Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 12.07.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	10	16.5	13.5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Musterlösung

Hinweis: Die Unterpunkte a), b) können von den Punkten c), d) und e) unabhängig gelöst werden.

1. Gegeben ist ein Flaschenzug mit masselosen Rollen und idealen Seilen nach Abbildung 1. Die Rollen 1 und 2 drehen sich reibungsfrei um ihren Mittelpunkt. Im Punkt B sind alle drei Seile mit der Achse der Rolle 2 verbunden. 10 P. |

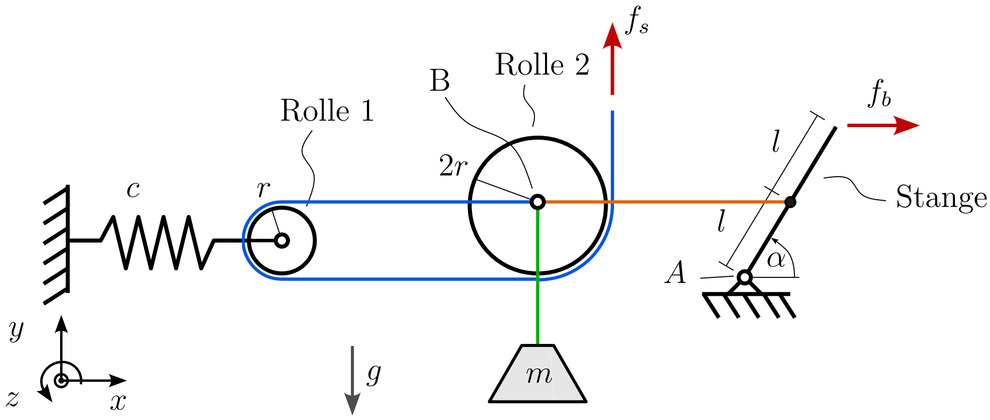


Abbildung 1: Skizze des Flaschenzugs.

a) Schneiden Sie die beiden Rollen und die Stange frei und zeichnen Sie alle wirkenden Kräfte und Momente ein. 3,5 P. |

b) Berechnen Sie die Kraft f_s, die Kraft f_b, die Federkraft und die Kräfte im Punkt A, sodass der Aufbau im statischen Gleichgewicht ist. 2,5 P. |

Gegeben ist eine Rolle mit reibungsfreiem Lager, die in y-Richtung fest eingespannt ist, siehe Abbildung 2. Die Rolle dreht sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ und hat den Winkel $\varphi(0) = 0$. Die Rolle, mit Massenträgheitsmoment I, wird mit der Kraft f, in negative x-Richtung, an eine starre Wand gepresst. Rolle und Wand haben den Coulomb'schen Reibungskoeffizienten μ_C.

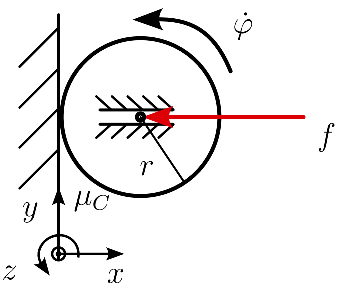


Abbildung 2: Skizze der Rolle.

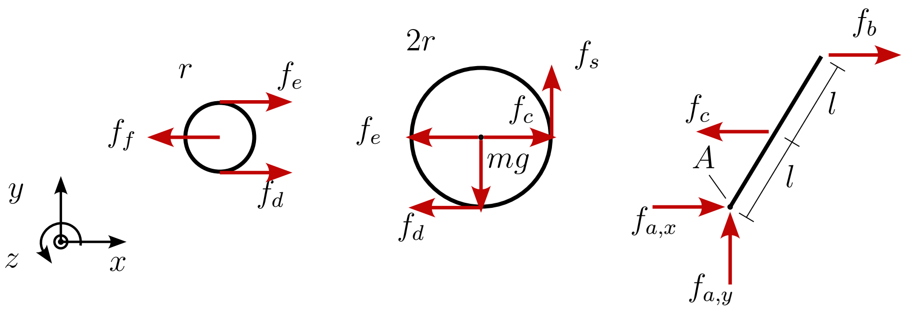
c) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Rollenwinkels, sowie den zeitlichen Verlauf $\varphi(t)$ an. Eliminieren Sie dabei alle unbekannten Größen. 2 P. |

d) Berechnen Sie die Kraft f, sodass die Rolle zum Zeitpunkt $t = T$ zum Stillstand kommt, das heißt $\dot{\varphi}(T) = 0$. 1 P. |

e) Berechnen Sie die dabei durch Reibung dissipierte Energie. 1 P. |

Lösung

a) Freischnitt Skizze:

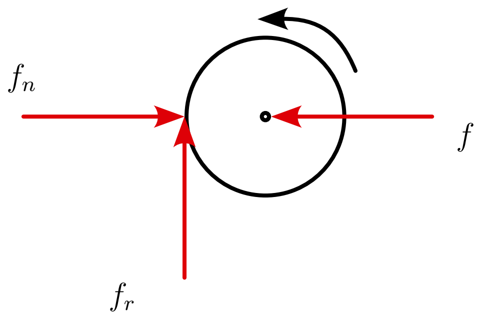


b)

$$
\begin{aligned}
f_s &= mg \\
f_b &= mg \\
f_f &= 2mg
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{a,x} &= mg \\
f_{a,y} &= 0
\end{aligned}
$$

c) Freischnitt Skizze:



$$
\begin{aligned}
I\ddot{\varphi}(t) &= -f\mu_C r \\
\varphi(t) &= -\frac{f\mu_C r t^2}{2I} + \dot{\varphi}_0 t
\end{aligned}
$$

d)

$$f = \frac{\dot{\varphi}_0 I}{\mu_C r T}$$

e)

$$\Delta E = \frac{I\dot{\varphi}_0^2}{2}$$

2. Gegeben ist ein mechanisches Starrkörpersystem bestehend aus drei Teilkörpern wie in Abb. 3 dargestellt. Auf einem um die z_0-Achse mit dem Winkel q_1 drehbar gelagerten Zylinder (Masse m_Z, Schwerpunkt S_Z) ist ein beweglicher Kolben (Masse m_K, Trägheitsmatrix um den Schwerpunkt im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_K = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} I_{K,xx} & I_{K,yy} & I_{K,zz} \end{bmatrix}\right)$, Schwerpunkt S_K) befestigt. Der Kolben ist entlang des Freiheitsgrades q_2 verschiebbar. Am Ende des Kolbens ist ein Pendel drehbar mit dem Winkel q_3 befestigt, welches aus einem masselosen Stab der Länge l_E und einer Punktmasse (Masse m_E) am Ende des Stabes besteht. Im Schwerpunkt des Zylinders wird eine externe Kraft f_Z aufgebracht und auf den Kolben und den Zylinder wirkt eine externe Kraft f_K in x_2-Richtung bzw. in negative x_2-Richtung. 16,5 P. |

