

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 27.09.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	15	15	10	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 ist schematisch ein Seiltrieb dargestellt, über den die zwei Massen m_1 und m_2 miteinander verbunden sind. Das als masselos angenommene Seil umschlingt zunächst die fixierte, nicht rotierende, Rolle A mit dem Radius r und einem Umschlingungswinkel α . Anschließend passiert das Seil die Umlenkrolle B mit dem Radius r , welche sich an einem frei beweglichen Stab der Länge l befindet. Ein aufgebrachtes Drehmoment τ_S hält die Umlenkrolle B in Position. Die Auslenkung des Stabes wird über den Winkel β gemessen. Sowohl der Stab als auch die Rollen können als masselos betrachtet werden. Zwischen Körper 1 und dem Untergrund herrscht Haftreibung mit dem Reibungskoeffizienten μ_H . Für die fest montierte Rolle A muss mit Seilreibung gerechnet werden, wobei der Reibungskoeffizient mit μ_S gegeben ist. Weiterhin wirkt die Gravitation g in negative y -Richtung.

15 P. |

Hinweis: Aufgabe f) kann unabhängig gelöst werden.

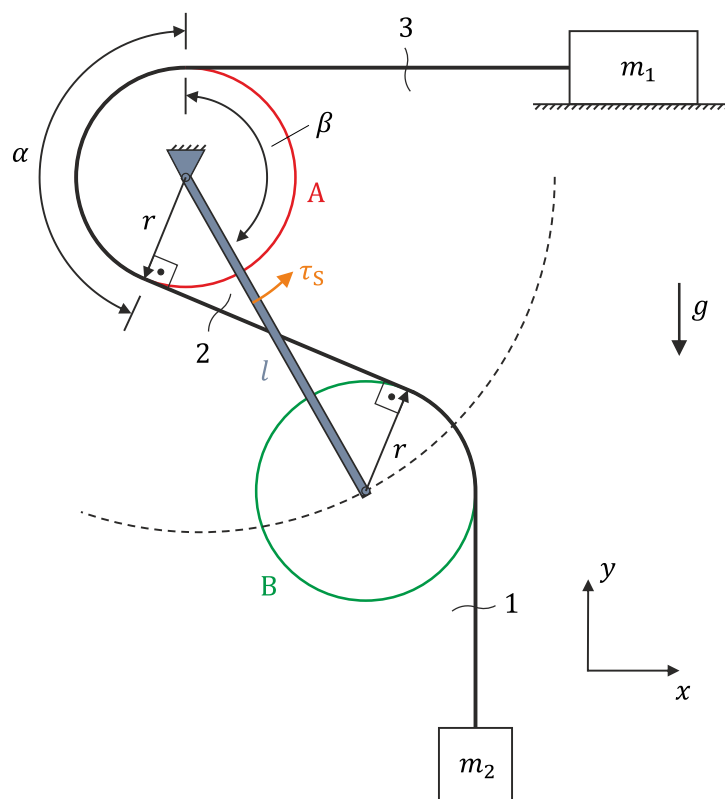


Abbildung 1: Seilzug.

- Schneiden Sie die beiden Massen m_1 und m_2 , die Rolle A, sowie die Rolle B gemeinsam mit dem Stab frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 3 P. |
- Nehmen Sie an, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie die Seilkräfte an den Stellen 1, 2 und 3. 2 P. |
- Wie groß muss α mindestens sein, damit sich die Massen gerade nicht bewegen. 2 P. |
- Berechnen Sie das notwendige Drehmoment τ_s in Abhängigkeit des Umschlingungswinkels α , damit sich Rolle B im Gleichgewicht befindet. 2,5 P. |
- Bestimmen Sie den Umschlingungswinkel α in Abhängigkeit des Stabwinkels β . 2,5 P. |
Hinweis: Nutzen Sie hierfür die von dem Stab und dem Seil aufgespannten rechtwinkligen Dreiecke.

