**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 27.09.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | BP | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 15 | 15 | 10 | 5 | 40 |
| erreichte Punkte | | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. In Abbildung 1 ist schematisch ein Seiltrieb dargestellt, über den die zwei Massen $m_1$ und $m_2$ miteinander verbunden sind. Das als masselos angenommene Seil umschlingt zunächst die fixierte, nicht rotierende, Rolle A mit dem Radius $r$ und einem Umschlingungswinkel $\alpha$. Anschließend passiert das Seil die Umlenkrolle B mit dem Radius $r$, welche sich an einem frei beweglichen Stab der Länge $l$ befindet. Ein aufgebrachtes Drehmoment $\tau_S$ hält die Umlenkrolle B in Position. Die Auslenkung des Stabes wird über den Winkel $\beta$ gemessen. Sowohl der Stab als auch die Rollen können als masselos betrachtet werden. Zwischen Körper 1 und dem Untergrund herrscht Haftreibung mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_H$. Für die fest montierte Rolle A muss mit Seilreibung gerechnet werden, wobei der Reibungkoeffizient mit $\mu_S$ gegeben ist. Weiterhin wirkt die Gravitation $g$ in negative $y$-Richtung. 15 P. |

*Hinweis: Aufgabe f) kann unabhängig gelöst werden.*

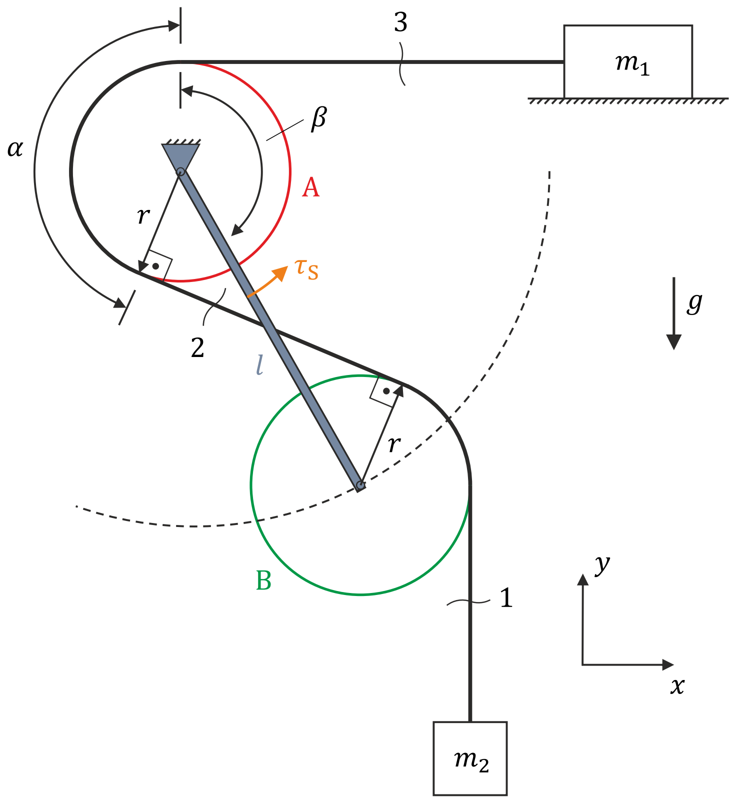



Abbildung 1: Seilzug.

a) Schneiden Sie die beiden Massen $m_1$ und $m_2$, die Rolle A, sowie die Rolle B gemeinsam mit dem Stab frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 3 P. |

b) Nehmen Sie an, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie die Seilkräfte an den Stellen 1, 2 und 3. 2 P. |

c) Wie groß muss $\alpha$ mindestens sein, damit sich die Massen gerade nicht bewegen. 2 P. |

d) Berechnen Sie das notwendige Drehmoment $\tau_s$ in Abhängigkeit des Umschlingungswinkels $\alpha$, damit sich Rolle B im Gleichgewicht befindet. 2,5 P. |

e) Bestimmen Sie den Umschlingungswinkel $\alpha$ in Abhängikeit des Stabwinkels $\beta$. *Hinweis: Nutzen Sie hierfür die von dem Stab und dem Seil aufgespannten rechtwinkligen Dreiecke.* 2,5 P. |

