

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 29.09.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	10.5	12	17.5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Diese Aufgabe betrachtet die schwimmende Windturbine nach Abbildung 1. Der Generator mit der Masse m_g ist auf einem masselosen Turm in der Höhe h_g befestigt. Auf den masselosen Rotor wirkt die horizontale Windkraft f_w . Dadurch wird die Konstruktion um den Winkel γ verkippt. Unter Wasser befindet sich ein zylindrischer Schwimmkörper mit dem Durchmesser d_s und der Höhe h_s . Der Schwerpunkt befindet sich in einer Höhe l_s vom tiefsten Punkt gemessen. Zwei Verankerungen halten die Konstruktion in Position. Sie sind durch gespannte Seile mit dem Winkel α zum Lot mit dem Schwimmkörper verbunden. Das Wasser hat die Dichte ρ_w .
Hinweis: Der Unterpunkt e) kann unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.

Hinweis: Die Auftriebskraft eines Volumenkörpers mit dem Volumen V in einem massebehafteten Medium mit der Dichte ρ ist gleich der Gewichtskraft des von dem Körper verdrängten Mediums $f_a = V\rho g$. Sie wirkt gegen die Erdbeschleunigung und greift im Mittelpunkt des Körpers an.

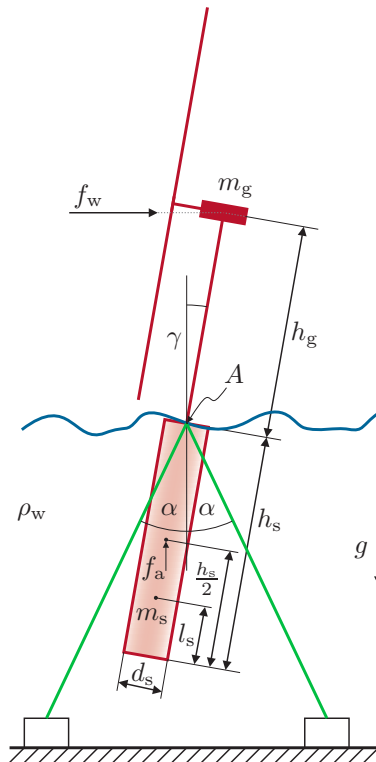


Abbildung 1: Schwimmende Windturbine.

- a) Schneiden Sie die schwimmende Windturbine mit Schwimmkörper frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte in die Freischnittsskizze ein. 2 P. |
- b) Stellen Sie die Drehmomenten- und Kräftebilanzen für den statischen Fall auf. 2 P. |
- c) Berechnen Sie die notwendige Masse m_s des Schwimmkörpers, damit bei gegebener Windkraft die Turbine um den Winkel γ kippt. 1.5 P. |
- d) Welchen maximalen Wert darf die Windkraft f_w erreichen bevor die Annahme der gespannten Seile nicht mehr zutrifft? Nehmen Sie dafür an, dass bei $f_w = 0$ die Seile gespannt sind. 2 P. |

In Abbildung 2 ist der Aufbau des Schwimmkörpers gezeigt. Er ist mit Eisen, Wasser und Luft gefüllt, wobei die Masse der Luft vernachlässigt wird. Die zylindrische Schwimmkörperhülle hat die Masse m_h mit dem Schwerpunkt in der Körpermitte, das Eisen hat die Dichte ρ_e und das Wasser die Dichte ρ_w .

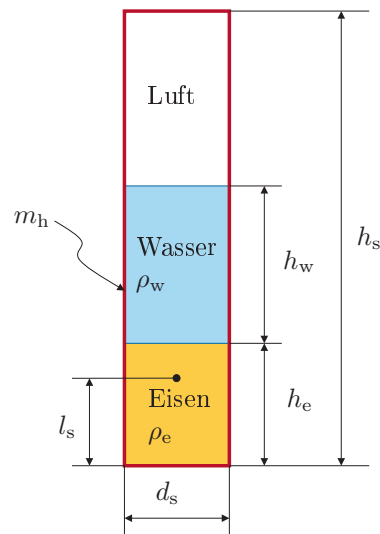


Abbildung 2: Aufbau des Schwimmkörpers

- e) Berechnen Sie die Höhe l_s des Schwerpunktes vom Schwimmkörper. 1 P. |
- f) Welche Höhe an Eisen h_e ist notwendig, damit der Gesamtschwerpunkt auf der Höhe l_s zu liegen kommt. 2 P. |

Hinweis: Um zu entscheiden, welche Lösung der quadratischen Gleichung gültig ist, betrachten Sie den Grenzwert $m_h \rightarrow 0$, $h_w \rightarrow 0$.