- f) Die Geometrie von Körper 1 ist als gleichschenkliges Prisma mit den Kantenlängen a und b , sowie der Höhe c gegeben (siehe Abbildung 2). Die Dichte des Körpers kann mit $\rho(x) = \rho_0 + x$ berechnet werden. Berechnen Sie die Masse m_1 , sowie die Lage des Schwerpunktes $\mathbf{s}_1 = [s_x, s_y, s_z]^T$ des Körpers. 3 P. |

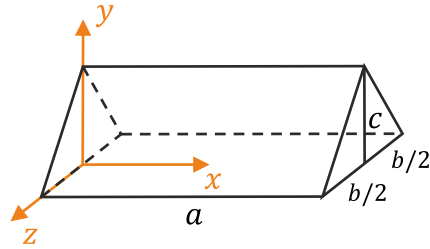
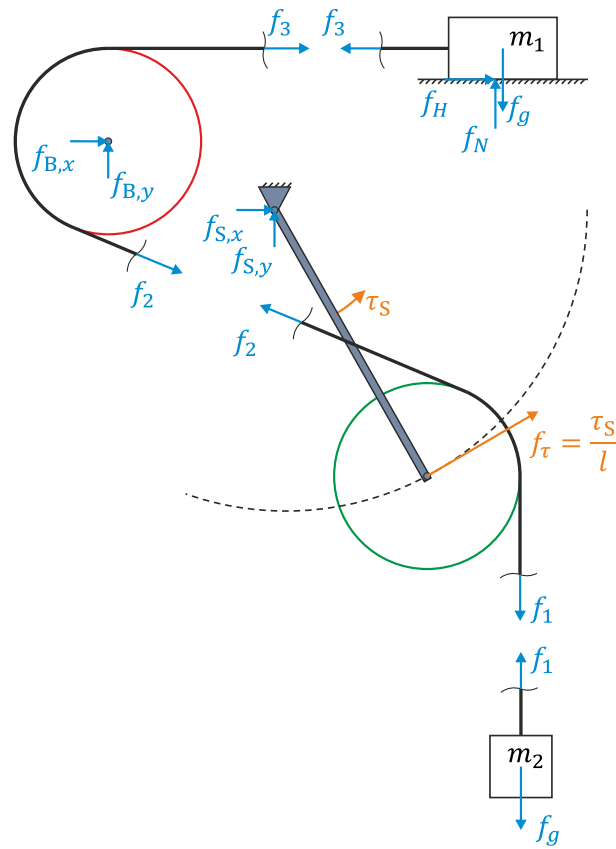


Abbildung 2: Geometrie von Körper 1.

Lösung:



a)

b)

$$\begin{aligned} f_1 &= m_2 g \\ f_2 &= m_2 g \\ f_3 &= m_2 g e^{-\mu_S \alpha} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f_H &\geq f_3 \\ m_1 \mu_H g &\geq m_2 g e^{-\mu_S \alpha} \\ \alpha &\geq \frac{1}{\mu_S} \ln \left(\frac{m_2}{m_1 \mu_H} \right) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \tau_S &= f_\tau l = l \left(f_2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + f_1 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2l f_2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ \tau_S &= 2m_2 g l \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
 f_{\tau,x} &= f_2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m_2 g \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\
 f_{\tau,y} &= f_1 - f_2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m_2 g \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
 f_\tau &= \sqrt{f_{\tau,x}^2 + f_{\tau,y}^2} = m_2 g \sqrt{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \\
 &= m_2 g \sqrt{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 1 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= m_2 g \sqrt{2 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 \tau_S = f_\tau l &= m_2 g l \sqrt{2 - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \left(= 2m_2 g l \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2\pi - \beta - \gamma \\
 r &= \frac{l}{2} \cos(\gamma) \\
 \gamma &= \arccos\left(\frac{2r}{l}\right) \\
 \alpha &= 2\pi - \beta - \arccos\left(\frac{2r}{l}\right)
 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{bc}{2}(\rho_0 a + \frac{1}{2}a^2) \\
 s_x &= \frac{\frac{1}{2}\rho_0 a + \frac{1}{3}a^2}{\rho_0 + \frac{1}{2}a} \\
 s_y &= \frac{1}{3}c \\
 s_z &= 0
 \end{aligned}$$