f) Die Geometrie von Körper 1 ist als gleichschenkliges Prisma mit den Kantenlängen $a$ und $b$, sowie der Höhe $c$ gegeben (siehe Abbildung 2). Die Dichte des Körpers kann mit $\rho(x) = \rho_0 + x$ berechnet werden. Berechnen Sie die Masse $m_1$, sowie die Lage des Schwerpunktes $\mathbf{s}_1 = [s_x, s_y, s_z]^\mathrm{T}$ des Körpers. 3 P. |

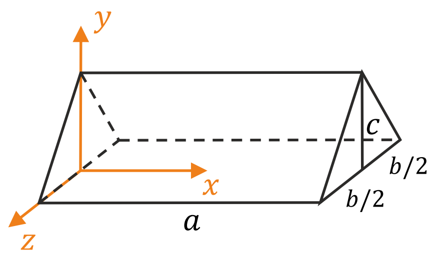
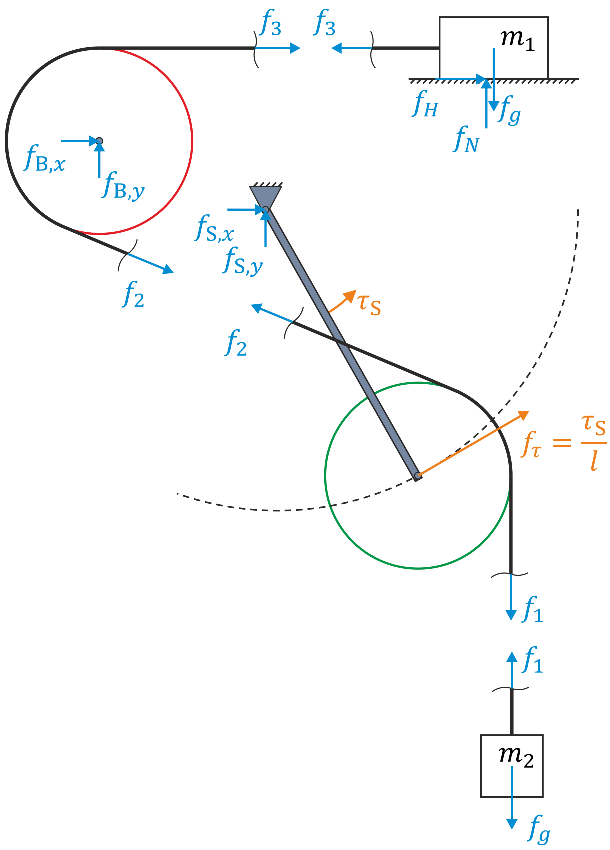



Abbildung 2: Geometrie von Körper 1.

*Lösung:*




*a)*

*b)*

$$f_1 = m_2 g$$
$$f_2 = m_2 g$$
$$f_3 = m_2 g e^{-\mu_S \alpha}$$

*c)*

$$f_H \geq f_3$$
$$m_1 \mu_H g \geq m_2 g e^{-\mu_S \alpha}$$
$$\alpha \geq \frac{1}{\mu_S} \ln\left(\frac{m_2}{m_1 \mu_H}\right)$$

*d)*

$$\tau_S = f_\tau l = l\left(f_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + f_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2l f_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\tau_S = 2m_2 g l \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
f_{\tau,x} &= f_2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m_2 g \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\
f_{\tau,y} &= f_1 - f_2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m_2 g \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
f_\tau &= \sqrt{{f_{\tau,x}}^2 + {f_{\tau,y}}^2} = m_2 g \sqrt{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \\
&= m_2 g \sqrt{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 1 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= m_2 g \sqrt{2 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\
\tau_\mathrm{S} &= f_\tau l = m_2 g l \sqrt{2 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \qquad \left(= 2 m_2 g l \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2\pi - \beta - \gamma \\
r &= \frac{l}{2} \sin(\gamma) \\
\gamma &= \arcsin\left(\frac{2r}{l}\right) \\
\alpha &= 2\pi - \beta - \arcsin\left(\frac{2r}{l}\right)
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{bc}{2}(\rho_0 a + \frac{1}{2}a^2) \\
s_x &= \frac{\frac{1}{2}\rho_0 a + \frac{1}{3}a^2}{\rho_0 + \frac{1}{2}a} \\
s_y &= \frac{1}{3}c \\
s_z &= 0
\end{aligned}
$$

