

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 09.02.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	8.5	14	17.5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 sehen Sie eine schematische Darstellung eines Seilzugs mit einem Seil der Länge l und vier Rollen mit Durchmesser d . Zwei Rollen sind fest mit der Decke verbunden, die anderen beiden mit der Masse m_2 . Ein Ende des Seils ist an der Masse m_1 befestigt, das andere ebenfalls mit der Decke. Alle Rollen werden als reibungs- und masselos angenommen. Die Masse m_2 gleitet reibungsfrei in z -Richtung. Die Gravitation wirkt in negative z -Richtung.

8.5 P. |

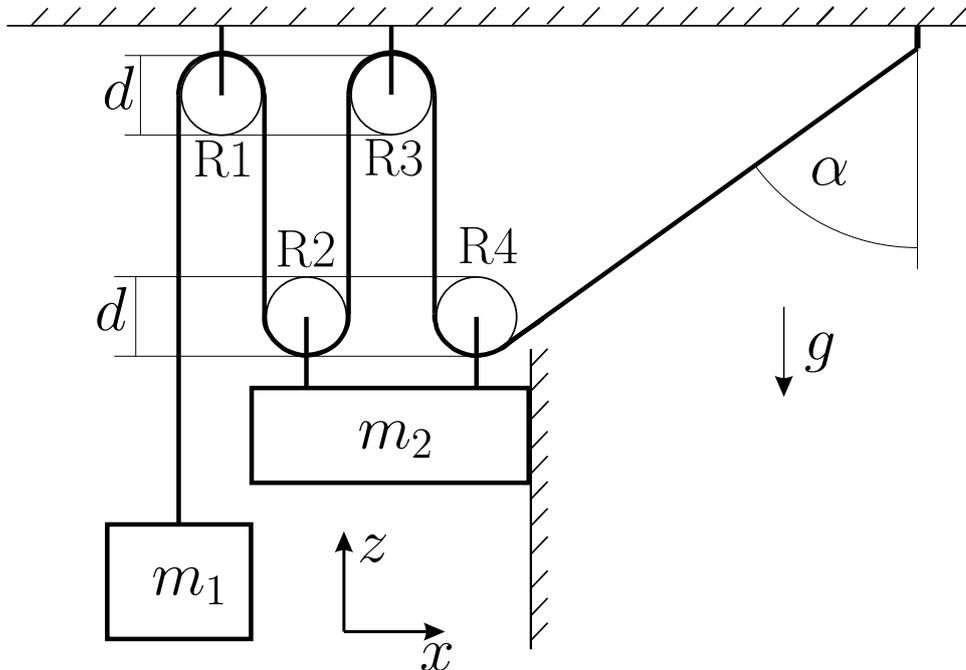


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Seilzuges.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Schneiden Sie die Masse m_1 , und die Masse m_2 inklusive der verbundenen Rollen (R2, R4) frei. Zeichnen Sie alle relevanten Schnittkräfte und -momente ein. 3 P. |
- Berechnen Sie die Schnittkräfte und das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$, wenn sich die Massen für ein bekanntes α in Ruhe befinden. 3 P. |
- Nehmen Sie an, dass sich die Masse m_2 mit einer Geschwindigkeit v_2 in positive z -Richtung bewegt. Bei welchem Winkel α bewegt sich die Masse m_1 mit einer Geschwindigkeit $v_1 = -\frac{7}{2}v_2$? 2.5 P. |

Lösung:

