

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 11.09.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	9	20	11	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Auf der symmetrischen Doppelschräge mit Neigungswinkel α befinden sich eine homogene Walze der Masse m_1 und des Radius r sowie ein Klotz der Masse m_2 . Beide Körper sind über ein masseloses, unelastisches Seil verbunden, das am Scheitelpunkt über eine reibungsfreie, masselose Rolle geführt wird und im Mittelpunkt der Walze angreift.

Die Walze berührt im betrachteten Grenzfall nur noch die glatte Kante K der fest mit dem Untergrund verbundenen Stufe. Die von K zum Walzenmittelpunkt gerichtete Verbindungslinie schließt mit der nach außen gerichteten Normalen der rechten Schräge den Winkel β ein. Am Klotz wirkt hangabwärts die Kraft F . Zwischen Klotz und Ebene wirkt Haftreibung mit dem Koeffizienten μ_0 .

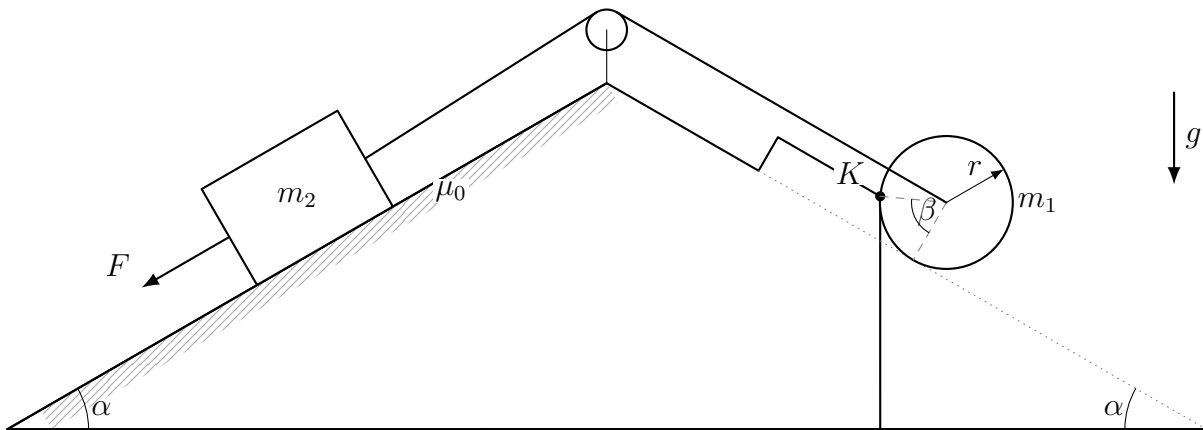


Abbildung 1: Doppelschräge mit einer fest in den rechten Untergrund integrierten Stufe. Im Grenzfall berührt die Walze nur die Kante K ; die gepunktete Linie kennzeichnet die Fortsetzung der unteren Bahn.

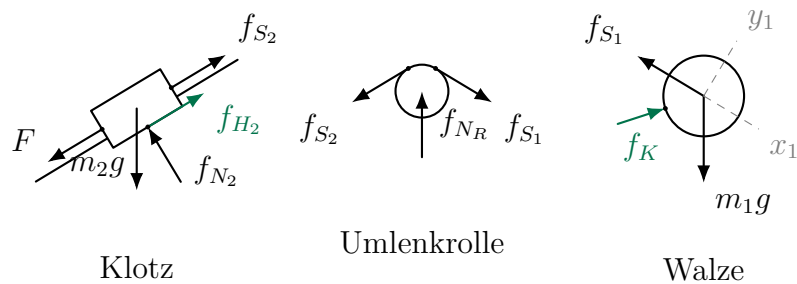
- Schneiden Sie den Klotz, die Umlenkrolle und die Walze in der gezeichneten Situation frei. Tragen Sie alle Kräfte ein. 3 P. |
- Bestimmen Sie die auf die Walze wirkende Seilkraft $f_{S_1, \text{krit}}$, so dass sich die Walze in der dargestellten Lage im statischen Gleichgewicht befindet. 3 P. |
- Bestimmen Sie anschließend die Kraft F_{krit} im statischen Grenzfall. 3 P. |

a) **Freischnitte.**

Am Klotz wirken die Gewichtskraft m_2g , die Normalkraft f_{N_2} , die Seilkraft f_{S_2} , die äußere Kraft F und die Haftreibungskraft f_{H_2} . Da F quasistatisch erhöht wird, besteht die Tendenz des Klotzes, hangabwärts zu gleiten; im kritischen Grenzfall wirkt f_{H_2} daher hangaufwärts.

