

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 29.05.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	12	18	10	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
- ... die Verwendung sämtlicher elektronischer Hilfsmittel (Mobiltelefon, Smartwatch, Taschenrechner etc.) ist nicht gestattet

Viel Erfolg!

1. Abbildung 1a) zeigt einen Roboterarm, dessen Kontaktzylinder (I) gleitend ohne zu rollen auf einer Oberfläche gelagert ist. Er besteht aus dem Kontaktzylinder I mit Radius r_1 , der starr mit dem Glied II der Länge L_2 verbunden ist. Dieses ist über ein Drehgelenk mit dem Glied III der Länge L_3 gekoppelt, das wiederum drehbar im Boden gelagert ist. Betrachten Sie alle drei Körper als masselos. Zwischen Körper I und dem Boden wirkt Haftreibung mit dem Koeffizienten μ_s . Auf Körper I wirkt eine Kraft f_e in x_0 -Richtung, auf Körper III ein Drehmoment M_e .

12 P. |

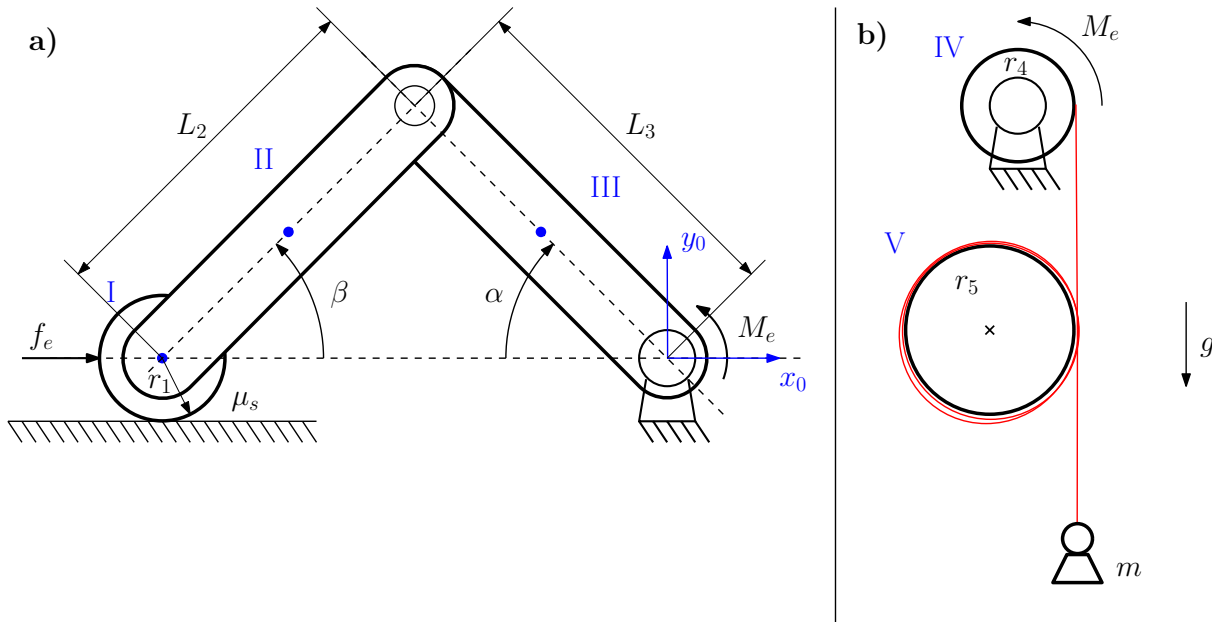


Abbildung 1: a) Roboterarm, b) An einem Seil hängendes Gewicht

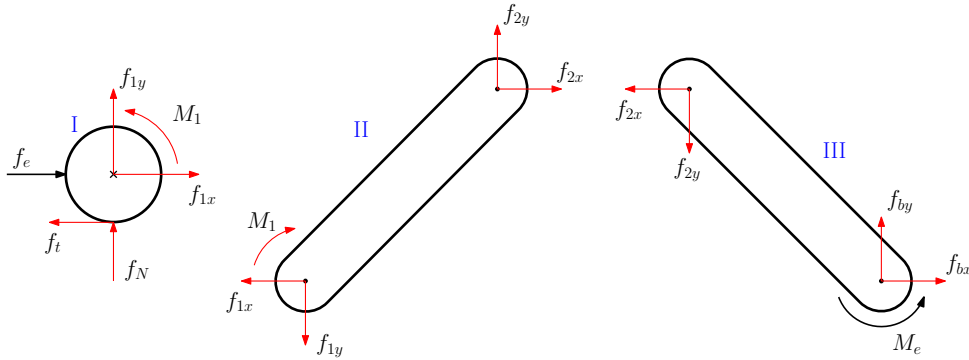
- a) Schneiden Sie den Zylinder I, sowie die Körper II und III frei. Tragen Sie alle relevanten Kräfte und Momente in das Schnittdiagramm ein. 2 P. |
- b) Stellen Sie die Kraft- und Momentenbilanzen für die Körper I, II und III auf. Nehmen Sie dabei an, dass sich das System in Ruhe bleibt. 3 P. |
- c) Gegeben die Kraft f_e sowie die Winkel α und β , berechnen Sie das externe Moment M_e , das aufgebracht werden muss, um das System an der Haftgrenze in Ruhe zu halten. 4 P. |