2. In Abbildung 3 ist ein Roboter schematisch dargestellt. Das System hat die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4]^\mathrm{T}$, wobei $q_1$ eine reine Rotation um die $z_1$-Achse, $q_2$ eine reine Translation in $z_2$-Richtung ($0_2 = 0_3$ für $q_2 = 0$), $q_3$ eine reine Rotation um die $z_3$-Achse und $q_4$ eine reine Rotation um die $y_4$-Achse ist. Gelenke und Glieder werden als masselos betrachtet. Die Feder mit Federsteifigkeit $c$ ist zwischen den Gelenken 1 und 3 mit der entspannten Länge $l_{\mathrm{f},0}$ für $q_2 = 0$ befestigt. Ein Endeffektor der Masse $m_\mathrm{E}$ ist am Ende des letzten Gliedes starr befestigt. 15 P. |

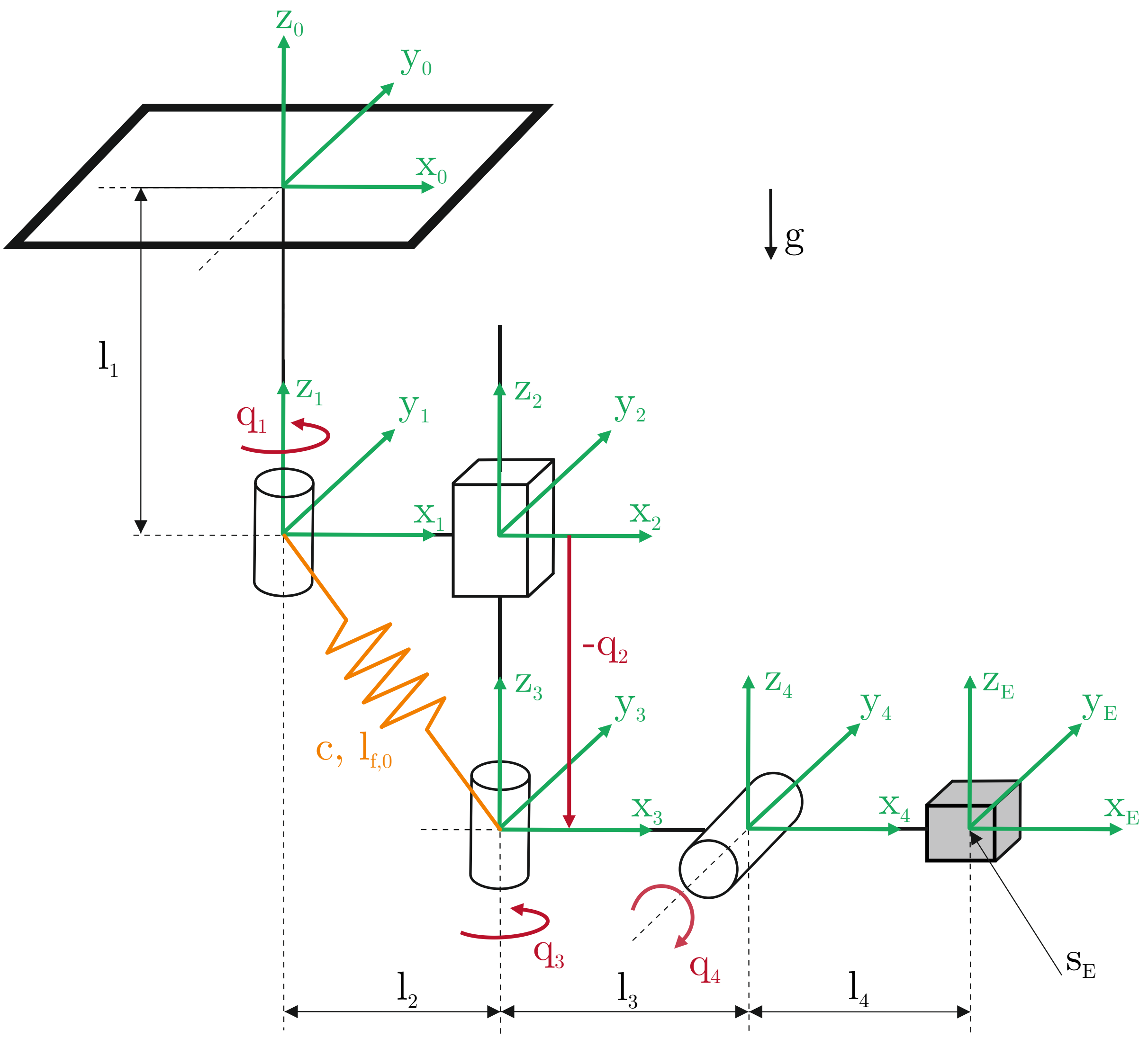



Abbildung 3: Roboter.

a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$, $\mathbf{H}_4^\mathrm{E}$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ an. 2,5 P. |

Für die Teilaufgaben b) bis e) wird das erste Gelenk des Manipulators als feststehend betrachtet, d. h. $q_1 = 0$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{H}_0^\mathrm{E}$ zwischen dem Koordinatensystem $0_0 x_0 y_0 z_0$ und dem Koordinatensystem $0_\mathrm{E} x_\mathrm{E} y_\mathrm{E} z_\mathrm{E}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ und geben Sie den Vektor $\mathbf{p}_0^{s_\mathrm{E}}$ zum Schwerpunkt $s_\mathrm{E}$ im Koordinatensystem $0_0 x_0 y_0 z_0$ an. Der Ursprung des Koordinatensystems $0_\mathrm{E} x_\mathrm{E} y_\mathrm{E} z_\mathrm{E}$ befindet sich im Schwerpunkt des Endeffektors. 2,5 P. |

c) Bestimmen Sie die Manipulator-Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_\mathrm{v})_0^{s_\mathrm{E}}$ sowie die Manipulator-Jacobi-Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$. 3,5 P. |