An der masselosen Umlenkrolle wirken die beiden Seilkräfte f_{S_1} und f_{S_2} an den Berührungspunkten des Seils sowie die vertikale Lagerkraft f_{N_R} im Rollenmittelpunkt.

An der Walze wirken im dargestellten Grenzfall die Gewichtskraft m_1g , die Seilkraft f_{S_1} und die Kontaktkraft f_K der Stufenkante. Da die Kante glatt ist, wirkt f_K entlang der Verbindungslinie von K zum Walzenmittelpunkt. Der Kontakt zur unteren Bahn ist bereits verloren; deshalb wirkt dort keine Normalkraft und im Freischnitt wird keine Kraft f_{N_1} eingetragen.



b) **Gleichgewicht der Walze.**

Es wird x_1 hangabwärts und y_1 normal von der Ebene weg positiv gewählt. Da die Walze die untere Bahn nicht mehr berührt, tritt in den folgenden Gleichgewichtsbedingungen keine Normalkraft f_{N_1} auf. Nach der Definition von β besitzt die Kontaktkraft die Komponenten $f_K \sin \beta$ in x_1 -Richtung und $f_K \cos \beta$ in y_1 -Richtung.

Die Gleichgewichtsbedingungen an der Walze lauten:

$$\sum F_{y_1} = 0 : \quad f_K \cos \beta - m_1g \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{x_1} = 0 : \quad -f_{S_1} + f_K \sin \beta + m_1g \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$f_K = \frac{m_1g \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt die kritische Seilkraft

$$\boxed{f_{S_1, \text{krit}} = m_1g(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta).} \quad (4)$$

c) **Gleichgewicht des Klotzes und Haftreibung im statischen Grenzfall.**

Für den Klotz wird die tangentielle Richtung hangaufwärts positiv gewählt. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\sum F_{y_2} = 0 : \quad f_{N_2} - m_2g \cos \alpha = 0, \quad f_{N_2} = m_2g \cos \alpha, \quad (5)$$

$$\sum F_{x_2} = 0 : \quad f_{S_2} + f_{H_2} - m_2g \sin \alpha - F = 0, \quad f_{H_2} = m_2g \sin \alpha + F - f_{S_2}. \quad (6)$$

Im betrachteten Grenzfall ist die Haftreibung vollständig ausgenutzt und wirkt hangaufwärts. Daher gilt

$$f_{H_2} = \mu_0 f_{N_2} = \mu_0 m_2 g \cos \alpha. \quad (7)$$

Da das Seil masselos und die Umlenkrolle reibungsfrei ist, gilt

$$f_{S_1} = f_{S_2} =: f_S. \quad (8)$$

Mit $f_{S_2} = f_{S_1} = f_{S,\text{krit}}$ folgt

$$F_{\text{krit}} = f_{S,\text{krit}} + \mu_0 m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha. \quad (9)$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{F_{\text{krit}} = m_1 g (\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta) - m_2 g (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)}. \quad (10)$$

2. Abbildung 2 zeigt die Schematik eines Hafenkranes. Der Kran besteht aus einer drehbaren Basis mit dem Winkel q_1 , auf der ein Turm mit der Höhe h_T und Trägheitstensor $\mathbf{I}_T = \text{diag}([0, 0, I_{T,zz}])$ bezüglich des körperfesten Koordinatensystems 1 steht. Auf dessen Spitze ist ein Ausleger mit dem fixen Winkel α angebracht. Der Ausleger ist verstellbar mit der Länge q_2 , seine Masse beträgt m_2 und sein Schwerpunkt liegt auf einer Länge $q_2/2$ entlang der x_2 -Achse. Am Ende des Auslegers hängt ein masseloser Stab mit variabler Länge q_4 parallel zur z_0 -Achse nach unten, welcher um den Winkel q_3 verdrehbar ist. Entgegen dieser Drehung wirkt eine lineare Drehfeder mit Federkonstante k_3 , die für $q_3 = 0$ entspannt ist. Am Ende des Stabes ist ein Container mit Masse m_C und Trägheitstensor $\mathbf{I}_C = \text{diag}([I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}])$ bezüglich des Koordinatensystems C im Schwerpunkt des Containers angebracht. Das Koordinatensystem B beschreibt die Position und Orientierung eines Bootes, auf dem der Container abgelegt werden soll. Die Gravitation wirkt in negative z_0 -Richtung.