- d) Bestimmen Sie den Gesamtschwerpunkt $\mathbf{r}_S$ des Systems I+II+III für beliebige α und β im ortsfesten Koordinatensystem (x_0, y_0) . Nehmen Sie für diese Teilaufgabe an, dass die Körper I, II und III die Massen m_1 , m_2 bzw. m_3 besitzen und die individuellen Schwerpunkte sich in der Mitte der jeweiligen Körper befinden (mit blauen Punkten in Abb. 1 markiert). 1 P. |

Im nächsten Aufgabenteil betrachten Sie Abbildung 1b), die ein Gewicht der Masse m zeigt, das an einem Seil hängt, welches um einen feststehenden Zylinder V gewickelt ist und mit der Rolle IV mit Radius r_4 verbunden ist. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Seil und Zylinder V sei μ_s . Auf die Rolle IV wird ein Moment M_e aufgebracht.

- e) Nehmen Sie an, dass das Seil drei Seilumwickelungen um den Körper V aufweist. Wie ist der Haftreibungskoeffizient μ_s zwischen Seil und Zylinder V zu wählen, damit die Masse m stationär bleibt. 2 P. |

Lösung:

a) Freischnitt Skizze:



b) Kontaktzylinder I:

$$\begin{aligned}\Sigma f_x &= f_e + f_{1x} - f_t = 0 \\ \Sigma f_y &= f_{1y} - f_{Ne} + f_N = 0 \\ \Sigma M_z &= M_1 - f_t r_1 = 0 \\ (f_t &\leq \mu_s f_N)\end{aligned}$$

Körper II:

$$\begin{aligned}\Sigma f_x &= f_{2x} - f_{1x} = 0 \\ \Sigma f_y &= f_{2y} - f_{1y} = 0 \\ \Sigma M_z &= f_{2y} L_2 \cos(\beta) - f_{2x} L_2 \sin(\beta) - M_1 = 0\end{aligned}$$