d) Betrachten Sie das Trägheitsmoment $\mathbf{I}_\mathrm{E}^{s_\mathrm{E}} = \mathrm{diag}\left(\left[\mathrm{I}_{\mathrm{E},xx}^{s_\mathrm{E}} \ \mathrm{I}_{\mathrm{E},yy}^{s_\mathrm{E}} \mathrm{I}_{\mathrm{E},zz}^{s_\mathrm{E}}\right]\right)$. Bestimmen Sie die Massenmatrix des Endeffektors unter der Annahme $q_1 = q_3 = 0$ in der folgenden Form: 3 P. |

$$T(\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{red}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{red}^\mathrm{T}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{red}, \qquad \dot{\mathbf{q}}_\mathrm{red} = \begin{bmatrix}\dot{q}_2, & \dot{q}_4\end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

e) Berechnen Sie die potentielle Energie des Endeffektors E zufolge der Gravitation in Richtung $\mathbf{e}_{g,0} = [0, 0, -1]$. 1,5 P. |

f) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Kraft der Feder für frei bewegliche Gelenke $q_1$ und $q_2$. 2 P. |

*Lösung:*

*a)*

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{L}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{L}_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & \sin(q_4) & \mathrm{L}_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{L}_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*b)*

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{L}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} \cos(q_3)\cos(q_4) & -\sin(q_3) & \cos(q_3)\sin(q_4) & \cos(q_3)(\mathrm{L}_3 + \cos(q_4)\mathrm{L}_4) + \mathrm{L}_2 \\ \sin(q_3)\cos(q_4) & \cos(q_3) & \sin(q_3)\sin(q_4) & \sin(q_3)(\mathrm{L}_3 + \cos(q_4)\mathrm{L}_4) \\ -\sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & -\sin(q_4)L_4 + q_2 - \mathrm{L}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_E^{s_\mathrm{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0^{s_\mathrm{E}} = \mathbf{H}_0^E \mathbf{p}_E^{s_\mathrm{E}} = \begin{bmatrix} \cos(q_3)(\mathrm{L}_3 + \cos(q_4)\mathrm{L}_4) + \mathrm{L}_2 \\ \sin(q_3)(\mathrm{L}_3 + \cos(q_4)\mathrm{L}_4) \\ -\sin(q_4)L_4 + q_2 - \mathrm{L}_1 \end{bmatrix}$$

