

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 10.11.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	12.5	9.5	18	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Diese Aufgabe betrachtet den in Abbildung 1 gegebenen Hebemechanismus im stationären Fall. Auf die Nutzlast (Masse m) wirkt eine externe Kraft f . 12.5 P. |
Hinweis: Die Unterpunkte c), d) und e) können unabhängig von den anderen Aufgaben gelöst werden.

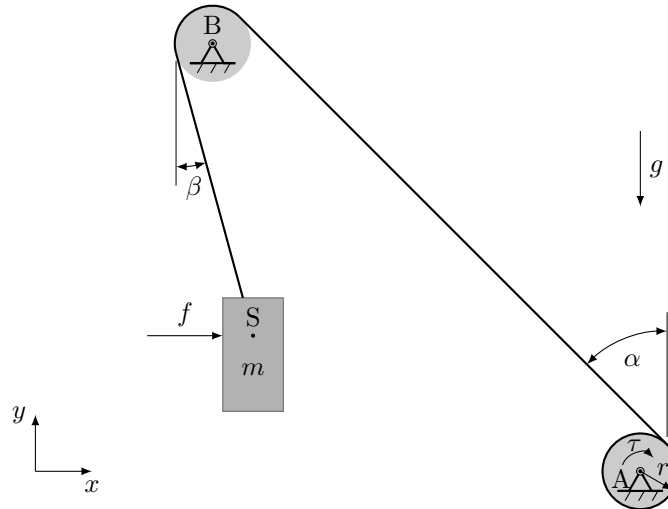


Abbildung 1: Hebemechanismus mit einer Seilwinde.

- a) Schneiden Sie die Seilwinde, die Rolle und die Nutzlast frei und zeichnen Sie alle relevanten Schnittkräfte und -momente ein. 2.5 P. |
 b) Berechnen Sie alle Schnittkräfte, den Winkel β und das Motormoment τ . 5.5 P. |

Im folgenden wird die Nutzlast auf ein Dach mit dem Winkel δ heruntergelassen, jedoch bleibt das Seil mit einer bekannten Seilkraft $f_s > 0$ unter einem bekannten Winkel β angespannt, siehe Abbildung 2.

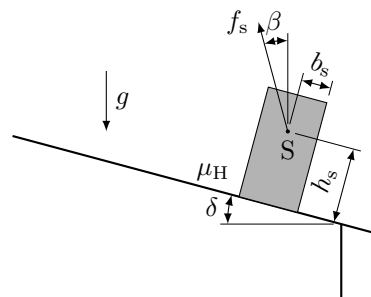


Abbildung 2: Die Nutzlast auf einem Dach.

- c) Zwischen der Nutzlast und dem Dach wirkt ein Haftreibungskoeffizient μ_H . Berechnen sie den minimalen Wert des Haftreibungskoeffizienten, sodass die Nutzlast nicht verrutscht. 1.5 P. |
 d) Nehmen Sie an, dass die Nutzlast nicht verrutscht. Berechnen Sie die maximale Höhe h_s des Schwerpunkts S, sodass die Nutzlast nicht kippt. 1.5 P. |

- e) Die Nutzlast besteht aus verschiedenen aufgestapelten Materialien mit den in 1.5 P. |
Abbildung 3 gegebenen konstanten Dichten und Dimensionen. Berechnen Sie
die Masse und den Schwerpunkt der Nutzlast.

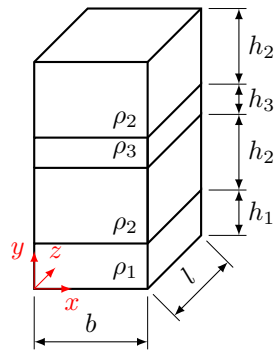


Abbildung 3: Die Nutzlast mit verschiedenen aufgestapelten Materialien.

Lösung:

a) Die Schnittskizze ist in Abbildung 4 gegeben.