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 3

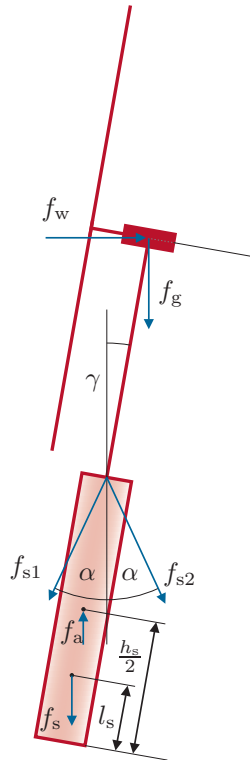


Abbildung 3: Freischnitt Bsp. 1.

b)

$$x : 0 = f_w - f_{s1} \sin \alpha + f_{s2} \sin \alpha$$

$$y : 0 = f_a - f_s - f_g - f_{s1} \cos \alpha - f_{s2} \cos \alpha$$

$$\tau^{s12}: 0 = f_s(h_s - l_s) \sin \gamma - f_a \frac{h_s}{2} \sin \gamma - f_g h_g \sin \gamma - f_w \cos \gamma h_g$$

$$\text{mit } f_s = m_s g, \quad f_g = m_g g, \quad f_a = \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \pi h_s \rho_w g$$

c)

$$m_s = \frac{1}{h_s - l_s} \left(\frac{f_w h_g \cos \gamma}{g \sin \gamma} + \left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \pi \frac{h_s^2}{2} \rho_w + m_g h_g \right)$$

d)

$$f_w = \tan \alpha (f_a - f_g - f_s) = \tan \alpha \left(\left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \pi h_s \rho_w g - m_g g - m_s g \right)$$

e)

$$l_s = \left(m_h \frac{h_s}{2} + \underbrace{\left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \pi \rho_e \frac{h_e^2}{2}}_{m'_e} + \underbrace{\left(\frac{d_s}{2}\right)^2 \pi \rho_w h_w}_{m_w} \left(h_e + \frac{h_w}{2} \right) \right) \frac{1}{m_h + m_w + m'_e h_e}$$

f)

$$h_e = -\frac{m_w - l_s m'_e}{m'_e} + \sqrt{\left(\frac{m_w - l_s m'_e}{m'_e}\right)^2 - \frac{m_h(h_s - 2l_s) + m_w(h_w - 2l_s)}{m'_e}}$$

2. Gegeben ist eine Roboterkonstruktion nach Abbildung 4. Der Drehwinkel des Rades ist α , der Winkel um den der Roboterkörper verkippt ist mit φ bezeichnet. Ein Motor bewirkt ein Moment τ zwischen Rad und Körper. Rad und Körper haben jeweils eine Masse (m_r bzw. m_k) und ein Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse durch den jeweiligen Schwerpunkt (I_r bzw. I_k). Der Abstand zwischen Radnabe und Schwerpunkt des Körpers ist h . Das Rad rollt am Boden ohne zu rutschen. 12 P. |

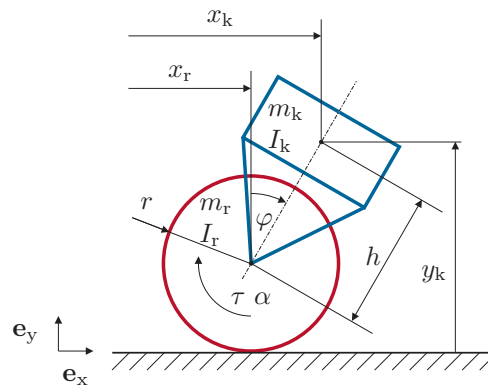


Abbildung 4: Darstellung des One-Wheel-Robot.

