

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 11.04.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	15,5	17,5	7	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 ist schematisch ein Hinterbau eines Mountainbikes dargestellt. Er besteht aus einer Schwinge, die aus zwei starr verbundenen Teilen mit den Längen L_3 und L_4 besteht und sich um die Achse z_0 mit dem Winkel β dreht (das Schema ist für $\beta = 0$ dargestellt). Am Ende der Schwinge ist eine Kassette mit Radius r_2 und der Masse m_2 befestigt und wird mit einem externem Drehmoment τ_e belastet. Die Kassette wird über ein Kettenblatt mit Radius r_1 von einer Kette angetrieben, wobei der Fahrer ein Drehmoment τ_k aufbringt. Betrachten Sie nur den oberen (gespannten) Teil der Kette, da der untere keine Last überträgt. Der Hinterbau ist mit einer linearen Feder mit entspannter Länge $L_{f,0}$ für $\beta = 0$ und Federsteifigkeit c_f gefedert. Es wird angenommen, dass die Feder so angebracht ist, dass sie immer eine Kraft ausschließlich in x_0 -Richtung ausübt. Die Schwerkraft wirkt in die negative y_0 -Richtung.

Hinweis: Der Winkel α ist bezogen auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Kassette und Kettenblatt. Die Aufgaben d), e) und f) können unabhängig voneinander gelöst werden.

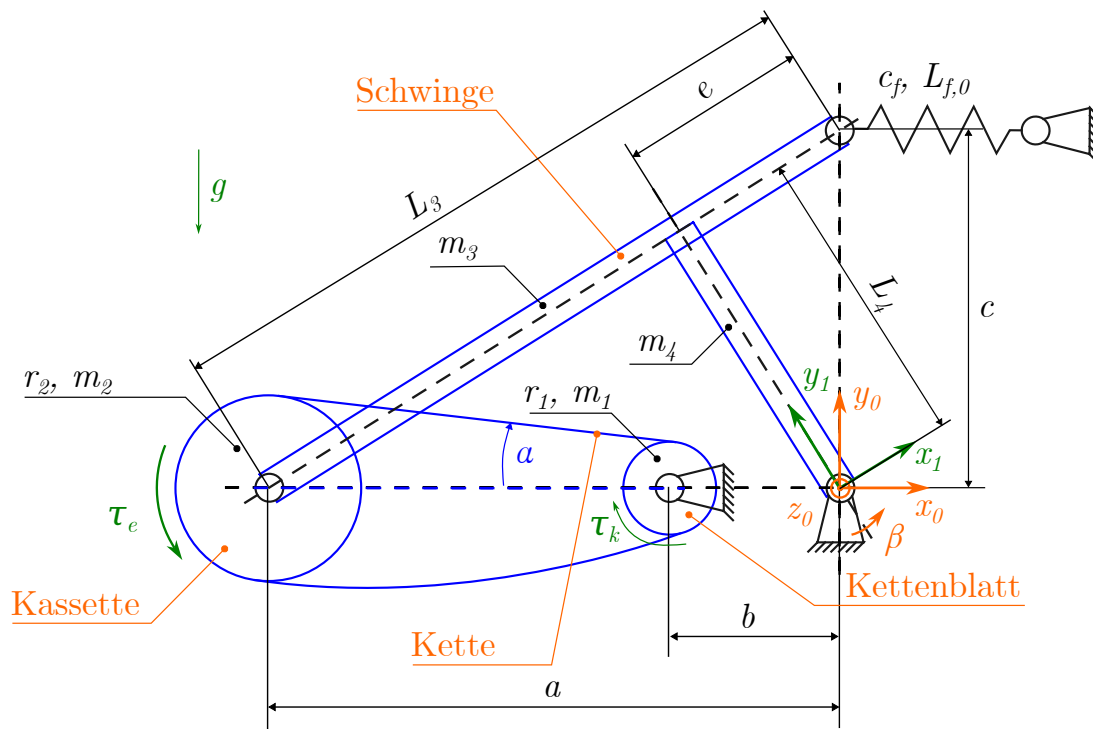


Abbildung 1: Hinterbau eines Mountainbikes mit Drehpunkt z_0 für $\beta = 0$.

- a) Schneiden Sie die Schwinge, die Kassette und das Kettenblatt frei. Zeichnen Sie die Körper mit allen relevanten Kräften und Momenten. 3 P. |

Nehmen Sie für die folgende Angaben an, dass $\gamma \approx \beta$ gilt, wie im Abbildung 2.

