

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 26.05.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\Sigma$
erreichbare Punkte	12	18	10	5	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Nehmen Sie an, dass das in Abbildung 1 dargestellte Fahrzeug mit Rädern mit dem Radius  $r$ , der Masse  $m$  und dem Trägheitsmoment  $I_{zz}$  eine schiefe Ebene (Winkel  $\alpha$ ) ideal herunterrollt, ohne zu gleiten. Die Räder sind durch ein masseloses lineares Feder-Dämpferelement mit der entspannten Länge  $x_r = (x_2 - x_1) = 0$  verbunden. 12 P. |

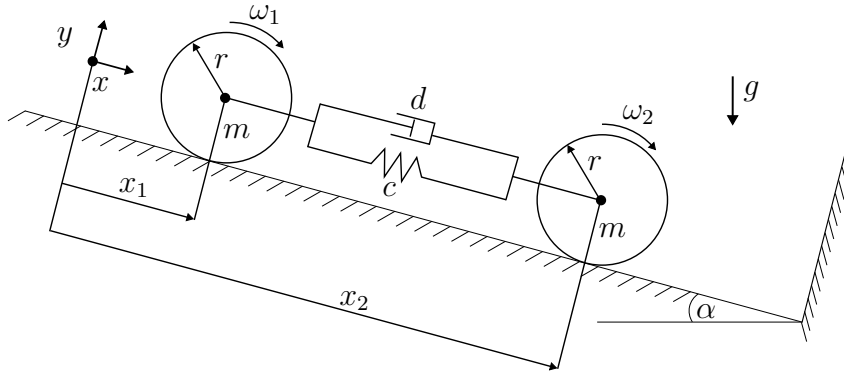


Abbildung 1: Fahrzeug auf schiefer Ebene mit freiem Fall.

- a) Schneiden Sie die Räder frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 1,5 P. |
- b) Geben Sie die Bewegungsgleichung der Schwerpunkte  $x_i(t)$  der Räder an. Eliminieren Sie alle unbekanntes Kräfte. 4,5 P. |
- c) Berechnen Sie die potentielle Energie des Fahrzeugs bezogen auf den Koordinatenursprung. 1 P. |
- d) Berechnen Sie die kinetische Energie der Räder. 1 P. |
- e) Zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  stößt das vordere Rad voll unelastisch an die Wand am Ende der schiefen Ebene, wodurch sich seine Geschwindigkeit schlagartig auf  $\dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0$  reduziert. Berechnen Sie die minimale Ausdehnung der Feder  $s = (x_2 - x_1)$  für  $\dot{x}_1(t = 0) = v_s$ . 2,5 P. |  
*Hinweis: Sie können die Wirkung des Dämpfers für die Berechnung vernachlässigen.*
- f) Nehmen Sie nun an, dass sich die Gesamtfeder aus zwei einzelnen Federn mit Federsteifigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  zusammensetzt. Leiten Sie die Gesamtfedersteifigkeit her für den Fall, dass die Federn parallel geschaltet sind. 1,5 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 2

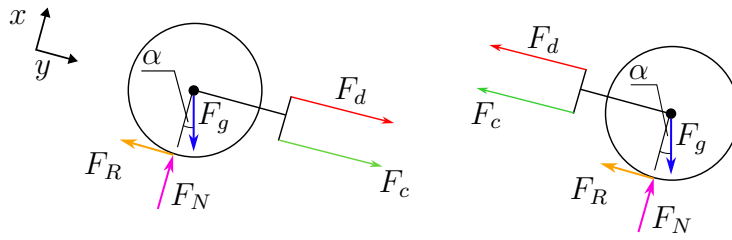


Abbildung 2: Freischnitt.