- a) Schneiden Sie das Rad und den Körper frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte in die Freischnittskizze ein. 3 P. |
- b) Stellen Sie Impuls- und Drehimpulsbilanzen für Körper und Rad auf. Nutzen Sie die Freiheitsgrade x_r , y_k , x_k , φ , α und deren Zeitableitungen. 2 P. |
- c) Beschreiben Sie den Zusammenhang (die Zwangsbedingung) zwischen x_r und α sowie zwischen \ddot{x}_r und $\ddot{\alpha}$, wobei $x_r = 0$ bei $\alpha = 0$ gelten soll. Stellen Sie x_k und y_k , sowie \ddot{x}_k und \ddot{y}_k , durch x_r und φ und deren Zeitableitungen dar. 2 P. |
- d) Eliminieren Sie alle Schnittkräfte zwischen Rad und Körper und berechnen Sie die Kontaktkräfte zwischen Rad und Boden. 3 P. |
- e) Berechnen Sie die Systemdifferentialgleichungen (Bewegungsgleichungen) in den Freiheitsgraden x_r und φ und deren Zeitableitungen sowie τ . Eine Vereinfachung der Gleichungen ist nicht erforderlich. 2 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 5

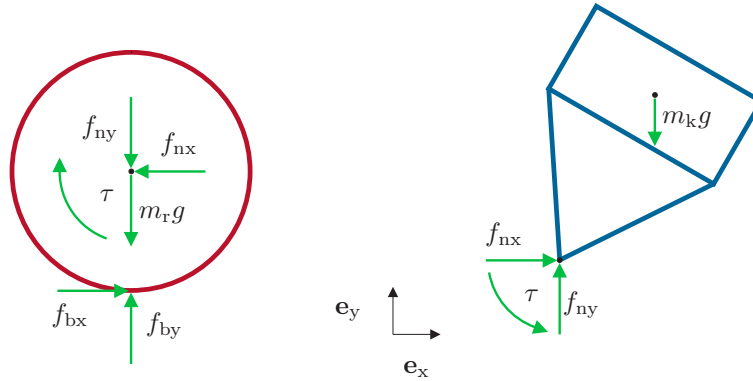


Abbildung 5: Freischnitt Bsp. 2.

b) Rad:

$$\begin{aligned} x: m_r \ddot{x}_r &= f_{bx} - f_{nx} \\ y: 0 &= f_{by} - f_{ny} - m_r g \\ \tau^n: I_r \ddot{\alpha} &= \tau - f_{bx} r \end{aligned}$$

Körper:

$$\begin{aligned} x: m_k \ddot{x}_k &= f_{nx} \\ y: m_k \ddot{y}_k &= f_{ny} - m_k g \\ \tau^n: I_k \ddot{\varphi} &= -\tau - f_{nx} h \cos \varphi + f_{ny} h \sin \varphi \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_r}{r} \rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x}_r}{r} \\ x_k &= x_r + h \sin \varphi \rightarrow \ddot{x}_k = \ddot{x}_r - h \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + h \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \\ y_k &= r + h \cos \varphi \rightarrow \ddot{y}_k = -h \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - h \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f_{nx} &= \ddot{x}_k m_k = (\ddot{x}_r - h \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + h \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) m_k \\ f_{ny} &= \ddot{y}_k m_k + m_k g = (-h \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - h \sin(\varphi) \ddot{\varphi}) m_k + m_k g \\ f_{bx} &= \ddot{x}_k m_k + \ddot{x}_r m_r = (\ddot{x}_r - h \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + h \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) m_k + \ddot{x}_r m_r \\ f_{by} &= \ddot{y}_k m_k + m_k g + m_r g = (-h \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - h \sin(\varphi) \ddot{\varphi}) m_k + m_k g + m_r g \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} I_k &= -\tau + m_k (-h \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - h \sin(\varphi) \ddot{\varphi} + g) h \sin \varphi \\ &\quad - (\ddot{x}_r - h \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + h \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) m_k h \cos \varphi \\ \ddot{x}_r \frac{I_r}{r} &= \tau - (m_r \ddot{x}_r + m_k (\ddot{x}_r - h \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + h \cos(\varphi) \ddot{\varphi})) \end{aligned}$$