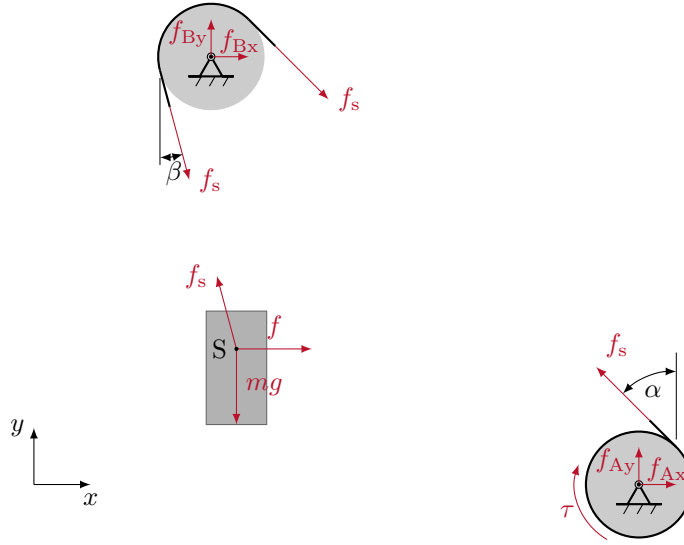


Abbildung 4: Schnittskizze.

b)

$$\begin{aligned}\beta &= \arctan\left(\frac{f}{mg}\right) \\ f_s &= \sqrt{f^2 + (mg)^2} \\ f_{Bx} &= -\sqrt{f^2 + (mg)^2} \sin(\alpha) - f \\ f_{By} &= \sqrt{f^2 + (mg)^2} \cos(\alpha) + mg \\ f_{Ax} &= \sqrt{f^2 + (mg)^2} \sin(\alpha) \\ f_{Ay} &= -\sqrt{f^2 + (mg)^2} \cos(\alpha) \\ \tau &= \sqrt{f^2 + (mg)^2} r\end{aligned}$$

c)

$$\mu_{h,\min} = \frac{|mg \sin(\delta) - f_s \sin(\beta + \delta)|}{mg \cos(\delta) - f_s \cos(\beta + \delta)}$$

d)

$$h_{s,\max} = b_s \frac{mg \cos(\delta) - f_s \cos(\beta + \delta)}{mg \sin(\delta) - f_s \sin(\beta + \delta)}$$

e)

$$\begin{aligned}m &= (h_1 \rho_1 + 2h_2 \rho_2 + h_3 \rho_3) bl \\ \mathbf{r}_s &= \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{\frac{1}{2} h_1^2 \rho_1 + (2h_1 + 2h_2 + h_3) h_2 \rho_2 + (h_1 + h_2 + \frac{1}{2} h_3) h_3 \rho_3}{h_1 \rho_1 + 2h_2 \rho_2 + h_3 \rho_3} \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. Abbildung 5 zeigt ein Katapult, welches mithilfe einer nichtlinearen Drehfeder mit dem Drehmoment $\tau_c = c_1\varphi + c_3\varphi^3$, der Dämpfung d und der entspannten Länge $\varphi_0 = 0$ einen Stein mit der Masse m_S und der Trägheit I_S abfeuert. Der Stein befindet sich auf einer Distanz r vom Drehpunkt A des Katapults, und der Arm des Katapults hat die Masse m_A und die Trägheit I_A um seinen Schwerpunkt, welcher sich auf der Distanz $r/2$ vom Drehpunkt A befindet. 9.5 P. |

Hinweis: Alle gegebenen Koeffizienten sind nichtnegativ.

Hinweis: Die Unterpunkte a), b), c) und e) können unabhängig von den anderen Aufgaben gelöst werden.