- b) Stellen Sie das Kräftegleichgewicht auf, wenn das System stationär ist. Nehmen Sie an, dass die Schwinge masselos ist ($m_3 = m_4 = 0$). 3 P. |
- c) Berechnen Sie eine Funktion des Drehwinkels β in Abhängigkeit vom Fahrer-drehmoment τ_k und anderen bekannten Größen. Verwenden Sie die Kleinwinkel-Näherung mit $\sin(\alpha) \approx \alpha$, $\cos(\alpha) \approx 1$, $\sin(\alpha \pm \beta) \approx \alpha \pm \beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) \approx 1$. Zusätzlich wird angenommen, dass die Schwinge masselos ist ($m_3 = m_4 = 0$). 4 P. |

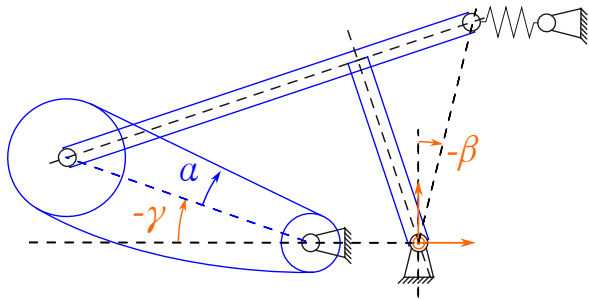


Abbildung 2: Hinterbau eines Mountainbikes für negativ β .

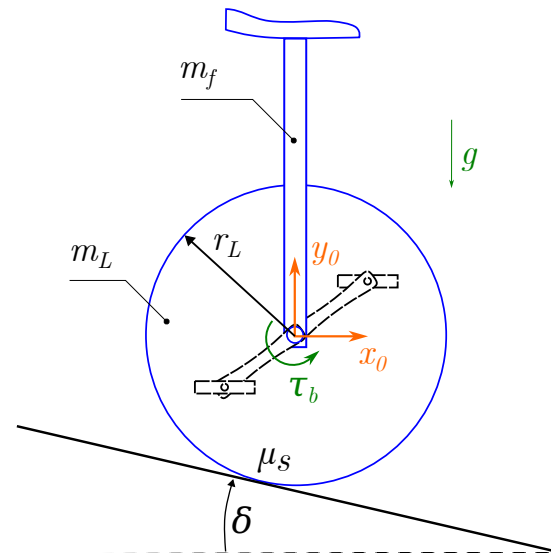


Abbildung 3: Einrad rollt eine Neigung hinunter.

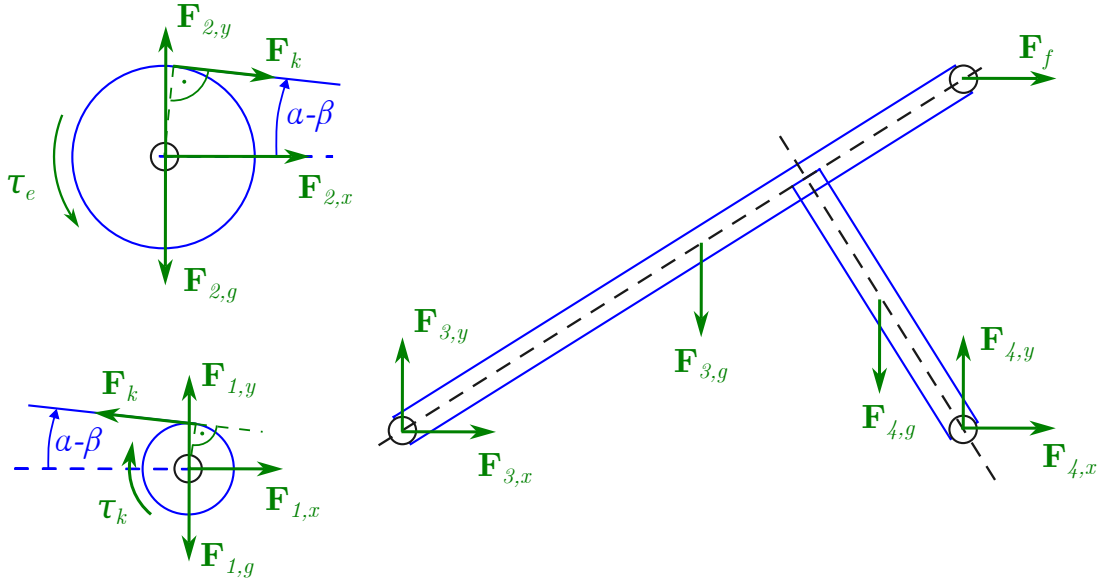
- d) Berechnen Sie den Gesamtschwerpunkt der Schwinge $\mathbf{r}_s = [r_{sx}, r_{sy}]^T$ im Koordinatensystem x_1y_1 . 2 P. |