2. In Abbildung 3 ist ein Roboter schematisch dargestellt. Das System hat die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, wobei q_1 eine reine Rotation um die z_1 -Achse, q_2 eine reine Translation in z_2 -Richtung ($0_2 = 0_3$ für $q_2 = 0$), q_3 eine reine Rotation um die z_3 -Achse und q_4 eine reine Rotation um die y_4 -Achse ist. Gelenke und Glieder werden als masselos betrachtet. Die Feder mit Federsteifigkeit c ist zwischen den Gelenken 1 und 3 mit der entspannten Länge $l_{f,0}$ für $q_2 = 0$ befestigt. Ein Endeffektor der Masse m_E ist am Ende des letzten Gliedes starr befestigt.

15 P. |

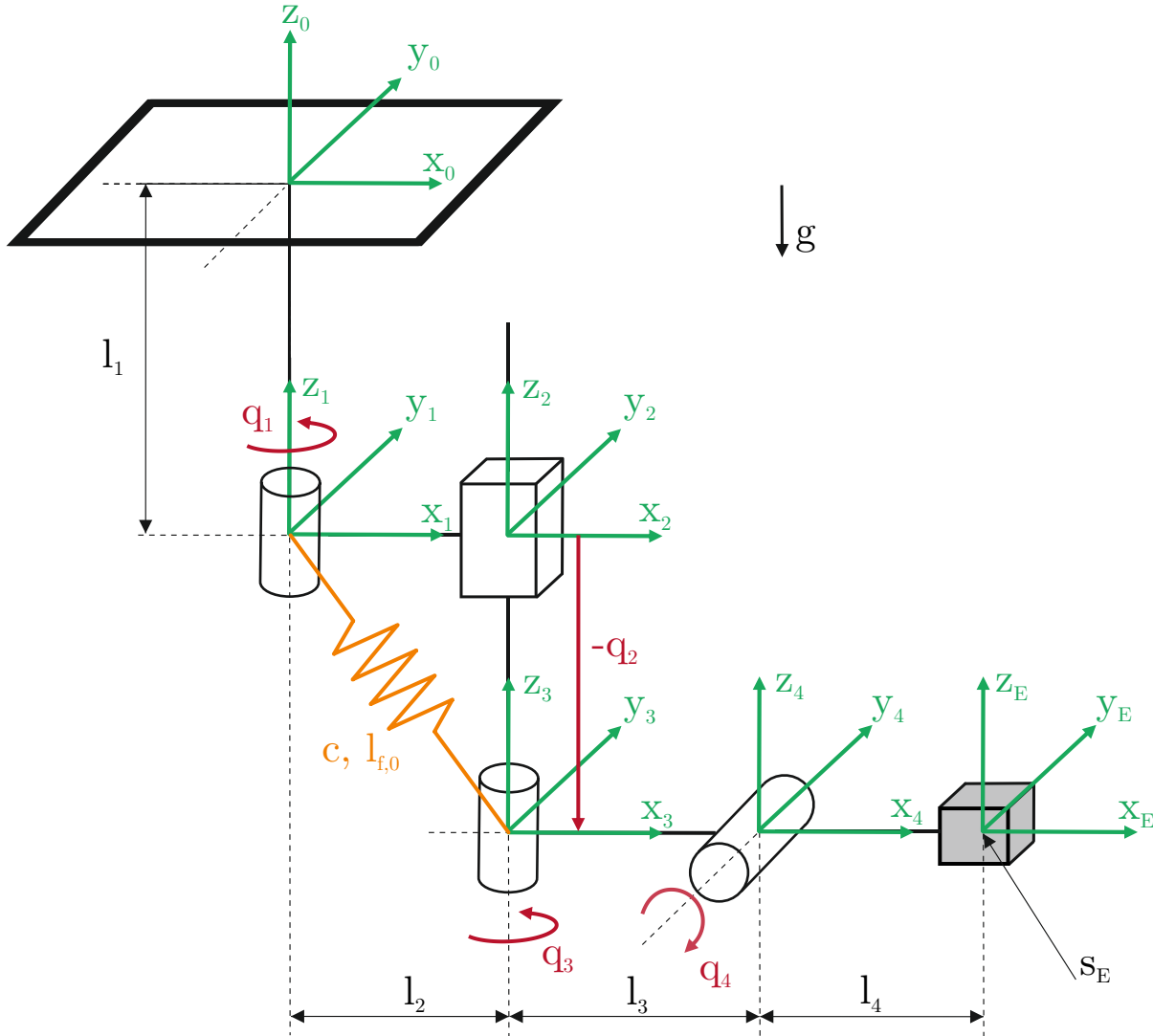


Abbildung 3: Roboter.