Körper III:

$$\begin{aligned}\Sigma f_x &= f_{bx} - f_{2x} = 0 \\ \Sigma f_y &= f_{by} - f_{2y} = 0 \\ \Sigma M_z &= M_e + f_{2y} L_3 \cos(\alpha) + f_{2x} L_3 \sin(\alpha) = 0\end{aligned}$$

c)

$$M_e = f_e L_3 \frac{\mu_s r_1 \sin(\alpha) + L_2 \sin(\beta) \cos(\alpha) + L_2 \sin(\alpha) \cos(\beta)}{\mu_s r_1 + L_2 \cos(\beta) + \mu_s L_2 \sin(\beta)}$$

$$d) \mathbf{r}_S = \left[\frac{-m_1(L_2 \cos \beta + L_3 \cos \alpha) - m_2\left(\frac{L_2}{2} \cos \beta + L_3 \cos \alpha\right) - m_3\left(\frac{L_3}{2} \cos \alpha\right)}{\frac{\frac{L_2}{2} m_2 \sin \beta + \frac{L_3}{2} m_3 \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3}} \right]$$

$$\begin{aligned}e) \text{ Für } mg > \frac{M_e}{r_4} &\Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{6\pi} \ln\left(\frac{r_4 mg}{M_e}\right) \\ \text{Für } mg < \frac{M_e}{r_4} &\Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{6\pi} \ln\left(\frac{M_e}{r_4 mg}\right)\end{aligned}$$

2. Abbildung 2 zeigt einen an einer elastischen Brücke (Masse m_B) deckenmontierten seriellen Roboter mit drei Freiheitsgraden über einem Wellenbecken. Die Brücke verschiebt sich in x_0 -Richtung; die Elastizität wird beidseitig durch je eine Linearfeder (Steifigkeit k_l, k_r , entspannte Länge x_{B0}) und einen viskosen Dämpfer (b_l, b_r) modelliert. Der Roboter besteht aus drei seriell verbundenen Gliedern der Länge d_1, d_2, d_3 mit Punktmassen m_1, m_2, m_3 in deren Schwerpunkten und Trägheitsmomenten $\mathbf{I}_1 = \text{diag}(I_1, I_1, I_1)$, $\mathbf{I}_2 = \text{diag}(I_2, I_2, I_2)$, $\mathbf{I}_3 = \text{diag}(I_3, I_3, I_3)$. Das erste Gelenk q_1 liegt um d_0 unterhalb der Brückenaufhängung. Am Endeffektor ist eine kugelförmige Boje (Radius r_b , Masse m_b) befestigt, deren Mittelpunkt im Endeffektorpunkt $\mathbf{p}_e$ liegt. Die Boje ist in einem Wellenbecken (Wasserdichte ρ_w , ruhende Wasseroberfläche bei $z = -h$) teilweise eingetaucht; zusätzlich wirkt die Wellenkraft $\mathbf{F}_w = [F_{wx}, F_{wy}, F_{wz}]^T$ an der Boje. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z_0 -Richtung. Verallgemeinerte Koordinaten: $\mathbf{q} = [x_B, q_1, q_2, q_3]^T$.