*c)*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^{s_\mathrm{E}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(q_3)(\cos(q_4)\mathrm{L}_4+\mathrm{L}_3) & -\cos(q_3)\sin(q_4)\mathrm{L}_4 \\ 0 & 0 & \cos(q_3)(\cos(q_4)\mathrm{L}_4+\mathrm{L}_3) & -\sin(q_3)\sin(q_4)\mathrm{L}_4 \\ 0 & 1 & 0 & -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\omega}_0^{s_\mathrm{E}} &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_4\sin(q_3) \\ \dot{q}_4\cos(q_3) \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}}\dot{\mathbf{q}} \\
(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin(q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

*d)*

$$
\begin{aligned}
\text{Für } \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{q}_2,\ \dot{q}_4]^\mathrm{T}: \\
\mathbf{M}_0^{s_\mathrm{E}} &= (\mathbf{M}_v)_0^{s_\mathrm{E}} + (\mathbf{M}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}} = ((\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^{s_\mathrm{E}})^\mathrm{T} m_\mathrm{E} (\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^{s_\mathrm{E}} + ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}})^\mathrm{T} \mathbf{I}_0^{s_\mathrm{E}} (\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}} \\
\mathbf{I}_0^{s_\mathrm{E}} &= \mathbf{R}_0^{s_\mathrm{E}} \mathbf{I}_\mathrm{E}^{s_\mathrm{E}} (\mathbf{R}_0^{s_\mathrm{E}})^\mathrm{T} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{E,xx}}^{s_\mathrm{E}}\cos(q_4)^2 + \mathrm{I}_{\mathrm{E,zz}}^{s_\mathrm{E}}\sin(q_4)^2 & 0 & -\cos(q_4)\sin(q_4)\left(\mathrm{I}_{\mathrm{E,xx}}^{s_\mathrm{E}} - \mathrm{I}_{\mathrm{E,zz}}^{s_\mathrm{E}}\right) \\ 0 & \mathrm{I}_{\mathrm{E,yy}}^{s_\mathrm{E}} & 0 \\ -\cos(q_4)\sin(q_4)\left(\mathrm{I}_{\mathrm{E,xx}}^{s_\mathrm{E}} - \mathrm{I}_{\mathrm{E,zz}}^{s_\mathrm{E}}\right) & 0 & \mathrm{I}_{\mathrm{E,xx}}^{s_\mathrm{E}}\sin(q_4)^2 + \mathrm{I}_{\mathrm{E,zz}}^{s_\mathrm{E}}\cos(q_4)^2 \end{bmatrix} \\
(\mathbf{M}_v)_0^{s_\mathrm{E}} &= ((\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^{s_\mathrm{E}})^\mathrm{T} m_\mathrm{E} (\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^{s_\mathrm{E}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(q_4)\mathrm{L}_4 & 0 & -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 \end{bmatrix} m_\mathrm{E} \begin{bmatrix} 0 & -\sin(q_4)\mathrm{L}_4 \\ 0 & 0 \\ 1 & -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_\mathrm{E} & -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 m_\mathrm{E} \\ -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 m_\mathrm{E} & \mathrm{L}_4^2 m_\mathrm{E} \end{bmatrix} \\
(\mathbf{M}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}} &= ((\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}})^\mathrm{T} \mathbf{I}_0^{s_\mathrm{E}} (\mathbf{J}_\omega)_0^{s_\mathrm{E}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_0^{s_\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\mathrm{E,yy}}^{s_\mathrm{E}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_0^{s_\mathrm{E}} &= \begin{bmatrix} m_\mathrm{E} & -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 m_\mathrm{E} \\ -\cos(q_4)\mathrm{L}_4 m_\mathrm{E} & \mathrm{L}_4^2 m_\mathrm{E} + \mathrm{I}_{\mathrm{E,yy}}^{s_\mathrm{E}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