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^3, \mathbf{H}_3^4, \mathbf{H}_4^E$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ an. 2,5 P. |

Für die Teilaufgaben b) bis e) wird das erste Gelenk des Manipulators als feststehend betrachtet, d. h. $q_1 = 0$.

- b) Bestimmen Sie $\mathbf{H}_0^E$ zwischen dem Koordinatensystem $0_0x_0y_0z_0$ und dem Koordinatensystem $0_ExEyEzE$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ und geben Sie den Vektor $\mathbf{p}_0^{s_E}$ zum Schwerpunkt s_E im Koordinatensystem $0_0x_0y_0z_0$ an. Der Ursprung des Koordinatensystems $0_ExEyEzE$ befindet sich im Schwerpunkt des Endeffektors. 2,5 P. |

- c) Bestimmen Sie die Manipulator-Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^{s_E}$ sowie die Manipulator-Jacobi-Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_E}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$. 3,5 P. |
- d) Betrachten Sie das Trägheitsmoment $\mathbf{I}_E^{s_E} = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{E,xx}^{s_E} & \mathbf{I}_{E,yy}^{s_E} & \mathbf{I}_{E,zz}^{s_E} \end{bmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Massenmatrix des Endeffektors unter der Annahme $q_1 = q_3 = 0$ in der folgenden Form: 3 P. |

$$T(\dot{\mathbf{q}}_{\text{red}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{\text{red}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{red}}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & \dot{q}_4 \end{bmatrix}^T$$

- e) Berechnen Sie die potentielle Energie des Endeffektors E zufolge der Gravitation in Richtung $\mathbf{e}_{g,0} = [0, 0, -1]$. 1,5 P. |
- f) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Kraft der Feder für frei bewegliche Gelenke q_1 und q_2 . 2 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & \sin(q_4) & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} \cos(q_3)\cos(q_4) & -\sin(q_3) & \cos(q_3)\sin(q_4) & \cos(q_3)(L_3 + \cos(q_4)L_4) + L_2 \\ \sin(q_3)\cos(q_4) & \cos(q_3) & \sin(q_3)\sin(q_4) & \sin(q_3)(L_3 + \cos(q_4)L_4) \\ -\sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & -\sin(q_4)L_4 + q_2 - L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_E^{s_E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0^{s_E} = \mathbf{H}_0^E \mathbf{p}_E^{s_E} = \begin{bmatrix} \cos(q_3)(L_3 + \cos(q_4)L_4) + L_2 \\ \sin(q_3)(L_3 + \cos(q_4)L_4) \\ -\sin(q_4)L_4 + q_2 - L_1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_E} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(q_3)(\cos(q_4)L_4 + L_3) & -\cos(q_3)\sin(q_4)L_4 \\ 0 & 0 & \cos(q_3)(\cos(q_4)L_4 + L_3) & -\sin(q_3)\sin(q_4)L_4 \\ 0 & 1 & 0 & -\cos(q_4)L_4 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\omega}_0^{s_E} &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_4 \sin(q_3) \\ \dot{q}_4 \cos(q_3) \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E} \dot{\mathbf{q}} \\
(\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin(q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{Für } \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{q}_2, \dot{q}_4]^T : \\
\mathbf{M}_0^{s_E} &= (\mathbf{M}_v)_0^{s_E} + (\mathbf{M}_{\omega})_0^{s_E} = ((\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_E})^T m_E (\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_E} + ((\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E})^T \mathbf{I}_0^{s_E} (\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E} \\
\mathbf{I}_0^{s_E} &= \mathbf{R}_0^{s_E} \mathbf{I}_E^{s_E} (\mathbf{R}_0^{s_E})^T \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{E,xx}^{s_E} \cos(q_4)^2 + \mathbf{I}_{E,zz}^{s_E} \sin(q_4)^2 & 0 & -\cos(q_4) \sin(q_4) (\mathbf{I}_{E,xx}^{s_E} - \mathbf{I}_{E,zz}^{s_E}) \\ 0 & \mathbf{I}_{E,yy}^{s_E} & 0 \\ -\cos(q_4) \sin(q_4) (\mathbf{I}_{E,xx}^{s_E} - \mathbf{I}_{E,zz}^{s_E}) & 0 & \mathbf{I}_{E,xx}^{s_E} \sin(q_4)^2 + \mathbf{I}_{E,zz}^{s_E} \cos(q_4)^2 \end{bmatrix} \\
(\mathbf{M}_v)_0^{s_E} &= ((\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_E})^T m_E (\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^{s_E} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(q_4)L_4 & 0 & -\cos(q_4)L_4 \end{bmatrix} m_E \begin{bmatrix} 0 & -\sin(q_4)L_4 \\ 0 & 0 \\ 1 & -\cos(q_4)L_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_E & -\cos(q_4)L_4 m_E \\ -\cos(q_4)L_4 m_E & L_4^2 m_E \end{bmatrix} \\
(\mathbf{M}_{\omega})_0^{s_E} &= ((\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E})^T \mathbf{I}_0^{s_E} (\mathbf{J}_{\omega})_0^{s_E} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_0^{s_E} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{E,yy}^{s_E} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_0^{s_E} &= \begin{bmatrix} m_E & -\cos(q_4)L_4 m_E \\ -\cos(q_4)L_4 m_E & L_4^2 m_E + \mathbf{I}_{E,yy}^{s_E} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$V_{g,0}^{s_E} = -m_E \cdot g \cdot (L_1 + L_4 \sin(q_4) - q_2)$$

