlang der Drehachse, die aufgewendet werden müssen, damit zum Zeitpunkt  $t_1$  für die kinetische Energie  $T(t_1) = 0$  gilt. **Hinweis:** Für homogene Kugeln hat das Trägheitsmoment entlang aller Achsen durch den Schwerpunkt denselben Wert  $I$ . 2 P. |
- d) Berechnen Sie die Kraft  $\mathbf{f}(x, y, z)$ , welche sich aus der potentiellen Energie 1.5 P. |

$$V(x, y, z) = k \left( \left( \frac{z}{\xi} \right)^4 - \ln \left( \frac{z}{\xi} \right) \right)$$

ergibt, wobei  $k > 0$ ,  $\xi > 0$  gilt.

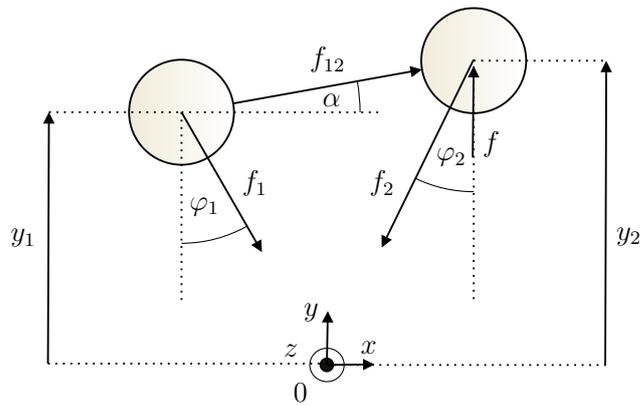


Abbildung 4: Schnittskizze des Systems.

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 4.

Bewegungsgleichungen:

$$m_H \ddot{y}_1 = c_{HH} \left( \sqrt{4d^2 + (y_2 - y_1)^2} - l \right) \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{4d^2 + (y_2 - y_1)^2}} - c_{OH} \left( \sqrt{d^2 + y_1^2} - l \right) \frac{y_1}{\sqrt{d^2 + y_1^2}}$$

$$m_H \ddot{y}_2 = -c_{HH} \left( \sqrt{4d^2 + (y_2 - y_1)^2} - l \right) \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{4d^2 + (y_2 - y_1)^2}} - c_{OH} \left( \sqrt{d^2 + y_2^2} - l \right) \frac{y_2}{\sqrt{d^2 + y_2^2}} + f$$

$$b) \quad y_1 = \frac{c_{HH}}{c_{OH}(2c_{HH} + c_{OH})} f$$

$$y_2 = \frac{c_{HH} + c_{OH}}{c_{OH}(2c_{HH} + c_{OH})} f$$

$$c) \quad \mathbf{f}_0^S = \begin{bmatrix} -\frac{m_H v_0}{t_1} \\ -\frac{m_H v_0}{t_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = -\frac{\omega_0 I}{t_1}$$

$$d) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \left( \frac{4z^3}{\xi^4} - \frac{1}{z} \right) \end{bmatrix}$$

3. Der in Abbildung 5 dargestellte Manipulator verfügt über drei Freiheitsgrade  $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ q_3]$ . Der Freiheitsgrad  $q_1$  bewirkt eine translatorische Bewegung des Gelenks 1 und die Freiheitsgrade  $q_2$  bzw.  $q_3$  bewirken Rotationen in Gelenk 2 bzw. Gelenk 3. Der Endeffektor hat die Masse  $m_E$  und das Trägheitsmoment  $\mathbf{I}_E = \text{diag}(I_{E,xx}, I_{E,yy}, I_{E,zz})$ , gegeben im körperfesten Koordinatensystem des Endeffektors. Alle anderen Bestandteile des Manipulators sind als masselos zu betrachten. Das Gelenk 2 und der Endeffektor sind durch eine lineare Feder, die eine Federkonstante  $c > 0$  besitzt und für  $q_3 = q_{3,0}$  entspannt ist, miteinander verbunden. Im Koordinatenursprung des Endeffektors wirkt das externe Störmoment  $\boldsymbol{\tau}_e^T = [\tau_{e,x} \ \tau_{e,y} \ \tau_{e,z}]$ . 17.5 P. |