a) Abbildung 2

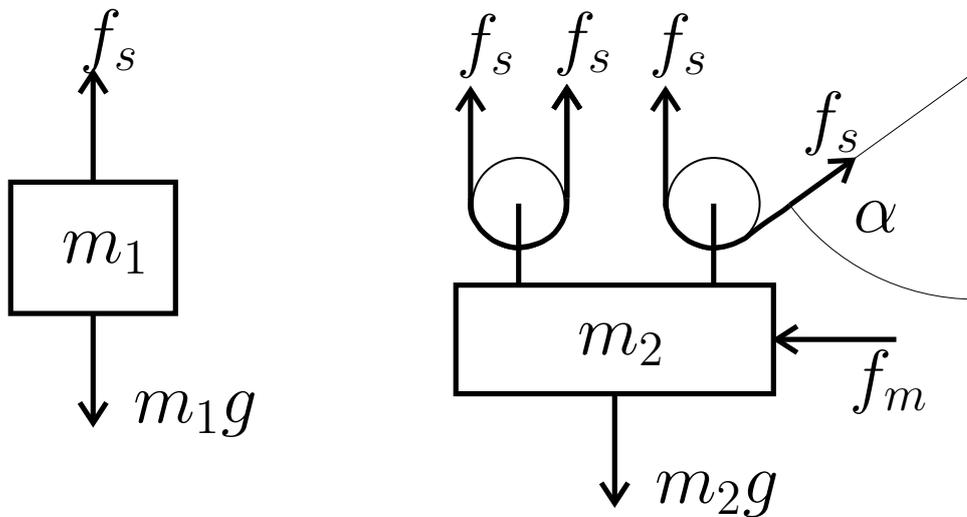


Abbildung 2: Freigeschnittene Elemente des Seilzuges.

b) Masse 1:

$$z: f_s = m_1 g \quad (1)$$

Masse 2:

$$x: f_m = f_s \sin(\alpha) = m_1 g \sin(\alpha) \quad (2)$$

$$z: 3f_s + f_s \cos(\alpha) = m_2 g \quad (3)$$

Einsetzen und umformen:

$$m_1 g (3 + \cos(\alpha)) = m_2 g \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3 + \cos(\alpha)} \quad (4)$$

c) Betrachten der Seillängenänderung:

$$\Delta x_1 = -(3 + \cos(\alpha)) \Delta x_2 \quad (5)$$

$$v_1 = -(3 + \cos(\alpha)) v_2 \quad (6)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{7}{2} = -(3 + \cos(\alpha)) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\alpha) \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad (9)$$

2. Im Folgenden wird die Dynamik der Gondel einer Seilbahn betrachtet. *Hinweis: Die Unterpunkte a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden:* 14 P. |

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- a) In Abbildung 3 ist die Gondel bei laufendem Betrieb sowie ein vereinfachtes Ersatzmodell dargestellt. Die Gondel wird durch eine Punktmasse m_G an einer Stange mit konstanter Länge r_G modelliert. Durch das Gewicht ist das Seil bergseitig unter einem Winkel α_B und talseitig unter einem Winkel α_T gespannt und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_S . Der Luftwiderstand wird durch eine Kraft f_{LW} modelliert die antiparallel zur Geschwindigkeit wirkt. Die Gravitation wirkt in negative z -Richtung. 4 P. |

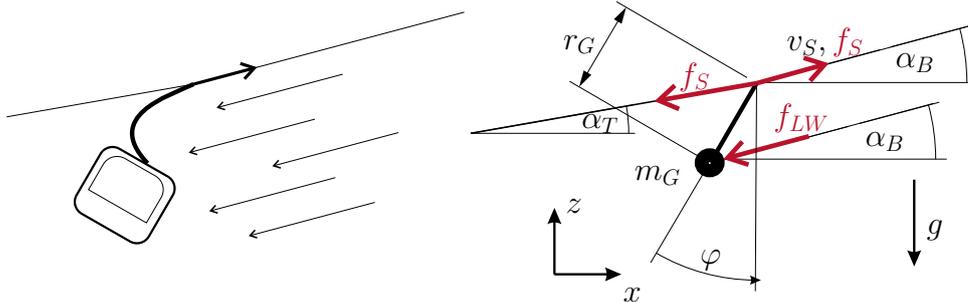


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Gondel bei laufendem Betrieb.

- i. Um welchen Winkel φ neigt sich die Gondel stationär auf Grund des Luftwiderstandes bei konstanter Geschwindigkeit v_S und bekanntem resultierendem f_{LW} ? 4 P. |
- b) Das Seil an dem die Gondel befestigt ist wird gestoppt. In Abbildung 4 ist ein Ersatzmodell für die Aufhängung der Gondel bei stehendem Seil dargestellt. Die Aufhängung mit Masse m_A ist über zwei lineare Federn, mit Federkonstante k und entspannter Länge s_0 , mit den Wänden verbunden. Zwischen den Wänden liegt eine Distanz von $2s_0\cos(\alpha)$ und zwischen den Ankerpunkten der Federn liegt ein Höhenunterschied von $2s_0\sin(\alpha)$. Die Wirkung der Gondel auf die Aufhängung wird durch die zeitabhängige Kraft $\mathbf{f}_G(t) = [f_{G,x}(t) \ 0 \ f_{G,z}(t)]^T$ modelliert. Die Gravitation wirkt in negative z -Richtung. 5 P. |

