Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 31.03.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	11	10.5	18.5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

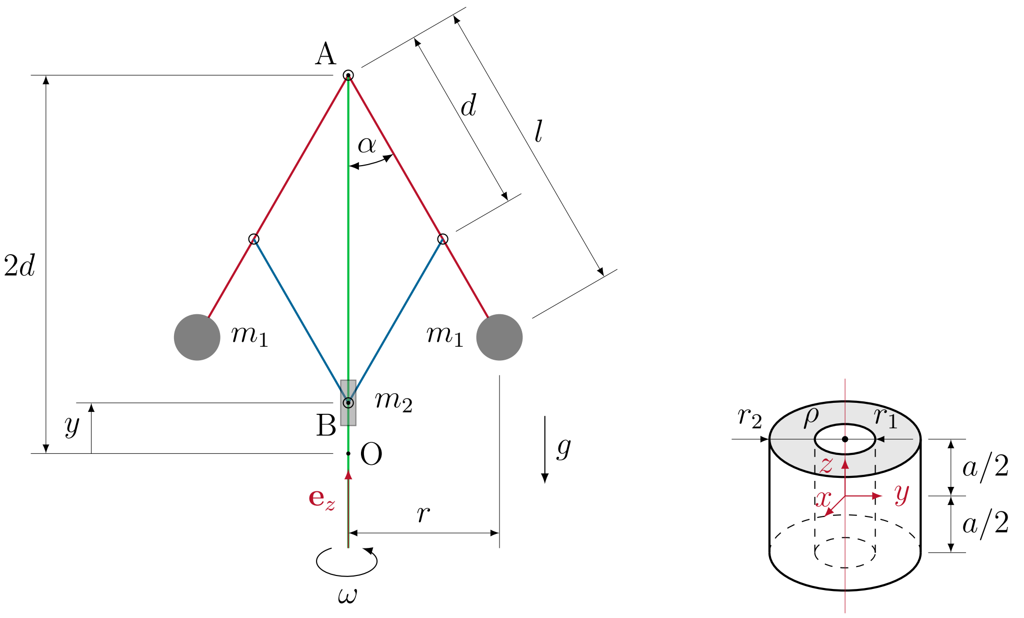
... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Abbildung 1a zeigt einen Fliehkraftregler, der aus zwei Kugeln mit der Masse m_1, einen Gegengewicht mit der Masse m_2, und masselosen Stäben besteht. Die Stäbe sind reibungslos mit Drehgelenken verbunden. Der Fliehkraftregler rotiert mit einer konstanten Drehzahl ω um die Achse $\mathbf{e}_z$, wodurch die Zentrifugalkraft $f_c = m_1\omega^2 r$ auf jede Kugel wirkt. Dabei ist r der Abstand der Kugel von der Drehachse. Der Ausgang des Fliehkraftreglers ist die Höhe y, wobei $y = 0$ bei $\alpha = 0$ gilt. 11 P. |
Hinweis: Die Unterpunkte c) bis e) können unabhängig voneinander gelöst werden.



(a) Fliehkraftregler. (b) Gegengewicht.

Abbildung 1: Fliehkraftregler und Gegengewicht.

a) Berechnen Sie die Höhe y und den Abstand r für einen gegebenen Winkel α. 0.5 P. |

b) Schneiden Sie einen roten Stab zusammen mit einer Kugel, einen blauen Stab, wie auch das Gegengewicht frei. 2 P. |
Hinweis: Achten Sie auf die Symmetrie des Fliehkraftreglers.

c) Berechnen Sie alle Schnittkräfte sowie die Drehzahl ω so, dass für $\alpha = \pi/6$ das System im Gleichgewicht ist. 4.5 P. |

d) Nehmen Sie an, dass $m_2 = 0$ gilt. Berechnen Sie den Winkel α in Abhängigkeit von der Drehzahl ω, sodass das System im Gleichgewicht ist. 2 P. |

e) Das Gegengewicht ist ein Hohlzylinder mit den in Abbildung 1b gegebenen Dimensionen und einer Dichte $\rho = \rho_0 + \rho_2 r^2$, mit $r^2 = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Gegengewichts I_{zz} um die z-Achse. 2 P. |