f)

$$\begin{aligned}
l_{f,0} &= L_2, \quad l_f = \sqrt{L_2^2 + q_2^2} \\
V_f &= \frac{1}{2} c (l_f - l_{f,0})^2 \\
f_{q,k} &= \frac{\partial V_f}{\partial q_k}, \mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} 0, & -c q_2 \cdot \frac{(-\sqrt{L_2^2 + q_2^2} + L_2)}{\sqrt{L_2^2 + q_2^2}}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

3. Die in Abbildung 4 dargestellte Boje soll dynamisch modelliert werden. Die Boje ist an einem Seil am Boden verankert und ist vollständig unter Wasser getaucht. Die Boje kann als ideale Kugel mit dem Radius r und der Masse m_B angenommen werden. Die Boje kann weiterhin vereinfacht als Punktmasse angenommen werden. Eine der Gravitationskraft entgegengerichtete Auftriebskraft $f_a = m_w g$ berechnet sich aus der verdrängten Wassermasse m_w und der Gravitationskonstante g . Die Dichte des Wassers ist mit ρ_w gegeben. Gravitation wirkt in negative y -Richtung. Die Aufhängung der Boje kann vereinfacht als Feder-Masse-Dämpfer-System modelliert werden mit der Federsteifigkeit c und Dämpfungskonstante d . Bei einer Seillänge von l_0 ist die Feder entspannt. Eine Querströmung mit der Stömungsgeschwindigkeit v_w sorgt zusätzlich für einen horizontalen Versatz der Boje. Der Widerstandsbeiwert der Boje ist mit c_w gegeben. Die Größen $l(t)$ und $\alpha(t)$ bezeichnen jeweils die Seillänge und den Auslenkungswinkel der Boje.

10 P. |

Hinweis: Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, Kreisfläche: $A = \pi r^2$.