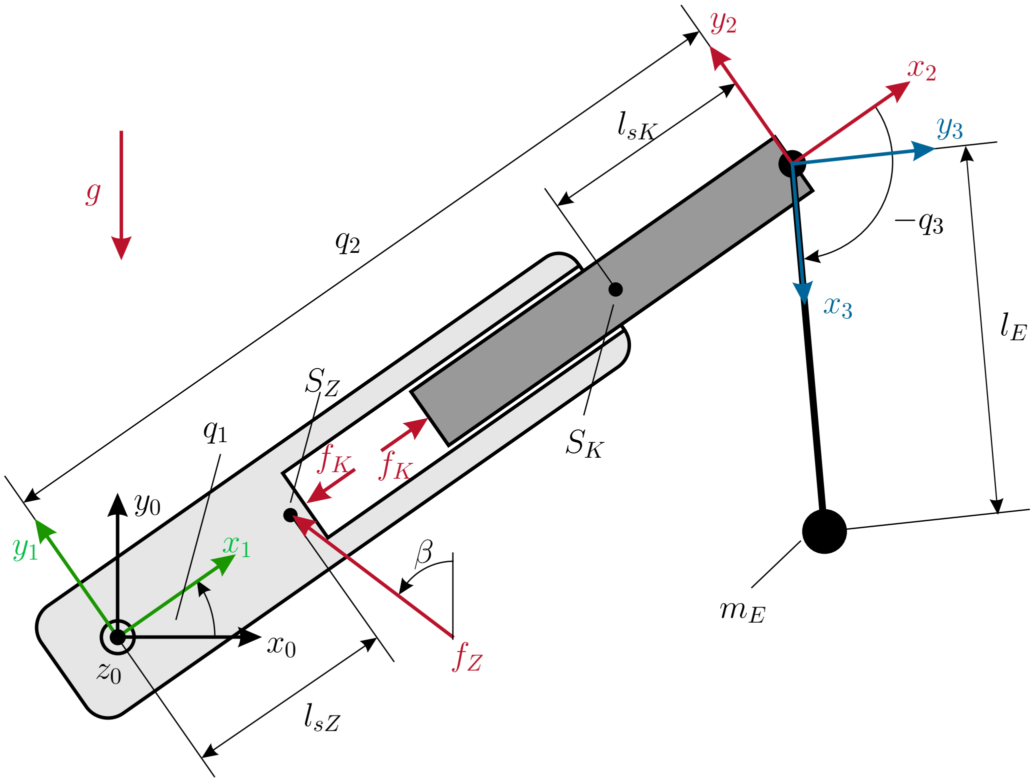


Abbildung 3: Planare Darstellung des Starrkörpersystems.

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems beschrieben werden. Verwenden Sie dabei die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, und $\mathbf{H}_2^3$ zwischen den Koordinatensystemen an. 1,5 P. |

b) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte im Inertialsystem $\mathbf{p}_0^{sZ}$, $\mathbf{p}_0^{sK}$ und $\mathbf{p}_0^{E}$. 3 P. |

c) Geben Sie die zugehörigen Jacobi-Manipulator-Matrizen $(\mathbf{J_v})_0^{sZ}$, $(\mathbf{J_v})_0^{sK}$, $(\mathbf{J_v})_0^{E}$, $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{sZ}$ und $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{sK}$ der Schwerpunkte an. 3 P. |

d) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ sowie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ an. 2 P. |

e) Berechnen Sie den Vektor der extern eingeprägten generalisierten Kräfte $\mathbf{f}_q^{np}$. 3 P. |

f) Berechnen Sie den Anteil des Kolbens an der Massenmatrix $\mathbf{M}_K(\mathbf{q})$. 2,5 P. |

g) Für bekannte Änderungsraten $\dot{q}_2$ und $\dot{q}_3$, wie muss $\dot{q}_1$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ gewählt werden, damit die y_0-Komponente der Geschwindigkeit der Masse m_E zu Null wird? 1,5 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_{q_3} & -s_{q_3} & 0 & 0 \\ s_{q_3} & c_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{p}_0^{sZ} = \begin{bmatrix} l_{sZ} c_{q_1} \\ l_{sZ} s_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{sK} = \begin{bmatrix} (q_2 - l_{sK}) c_{q_1} \\ (q_2 - l_{sK}) s_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{E} = \begin{bmatrix} q_2 c_{q_1} + l_E (c_{q_1} c_{q_3} - s_{q_1} s_{q_3}) \\ q_2 s_{q_1} + l_E (s_{q_1} c_{q_3} + c_{q_1} s_{q_3}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

c)