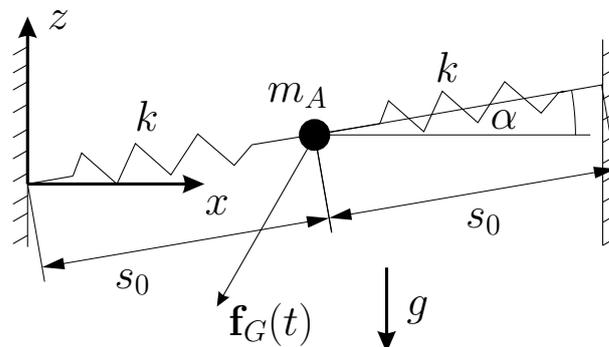


Abbildung 4: Schematische Darstellung der gestoppten Aufhängung.

- i. Geben Sie die Kraft der beiden Federn auf die Punktmasse abhängig von der Position der Punktmasse x_A, z_A als Vektoren an. 2 P. |
- ii. Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Position der Punktmasse x_A, z_A an. 3 P. |

- c) In Abbildung 5 ist ein vereinfachtes 3D Modell einer Seilbahngondel dargestellt. Die Gondel besteht aus der Kabine mit einer mittleren Dichte ρ_K und einem Aufhänger mit mittlerer Dichte ρ_A .

5 P. |

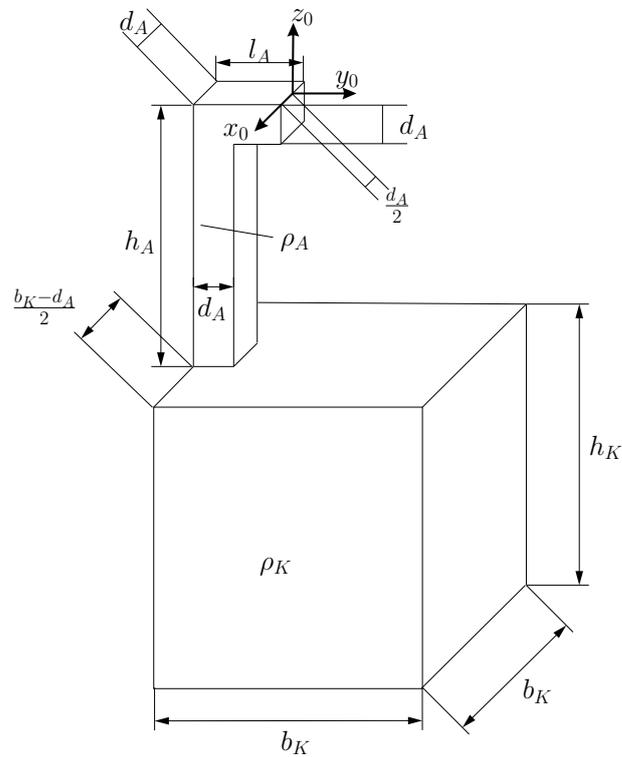


Abbildung 5: Vereinfachtes 3D Modell der Gondel.

- i. Berechnen Sie die Masse m_K der Kabine und die Masse m_A des Aufhängers. 2 P. |
- ii. Berechnen Sie den Schwerpunkt \mathbf{s}_G der gesamten Gondel im $(0x_0y_0z_0)$ Koordinatensystem. 3 P. |

Lösung:

a) i. Abbildung 6 Aufhängung:

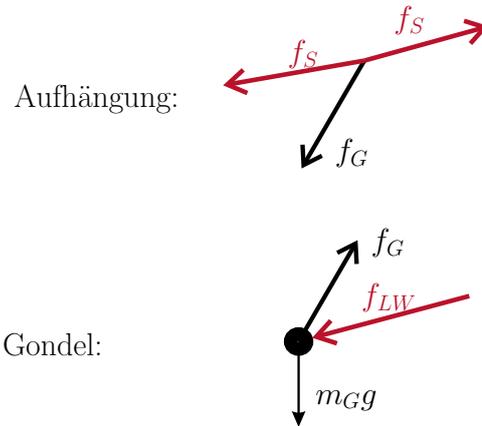


Abbildung 6: Freigeschnittene Elemente der Gondel.