20 P. |

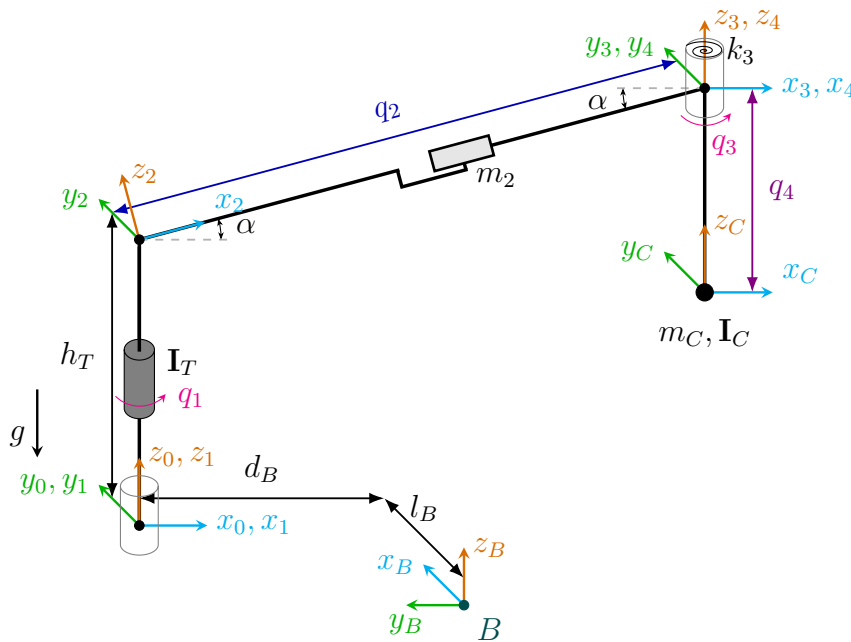


Abbildung 2: Skizze des Hafenkranes für $q_1 = 0$ und $q_3 = 0$.

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems mit den Freiheitsgraden $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ beschrieben werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$, $\mathbf{H}_4^C$, sowie $\mathbf{H}_0^C$. 4 P. |
- Bestimmen Sie die Manipulator Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^C$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^C$ des Containers sowie die translatorische Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^{s2}$ des Schwerpunkts des Auslegers und die rotatorische Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_\omega)_0^1$ des Turmes. 3,5 P. |
- Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Gesamtsystems, wobei die Masse des Turms und der Trägheitstensor des Auslegers vernachlässigt werden. 4 P. |
- Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ und den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 3 P. |
- Um den Container zu drehen, wird eine externe Kraft $\mathbf{f}^e = [f_x, f_y, 0]^T$, definiert im Koordinatensystem 0, am Punkt $\mathbf{p}_C^e = [x_f, 0, 0]^T$ im Koordinatensystem C eingeprägt. Berechnen Sie den resultierenden Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_{q,e}(\mathbf{q})$. 2 P. |

Für die weiteren Berechnungen ist folgende homogene Transformation vom Koordinatensystem 0 zum Boot-Koordinatensystem B gegeben

$$\mathbf{H}_0^B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_B \\ 1 & 0 & 0 & -l_B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- f) Berechnen Sie die homogene Transformation $\mathbf{H}_B^C$ vom Boot-Koordinatensystem B zum Container-Koordinatensystem C . 1 P. |
- g) Berechnen Sie die translatorische Manipulator Jacobi-Matrix des Containers im Boot-Koordinatensystem $(\mathbf{J}_v)_B^C$. 1 P. |
- h) Das Boot bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_{x,B}$ in positive x_B -Richtung relativ zum Container. Mit welchen verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ muss sich der Kran bewegen, damit keine Relativbewegung in x_B - und y_B -Richtung auftritt? 1,5 P. |

a) **Homogene Transformationen:**

Die Definitionsrichtung von α ist nicht eindeutig. Sowohl eine positive Drehung um die y_1 -Achse als auch eine negative Drehung ist zulässig und die gegengleiche Drehung um die y_3 -Achse. Im weiteren ist eine positive Drehung um y_1 und eine negative um y_3 angenommen.