$$(\mathbf{J_v})_0^{sZ} = \begin{bmatrix} -l_{sZ} s_{q_1} & 0 & 0 \\ l_{sZ} c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J_v})_0^{sK} = \begin{bmatrix} -(q_2 - l_{sK}) s_{q_1} & c_{q_1} & 0 \\ (q_2 - l_{sK}) c_{q_1} & s_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{J_v})_0^{E} = \begin{bmatrix} -q_2 s_{q_1} + l_E(-s_{q_1} c_{q_3} - c_{q_1} s_{q_3}) & c_{q_1} & l_E(-c_{q_1} s_{q_3} - s_{q_1} c_{q_3}) \\ q_2 c_{q_1} + l_E(c_{q_1} c_{q_3} - s_{q_1} s_{q_3}) & s_{q_1} & l_E(-s_{q_1} s_{q_3} + c_{q_1} c_{q_3}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{sZ} = (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{sK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = (l_{sZ} m_Z + m_K (q_2 - l_{sK}) + m_E q_2) g s_{q_1} + m_E g l_E (s_{q_1} c_{q_3} + c_{q_1} s_{q_3})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (l_{sZ} m_Z + m_K (q_2 - l_{sK}) + m_E q_2) g c_{q_1} + m_E g l_E (c_{q_1} c_{q_3} - s_{q_1} s_{q_3}) \\ (m_K + m_E) g s_{q_1} \\ m_E g l_E (-s_{q_1} s_{q_3} + c_{q_1} c_{q_3}) \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{f}_{\mathbf{q}}^{np} = \begin{bmatrix} f_Z l_{sZ} (s_{q_1} s_\beta + c_{q_1} c_\beta) \\ f_K \\ 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{M}_K(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_K (q_2 - l_{sK})^2 + I_{K,zz} & 0 & 0 \\ 0 & m_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$\dot{q}_1 = -\frac{\dot{q}_2 s_{q_1} + \dot{q}_3 (-s_{q_1} s_{q_3} + c_{q_1} c_{q_3})}{q_2 c_{q_1} + l_E (c_{q_1} c_{q_3} - s_{q_1} s_{q_3})}$$

3. Gegeben ist ein Fußball der gegen die Latte eines Fußballtores geschossen werden soll. Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Balles während verschiedener Phasen des Schusses betrachtet werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte: *Hinweis: Die Unterpunkte a) und b) sowie c), d) und e) und f) und g) können jeweils unabhängig voneinander gelöst werden*: 13,5 P.

In Abbildung 4 ist ein Modell des Balls am Bein während des Kicks gezeigt. Das Bein hat ein Trägheitsmoment I^D_{Bein} um den Drehpunkt **D**. Der Muskel bringt ein Moment τ_M um den Drehpunkt **D** ein. Der Ball hat eine Masse m_B und ein Trägheitsmoment I^B_B um seinen Schwerpunkt.

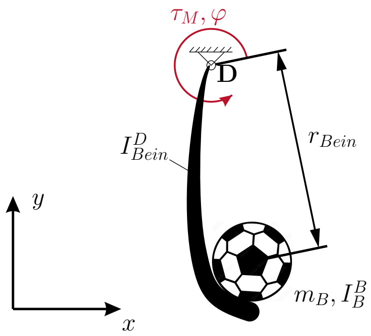


Abbildung 4: Schematisches Modell eines Balles während des Tretens.

a) Berechnen Sie das gesamt Trägheitsmoment I^D von Ball und Bein um den Drehpunkt **D**. 1,5 P.

b) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Winkels φ um den Drehpunkt an und berechnen Sie die Zeit T_B in welcher der Ball für konstantes τ_M von 0 auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigt wird. 2 P.

In Abbildung 5 ist der geometrische Zusammenhang des Schusses dargestellt. Der Ball hat eine Masse m_B und einen Durchmesser d_B. Um die Latte zu treffen muss der Ball eine horizontale Distanz d_L und eine vertikale Distanz h_L überwinden. Der Ball hat eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α_v gegenüber der x-Achse.