18 P. |

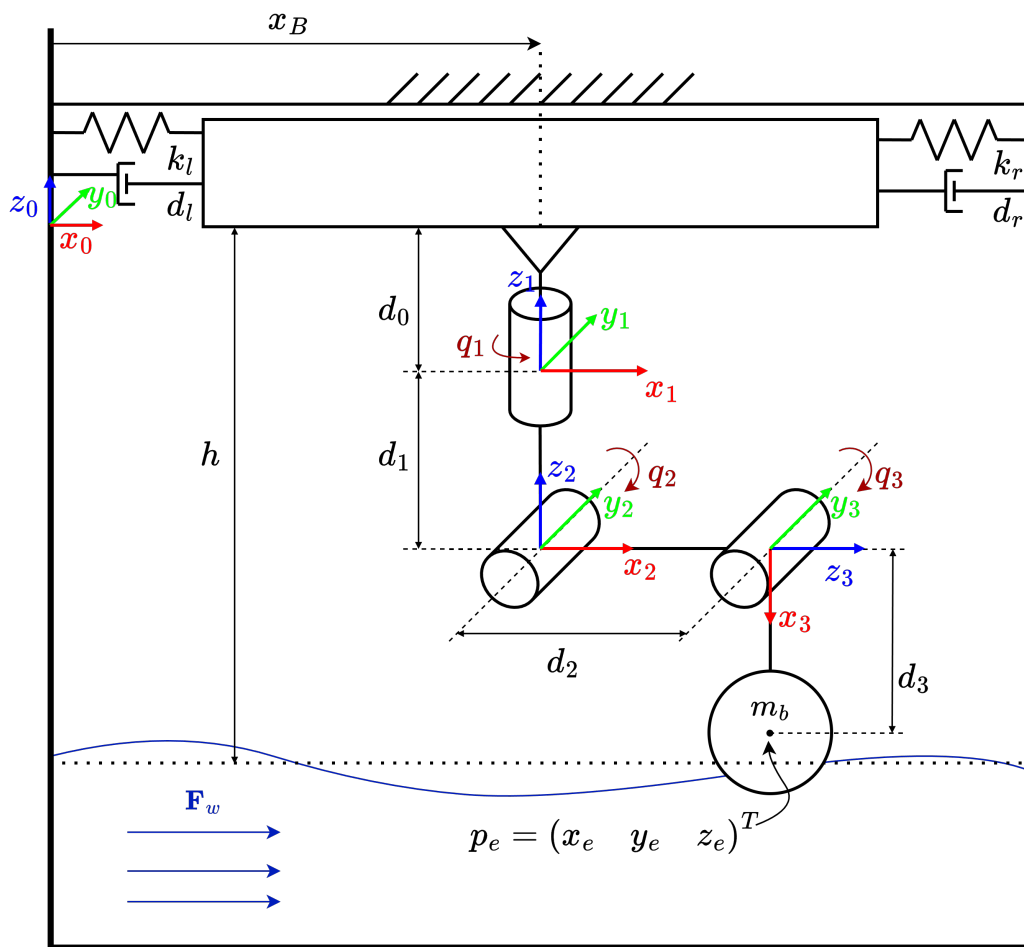


Abbildung 2: Deckenmontierter Roboter über Wellenbecken mit elastischer Brücke (Federn k_l, k_r , Dämpfer b_l, b_r) und kugelförmiger Boje am Endeffektor.

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^3$ zwischen den jeweiligen Koordinatensystemen an. Berechnen Sie $\mathbf{H}_0^3$.

3 P. |

Nehmen Sie nun an, dass der Roboter stets in der x_0 - z_0 -Ebene agiert, d. h. $q_1 = 0$. Für die folgenden Aufgaben b)–g) reduzieren sich die verallgemeinerten Koordinaten

daher auf $\mathbf{q} = [x_B, q_2, q_3]^T$. Verwenden Sie die unten angegebene Transformation:

$$\mathbf{H}_0^e \Big|_{q_1=0} = \begin{bmatrix} -s_{23} & 0 & c_{23} & x_B + d_2 c_2 - d_3 s_{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_{23} & 0 & -s_{23} & -d_0 - d_1 - d_2 s_2 - d_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abkürzungen: $c_x = \cos q_x$, $s_x = \sin q_x$, $c_{xy} = \cos(q_x + q_y)$, $s_{xy} = \sin(q_x + q_y)$.