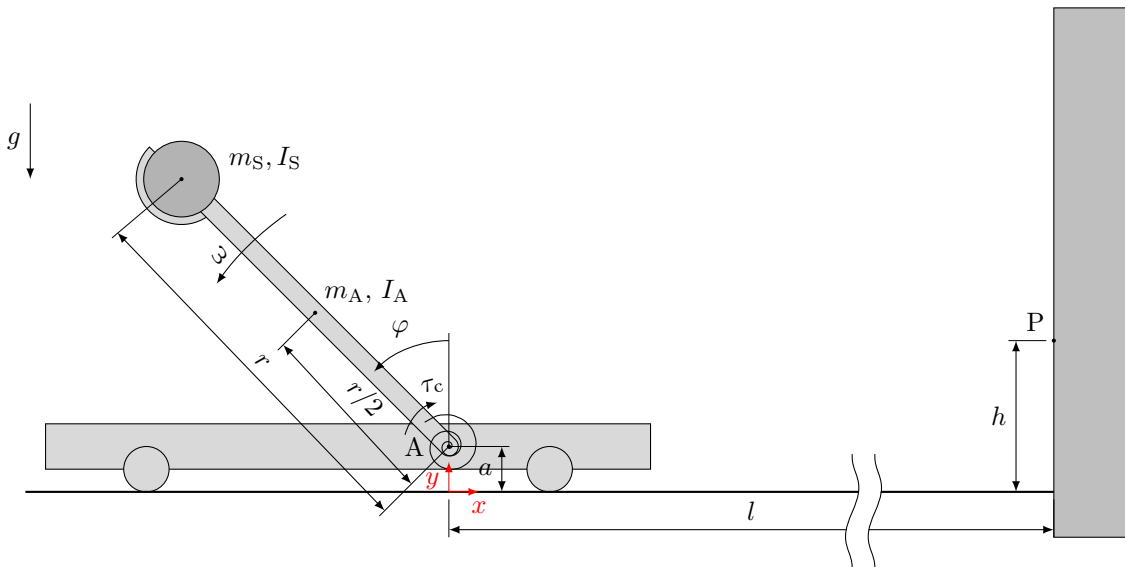


Abbildung 5: Katapult.

- a) Der Stein wird bei einem Winkel $\varphi = \alpha$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ abgefeuert. Berechnen Sie die notwendige Geschwindigkeit $v(t_0) = v_0$ und die Flugzeit T um den Treffpunkt P auf der Distanz l und der Höhe h vom Koordinatensystem $(0xy)$ zu treffen. Geben Sie die richtigen Vorzeichen an, und begründen Sie Ihre Wahl! 3 P. |
- Hinweis: Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.*
- b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen des geladenen Katapults an. Der Wagen ist nicht beweglich. Benutzen Sie die Drehimpulserhaltung! 2 P. |
- c) Berechnen Sie die gesamte gespeicherte Energie des geladenen Katapults für den Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit ω . 1.5 P. |
- d) Damit der Stein eine bekannte Geschwindigkeit v_0 beim Winkel α erzielt, wird das Katapult bis zum Winkel β gespannt. Berechnen Sie β falls die Reibungsverluste und die Änderung der potenziellen Energien der Massen vernachlässigbar sind. Geben Sie die richtigen Vorzeichen an, und begründen Sie Ihre Wahl! 2 P. |
- e) Das gespannte Katapult wird mithilfe eines Seils bei einem bekannten Winkel β gehalten, wie in Abbildung 6 gegeben. Berechnen Sie die Seilkraft. 1 P. |

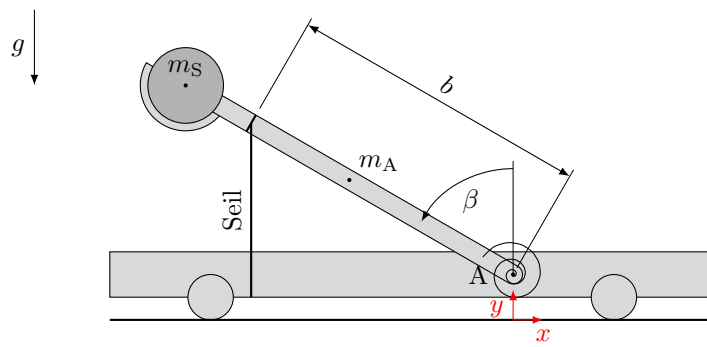


Abbildung 6: Gespanntes Katapult.