3. In Abbildung 6 ist ein Abrisskran dargestellt. Die Abrisskugel ist an einem Seil mit fixer Länge montiert. Dieses Seil wird als masseloser Stab vereinfacht. Die Befestigung des Seils wird mit zwei Freiheitsgraden q_3 und q_4 modelliert. Dabei beschreibt q_3 die Rotation der Rolle um die y_3 -Achse und q_4 die Rotation um die x_4 -Achse, normal auf die Drehachse der Rolle. Die Rolle ist zusätzlich im Detail in einer Seitenansicht und einer Vorderansicht dargestellt. 17.5 P. |

Hinweis: Die Unterpunkte a, b können unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.

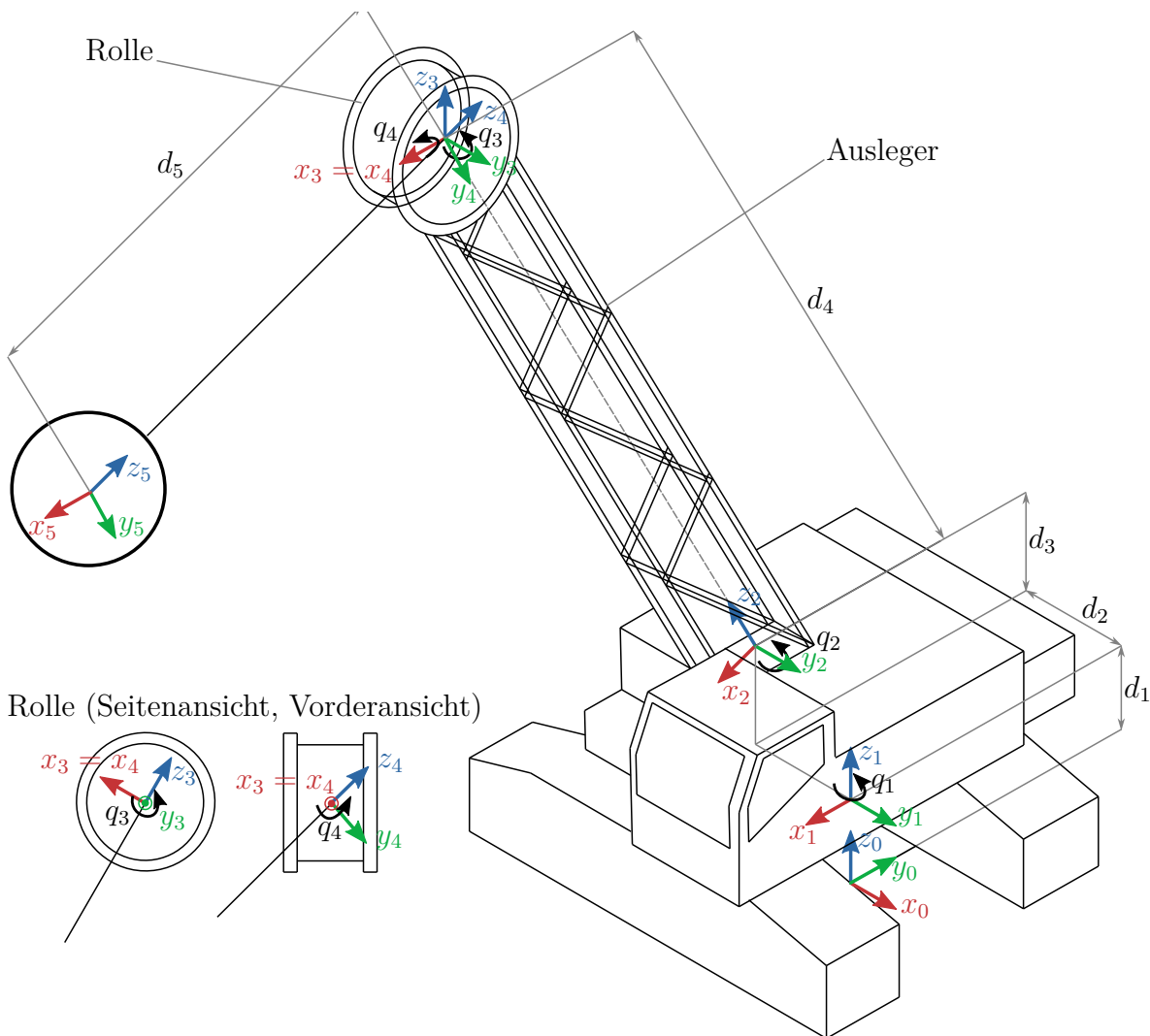


Abbildung 6: Abrisskran.

- a) Zeichnen Sie die schematische Darstellung der kinematischen Kette des Krans. Verwenden Sie dazu die symbolische Darstellung der Gelenke aus der Formelsammlung. Zeichnen Sie außerdem die Koordinatensysteme in die schematische Darstellung ein. 3.5 P. |
- b) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_1^2 , \mathbf{H}_2^3 , \mathbf{H}_3^4 , und \mathbf{H}_4^5 . Berechnen Sie die homogene Transformation \mathbf{H}_0^2 . 3 P. |

Für die nachfolgenden Punkte betrachten Sie nur den Ausleger mit dem Doppelpendel an der Spitze des Abrisskrans. Dieser besitzt die beiden Freiheitsgrade