$$F_g = mg$$

$$v_i = 2\pi r\omega \quad \dot{v}_i = 2\pi r\dot{\omega}_i$$

$$b) I_{zz}\dot{\omega}_i = rF_{R,i}$$

$$\ddot{x}_1 \left( m + \frac{I_{zz}}{r^2} \right) = -c(x_1 - x_2) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \sin(\alpha)mg$$

$$\ddot{x}_2 \left( m + \frac{I_{zz}}{r^2} \right) = c(x_1 - x_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \sin(\alpha)mg$$

$$c) E_{pot} = \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 - \sin(\alpha)mg(x_1 + x_2)$$

$$d) E_{kin} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_{zz}}{r^2} + m \right) v_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{I_{zz}}{r^2} + m \right) v_2^2$$

$$e) \frac{1}{2} \left( \frac{I_{zz}}{r^2} + m \right) v_s^2 + smg \sin(\alpha) = \frac{1}{2}cs^2$$

$$s_{1,2} = \left( \frac{mg \sin(\alpha)}{c} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{mg \sin(\alpha)}{c} \right)^2 + \frac{1}{c} \left( \frac{I_{zz}}{r^2} + m \right) v_s^2}$$

$$f) c = c_1 + c_2$$

2. In Abbildung 3 ist die kinematische Kette eines Manipulators zu sehen. Die Gelenke sind jeweils über masselose Stäbe miteinander verbunden. Ein Werkzeug der Masse  $m$  und der Massenträgheitsmatrix  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$  bezüglich des Koordinatensystems 3 ist im Ursprung desselben angebracht. Die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{g}$  wirkt in die negative  $z_0$ -Richtung.

18 P. |

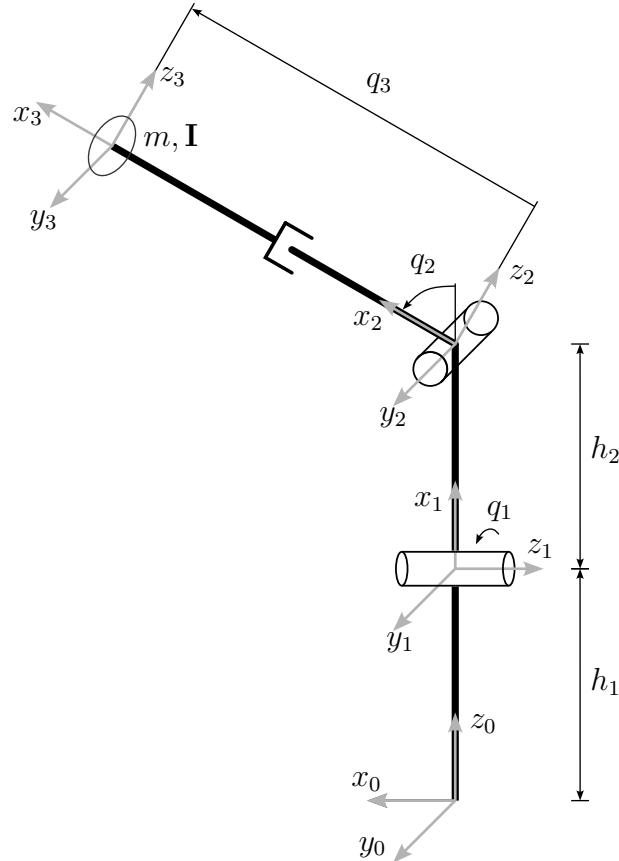


Abbildung 3: Kinematische Kette.

- a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt der in Abbildung 3 dargestellte Manipulator und um welche Art von Gelenken handelt es sich dabei? 1 P. |
- b) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1$ ,  $\mathbf{H}_1^2$ ,  $\mathbf{H}_2^3$ , sowie  $\mathbf{H}_0^3$ . 5 P. |  
**In allen folgenden Punkten ist der Winkel  $q_2 = \alpha = \text{const.}$  zu verwenden. Die Achse  $q_2$  wird als starr angenommen und nicht mehr als Freiheitsgrad.**
- c) Berechnen Sie die Manipulator Jacobi Matrix der Translation  $(\mathbf{J}_v)_0^3$  des Endeffektors gegenüber dem Ursprung. 1 P. |
- d) Berechnen Sie die Manipulator Jacobi Matrix der Rotation  $(\mathbf{J}_\omega)_0^3$  des Endeffektors gegenüber dem Ursprung. 3 P. |
- e) Bestimmen Sie den ersten Eintrag  $\mathbf{M}_{1,1}$  der Massenmatrix des Manipulators. 4 P. |
- f) Berechnen die gesamte potenzielle Energie  $V(\mathbf{q})$  bezüglich des Ursprungs des Koordinatensystems 0 sowie den Vektor der Potenzialkräfte  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . 2 P. |
- g) Nehmen Sie an, dass im Ursprung des Koordinatensystems 3 zusätzlich die externe Kraft  $\mathbf{f}_3^{\text{ext}} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$  und das Drehmoment  $\boldsymbol{\tau}_3^{\text{ext}} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$  angreifen. Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q(\mathbf{q})$  und vereinfachen Sie. 2 P. |