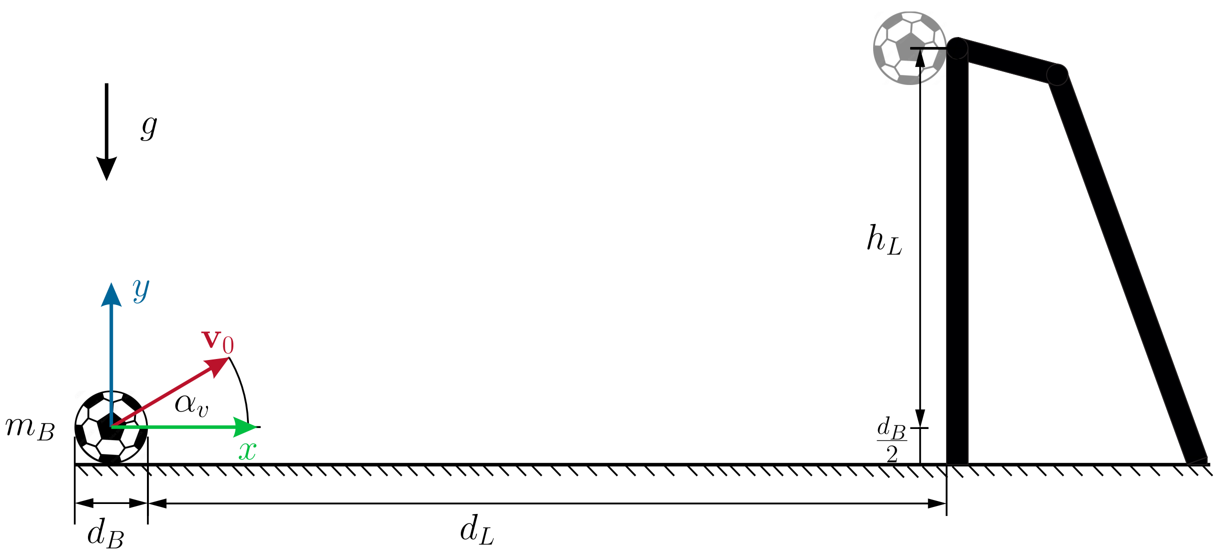


Abbildung 5: Modell des Balls während des Schusses.

c) Geben Sie die Bewegungsgleichungen des Balls in x- und y-Richtung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, bei gegebener Dichte der Luft ρ_L und gegebenem Widerstandsbeiwert c_W, an. Geben Sie ebenfalls die Anfangsbedingungen der Bewegungsgleichungen an. 2 P. |

d) Vernachlässigen Sie nun im Weiteren den Luftwiderstand ($c_W = 0$). Berechnen Sie für gegebenen Winkel α_v den Treffzeitpunkt T und den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der sich der Ball am Anfang bewegen muss um die Latte zu treffen. 2 P. |

e) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit mit welcher der Ball auf die Latte trifft. 1,5 P. |

In Abbildung 6 ist das Modell für die Interaktion des Balles mit der Latte dargestellt. Die Verluste durch das Komprimieren des Balles werden durch die Kraft $f_C(\dot{d}) = -\mu_C \operatorname{sign}(\dot{d})$ modelliert. Die verlustlose elastische Verformung wird durch eine Feder mit Federkonstante c und entspannter Länge l_0 modelliert. Die Gravitation wird hier vernachlässigt.

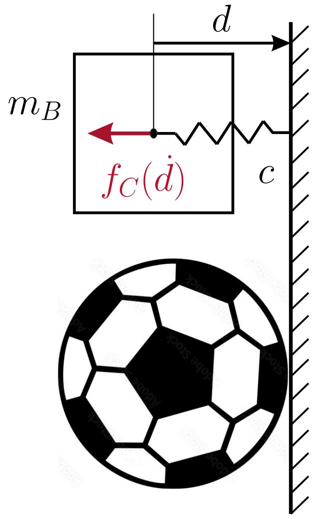


Abbildung 6: Modell der Interaktion des Balls mit der Latte.

f) Berechnen Sie die maximale Stauchung der Feder wenn der Ball mit einer Geschwindigkeit v_2 auf die Latte trifft. 2,5 P. |

g) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_3 mit welcher der Ball die Latte wieder verlässt. 2 P. |

a) Mit Satz von Steiner:

$$I_B^D = I_B^B + r_B^2 m_B$$
$$I^D = I_{Bein}^D + I_B^D = I_{Bein}^D + I_B^B + r_B^2 m_B$$

b) Drehmomentengleichung um $\boldsymbol{D}$*:*

$$I^D \ddot{\varphi} = \tau_M$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau_M}{I^D} = \frac{\tau_M}{I_{Bein}^D + I_B^B + r_B^2 m_B}$$