Für die folgenden Aufgaben betrachten Sie ein Einrad, das wie in Abbildung 3 eine konstante Neigung mit dem Winkel δ hinunterrollt. Der Sitz mit dem Fahrer wird immer parallel zur Richtung y_0 gehalten, hat eine Gesamtmasse von m_f und der Fahrer kann ein Bremsmoment τ_b aufbringen. Das Rad hat den Radius r_L und die Masse m_L . Nehmen Sie an, das Rad rollt ohne zu Rutschen mit einem Haftreibungskoeffizienten μ_s .

- e) Bestimmen Sie das Drehmoment τ_b , so dass die Geschwindigkeit des Rades konstant ist. Nehmen Sie dazu an, dass das Rad rollt, ohne zu rutschen. 2,5 P. |
- f) Berechnen Sie den maximalen Neigungswinkel der Ebene, den das Rad ohne zu Rutschen hinabrollen kann, für einen gegebenen Reibungskoeffizienten μ_s . 1 P. |

Lösung:

a) Der Freischnitt



b) Kettenblatt:

$$\sum F_x : F_{1,x} - F_k \cos(\alpha - \beta) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : F_{1,y} + F_k \sin(\alpha - \beta) - F_{1,g} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau : F_k r_1 - \tau_k = 0 \quad (3)$$

Kassette:

$$\sum F_x : F_{2,x} + F_k \cos(\alpha - \beta) = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y : F_{2,y} - F_k \sin(\alpha - \beta) - F_{2,g} = 0 \quad (5)$$

$$\sum \tau : -F_k r_2 + \tau_e = 0 \quad (6)$$

Schwinge:

$$\sum F_x : F_{3,x} + F_f + F_{4,x} = 0 \quad (7)$$

$$\sum F_y : F_{3,y} - F_{4,y} = 0 \quad (8)$$

$$\sum \tau : -F_{3,y} a \cos(\beta) + F_{3,x} a \sin(\beta) - F_f c \cos(\beta) = 0 \quad (9)$$

$$F_{3,x} = -F_{2,x}, \quad F_{3,y} = -F_{2,y} \quad (10)$$

$$F_f \approx \beta \cdot c \cdot c_f \quad (11)$$

c) Ergebnis nach Substitution der Gleichungen 4, 5, 10 und 11 in die Drehmomentgleichung 9 und unter Nutzung der Kleinwinkel-Näherung:

$$\beta = \frac{a}{c^2 c_f} \left(\frac{\tau_k}{r_1} \alpha + m_2 g \right) \quad (12)$$

d) Schwerpunkt $\mathbf{r}_s = [r_{sx}, r_{sy}]^T$

$$\mathbf{r}_s = \left[\frac{(e-L_3/2)m_3}{m_3+m_4}, \frac{m_4 L_4/2 + L_4 m_3}{m_3+m_4} \right]^T \quad (13)$$

e)

$$\tau_b = (m_f + m_L)g \, r_L \sin(\delta) \tag{14}$$

f)

$$\delta_{max} = \arctan(\mu_s) \tag{15}$$

2. In Abbildung 4 ist ein Roboter schematisch dargestellt. Das System hat die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. Gelenke und Glieder werden als masselos betrachtet. Die Federsteifigkeit beider Federn ist c_f und die entspannte Länge 0. Der Endeffektor E besitzt die Trägheiten $\mathbf{I}_e = \text{diag}([I_x, I_y, I_z])$ im Endeffektor Koordinatensystem und die Masse m_e . Das Koordinatensystem 2 entspricht 1, ist aber um q_2 verdreht. Der Winkel $\alpha = -30^\circ$. Die Erdbeschleunigung g wirkt in die negative x_0 -Richtung. 17,5 P. |