$$x : f_s \cos(\alpha_B) = f_s \cos(\alpha_T) + f_G \sin(\varphi) \quad (10)$$

$$z : f_s \sin(\alpha_B) = f_s \sin(\alpha_T) + f_G \cos(\varphi) \quad (11)$$

Gondel:

$$x : f_G \sin(\varphi) = f_{LW} \cos(\alpha_B) \quad (12)$$

$$z : f_G \cos(\varphi) = f_{LW} \sin(\alpha_B) + m_G g \quad (13)$$

Quotient aus 12 und 13:

$$\tan(\varphi) = \frac{f_{LW} \cos(\alpha_B)}{f_{LW} \sin(\alpha_B) + m_G g} \quad (14)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\cos(\alpha_B)}{\sin(\alpha_B) + \frac{m_G g}{f_{LW}}}\right) \quad (15)$$

b) Abbildung 7

i. Feder 1:

$$l_{f_1} = \sqrt{x_A^2 + z_A^2}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_{1,x} \\ 0 \\ f_{1,z} \end{bmatrix} = -k(l_{f_1} - s_0) \frac{1}{l_{f_1}} \begin{bmatrix} x_A \\ 0 \\ z_A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_{1,x} \\ 0 \\ f_{1,z} \end{bmatrix} = -k\left(\sqrt{x_A^2 + z_A^2} - s_0\right) \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + z_A^2}} \begin{bmatrix} x_A \\ 0 \\ z_A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_{1,x} \\ 0 \\ f_{1,z} \end{bmatrix} = -k\left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{x_A^2 + z_A^2}}\right) \begin{bmatrix} x_A \\ 0 \\ z_A \end{bmatrix}$$

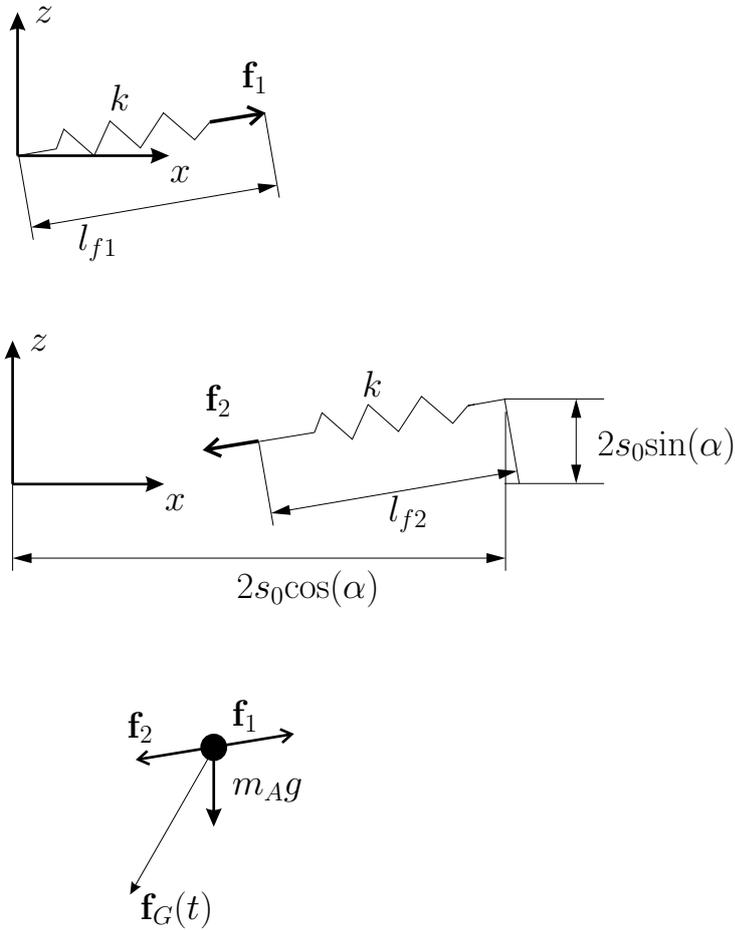


Abbildung 7: Freigeschnittene Elemente des dynamischen Modells der gestoppten Gondel.