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha & h_T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & -s_\alpha & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_\alpha & 0 & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_4^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

Für $\mathbf{H}_0^C = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3 \mathbf{H}_3^4 \mathbf{H}_4^C$:

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_3 - s_1 c_3 & 0 & c_1 c_\alpha q_2 \\ c_1 s_3 + s_1 c_3 & c_1 c_3 - s_1 s_3 & 0 & s_1 c_\alpha q_2 \\ 0 & 0 & 1 & h_T - s_\alpha q_2 - q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

b) **Manipulator Jacobi-Matrizen:**

$$(\mathbf{J}_v)_0^C = \begin{bmatrix} -s_1 c_\alpha q_2 & c_1 c_\alpha & 0 & 0 \\ c_1 c_\alpha q_2 & s_1 c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -s_\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^{s2} = \begin{bmatrix} -\frac{s_1 c_\alpha q_2}{2} & \frac{c_1 c_\alpha}{2} & 0 & 0 \\ \frac{c_1 c_\alpha q_2}{2} & \frac{s_1 c_\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s_\alpha}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

c) **Massenmatrix des Systems M:**

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_{C,t} + \mathbf{M}_{C,r} + \mathbf{M}_{2,t} + \mathbf{M}_{T,r} \quad (17)$$

Translatorischer Anteil Container:

$$\mathbf{M}_{C,t} = \begin{bmatrix} m_C q_2^2 c_\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_C & 0 & s_\alpha m_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_\alpha m_C & 0 & m_C \end{bmatrix} \quad (18)$$

Rotatorischer Anteil Container mit $\mathbf{I}_C = \text{diag}([I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}])$:

$$\mathbf{M}_{C,r} = \begin{bmatrix} I_{zz} & 0 & I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{zz} & 0 & I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Translatorischer Anteil Ausleger:

$$\mathbf{M}_{2,t} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 q_2^2 c_\alpha^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Rotatorischer Anteil Turm mit $\mathbf{I}_C = \text{diag}([0, 0, I_{T,zz}])$:

$$\mathbf{M}_{C,r} = \begin{bmatrix} I_{T,zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Gesamt:

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{q_2^2 c_\alpha^2 (m_2 + 4m_C)}{4} + I_z + I_T & 0 & I_z & 0 \\ 0 & m_C + \frac{m_2}{4} & 0 & s_\alpha m_C \\ I_z & 0 & I_z & 0 \\ 0 & s_\alpha m_C & 0 & m_C \end{bmatrix} \quad (22)$$

d) Potentielle Energie:

$$V(\mathbf{q}) = -\frac{g q_2 (m_2 + 2m_C) s_\alpha}{2} + ((h_T - q_4) m_C + m_2 h_T) g + \frac{k_3 q_3^2}{2} \quad (23)$$

Vektor der Potentialkräfte:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g s_\alpha \left(-\frac{m_2}{2} - m_C \right) \\ k_3 q_3 \\ -m_C g \end{bmatrix} \quad (24)$$

e) Resultierender Vektor der verallgemeinerte Kräfte:

$$\mathbf{f}_{q,e}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_f((c_3 f_y - f_x s_3) c_1 - s_1(c_3 f_x + f_y s_3)) + q_2 c_\alpha(c_1 f_y - f_x s_1) \\ c_\alpha(c_1 f_x + f_y s_1) \\ x_f((-c_1 f_x - f_y s_1) s_3 + (c_1 f_y - f_x s_1) c_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

f) Homogene Transformation von Boot zu Ursprung:

$$\mathbf{H}_B^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & l_B \\ -1 & 0 & 0 & d_B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Homogene Transformation von Boot zu Container:

$$\mathbf{H}_B^C = \begin{bmatrix} c_1 s_3 + s_1 c_3 & c_1 c_3 - s_1 s_3 & 0 & s_1 c_\alpha q_2 + l_B \\ -c_1 c_3 + s_1 s_3 & c_1 s_3 + s_1 c_3 & 0 & -c_1 c_\alpha q_2 + d_B \\ 0 & 0 & 1 & h_T - s_\alpha q_2 - q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

g) *Manipulator Jacobi-Matrix:*

$$(\mathbf{J}_\omega)_B^C = R_B^0(\mathbf{J}_\omega)_0^C = \begin{bmatrix} c_1 c_\alpha q_2 & s_1 c_\alpha & 0 & 0 \\ s_1 c_\alpha q_2 & -c_1 c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -s_\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

h) *Verallgemeinerte Geschwindigkeiten:*

$$\dot{q}_1 = \frac{c_1 v_{x,B}}{q_2 c_\alpha} \quad (29)$$

$$\dot{q}_2 = v_{x,B} \frac{s_1}{c_\alpha} \quad (30)$$

3. Das in Abbildung 3 dargestellte vereinfachte Fahrwerksmodell besteht aus einem homogenen Balken AB der Länge l und Masse m_L , der im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert ist. Im Punkt B befindet sich das als Punktmasse m_R modellierte Rad.

Im Mittelpunkt C des Balkens greift ein vertikal wirkendes Feder-Dämpfer-Element mit der Federsteifigkeit c und der Dämpfungskonstante d an. Dessen oberer Angriffspunkt K ist horizontal reibungsfrei geführt. Während des Bodenkontakts wirkt auf das Rad die Normalkraft $F_N(t)$. Als generalisierte Koordinate dient der Winkel $\varphi(t)$. Für $\varphi = 0$ ist die Feder entspannt.

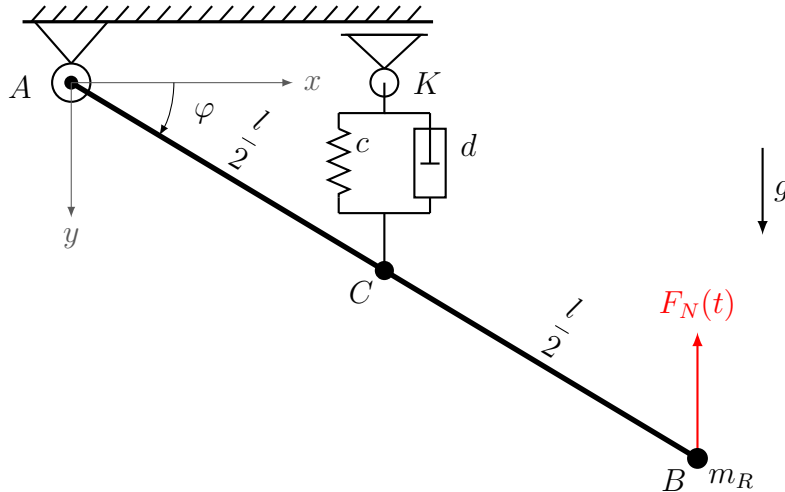


Abbildung 3: Vereinfachtes Fahrwerksmodell.

- Bestimmen Sie die vertikalen Positionen y_B und y_C sowie die Geschwindigkeiten $\dot{y}_B$ und $\dot{y}_C$ der Punkte B und C . 1 P. |
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment $J_L^{(C)}$ des Balkens bezüglich seines Schwerpunktes C . Bestimmen Sie anschließend das gesamte Massenträgheitsmoment J_{ges} des Systems bezüglich des Punktes A . 2 P. |
- Stellen Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung des Systems für $\varphi(t)$ auf. Berücksichtigen Sie dabei die Feder- und Dämpferkräfte, die Gewichtskräfte sowie die Bodenkontaktkraft $F_N(t)$. 5 P. |
- Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potenzielle Energie V des Systems. 2 P. |
- Zeigen Sie, dass für die zeitliche Änderung der mechanischen Energie $E = T + V$ gilt: 1 P. |

$$\dot{E} = -F_N(t)\dot{y}_B - d\dot{y}_C^2.$$

a) **Kinematik.**

Mit der nach unten positiven y -Achse folgt aus der Geometrie des starren Arms

$$\boxed{y_B = l \sin \varphi} \quad \text{und} \quad \boxed{y_C = \frac{l}{2} \sin \varphi}.$$