- b) Berechnen Sie die translatorische Manipulator-Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ des Endeffektors für $q_1 = 0$. 2 P. |
- c) Geben Sie den Berechnungsvorschlag für die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für das betrachtete System an. Berechnen Sie den Eintrag M_{11} in Abhängigkeit der gegebenen Größen. 2 P. |
- d) Stellen Sie die Gleichung der potentiellen Energie auf. Untersuchen Sie den Einfluss der Roboterbewegung auf die potentielle Energie der Feder und begründen Sie, welche verallgemeinerten Koordinaten die Federenergie beeinflussen. 3 P. |
- e) Zeichnen Sie den Freischnitt der Boje. Leiten Sie die eingetauchte Höhe $h_{\text{sub}}(\mathbf{q})$ und die Auftriebskraft $F_A = \rho_w g V_{\text{sub}}$ her, wobei das Kugelkap-Volumen $V_{\text{sub}} = \frac{\pi}{3} h_{\text{sub}}^2 (3r_b - h_{\text{sub}})$ ist. Bestimmen Sie anschließend aus dem statischen Kräftegleichgewicht der Boje die Reaktionskraft $\mathbf{F}_R$ im Weltkoordinatensystem (Koordinaten System 0). 2.5 P. |
- f) Die am Endeffektor angreifende äußere Gesamtkraft sei nun das bestimmte $\mathbf{F}_R$, abhängig von Wellen- und Auftriebskraft. Berechnen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte. Leiten Sie aus der x_B -Komponente der statischen Gleichgewichtsbedingung $\nabla_{\mathbf{q}} V = \mathbf{f}_q + \boldsymbol{\tau}$ mit $\boldsymbol{\tau} = [0, \tau_2, \tau_3]^T$ (Brücke ungeregelt) die Ruhelage x_B^* symbolisch her. Geben Sie zusätzlich die erforderlichen Gelenkmomente $\tau_k = \partial V / \partial q_k - (f_q)_k$ für $k = 2, 3$ symbolisch an. 2.5 P. |
- g) Die Boje soll trotz der welleninduzierten Brückenbewegung $\dot{x}_B \neq 0$ stationär bleiben ($\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{0}$). Bestimmen Sie die hierfür erforderlichen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{q}_2, \dot{q}_3$ symbolisch. 3 P. |

Lösung:

a) Homogene Transformationen. Mit $c_i = \cos q_i$, $s_i = \sin q_i$:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & x_B \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & c_3 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zwischenergebnis $\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3$:

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 c_{23} & x_B + c_1 d_2 c_2 \\ -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 c_{23} & s_1 d_2 c_2 \\ -c_{23} & 0 & -s_{23} & -d_0 - d_1 - d_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Jacobi-Matrix.

Mit $\mathbf{q} = [x_B, q_2, q_3]^T$ und $q_1 = 0$ folgt $(\mathbf{J}_v)_0^e = \partial \mathbf{p}_e / \partial \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$(\mathbf{J}_v)_0^e \Big|_{q_1=0} = \begin{bmatrix} 1 & -d_2 s_2 - d_3 c_{23} & -d_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 c_2 + d_3 s_{23} & d_3 s_{23} \end{bmatrix}.$$

Die zweite Zeile (y -Richtung) ist identisch Null, da der Roboter bei $q_1 = 0$ ausschließlich in der x_0 - z_0 -Ebene operiert.

c) Massenmatrix. Allgemeine Form:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = m_B \mathbf{J}_B^T \mathbf{J}_B + \sum_{i=1}^3 \left(m_i \mathbf{J}_{v,S_i}^T \mathbf{J}_{v,S_i} + I_i \mathbf{J}_{\omega,i}^T \mathbf{J}_{\omega,i} \right) + m_b (\mathbf{J}_v)_0^{eT} (\mathbf{J}_v)_0^e.$$

Spalte 0 jeder Translations-Jacobi ist konstant $[1, 0, 0]^T$ (alle Körper folgen der Brücke in x), daher

$$M_{00} = m_B + m_1 + m_2 + m_3 + m_b = \text{konst.}$$

d) Potentielle Energie. Aus der gegebenen $\mathbf{H}_0^e \Big|_{q_1=0}$ liest man die Schwerpunkthöhen ab:

$$\begin{aligned} z_{S,1} &= -d_0 - \frac{d_1}{2} \quad (\text{konfigurationsunabhängig}), \\ z_{S,2} &= -d_0 - d_1 - \frac{d_2}{2} s_2, \\ z_{S,3} &= -d_0 - d_1 - d_2 s_2 - \frac{d_3}{2} c_{23}, \\ p_{e,z} &= -d_0 - d_1 - d_2 s_2 - d_3 c_{23}. \end{aligned}$$