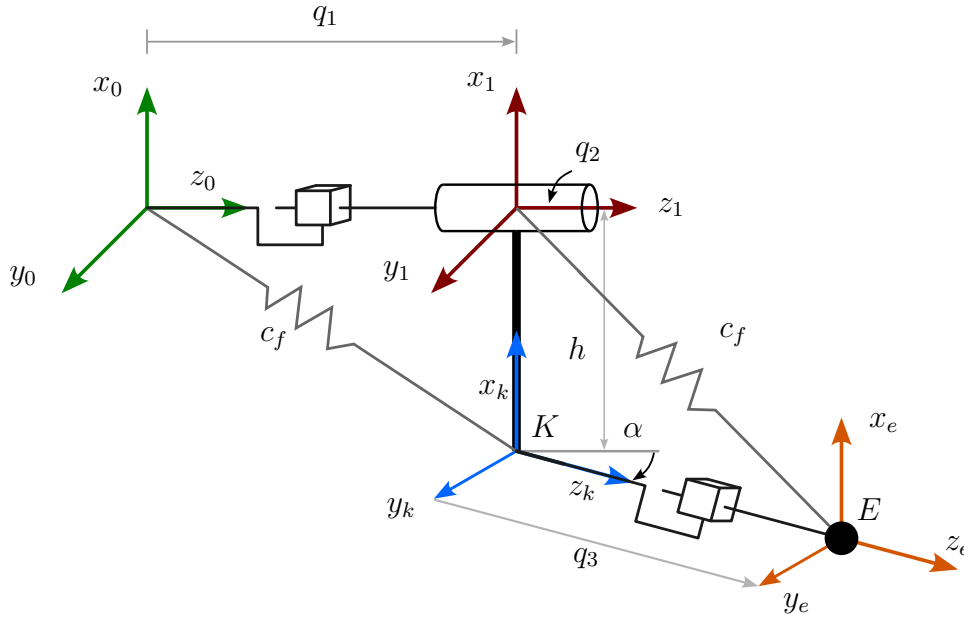


Abbildung 4: Schema eines Roboters.

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^k, \mathbf{H}_k^e$ zwischen den jeweiligen Koordinatensystemen an. Berechnen Sie auch $\mathbf{H}_0^e$ vom Endeffektor System zum Koordinatensystem 0. Verwenden Sie dabei $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} = w$, $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$, und beachten Sie, dass $1 = w^2 + \frac{1}{4}$ gilt. 4 P. |
- b) Geben Sie die Manipulator Jacobi Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^e$ und die Manipulator Jacobi Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^e$ des Endeffektors an. 4 P. |
- c) Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Systems. 4,25 P. |
- d) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 2,5 P. |
- e) Im Punkt E greift das Drehmoment $\boldsymbol{\tau}_0 = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ gegeben im Basiskoordinatensystem 0 an. Berechnen Sie die verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_q$ des Systems in den Gelenken. 2,75 P. |

Lösung: $s_2 = \sin(q_2)$, $c_2 = \cos(q_2)$

a)

$$\mathbf{H}_0^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 w & -\frac{s_2}{2} & -\frac{s_2 q_3}{2} - c_2 h \\ s_2 & c_2 w & \frac{c_2}{2} & \frac{c_2 q_3}{2} - s_2 h \\ 0 & -\frac{1}{2} & w & w q_3 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{J}_{v,0}^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_2 q_3}{2} + s_2 h & -\frac{s_2}{2} \\ 0 & -\frac{s_2 q_3}{2} - c_2 h & \frac{c_2}{2} \\ 1 & 0 & w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega,0}^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_e & 0 & m_e w \\ 0 & \frac{1}{4} m_e q_3^2 + w^2 I_z + m_e h^2 + \frac{1}{4} I_y & -\frac{m_e h}{2} \\ m_e w & -\frac{m_e h}{2} & m_e \end{bmatrix}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = \frac{(2h^2 + q_1^2 + q_3^2)c_f}{2} - g\left(c_2 h + \frac{s_2 q_3}{2}\right)m_e$$

e)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_q \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} &= \mathbf{f}_q \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_f q_1 \\ m_e g\left(-\frac{c_2 q_3}{2} + s_2 h\right) \\ -\frac{m_e g s_2}{2} + c_f q_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Die Abbildung 5 zeigt ein raketentriebenes Raumfahrzeug. Das Raumfahrzeug wird mit einem Winkel α_0 und einer Anfangsgeschwindigkeit von null gestartet und hat die zeitveränderliche Masse $m_R(t)$, bestehend aus der Leermasse des Fahrzeugs $m_{R,f}$ und der Kraftstoffmasse $m_{ks}(t)$, mit $m_{ks}(t=0) = m_{ks0}$, den aerodynamischen Querschnitt A_R und den Luftwiderstandskoeffizienten C_w .