Geschwindigkeit ist Winkelgeschwindigkeit mal Radius. Integrieren nach der Zeit:

$$v(t) = r_B \dot{\varphi} = r_B \int \ddot{\varphi} dt = \frac{r_B \tau_M}{I_{Bein}^D + I_B^B + r_B^2 m_B} t$$
$$v(T) = v_0 = \frac{r_B \tau_M}{I_{Bein}^D + I_B^B + r_B^2 m_B} T$$
$$T = \frac{v_0 (I_{Bein}^D + I_B^B + r_B^2 m_B)}{r_B \tau_M}$$

c) Luftwiderstand:

$$\mathbf{f}_{LW} = -c_W \frac{d_B^2 \pi \rho_L}{4} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$
$$= -c_W \frac{d_B^2 \pi \rho_L}{4} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Bewegungsgleichungen:

$$m_B \ddot{x} = -c_W \frac{d_B^2 \pi \rho_L}{4} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x}$$
$$m_B \ddot{y} = -c_W \frac{d_B^2 \pi \rho_L}{4} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - m_B g$$

Anfangsbedingungen für Position des Schwerpunktes:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha_v)$$
$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha_v)$$

d) Mit $\mathbf{f}_{LW} = \mathbf{0}$*:*

$$m_B \ddot{x} = 0$$
$$m_B \ddot{y} = -m_B g$$

Lösen der Gleichungen mit Anfangsbedingungen:

$$x(t) = t v_0 \cos(\alpha_v)$$
$$y(t) = t v_0 \sin(\alpha_v) - g \frac{t^2}{2}$$

Für Zeit T am Endpunkt:

$$x(T) = d_L = Tv_0 \cos(\alpha_v)$$
$$y(T) = h_L = Tv_0 \sin(\alpha_v) - g\frac{t^2}{2}$$

$x(T)$ Gleichung nach T auflösen:

$$T = \frac{d_L}{v_0 \cos(\alpha_v)}$$

Einsetzten und Umformen:

$$h_L = \frac{d_L}{v_0 \cos(\alpha_v)} v_0 \sin(\alpha_v) - g\frac{d_L^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha_v)}$$
$$v_0^2 = \frac{gd_L^2}{2\cos^2(\alpha_v)(d_L \tan(\alpha_v) - h_L)}$$
$$v_0 = \frac{d_L}{\cos(\alpha_v)}\sqrt{\frac{g}{2(d_L \tan(\alpha_v) - h_L)}}$$
$$T = \sqrt{\frac{2(d_L \tan(\alpha_v) - h_L)}{g}}$$

e) *Energieerhaltung:*

$$E_{kin,T} = E_{kin,0} - V$$
$$\frac{mv_T^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh_L$$
$$\frac{v_T^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - gh_L$$
$$v_T = \sqrt{v_0^2 - 2gh_S} = \sqrt{\frac{gd_L^2}{2\cos^2(\alpha_v)(d_L \tan(\alpha_v) - h_L)} - 2gh_L}$$

f) *Energieerhaltung mit Verlusten $R = \int_{l_0}^{l_0 - \Delta x} -\mu_C \mathrm{d}d$:*

$$E_{kin,0} = E_{kin,min} + V_{f,max} + \int_{l_0}^{l_0 - \Delta x} -\mu_C \mathrm{d}d$$
$$\frac{m_B v_0^2}{2} = 0 + \frac{c}{2}\Delta x^2 + \mu_C \Delta x$$

Nach Δx auflösen:

$$\Delta x^2 + \frac{2\mu_C}{c}\Delta x - \frac{m_B v_0^2}{c}$$
$$\Delta x = \frac{-\mu_C \pm \sqrt{\mu_C^2 + m_B v_O^2 c}}{c}$$

Negative Lösung führt zu negativer Distanz -> Model gilt dort nicht mehr:

$$\Delta x = \frac{-\mu_C + \sqrt{\mu_C^2 + m_B v_O^2 c}}{c} > 0$$

g) Energieerhaltung: Δx wird zweimal durchlaufen:

$$E_{kin,out} = E_{kin,in} - 2R$$
$$\frac{m_B v_{out}^2}{2} = \frac{m_B v_{in}^2}{2} - 2\mu_C \Delta x$$

Auflösen nach v_{out}:

$$v_{out} = -\sqrt{\frac{v_{in}^2 m_B - 4\mu_C \Delta x}{m_B}} = -\sqrt{\frac{v_{in}^2 m_B - 4\mu_C \frac{-\mu_C + \sqrt{\mu_C^2 + m_B v_O^2 c}}{c}}{m_B}}$$