Lösung:

a) $y = 2d(1 - \cos\alpha)$
   $r = l \sin\alpha$

b) *Die Schnittskizze ist in Abbildung 2 gegeben.*

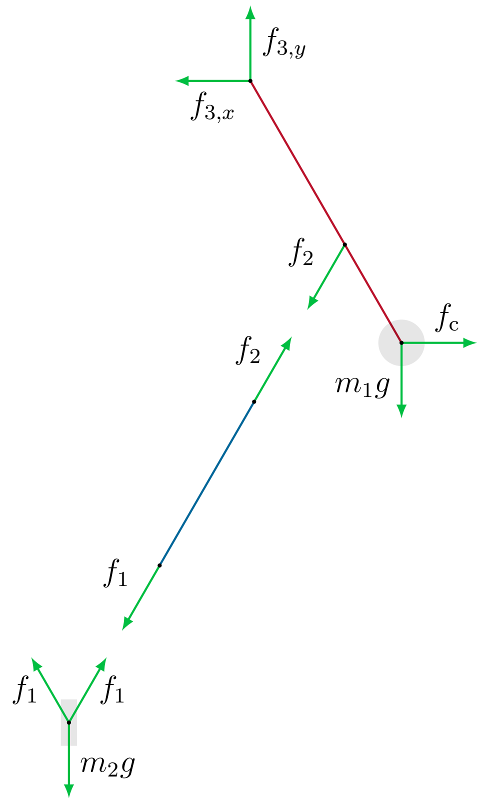


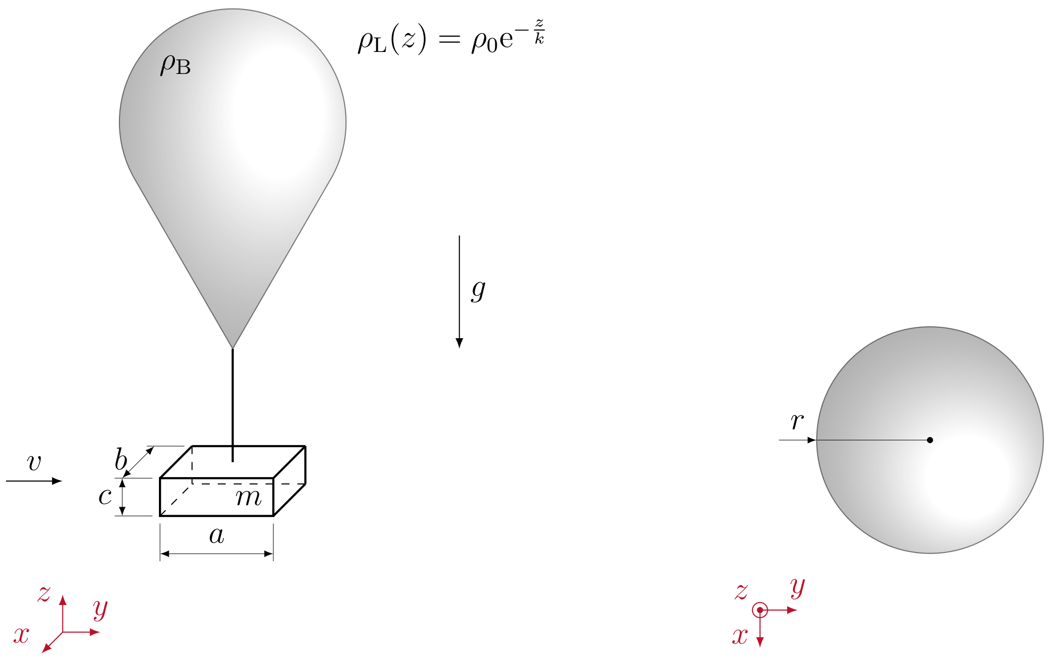
Abbildung 2: Schnittskizze des Fliehkraftreglers.