Feder 2:

$$l_{f_2} = \sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_{2,x} \\ 0 \\ f_{2,z} \end{bmatrix} = -k(l_{f_2} - s_0) \frac{1}{l_{f_2}} \begin{bmatrix} x_A - 2s_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ z_A - 2s_0 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_{2,x} \\ 0 \\ f_{2,z} \end{bmatrix} = -k \left(\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2} - s_0 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \begin{bmatrix} x_A - 2s_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ z_A - 2s_0 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_{2,x} \\ 0 \\ f_{2,z} \end{bmatrix} = -k \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \right) \begin{bmatrix} x_A - 2s_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ z_A - 2s_0 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{aligned}
x: \quad m_A \ddot{x}_A &= f_{1,x} + f_{2,x} + f_{G,x}(t) \\
&= -k \left(2 - \frac{s_0}{\sqrt{x_A^2 + z_A^2}} - \frac{s_0}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \right) x_A \\
&0 \\
&+ k \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \right) x_A + f_{G,x}(t) \\
z: \quad m_A \ddot{z}_A &= f_{1,z} + f_{2,z} + f_{G,z}(t) - m_A g \\
&= -k \left(2 - \frac{s_0}{\sqrt{x_A^2 + z_A^2}} - \frac{s_0}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \right) z_A \\
&0 \\
&+ k \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{(2s_0 \cos(\alpha) - x_A)^2 + (2s_0 \sin(\alpha) - z_A)^2}} \right) z_A + f_{G,z}(t) - m_A g
\end{aligned}$$

c) Aufbau ist symmetrisch um $y_0 z_0$ -Ebene, x -Komponente des Schwerpunkts ist 0.

i. Aufteilen des Aufhängers an gestrichelter Linie in Abbildung 8.

$$\begin{aligned}
m_K &= h_K b_K^2 \rho_K \\
m_{A1} &= d_A^2 (l_A - d_A) \rho_A \\
m_{A2} &= d_A^2 h_A \rho_A \\
m_A &= m_{A1} + m_{A2} = d_A^2 (l_A + h_A - d_A) \rho_A
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_K &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_A \\ -h_A - h_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_K}{2} \\ \frac{h_K}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_K}{2} - l_A \\ -\frac{h_K}{2} - h_A \end{bmatrix} \\
\mathbf{s}_{A1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_A + d_A \\ -d_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_A - d_A}{2} \\ \frac{d_A}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_A - d_A}{2} \\ -\frac{d_A}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{s}_{A2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_A \\ -h_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_A}{2} \\ \frac{h_A}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_A + \frac{d_A}{2} \\ -\frac{h_A}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_A &= \frac{1}{m_{A1} + m_{A2}} (s_{A1} m_{A1} + s_{A2} m_{A2}) \\
&= \frac{1}{d_A^2 (l_A + h_A - d_A) \rho_A} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_A - d_A}{2} d_A^2 (l_A - d_A) \rho_A + \left(-l_A + \frac{d_A}{2}\right) d_A^2 h_A \rho_A \\ -\frac{d_A}{2} d_A^2 (l_A - d_A) \rho_A - \frac{h_A}{2} d_A^2 h_A \rho_A \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{l_A + h_A - d_A} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_A - d_A}{2} (l_A - d_A) + \left(-l_A + \frac{d_A}{2}\right) h_A \\ -\frac{d_A}{2} (l_A - d_A) - \frac{h_A}{2} h_A \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