*e)*

$$V_{g,0}^{s_\mathrm{E}} = -m_\mathrm{E}\cdot g\cdot(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_4\sin(q_4) - q_2)$$

*f)*

$$
\begin{gathered}
l_{f,0} = \mathrm{L}_2,\ l_f = \sqrt{\mathrm{L}_2^2 + q_2^2} \\
V_f = \frac{1}{2}\mathrm{c}(l_f - l_{f,0})^2 \\
f_{q,k} = \frac{\partial V_f}{\partial q_k}, \mathbf{f}_q = \left[0,\ -\mathrm{c}q_2\cdot\frac{\left(-\sqrt{\mathrm{L}_2^2+q_2^2}+\mathrm{L}_2\right)}{\sqrt{\mathrm{L}_2^2+q_2^2}},\ 0,\ 0\right]^\mathrm{T}
\end{gathered}
$$

3. Die in Abbildung 4 dargestellte Boje soll dynamisch modelliert werden. Die Boje ist an einem Seil am Boden verankert und ist vollständig unter Wasser getaucht. Die Boje kann als ideale Kugel mit dem Radius $r$ und der Masse $m_{\mathrm{B}}$ angenommen werden. Die Boje kann weiterhin vereinfacht als Punktmasse angenommen werden. Eine der Gravitationskraft entgegengerichtete Auftriebskraft $f_{\mathrm{a}} = m_{\mathrm{w}} g$ berechnet sich aus der verdrängten Wassermasse $m_{\mathrm{w}}$ und der Gravitationskonstante $g$. Die Dichte des Wassers ist mit $\rho_{\mathrm{W}}$ gegeben. Gravitation wirkt in negative $y$-Richtung. 10 P. |

   Die Aufhängung der Boje kann vereinfacht als Feder-Masse-Dämpfer-System modelliert werden mit der Federsteifigkeit $c$ und Dämpfungskonstante $d$. Bei einer Seillänge von $l_0$ ist die Feder entspannt. Eine Querströmung mit der Stömungsgeschwindigkeit $v_{\mathrm{w}}$ sorgt zusätzlich für einen horizontalen Versatz der Boje. Der Widerstandsbeiwert der Boje ist mit $c_{\mathrm{w}}$ gegeben. Die Größen $l(t)$ und $\alpha(t)$ bezeichnen jeweils die Seillänge und den Auslenkungswinkel der Boje.

   *Hinweis: Kugelvolumen:* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, *Kreisfläche:* $A = \pi r^2$.

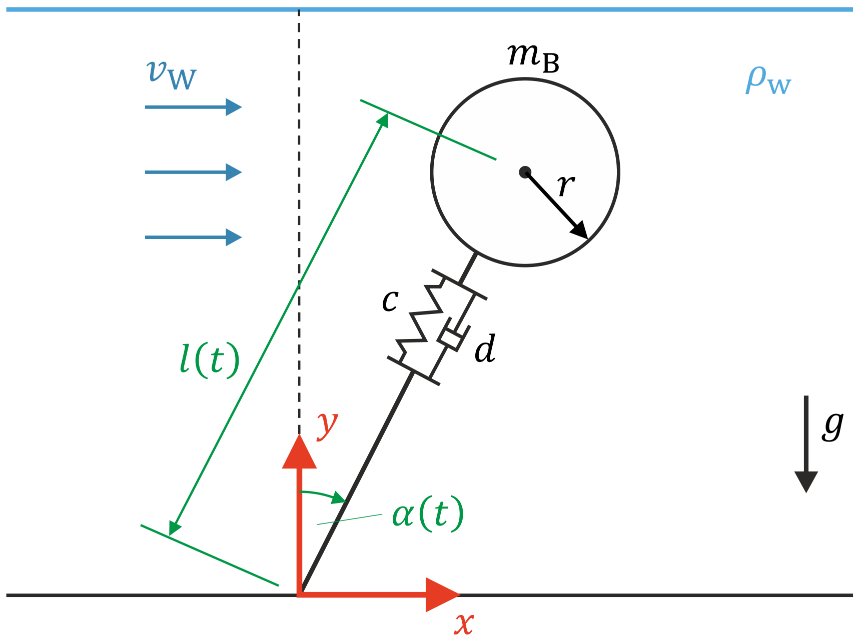



Abbildung 4: Eingetauchte Boje.