Durch zeitliche Ableitung erhält man

$$\boxed{\dot{y}_B = l \cos \varphi \dot{\varphi}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{y}_C = \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}}.$$

b) **Massenträgheitsmoment.**

Für den homogenen Fahrwerksarm ergibt sich mit dem Satz von Steiner

$$J_{A,L} = J_S + m_L \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m_L l^2 + \frac{1}{4} m_L l^2 = \frac{1}{3} m_L l^2.$$

Das Rad wird als Punktmasse im Abstand l von A modelliert:

$$J_{A,R} = m_R l^2.$$

Damit folgt

$$\boxed{J_{\text{ges}} = \left(\frac{1}{3} m_L + m_R \right) l^2}.$$

c) **Nichtlineare Bewegungsgleichung.**

Momente in Richtung des positiv eingezeichneten Winkels φ werden positiv gezählt. Die Federdehnung ist

$$s_F = y_C = \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Somit lautet die Federkraft

$$f_F = -c \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Mit dem horizontalen Hebelarm $\frac{l}{2} \cos \varphi$ folgt das Federmoment bezüglich A

$$\boxed{\tau_F = -c \frac{l^2}{4} \sin \varphi \cos \varphi}.$$

Für den Dämpfer gilt

$$f_D = -d \dot{y}_C = -d \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

Das Dämpfermoment ist somit

$$\boxed{\tau_D = -d \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}}.$$

Die Gewichtskraft des Rades erzeugt das Moment

$$\boxed{\tau_{g,R} = m_R g l \cos \varphi}$$

und die Gewichtskraft des Fahrwerksarms

$$\tau_{g,L} = m_L g \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Die Bodenkontaktkraft greift im Punkt B an und liefert

$$\tau_N = -F_N(t) l \cos \varphi.$$

Aus der Drehimpulsbilanz bezüglich A

$$J_{\text{ges}} \ddot{\varphi} = \tau_N + \tau_F + \tau_D + \tau_{g,R} + \tau_{g,L}$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} m_L + m_R \right) l^2 \ddot{\varphi} + d \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi} \\ + c \frac{l^2}{4} \sin \varphi \cos \varphi \\ = \left(m_R + \frac{m_L}{2} \right) g l \cos \varphi - F_N(t) l \cos \varphi. \end{aligned}$$

d) **Kinetische und potenzielle Energie.**

Die kinetische Energie des Fahrwerks lautet

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{ges}} \dot{\varphi}^2.$$

Die potenzielle Energie setzt sich aus der Lageenergie und der Federenergie zusammen. Mit $V = 0$ für $\varphi = 0$ gilt

$$V = - \left(m_R + \frac{m_L}{2} \right) g l \sin \varphi + \frac{1}{8} c l^2 \sin^2 \varphi.$$

e) **Zeitliche Änderung der mechanischen Energie.**

Möglichkeit 1: Herleitung. Mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a), c) und d) folgt

$$\dot{E} = J_{\text{ges}} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} - \left(m_R + \frac{m_L}{2} \right) g l \cos \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{4} c l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\varphi}$ liefert daher

$$\dot{E} = -F_N(t) l \cos \varphi \dot{\varphi} - d \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \boxed{-F_N(t) \dot{y}_B - d \dot{y}_C^2}.$$

Möglichkeit 2: Leistungsbilanz. Die zeitliche Änderung der mechanischen Energie ist gleich der von außen zugeführten Leistung abzüglich der dissipierten Leistung:

$$\dot{E} = P_{\text{ext}} - P_{\text{diss}}.$$

Mit $P_{\text{ext}} = -F_N(t) \dot{y}_B$ und $P_{\text{diss}} = d \dot{y}_C^2$ ergibt sich unmittelbar

$$\boxed{\dot{E} = -F_N(t) \dot{y}_B - d \dot{y}_C^2}.$$