Damit:

$$V(\mathbf{q}) = \underbrace{\frac{1}{2}(k_l + k_r)(x_B - x_{B0})^2}_{V_{\text{Feder}}} - g \left[m_1 \left(d_0 + \frac{d_1}{2} \right) + m_2 \left(d_0 + d_1 + \frac{d_2}{2} s_2 \right) + m_3 \left(d_0 + d_1 + d_2 s_2 + \frac{d_3}{2} c_{23} \right) + m_b (d_0 + d_1 + d_2 s_2 + d_3 c_{23}) \right].$$

V_{Feder} hängt ausschließlich von x_B ab; die Federn koppeln nur an das Schubgelenk und nicht an die Drehgelenke. Daher $\partial V_{\text{Feder}} / \partial q_k = 0$ für $k = 2, 3$.

- e) Auftrieb und Roboter-Reaktionskraft. Der Kugelmittelpunkt liegt bei $p_{e,z}$, der tiefste Punkt der Boje bei $p_{e,z} - r_b$. Die Wasseroberfläche liegt bei $z = -h$. Eingetauchte Höhe (gemessen vom tiefsten Bojen-Punkt nach oben bis zur Wasseroberfläche):

$$h_{sub}(\mathbf{q}) = \text{clip}(-h - p_{e,z} + r_b, 0, 2r_b) = \text{clip}(-h - (p_{e,z} - r_b), 0, 2r_b), \quad F_A = \rho_w g \frac{\pi}{3} h_{sub}^2 (3r_b - h_{sub})$$

Vorzeichen-Check: $p_{e,z} < 0$ (Endeffektor unter Brückenniveau, $z_0 = 0$ liegt an Brückenaufhängung); $h > 0 \rightarrow -h - p_{e,z} + r_b = (|p_{e,z}| - h) + r_b > 0$ wenn Bojenboden unter Wasseroberfläche. Kräftegleichgewicht der Boje (Eigengewicht, Auftrieb, Wellenkraft, Reaktionskraft des Roboters):

$$\mathbf{F}_R + F_A \hat{z} - m_b g \hat{z} + \mathbf{F}_w = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -F_{wx} \\ -F_{wy} \\ m_b g - F_A - F_{wz} \end{bmatrix}.$$

- f) Verallgemeinerte Kräfte und Ruhelage. Da V aus d) das Gravitationspotential der Boje ($m_b g p_{e,z}$) bereits enthält, gehen in $\mathbf{f}_q$ nur die nicht-konservativen Kräfte ein — Wellenkraft $\mathbf{F}_w$ und Auftrieb $F_A \hat{z}$:

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_w + F_A \hat{z} = \begin{bmatrix} F_{wx} \\ F_{wy} \\ F_{wz} + F_A \end{bmatrix} = -\mathbf{F}_R + m_b g \hat{z} \quad (\text{vgl. e)), \quad \mathbf{f}_q = (\mathbf{J}_v)_0^e \mathbf{F}_{ext}.$$

x_B verschiebt die gesamte Brücke (mitsamt Roboter und Boje) starr in x_0 -Richtung; daher $\partial \mathbf{p}_e / \partial x_B = [1, 0, 0]^T$ unabhängig von q_2, q_3 . Damit gilt

$$(f_q)_0 = [1, 0, 0]^T \mathbf{F}_{ext} = F_{wx}.$$

F_{wy} liegt orthogonal zu $\hat{x}_0$; F_A und F_{wz} wirken vertikal, aber $\partial p_{e,z} / \partial x_B = 0$ (erste Jacobi-Spalte hat Null in z -Zeile) — kein Beitrag zu $(f_q)_0$. Im statischen Gleichgewicht ($\tau_0 = 0$, Federrückstellung):

$$(k_l + k_r) x_B^* = F_{wx} \quad \Rightarrow \quad x_B^* = \frac{F_{wx}}{k_l + k_r}.$$