   a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die zwei Freiheitsgrade $l(t)$ und $\alpha(t)$ auf. Es kann davon ausgegangen werden, dass eine Widerstandskraft nur in Folge von $v_{\mathrm{w}}$ wirkt. 4 P. |

   b) Berechnen Sie die stationäre Lösung und bestimmen Sie den Auslenkungswinkel $\alpha$ und die Seillänge $l$ in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit $v_{\mathrm{w}}$. 3 P. |

   c) Nehmen Sie nun an, dass sich die Seillänge infolge von Turbulenzen mit $l(t) = l_0 + B\cos(\omega t)$ bei konstantem Winkel $\alpha(t) = \alpha$ verändert. Berechenen Sie die potentielle Energie $V(t)$ sowie die kinetische Energie $T(t)$ des Gesamtsystems und bestimmen Sie die Zeitpunkte $t$ zu denen die Kinetische Energie verschwindet. 3 P. |

*Lösung:*

*a)*

$$
\begin{aligned}
m_\mathrm{B} l^2(t)\ddot{\alpha}(t) &= l(t)\cos(\alpha(t)) f_\mathrm{w} + l(t)\sin(\alpha(t))(f_g - f_\mathrm{a}) \\
m_\mathrm{B}\ddot{l}(t) &= \sin(\alpha(t)) f_\mathrm{w} + \cos(\alpha(t))(f_\mathrm{a} - f_g) - f_\mathrm{f} - d\,\dot{l}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_g &= m_\mathrm{B} g \\
f_\mathrm{a} &= \frac{4}{3}\pi {r_\mathrm{B}}^3 \rho_\mathrm{w} g \\
f_\mathrm{w} &= \pi {r_\mathrm{B}}^2 \rho_\mathrm{w} c_\mathrm{w} \frac{{v_\mathrm{w}}^2}{2} \\
f_\mathrm{f} &= c(l(t) - l_0)
\end{aligned}
$$

*b)*

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos(\alpha) f_\mathrm{w} + \sin(\alpha)(f_g - f_\mathrm{a}) \\
0 &= \sin(\alpha) f_\mathrm{w} + \cos(\alpha)(f_\mathrm{a} - f_g) - f_\mathrm{f}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(v_\mathrm{w}) &= \arctan\left(\frac{\pi {r_\mathrm{B}}^2 \rho_\mathrm{w} c_\mathrm{w} \frac{{v_\mathrm{w}}^2}{2}}{\frac{4}{3}\pi {r_\mathrm{B}}^3 \rho_\mathrm{w} g - m_\mathrm{B} g}\right) \\
l(v_\mathrm{w}) &= l_0 + \frac{1}{c}\left(\sin(\alpha(v_\mathrm{w}))\pi {r_\mathrm{B}}^2 \rho_\mathrm{w} c_\mathrm{w} \frac{{v_\mathrm{w}}^2}{2} + \cos(\alpha(v_\mathrm{w}))\left(\frac{4}{3}\pi {r_\mathrm{B}}^3 \rho_\mathrm{w} g - m_\mathrm{B} g\right)\right)
\end{aligned}
$$

*c)*

$$
\begin{aligned}
l(t) &= l_0 + B\cos(\omega t) \\
\dot{l}(t) &= -B\omega\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(t) &= m_\mathrm{B} g \cos(\alpha)(l_0 + B\cos(\omega t)) + \frac{c}{2} B^2 \cos^2(\omega t) \\
T(t) &= \frac{m_\mathrm{B}}{2} B^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \frac{m_\mathrm{B}}{2} B^2 \omega^2 \sin^2(\omega t), \quad t \geq 0 \\
\Rightarrow t &= \frac{n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$