c) $f_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m_2 g$
   $f_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} m_2 g$
   $f_{3,x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(m_1 + m_2\left(\frac{d}{l} - \frac{1}{2}\right)\right)g$
   $f_{3,y} = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right)g$
   $\omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}(m_1 l + m_2 d)g}{3 m_1 l^2}}$

d) $\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)$

e) $I_{zz} = 2\pi a\left(\rho_0 \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} + \rho_2 \frac{r_2^6 - r_1^6}{6}\right)$

2. Der in Abbildung 3 dargestellte Wetterballon und die Nutzlast befinden sich auf einer Höhe z bei einer Luftdichte $\rho_{\mathrm{L}}(z) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}$. Der Ballon hat das konstante Volumen V und ist mit einem Gas der Dichte ρ_{B} gefüllt. Die Nutzlast hat eine Masse m mit den in Abbildung 3a gegebenen Abmessungen. Auf den Ballon und die Nutzlast wirkt ein Seitenwind v in positive y-Richtung und die Gravitation in negative z-Richtung. Zusätzlich wirkt auf den Ballon eine Auftriebskraft $f_{\mathrm{a}} = \rho_{\mathrm{L}}(z) V g$. Der Ballon und die Nutzmasse haben einen Widerstandsbeiwert c_{W} der in allen Richtungen gleich ist. Die seitliche Querschnittfläche des Wetterballons ist A. *Hinweis: Die Unterpunkte d) und e) können unabhängig von den vorherigen Aufgaben gelöst werden.* 10.5 P. |



(a) Wetterballon mit Nutzlast.

(b) Draufsicht auf den Wetterballon.

Abbildung 3: Wetterballon mit Nutzlast.

a) Zeichen Sie alle Kräfte, die auf den Ballon und die Nutzlast wirken, ein. 2 P. |

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen des Ballons mit Nutzlast an.
Hinweis: Betrachten Sie den Ballon und die Nutzlast als Starrkörper. 3 P. |

c) Berechnen Sie die stationären Geschwindigkeiten $v_{x,\mathrm{R}}$ und $v_{y,\mathrm{R}}$ in x- und y-Richtung wie auch die stationäre Höhe z_{R} des Ballons mit Nutzlast. 2 P. |

d) Der Ballon platzt zum Zeitpunkt $t = t_0$. Geben Sie die Bewegungsgleichungen der Nutzlast an. 1.5 P. |

e) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich die Nutzlast an der Position $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]^{\mathrm{T}}$ und hat die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = [0, v_{y,0}, 0]^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den Punk $\mathbf{r}_{\mathrm{T}}$, die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}$ und den Zeitpunkt t_{T} des Aufschlags der Nutzlast auf die Erdoberfläche $z_{\mathrm{T}} = 0$. Vernachlässigen Sie den Strömungswiderstand. 2 P. |

Lösung:

a) *Die Kräfte sind in Abbildung 4 gegeben.*

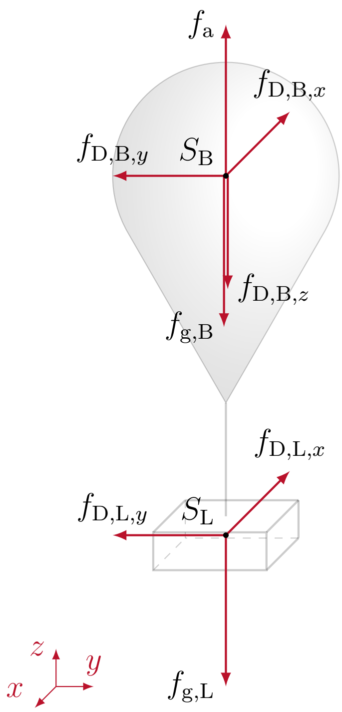


Abbildung 4: Ballon und Nutzlast mit allen wirkenden Kräften.