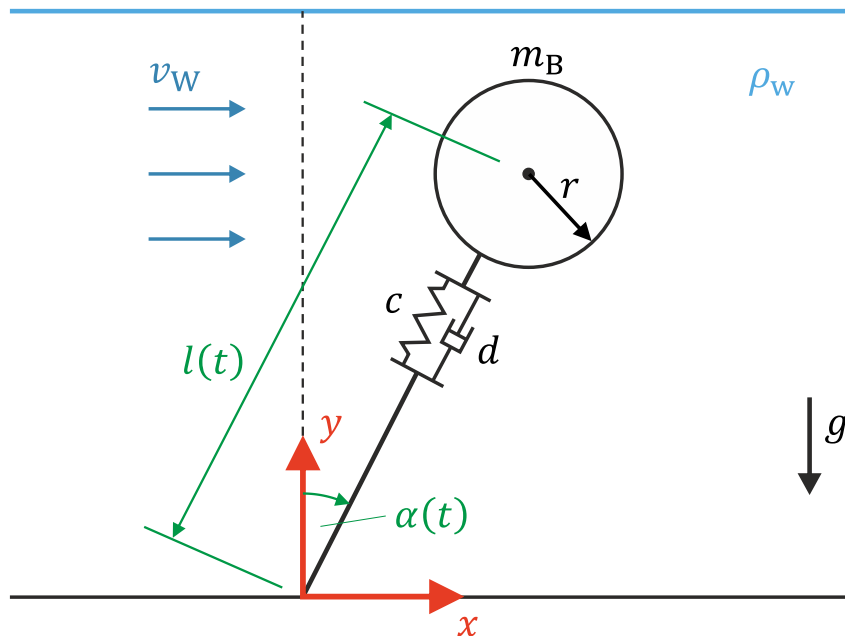


Abbildung 4: Eingetauchte Boje.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die zwei Freiheitsgrade $l(t)$ und $\alpha(t)$ auf. Es kann davon ausgegangen werden, dass eine Widerstandskraft nur in Folge von v_w wirkt. 4 P. |
- Berechnen Sie die stationäre Lösung und bestimmen Sie den Auslenkungswinkel α und die Seillänge l in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit v_w . 3 P. |
- Nehmen Sie nun an, dass sich die Seillänge infolge von Turbulenzen mit $l(t) = l_0 + B \cos(\omega t)$ bei konstantem Winkel $\alpha(t) = \alpha$ verändert. Berechnen Sie die potentielle Energie $V(t)$ sowie die kinetische Energie $T(t)$ des Gesamtsystems und bestimmen Sie die Zeitpunkte t zu denen die Kinetische Energie verschwindet. 3 P. |

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}m_B l^2(t) \ddot{\alpha}(t) &= l(t) \cos(\alpha(t)) f_w + l(t) \sin(\alpha(t)) (f_g - f_a) \\m_B \ddot{l}(t) &= \sin(\alpha(t)) f_w + \cos(\alpha(t)) (f_a - f_g) - f_f - d \dot{l}(t)\end{aligned}$$

$$f_g = m_B g$$

$$f_a = \frac{4}{3} \pi r_B^3 \rho_w g$$

$$f_w = \pi r_B^2 \rho_w c_w \frac{v_w^2}{2}$$

$$f_f = c(l(t) - l_0)$$

b)

$$0 = \cos(\alpha) f_w + \sin(\alpha) (f_g - f_a)$$

$$0 = \sin(\alpha) f_w + \cos(\alpha) (f_a - f_g) - f_f$$

$$\alpha(v_w) = \arctan\left(\frac{\pi r_B^2 \rho_w c_w \frac{v_w^2}{2}}{\frac{4}{3} \pi r_B^3 \rho_w g - m_B g}\right)$$

$$l(v_w) = l_0 + \frac{1}{c} \left(\sin(\alpha(v_w)) \pi r_B^2 \rho_w c_w \frac{v_w^2}{2} + \cos(\alpha(v_w)) \left(\frac{4}{3} \pi r_B^3 \rho_w g - m_B g \right) \right)$$

c)

$$l(t) = l_0 + B \cos(\omega t)$$

$$\dot{l}(t) = -B\omega \sin(\omega t)$$

$$V(t) = m_B g \cos(\alpha) (l_0 + B \cos(\omega t)) + \frac{c}{2} B^2 \cos^2(\omega t)$$

$$T(t) = \frac{m_B}{2} B^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{m_B}{2} B^2 \omega^2 \sin^2(\omega t), \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}$$