$\mathbf{q} = [q_3, q_4]^T$. Die Kugel wird als Punktmasse mit der Masse m betrachtet. Weiters werden der Ausleger und das Seil zur Befestigung der Kugel als masselose Stäbe modelliert.

Die homogene Transformation

$$\mathbf{H}_2^5 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & \sin(q_3) \sin(q_4) & \sin(q_3) \cos(q_4) & -\sin(q_3) \cos(q_4) d_5 \\ 0 & \cos(q_4) & -\sin(q_4) & \sin(q_4) d_5 \\ -\sin(q_3) & \cos(q_3) \sin(q_4) & \cos(q_3) \cos(q_4) & -\cos(q_3) \cos(q_4) d_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist gegeben.

- c) Berechnen Sie den Schwerpunkt \mathbf{s}_2^5 der Punktmasse im Koordinatensystem 2. 1 P. |
- d) Berechnen Sie die translatorische Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_2^5$ des Schwerpunktes \mathbf{s}_2^5 . 1 P. |
- e) Berechnen Sie die rotatorische Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_\omega)_2^5$. 2.5 P. |
- f) Berechnen Sie die Massenmatrix \mathbf{M} . Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 4.5 P. |
- g) Berechnen Sie die potentielle Energie des Starrkörpersystems zufolge der Gravitation in Richtung $\mathbf{e}_{g,2} = [0, 0, -1]^T$ und den Vektor der Potentialkräfte. 1 P. |
- h) Es wirkt zusätzlich eine externe Kraft $\mathbf{f}_{\text{ext}} = [0, f_y, 0]^T$ auf die Punktmasse. 1 P. |
Welche Drehmomente ergeben sich dadurch in den Gelenken?

Lösung:

a) Siehe Abbildung 7.