Es gilt

$$f_{\mathrm{g,L}} = mg$$
$$f_{\mathrm{D,L},x} = \tfrac{1}{2}\rho_\mathrm{L}(z)acc_\mathrm{W}\dot{x}|\dot{x}|$$
$$f_{\mathrm{D,L},y} = \tfrac{1}{2}\rho_\mathrm{L}(z)bcc_\mathrm{W}(\dot{y}-v)|\dot{y}-v|$$
$$f_{\mathrm{g,B}} = \rho_\mathrm{B}Vg$$
$$f_{\mathrm{D,B},x} = \tfrac{1}{2}\rho_\mathrm{L}(z)Ac_\mathrm{W}\dot{x}|\dot{x}|$$
$$f_{\mathrm{D,B},y} = \tfrac{1}{2}\rho_\mathrm{L}(z)Ac_\mathrm{W}(\dot{y}-v)|\dot{y}-v|$$
$$f_{\mathrm{D,B},z} = \tfrac{1}{2}\rho_\mathrm{L}(z)r^2\pi c_\mathrm{W}\dot{z}|\dot{z}|.$$

b)
$$(m+\rho_\mathrm{B}V)\ddot{x} = -\tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}(A+ac)c_\mathrm{W}\dot{x}|\dot{x}|$$
$$(m+\rho_\mathrm{B}V)\ddot{y} = -\tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}(A+bc)c_\mathrm{W}(\dot{y}-v)|\dot{y}-v|$$
$$(m+\rho_\mathrm{B}V)\ddot{z} = \left(\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}-\rho_\mathrm{B}\right)Vg - mg - \tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}r^2\pi c_\mathrm{W}\dot{z}|\dot{z}|$$

c)
$$v_{x,\mathrm{R}} = 0$$
$$v_{y,\mathrm{R}} = v$$
$$z_\mathrm{R} = k\ln\left(\tfrac{\rho_0 V}{m+\rho_\mathrm{B}V}\right)$$

d)
$$m\ddot{x} = -\tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}acc_\mathrm{W}\dot{x}|\dot{x}|$$
$$m\ddot{y} = -\tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}bcc_\mathrm{W}(\dot{y}-v)|\dot{y}-v|$$
$$m\ddot{z} = -mg - \tfrac{1}{2}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}abc_\mathrm{W}\dot{z}|\dot{z}|$$

e)
$$t_\mathrm{T} = \sqrt{\tfrac{2z_0}{g}}$$
$$\mathbf{r}_\mathrm{T} = \left[x_0, y_0 + v_{y,0}\sqrt{\tfrac{2z_0}{g}}, 0\right]^\mathrm{T}$$
$$\mathbf{v}_\mathrm{T} = [0, v_{y,0}, -\sqrt{2z_0 g}]^\mathrm{T}$$

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 18.5 P. |

a) Gegeben ist der planare Manipulator aus Abbildung 5. Alle Glieder i werden als Punktmassen m_i, $i = 0, 1, 2$, modelliert und die Massenträgheitsmomente werden vernachlässigt, d.h. $\mathbf{I}_i = \mathbf{0}$. Die Gravitation g wirkt in die negative y_0-Richtung. Der Vektor der generalisierten Koordinaten ist $\mathbf{q} = [q_1\ q_2]^{\mathrm{T}}$. 8 P. |

i. Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ mithilfe der Jacobi-Matrizen. 4 P. |

ii. Berechnen Sie den Eintrag $C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ der Coriolis-Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. 2 P. |

iii. Berechnen Sie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 1 P. |

iv. Berechnen Sie den Wert der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ so, dass der Endeffektor auf einem vorgegebenen Punkt $\mathbf{p} = [p_x\ p_y\ 0]^{\mathrm{T}}$ zu liegen kommt. 1 P. |