Lösung:

a) Aus

$$\begin{aligned}x(0) &= -r \sin(\alpha) \\y(0) &= a + r \cos(\alpha) \\v_x(0) &= v_0 \cos(\alpha) \\v_y(0) &= v_0 \sin(\alpha) \\\ddot{x} &= 0 \\\ddot{y} &= -g\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos(\alpha)t - r \sin(\alpha) \\y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + a + r \cos(\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}v_0 &= +(l + r \sin(\alpha)) \sqrt{\frac{g}{2(l \sin(\alpha) \cos(\alpha) + r \cos(\alpha) + (a - h) \cos^2(\alpha))}} \\T &= +\sqrt{\frac{2(l \sin(\alpha) + r + (a - h) \cos(\alpha))}{g \cos(\alpha)}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{-c_1\varphi - c_3\varphi^3 - d\omega + m_S g r \sin(\varphi) + m_A g \frac{r}{2} \sin(\varphi)}{I_S + m_S r^2 + I_A + m_A \frac{r^2}{4}} \\\dot{\varphi} &= \omega\end{aligned}$$

c)

$$E(\varphi, \omega) = c_1 \frac{\varphi^2}{2} + c_3 \frac{\varphi^4}{4} + m_S g r \cos(\varphi) + m_A g \frac{r}{2} \cos(\varphi) + \left(I_S + m_S r^2 + I_A + m_A \frac{r^2}{4} \right) \frac{\omega^2}{2}$$

d)

$$\beta = +\sqrt{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_3 \left(2c_1\alpha^2 + c_3\alpha^4 + 2 \left(\frac{I_S}{r^2} + m_S + \frac{I_A}{r^2} + \frac{m_A}{4} \right) v_0^2 \right)}}{c_3}}$$

e)

$$f = \frac{c_1\beta + c_3\beta^3 - \left(m_S + \frac{m_A}{2} \right) g r \sin(\beta)}{b \sin(\beta)}$$

3. Gegeben ist ein Starrkörpersystem mit zwei translatorischen und einem rotatorischen Freiheitsgrad nach Abbildung 7. In der (variablen) Höhe h in z_0 -Richtung befindet sich ein Starrkörper K1 mit Schwerpunkt S_1 , Masse m_1 sowie der Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$. Damit im Abstand L in x_1 -Richtung verbunden ist ein weiterer Starrkörper K2 mit Schwerpunkt S_2 , Masse m_2 und verschwindendem Trägheitsmoment $\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$. Ein identischer Körper K3 mit Schwerpunkt S_3 ist im variablen Abstand d in x_2 -Richtung befestigt. An dessen Ende P_4 ist eine Feder mit Federsteifigkeit c und entspannter Länge s_0 befestigt, welche gegen einen um L in y_0 -Richtung aus dem Koordinatenursprung verschobenen Fußpunkt gespannt ist.

Die Körper K1, K2 und K3 sind auf der selben Höhe anzusehen. Der Körper K1 ist gegenüber dem Inertialsystem $0_0x_0y_0z_0$ um den Winkel φ um die z_0 -Achse rotiert. Die Verschiebung d des zweiten Arms entspricht der Entfernung von S_2 und S_3 . Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z_0 -Richtung.

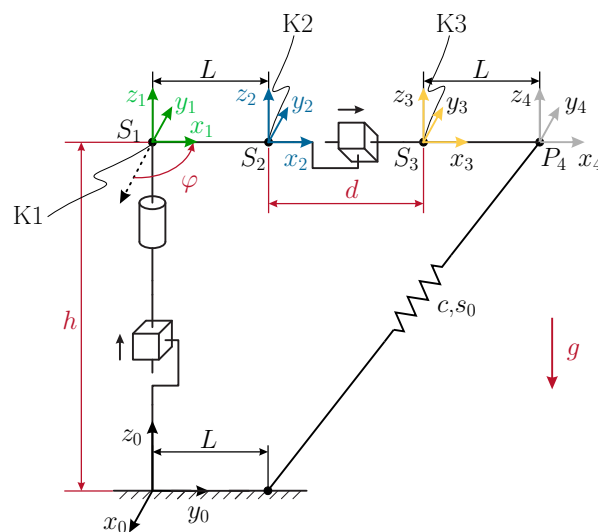


Abbildung 7: Darstellung des Starrkörpersystems.