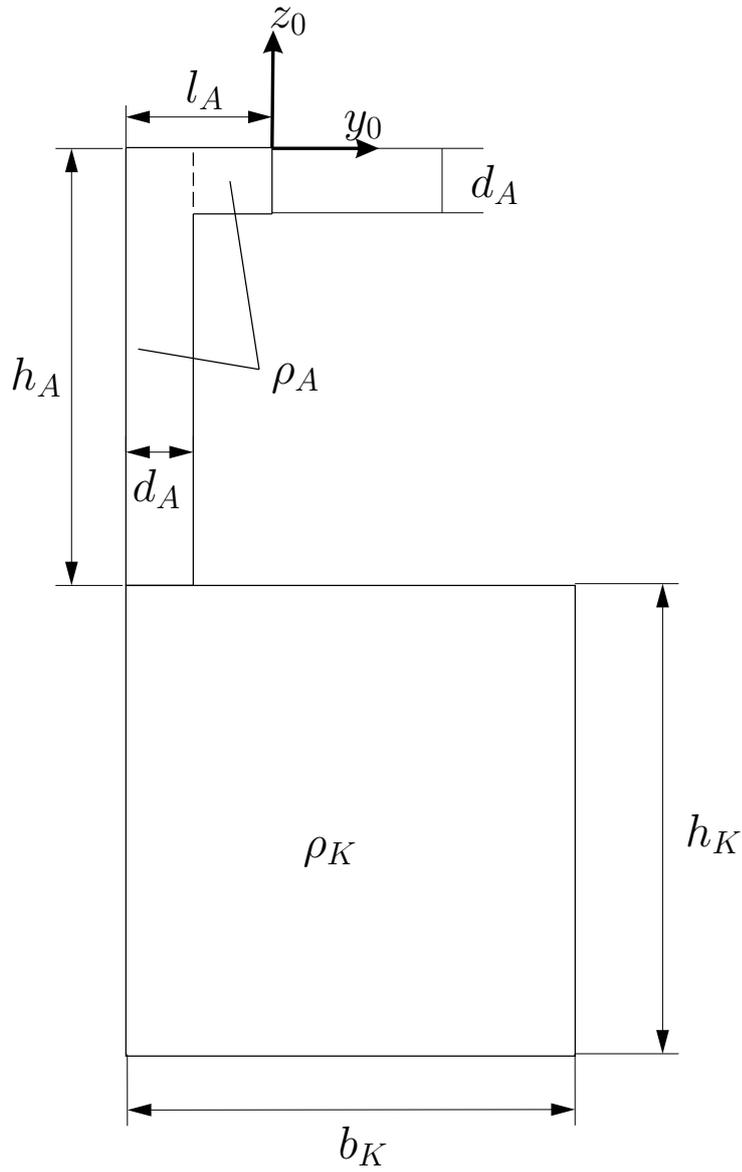


Abbildung 8: y_0, z_0 Querschnitt des 3D Modells.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_G &= \frac{1}{m_K + m_A} (s_K m_K + s_A m_A) = \\
 &= \frac{1}{h_K b_K^2 \rho_K + d_A^2 (l_A + h_A - d_A) \rho_A} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{b_K}{2} - l_A\right) h_K b_K^2 \rho_K - d_A^2 \rho_A \left(\frac{(l_A - d_A)^2}{2} + \left(l_A - \frac{d_A}{2}\right) h_A\right) \\ \left(-\frac{h_K}{2} - h_A\right) h_K b_K^2 \rho_K - d_A^2 \rho_A \left(\frac{d_A (l_A - d_A)}{2} + \frac{h_A^2}{2}\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. In Abbildung 9 ist schematisch ein Viertel eines vierbeinigen Roboters dargestellt. 17.5 P. |
 Das dargestellte Bein hat die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [\varphi \ \theta \ l_F]^T$. Der Körper $(0_B x_B y_B z_B)$ des Roboters befindet sich an der Position $\mathbf{d}_0^B = [d_x \ 0 \ d_z]^T$ relativ zum Inertialsystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. Der Körper 1 $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ mit der Masse m_1 und der Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$ hat den Schwerpunkt s_1 . Der Körper 2 $(0_2 x_2 y_2 z_2)$ hat die Masse m_2 und den Schwerpunkt s_2 . Dessen Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$ ist vernachlässigbar. Der Fuß $(0_F x_F y_F z_F)$ ist auf dem Körper 2 mit einer linearen Feder mit der Federsteifigkeit c montiert. Für $l_F = s_0$ ist die Feder entspannt. Die Erdbeschleunigung wirkt in negative z_0 -Richtung.