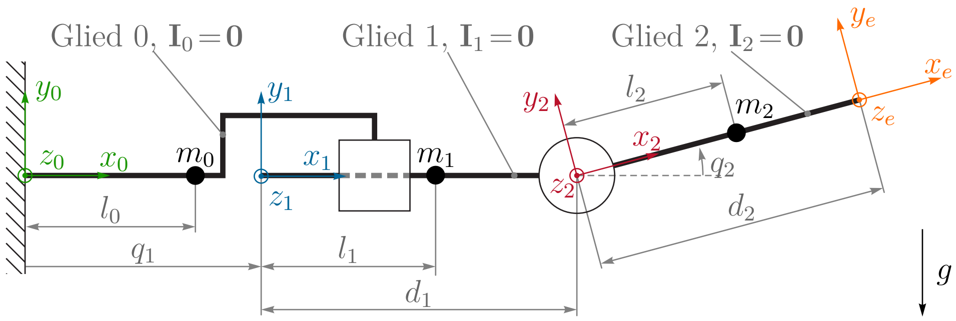


Abbildung 5: Planarer Manipulator.

b) Gegeben ist der Roboterarm mit elastischem Antriebsstrang aus Abbildung 6, welcher mit dem Motormoment τ_m angetrieben wird. Die eingezeichneten Größen sind bekannt. Der Motor ist mit dem Roboterarm über die nichtlineare Drehfeder $\tau_k(\Delta q) = k\Delta q^5$, $\Delta q = q_2 - q_1$, verbunden. Die lineare Dämpfung d_1 wirkt auf den Rotor und d_2 wirkt auf den Roboterarm. Weiters wirkt die Gravitation g auf das Starrkörpersystem. Das Massenträgheitsmoment I_2 ist bezüglich der Achse A angegeben. 2.5 P. |

Geben Sie die Drehimpulserhaltung für den Rotor und den Roboterarm an.

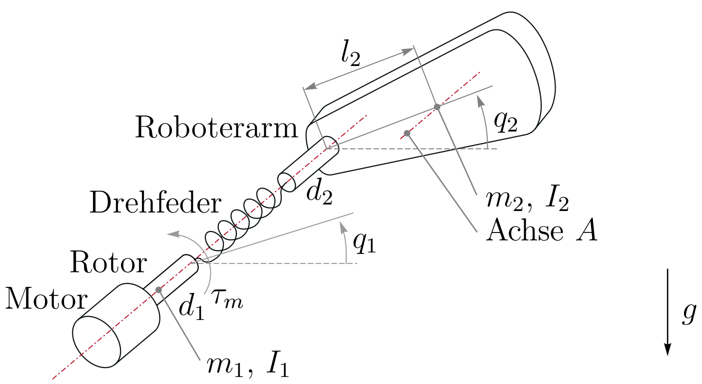


Abbildung 6: Roboterarm mit elastischem Antriebsstrang.

c) Gegeben ist die Anordnung dreier Koordinatensysteme $(0_i x_i y_i z_i)$, $i = 0, 1, 2$, mit den zeitabhängigen Größen $\mathbf{R}_a(t)$ und $\mathbf{d}_a(t)$ sowie den konstanten Größen $\mathbf{R}_b$, $\mathbf{d}_b$ und $\mathbf{p}$. Berechnen Sie die Ausdrücke für folgende Größen und vereinfachen Sie so weit wie möglich: 2.5 P. |

i. Position des Punktes P in $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. 0.5 P. |
ii. Position des Punktes P in $(0_1 x_1 y_1 z_1)$. 0.5 P. |
iii. Geschwindigkeit des Punktes P in $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. 0.5 P. |
iv. Geschwindigkeit des Punktes P in $(0_1 x_1 y_1 z_1)$. 0.5 P. |
v. Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeit von $(0_2 x_2 y_2 z_2)$ gegenüber $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. 0.5 P. |

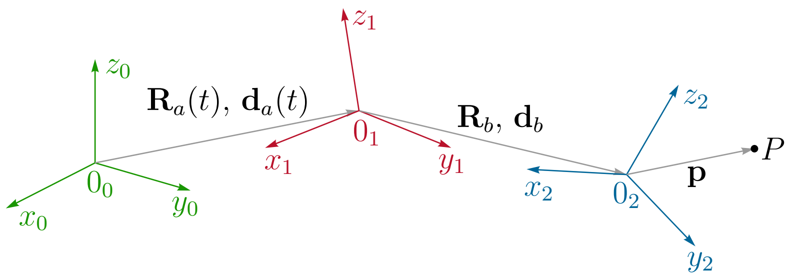


Abbildung 7: Drei Koordinatensysteme.