Das System soll in den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [h \ \varphi \ d]^T$ beschrieben werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^3, \mathbf{H}_3^4$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten und $\mathbf{H}_0^2, \mathbf{H}_0^3$ und \mathbf{H}_0^4 zwischen dem Ursprung und den Koordinatensystemen an. 4 P. |
- Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^i, i = 1, \dots, 4$ und die Manipulator-Jacobi-Matrizen der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^i, i = 1, \dots, 3$ an. 4 P. |
- Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ aus den zu den Starrkörpern i gehörigen Komponenten $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}), i = 1, \dots, 3$. 4 P. |
- Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 2 P. |
- Im Punkt P_4 greift die Kraft $\mathbf{f}_s = [f_{s,x} \ f_{s,y} \ f_{s,z}]^T$ in $0_4x_4y_4z_4$ -Koordinaten an. Für welche Kraft \mathbf{f}_s bleibt das Starrkörpersystem in Ruhe? Geben Sie eine generalisierte Koordinate \mathbf{q} an, für welche dies auch bei $f_{s,x} = f_{s,y} = 0$ möglich ist. *Hinweis: Dies ist auch durch physikalisches Verständnis ohne Lösen des Gleichungssystems möglich!* 4 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi L \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi L \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi(L+d) \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi(L+d) \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0^4 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi(2L+d) \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi(2L+d) \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_v)_0^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi L & 0 \\ 0 & c_\varphi L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{J}_v)_0^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi(L+d) & c_\varphi \\ 0 & c_\varphi(L+d) & s_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^4 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi(2L+d) & c_\varphi \\ 0 & c_\varphi(2L+d) & s_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{J}_\omega)_0^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}) = m_i \left((\mathbf{J}_v)_0^i \right)^T (\mathbf{J}_v)_0^i + \left((\mathbf{J}_\omega)_0^i \right)^T \mathbf{I}_i (\mathbf{J}_\omega)_0^i$$

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(L+d)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} + m_2(L^2 + (L+d)^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = (m_1 + 2m_2)gh + \frac{1}{2}c(s_F(\mathbf{q}) - s_0)^2$$

mit

$$s_F(\mathbf{q}) = \sqrt{(2L + d)^2 + h^2 + L^2 - 2L(2L + d) \sin(\varphi)}$$

e) aus

$$\begin{aligned} ((\mathbf{J}_v)_0^4)^T \mathbf{R}_0^4 \mathbf{f}_s &= \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{f}_s &= \begin{bmatrix} f_{s,x} \\ f_{s,y} \\ f_{s,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(s_F(\mathbf{q}) - s_0) \frac{\partial s_F}{\partial d} \\ \frac{c}{2L+d} (s_F(\mathbf{q}) - s_0) \frac{\partial s_F}{\partial \varphi} \\ (m_1 + 2m_2)g + c(s_F(\mathbf{q}) - s_0) \frac{\partial s_F}{\partial h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_F}{\partial h} &= \frac{h}{s_F(\mathbf{q})} \\ \frac{\partial s_F}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{s_F(\mathbf{q})} (L(2L + d) \cos(\varphi)) \\ \frac{\partial s_F}{\partial d} &= \frac{1}{s_F(\mathbf{q})} ((2L + d) - L \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

folgen die möglichen Koordinaten $\varphi = \pi/2$ und $d = -L$ oder $\varphi = -\pi/2$ und $d = -3L$. Dies ist auch intuitiv klar, da in beiden Posen der Punkt P_4 direkt über dem Fußpunkt der Feder liegt und somit nur eine Kraft in z -Richtung kompensiert werden muss.