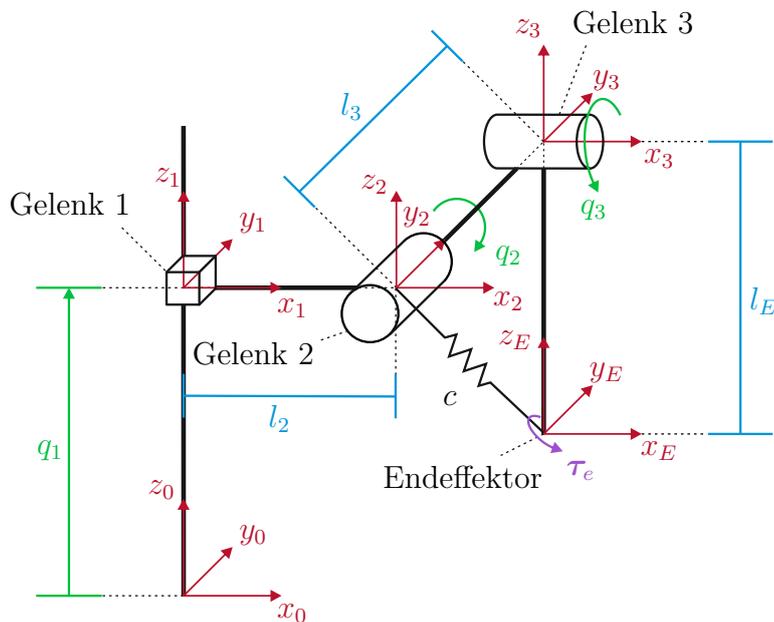


Abbildung 5: Manipulator.

- Geben Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{H}_3^E(\mathbf{q})$  zwischen den Koordinatensystemen als Funktion der generalisierten Koordinaten an. 2 P. |
- Berechnen Sie die homogene Transformation zwischen dem Ursprung und dem Endeffektor des Manipulators  $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$ . 3 P. |
- Berechnen Sie die Matrix  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^E)$  und den rotatorischen Anteil der Jacobi-Manipulator-Matrix  $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$  des Endeffektors. 4 P. |
- Berechnen Sie den translatorischen Anteil der Manipulator Jacobi-Matrix  $(\mathbf{J}_v)_0^E$  für den Endeffektor. 2 P. |
- Berechnen Sie den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie des Manipulators. **Hinweis:** Sie müssen den Ausdruck für die kinetische Energie nicht vereinfachen. 1 P. |
- Berechnen Sie die potentielle Energie  $V(\mathbf{q})$  des Manipulators zufolge der Feder. 3 P. |

- g) Berechnen Sie die generalisierte Kraft  $\mathbf{f}_{q,E}$ , die zur Folge des externen Störmoments  $\boldsymbol{\tau}_e$  wirkt. 1 P. |

Der folgende Punkt ist unabhängig von den Punkten a)-g) zu lösen:

- h) Begründen Sie bei welcher der folgenden Matrizen es sich um Rotationsmatrizen  $\in SO(3)$  handelt und bei welcher nicht? 1.5 P. |

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_{q_2} & 0 & s_{q_2} & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_{q_2} & 0 & c_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_3} & -s_{q_3} & l_3 \\ 0 & s_{q_3} & c_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_{q_2} & s_{q_2}s_{q_3} & s_{q_2}c_{q_3} & -s_{q_2}c_{q_3}l_E + l_2 \\ 0 & c_{q_3} & -s_{q_3} & s_{q_3}l_E + l_3 \\ -s_{q_2} & c_{q_2}s_{q_3} & c_{q_2}c_{q_3} & -c_{q_2}c_{q_3}l_E + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^E) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_3 s_{q_2} & \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_3 s_{q_2} & 0 & -\dot{q}_3 c_{q_2} \\ -\dot{q}_2 & \dot{q}_3 c_{q_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{q_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s_{q_2} \end{bmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & -c_{q_2}c_{q_3}l_E & s_{q_2}s_{q_3}l_E \\ 0 & 0 & c_{q_3}l_E \\ 1 & s_{q_2}c_{q_3}l_E & c_{q_2}s_{q_3}l_E \end{bmatrix}$$

e)

$$T_r = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0^E)^\top \mathbf{R}_0^E \mathbf{I}_E (\mathbf{R}_0^E)^\top \boldsymbol{\omega}_0^E$$

f)

$$V_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}c \left( \sqrt{l_3^2 + l_E^2 - 2l_3l_E s_{q_3}} - \sqrt{l_3^2 + l_E^2 - 2l_3l_E s_{q_{3,0}}} \right)^2$$

g)

$$\mathbf{f}_{q,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{E,y} \\ c_{q_2}\tau_{E,x} - s_{q_2}\tau_{E,z} \end{bmatrix}$$

- h)
- $A_1$  ja, weil  $\det(A_1) = 1$  und  $A_1^\top A_1 = I$
  - $A_2$  nein, weil  $\det(A_1) \neq 1$
  - $A_3$  ja, weil  $\det(A_3) = 1$  und  $A_3^\top A_3 = I$