d) Gegeben ist die kinematische Kette aus Abbildung 8 (nächste Seite). Alle Abmessungen und Winkel sind bekannt. Der Verschiebungsvektor $\mathbf{d}_1$ setzt sich allgemein als $\mathbf{d}_1 = [d_{1,x}\ d_{1,y}\ d_{1,z}]^{\mathrm{T}}$ zusammen. 5.5 P. |

i. Wie viele Freiheitsgrade besitzt die kinematische Kette? Geben Sie an, um welche Art von Gelenken es sich handelt und geben Sie den Vektor der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ an. 1 P. |
ii. Zeichnen Sie geeignete Koordinatensysteme in Abbildung 8 ein. 1.5 P. |
iii. Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für die homogene Transformation des Koordinatensystems am Endeffektor $(0_e x_e y_e z_e)$ bezüglich der Roboterbasis b an. 0.5 P. |
Hinweis: Die Berechnungsvorschrift muss nicht ausgewertet werden.
iv. Geben Sie *alle* homogenen Transformationen an, die für die Berechnungsvorschrift in Punkt iii. benötigt werden. Vereinfachen Sie jede Transformation so weit wie möglich. 2.5 P. |

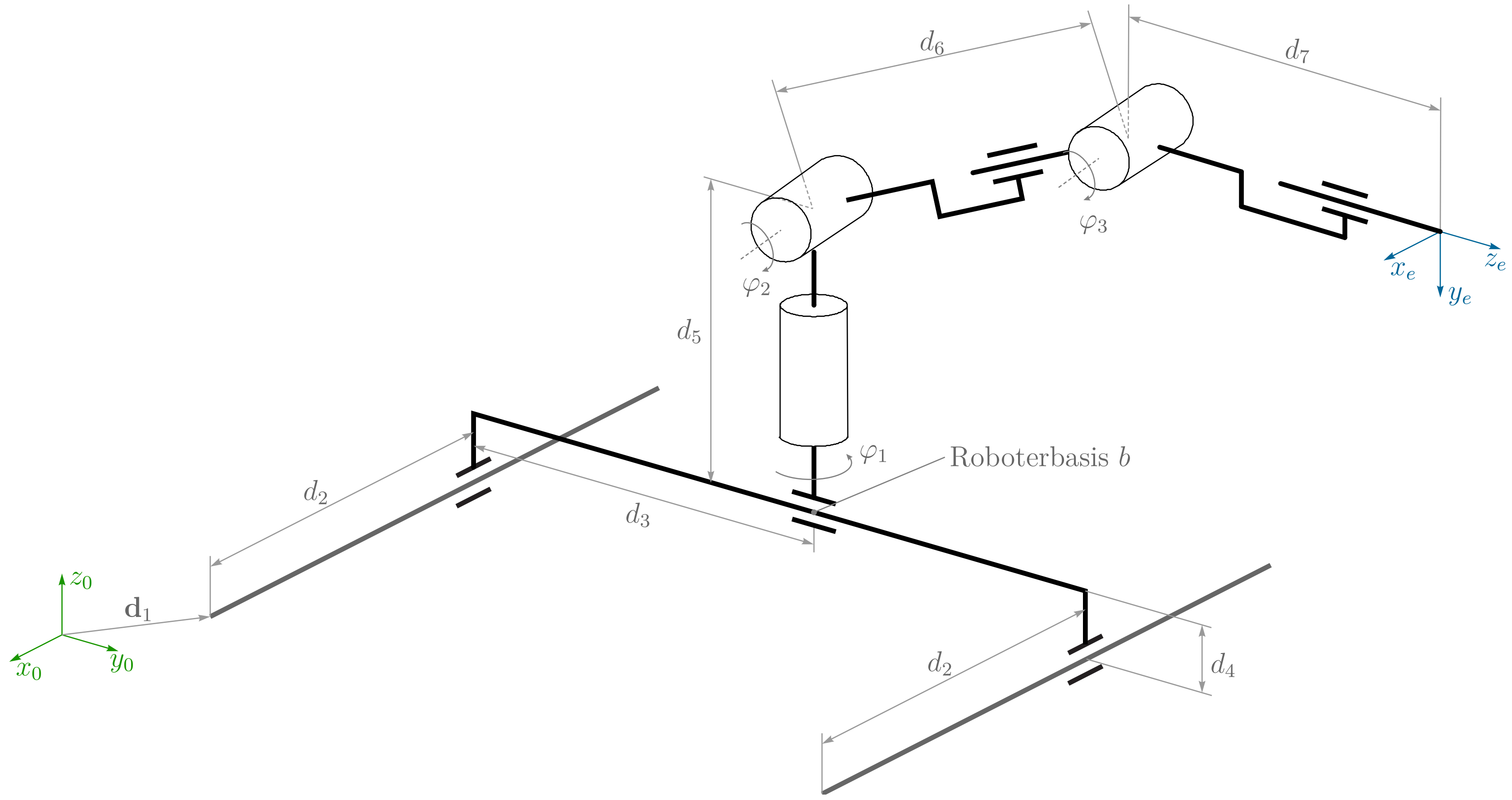


Abbildung 8: Kinematische Kette.

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{p}_{m_1} = \begin{bmatrix} q_1 + l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{J_v})_0^{m_1}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_{m_1}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{m_2} = \begin{bmatrix} q_1 + d_1 + l_2\cos(q_2) \\ l_2\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J_v})_0^{m_2}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_{m_2}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2\sin(q_2) \\ 0 & l_2\cos(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}((\mathbf{J_v})_0^{m_i})^{\mathrm{T}} m_i (\mathbf{J_v})_0^{m_i} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 