Lösung:

a) 3 Freiheitsgrade, 2 rotatorische, 1 translatorischer (prismatischer) Freiheitsgrad (RRP)

b)

$$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{H}_0^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & \sin(q_2)q_3 \\ \sin(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & \sin(q_1)\sin(q_2) & \sin(q_1)(\cos(q_2)q_3 + h_2) \\ \cos(q_1)\cos(q_2) & -\sin(q_1) & \cos(q_1)\sin(q_2) & \cos(q_1)(\cos(q_2)q_3 + h_2) + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{J}_v)_0^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\alpha) \\ \cos(q_1)(\cos(\alpha)q_3 + h_2) & \sin(q_1)\cos(\alpha) \\ -\sin(q_1)(\cos(\alpha)q_3 + h_2) & \cos(q_1)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{M}_{1,1} = (mq_3^2 - I_x + I_z)(\cos^2(\alpha)) + 2h_2mq_3\cos(\alpha) + h_2^2m + I_x$$

g)

$$V = -(\cos(q_1)(\cos(\alpha)q_3 + h_2) + h_1)gm$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \sin(q_1)(\cos(\alpha)q_3 + h_2)mg \\ -mg\cos(q_1)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

h)

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} (\cos(\alpha)q_3 + h_2)(\cos(q_1)f_y - \sin(q_1)f_z) - \tau_x \\ \sin(\alpha)f_x + \sin(q_1)\cos(\alpha)f_y + \cos(q_1)\cos(\alpha)f_z \end{bmatrix}$$

3. Dargestellt ist ein System bestehend aus zwei Drachen der Massen  $m_1$  und  $m_2$ , welche durch ein masseloses starres Seil verbunden sind. Die Drachen werden durch die Auftriebskraft einer Luftströmung mit Geschwindigkeit  $v$  in der Luft gehalten. Das Seil ist im Punkt  $C$  fest im Boden verankert. Die effektive Querschnittsfläche der beiden Drachen beträgt  $A_1$  und  $A_2$ . Dabei ist die Dichte der Luft  $\rho$ . Alle Kräfte greifen in den Schwerpunkten der Drachen an. 10 P. |

*Hinweis: Die Auftriebskraft eines Drachens berechnet sich auf die gleiche Weise wie die Widerstandskraft in einem Fluid, wobei der Widerstandsbeiwert  $c_w$  durch den Auftriebsbeiwert  $c_a$  ersetzt wird. Die Auftriebskraft zeigt in positive  $y$ -Richtung.*

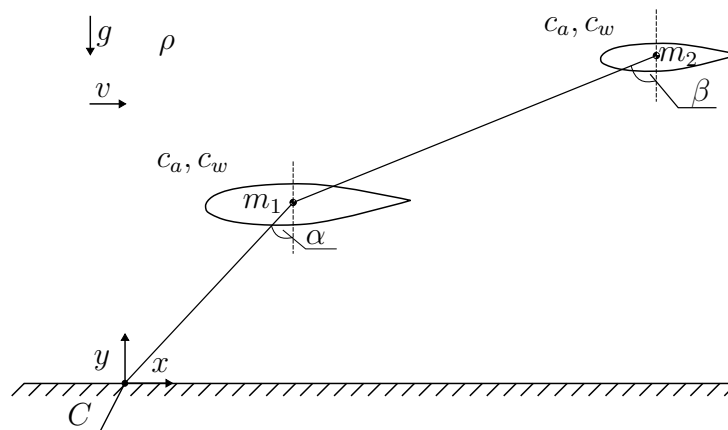


Abbildung 4: Doppeldrachen

Bearbeiten Sie nachfolgend:

- a) Schneiden Sie die beiden Drachen frei und fertigen Sie eine Schnittskizze mit allen relevanten Kräften an. 2,5 P. |
- b) Berechnen Sie die Seilkraft am Ankerpunkt  $C$  und geben Sie diese explizit an. 5 P. |  
*Hinweis: Beginnen Sie mit der Berechnung am oberen Drachen. Wenn Sie einen Ausdruck für einen Winkel aus bekannten Größen bestimmt haben, dürfen Sie mit diesem Winkeln als gegeben weiter rechnen.*

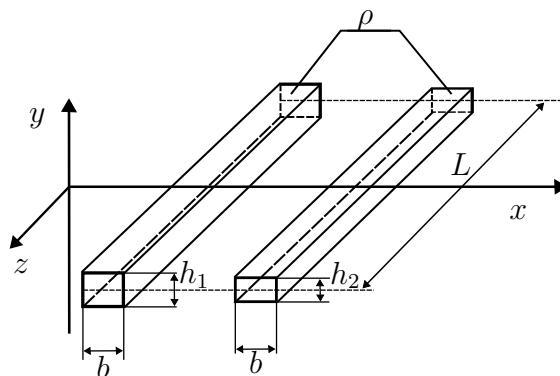


Abbildung 5: Drachentragstruktur

Die nachfolgenden Aufgaben können unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

Die Tragstruktur eines Drachen kann als zwei parallel verlaufende rechteckige Profile angenommen werden. Dabei haben die Profile jeweils eine Länge von  $L$  eine Breite von  $b$  und die Höhen von  $h_1$  und  $h_2$ . Die Profile haben eine homogen verteilte Dichte von  $\rho$ .

- c) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment  $I_{xx}$  des Profils. Gehen Sie dabei 2,5 P. | davon aus, dass die  $x$ -Achse durch die Schwerpunkte der Profile verläuft.

Lösung:

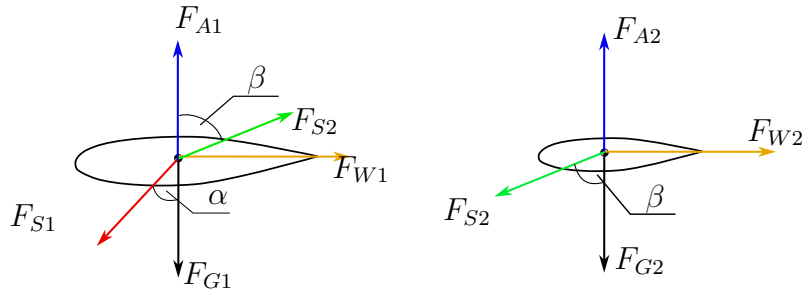


Abbildung 6: Doppeldrachen Schnittbild

a)

b)

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 A_2 c_w}{\frac{1}{2} \rho v^2 A_2 c_a - m_2 g} \right) \quad F_{S2} = \frac{F_{W2}}{\sin(\beta)} \quad (1)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 c_w (\sin^2(\beta) A_2 + A_1)}{\frac{1}{2} \rho v^2 (c_a + \cos(\beta) \sin(\beta) c_w) - m_2 g} \right) \quad F_{S1} = \frac{\sin^2(\beta) F_{W2} + F_{W1}}{\sin(\alpha)} \quad (2)$$

c)

$$I_{xx_i} = \rho \iiint_{x,y,z} (y^2 + z^2) dz dy dx = \rho \left[ x \left[ \left[ \frac{1}{3} y^3 z + \frac{1}{3} z^3 y \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \quad (3)$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \rho L h_1 b (h_1^2 + b^2) + \frac{1}{12} \rho L h_2 b (h_2^2 + b^2) \quad (4)$$