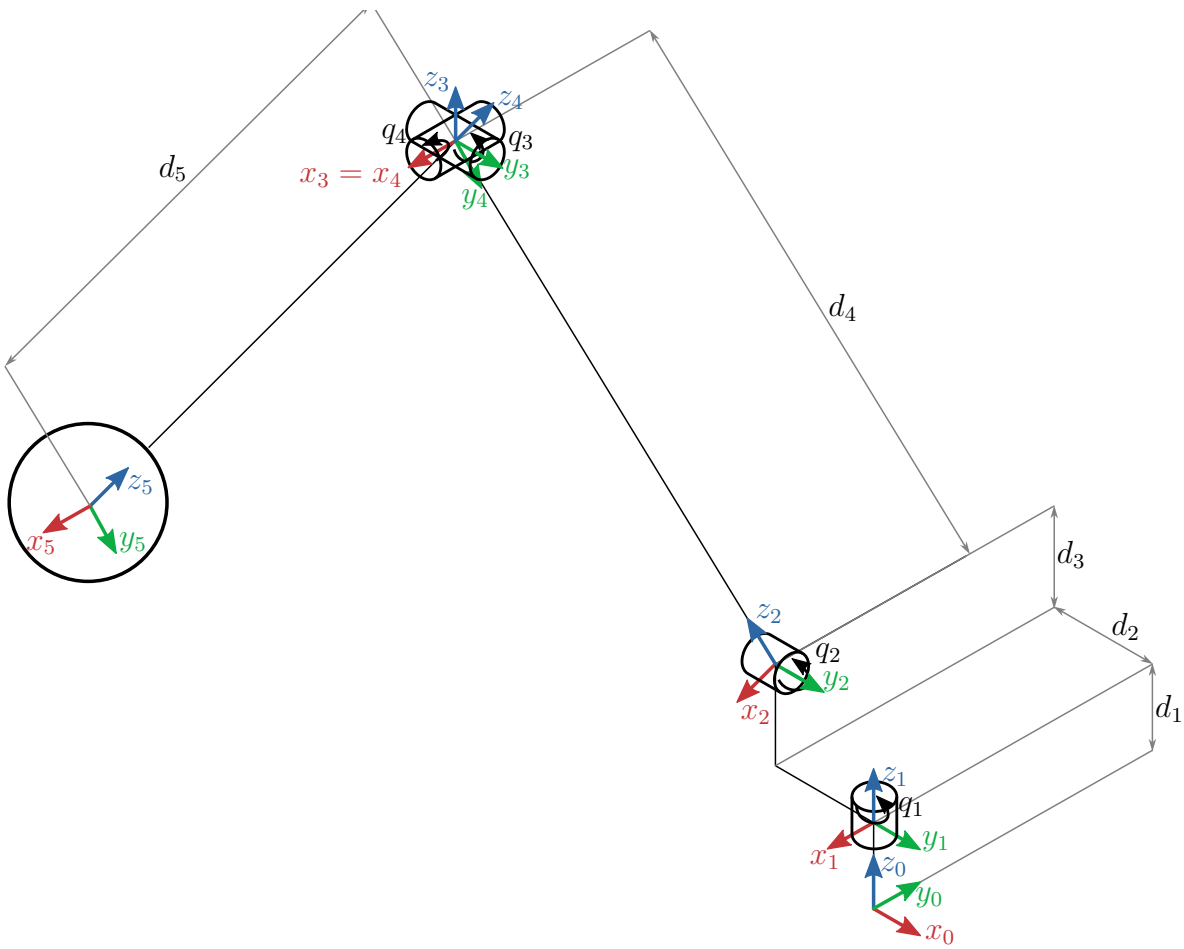


Abbildung 7: Schematische Darstellung der kinematischen Kette.

b)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 \\ 0 & \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\sin(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\sin(q_2) & d_2\sin(q_1) \\ \sin(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\sin(q_2) & \sin(q_1)\sin(q_2) & -d_2\cos(q_1) \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & d_1 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{s}_2^5 = \begin{bmatrix} -\sin(q_3)\cos(q_4)d_5 \\ \sin(q_4)d_5 \\ -\cos(q_3)\cos(q_4)d_5 + d_4 \end{bmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{J}_v)_2^5 = \begin{bmatrix} -\cos(q_3)\cos(q_4)d_5 & \sin(q_3)\sin(q_4)d_5 \\ 0 & \cos(q_4)d_5 \\ \sin(q_3)\cos(q_4)d_5 & \cos(q_3)\sin(q_4)d_5 \end{bmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{J}_\omega)_2^5 = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_3) \\ 1 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3) \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} md_5^2 \cos^2(q_4) & 0 \\ 0 & md_5^2 \end{bmatrix}$$

g)

$$V = -mg \cos(q_3) \cos(q_4) d_5 + mg d_4$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} mg d_5 \sin(q_3) \cos(q_4) \\ mg d_5 \cos(q_3) \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

h)

$$\mathbf{f}_{q,f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(q_4) d_5 f_y \end{bmatrix}$$