l_2 \sin(q_2) \\ -m_2 l_2 \sin(q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{aligned} C_{12} &= c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 = -m_2 l_2 \cos(q_2)\dot{q}_2 \\ c_{121} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1}\right) = 0 \\ c_{221} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1}\right) = -m_2 l_2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^{2} m_i g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{p}_{m_i} \\ &= m_1 g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 + l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 + d_1 + l_2\cos(q_2) \\ l_2\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= m_2 g l_2 \sin(q_2) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iv.

$$\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} q_1 + d_1 + d_2\cos(q_2) \\ d_2\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_x - d_1 - d_2\cos(q_2) \\ \arcsin\left(\frac{p_y}{d_2}\right) \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} &\textit{Rotor:} & I_1\ddot{q}_1 &= \tau_m + k\Delta q^5 - d_1\dot{q}_1 \\ &\textit{Roboterarm:} & (I_2 + m_2 l_2^2)\ddot{q}_2 &= \quad - k\Delta q^5 - d_2\dot{q}_2 - m_2 g l_2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

c) *i.*

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{R}_a(t)(\mathbf{d}_b + \mathbf{R}_b\mathbf{p}) = \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{R}_a(t)\mathbf{d}_b + \mathbf{R}_a(t)\mathbf{R}_b\mathbf{p}$$

ii.

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_b + \mathbf{R}_b\mathbf{p}$$

iii.

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{d}}_a(t) + \dot{\mathbf{R}}_a(t)\mathbf{d}_b + \dot{\mathbf{R}}_a(t)\mathbf{R}_b\mathbf{p}$$

iv.