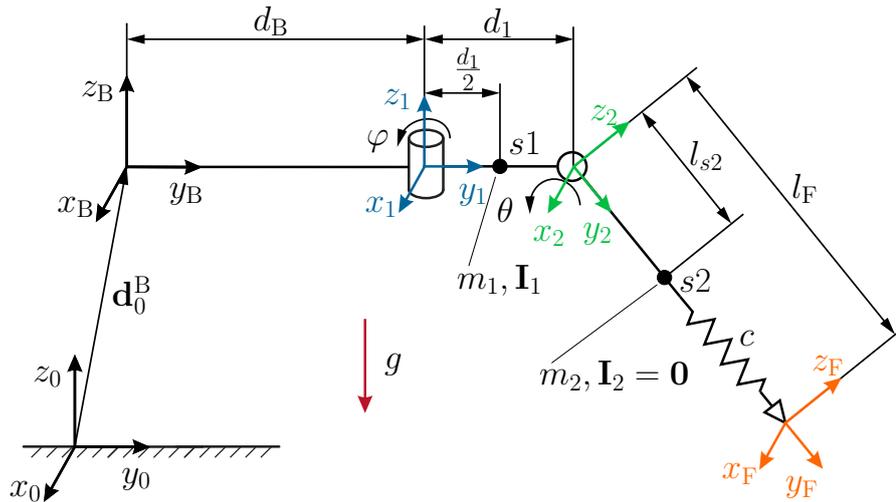


Abbildung 9: Schematische Darstellung des Roboters.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^B , \mathbf{H}_B^1 , \mathbf{H}_1^2 , \mathbf{H}_2^F zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten und \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_0^2 und \mathbf{H}_0^F zwischen dem Ursprung und den Koordinatensystemen an. 5 P. |
- b) Geben Sie die Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^{s1}$ und $(\mathbf{J}_v)_0^F$ sowie die Manipulator-Jacobi-Matrizen der Winkelgeschwindigkeit $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s1}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^F$ an. 5 P. |
- c) Berechnen Sie den Anteil $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ der Massenmatrix zufolge des Körpers 1. 2 P. |
- d) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 1.5 P. |

Die folgenden Unterpunkte sind unabhängig lösbar. Nehmen Sie für die folgenden Unterpunkte an, dass für eine Pose mit festem φ und θ für die Manipulator-Jacobi-Matrix

$$(\mathbf{J}_v)_B^F = \begin{bmatrix} -\frac{l_F}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_F}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{l_F}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit des Freiheitsgrades l_F gilt.

- e) Der Körper des Roboters bewegt sich mit $\dot{\mathbf{d}}_0^B = [\dot{d}_x \ 0 \ 0]^T$. Wie groß müssen die Änderungsraten der Freiheitsgrade $\dot{\mathbf{q}}$ sein, damit der Fuß in Kontakt mit dem Boden ist ohne zu rutschen, d.h. die Position des Fußes konstant bleibt? 2 P. |
- f) Auf den Fuß wirkt die Kraft f_z in z_0 -Richtung. Welche Länge l_F stellt sich aufgrund der Kraft ein? Die Freiheitsgrade φ und θ sind fest und \mathbf{d}_0^B ist konstant. 2 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_B^1 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & d_B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & d_1 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_F \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & d_x \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & d_B \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta & d_x - d_1 s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi c_\theta & -c_\varphi s_\theta & d_B + d_1 c_\varphi \\ 0 & s_\theta & c_\theta & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0^F = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta & d_x - d_1 s_\varphi - l_F s_\varphi c_\theta \\ s_\varphi & c_\varphi c_\theta & -c_\varphi s_\theta & d_B + d_1 c_\varphi + l_F c_\varphi c_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta & d_z + l_F s_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$(\mathbf{J}_v)_0^{s1} = \begin{bmatrix} -\frac{d_1}{2} c_\varphi & 0 & 0 \\ -\frac{d_1}{2} s_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_v)_0^F = \begin{bmatrix} -d_1 c_\varphi - l_F c_\varphi c_\theta & l_F s_\varphi s_\theta & -s_\varphi c_\theta \\ -d_1 s_\varphi - l_F s_\varphi c_\theta & -l_F c_\varphi s_\theta & c_\varphi c_\theta \\ 0 & l_F c_\theta & s_\theta \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^F = \begin{bmatrix} 0 & c_\varphi & 0 \\ 0 & s_\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{1,zz} + \frac{m_1 d_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = m_1 g d_z + m_2 g (d_z + l_{s2} s_\theta) + \frac{c}{2} (l_F - s_0)^2$$

e)

$$\dot{\mathbf{q}} = \left[-\frac{\sqrt{2} d_x}{l_F} \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

f)

$$l_F = s_0 - \frac{f_z}{\sqrt{2}c}$$