7 P. |

Das Raumfahrzeug bewegt sich in einem konstanten Gravitationsfeld mit der Beschleunigung g , die in negative y_0 -Richtung wirkt, sowie in Luft mit konstanter Dichte ρ_0 . Das Raketentriebwerk erzeugt für t_r Sekunden einen konstanten Schub und konstante Ausstoßrate $w(t) = w_0$, bis der Treibstoff verbraucht ist. Nehmen Sie an, dass der Winkel α konstant ist, der Schub und der Luftwiderstand immer genau entgegengesetzt zueinander wirken und im Massenschwerpunkt des Raumfahrzeugs angreifen.

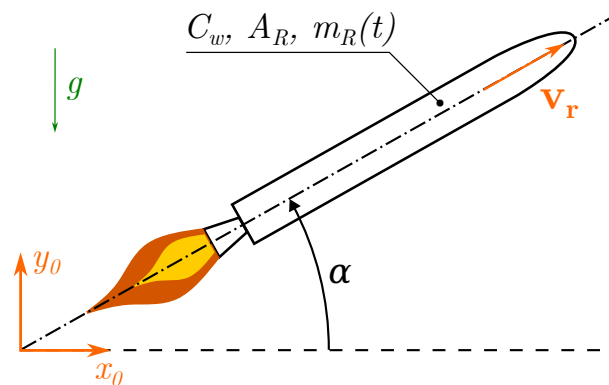


Abbildung 5: Raumfahrzeug während des Aufstiegs.

- a) Zeichnen Sie alle Kräfte, die auf das Raumfahrzeug während seiner Brennphase ($0 \leq t < t_r$) wirken.

1 P. |

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass das Raumfahrzeug so gesteuert wird, dass es eine konstante Ausrichtung α beibehält.

- b) Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Gesamtmasse $m_r(t)$ in Abhängigkeit von t während der Brennphase des Raketentriebwerks, um eine konstante Schubkraft F_r zu erreichen.

2 P. |

- c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Raumfahrzeugs in x_0 - und y_0 -Richtung während der Brennphase ($0 \leq t < t_r$) auf.

2 P. |

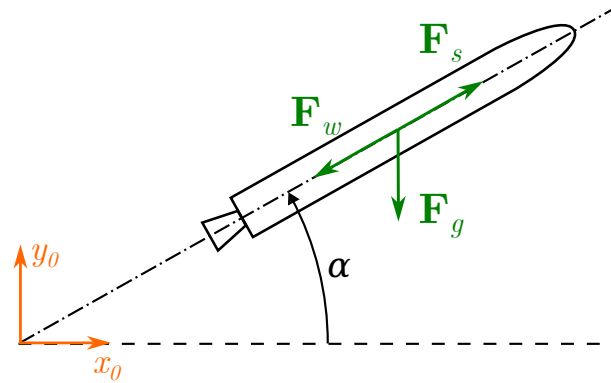
- d) Vernachlässigen Sie den aerodynamischen Widerstand und berechnen Sie den erforderlichen Schub des Raketentriebwerks, um die Geschwindigkeit $v_{term} = \|\mathbf{v}_r(t_r)\|$ bei $t = t_r$ und dem Winkel α_0 zu erreichen.

2 P. |

Hinweis: $\int \frac{1}{ax+b} dt = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$

Lösung:

a) Der Freischnitt



b)

$$f_s = \mu w_0 = \text{konst.} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} m_R = -\mu(t) \quad (17)$$

$$m_R(t) = \int -\mu dt = m_{ks,0} + m_{R,f} - \mu t \quad (18)$$

c) Für die Tangentialrichtung:

$$\frac{d}{dt} \|v_r\| = \frac{\mu w_0}{m_R(t)} - g \sin(\alpha) - C_w A_r \frac{\rho_f}{2} v_R^2(t) \quad (19)$$

d) Für die Tangentialrichtung:

$$m_{R,0} = m_{ks,0} + m_{R,f} \quad (20)$$

$$v_{term} = \int_0^{t_f} \frac{F_s}{m_{R,0} - \mu t} - g \sin(\alpha) dt = \quad (21)$$

$$= \frac{F_s}{\mu} \ln \left(\frac{m_{R,0}}{m_{R,0} - \mu t_r} \right) - g \sin(\alpha) t_r \rightarrow \quad (22)$$

$$\rightarrow F_s = - \frac{\mu}{\ln \left(\frac{m_{R,0}}{m_{R,0} - \mu t_r} \right)} [v_{term} + g \sin(\alpha) t_R] \quad (23)$$