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0}$$

v.

$$\mathbf{R}_0^2(t) = \mathbf{R}_a(t)\mathbf{R}_b$$
$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2) = \dot{\mathbf{R}}_0^2(t)\Big(\mathbf{R}_0^2(t)\Big)^{\mathrm{T}} = \dot{\mathbf{R}}_a(t)\mathbf{R}_b\mathbf{R}_b^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_a^{\mathrm{T}}(t) = \dot{\mathbf{R}}_a(t)\mathbf{R}_a^{\mathrm{T}}(t)$$

$\boldsymbol{\omega}_0^2$ *folgt aus den Elementen von* $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2)$.

d) *i.* *7 Freiheitsgrade*
Translationsgelenke: d_2, d_3, d_6, d_7
Rotationsgelenke: φ_1, φ_2, φ_3

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d_2 & d_3 & \varphi_1 & \varphi_2 & d_6 & \varphi_3 & d_7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ii. *Die Anordnung und auch die Anzahl der Koordinatensysteme ist nicht eindeutig. Es werden aber insgesamt mindestens 8 Koordinatensysteme benötigt, d.h. eines für jeden Starrkörper. Eine mögliche Lösung zeigt Abb. 9.*

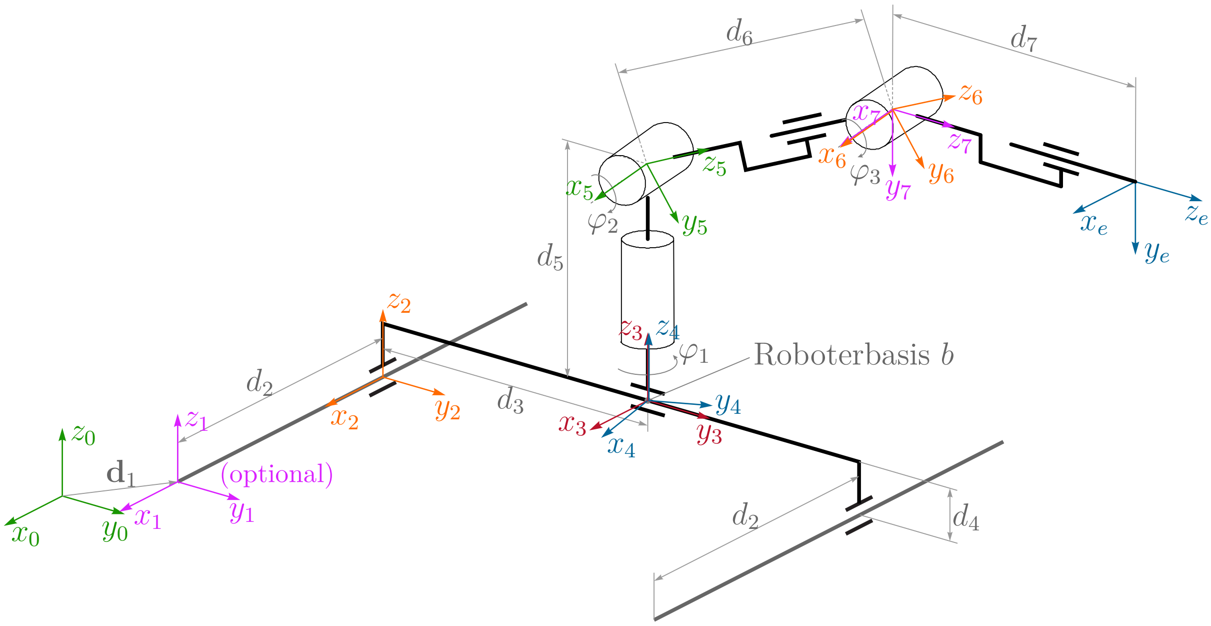


Abbildung 9: Kinematische Kette mit Koordinatensystemen.

iii. *In Abb. 9 entspricht das Koordinatensystem* $(0_3 x_3 y_3 z_3)$ *der Roboterbasis* b.

$$\mathbf{H}_b^e(\varphi_1, \varphi_2, d_6, \varphi_3, d_7) = \mathbf{H}_3^4(\varphi_1)\mathbf{H}_4^5(\varphi_2)\mathbf{H}_5^6(d_6)\mathbf{H}_6^7(\varphi_3)\mathbf{H}_7^e(d_7)$$

iv.

$$\mathbf{H}_3^4(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{z,\varphi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_4^5(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x,-\varphi_2} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_5^6(d_6) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_6^7(\varphi_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x,-\varphi_3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_7^e(d_7) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$