Gelenkmomente $\tau_k = \partial V / \partial q_k - (f_q)_k$, $k = 2, 3$. Der Schwerpunkt $z_{S,1}$ ist konfigurationsunabhängig (q_2, q_3 beeinflussen Glied 1 nicht). Explizit:

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = g \left[-d_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_b \right) c_2 + d_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_b \right) s_{23} \right], \quad \frac{\partial V}{\partial q_3} = g d_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_b \right) s_{23}.$$

$$(f_q)_2 = (-d_2 s_2 - d_3 c_{23}) F_{wx} + (-d_2 c_2 + d_3 s_{23}) (F_{wz} + F_A), \quad (f_q)_3 = -d_3 c_{23} F_{wx} + d_3 s_{23} (F_{wz} + F_A).$$

Damit:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= g \left[-d_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_b \right) c_2 + d_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_b \right) s_{23} \right] - (-d_2 s_2 - d_3 c_{23}) F_{wx} - (-d_2 c_2 + d_3 s_{23}) (F_{wz} + F_A) \\ \tau_3 &= d_3 \left[g \left(\frac{m_3}{2} + m_b \right) s_{23} + c_{23} F_{wx} - s_{23} (F_{wz} + F_A) \right]. \end{aligned}$$

- g) Stationäre Boje. Aus $\dot{\mathbf{p}}_e = (\mathbf{J}_v)_0^e \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{q} = [x_B, q_2, q_3]^T$ folgt zeilenweise (Jacobi aus b)):

$$x\text{-Zeile: } 1 \cdot \dot{x}_B + J_{v,2x} \dot{q}_2 + J_{v,3x} \dot{q}_3 = 0,$$

$$y\text{-Zeile: } 0 = 0 \quad (\text{trivial: zweite Zeile der Jacobi verschwindet bei } q_1 = 0),$$

$$z\text{-Zeile: } 0 \cdot \dot{x}_B + J_{v,2z} \dot{q}_2 + J_{v,3z} \dot{q}_3 = 0.$$

Die y -Zeile ist identisch Null (Roboter in x_0 - z_0 -Ebene). Übrig bleibt das 2×2 -System aus x - und z -Zeile:

$$\begin{bmatrix} J_{v,2x} & J_{v,3x} \\ J_{v,2z} & J_{v,3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_B \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit $J_{v,2x} = -d_2 s_2 - d_3 c_{23}$, $J_{v,3x} = -d_3 c_{23}$, $J_{v,2z} = -d_2 c_2 + d_3 s_{23}$, $J_{v,3z} = d_3 s_{23}$.

Sei $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_{v,2x} & J_{v,3x} \\ J_{v,2z} & J_{v,3z} \end{bmatrix}$. Determinante (Additionstheorem $c_2 c_{23} + s_2 s_{23} = c_3$):

$$\det \mathbf{A} = J_{v,2x} J_{v,3z} - J_{v,3x} J_{v,2z} = -d_2 d_3 (s_2 s_{23} + c_2 c_{23}) = -d_2 d_3 c_3.$$

Matrixinversion (2×2):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} J_{v,3z} & -J_{v,3x} \\ -J_{v,2z} & J_{v,2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{-d_2 d_3 c_3} \begin{bmatrix} d_3 s_{23} & d_3 c_{23} \\ d_2 c_2 - d_3 s_{23} & -d_2 s_2 - d_3 c_{23} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} -\dot{x}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-\dot{x}_B}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} J_{v,3z} \\ -J_{v,2z} \end{bmatrix} = \frac{-\dot{x}_B}{-d_2 d_3 c_3} \begin{bmatrix} d_3 s_{23} \\ d_2 c_2 - d_3 s_{23} \end{bmatrix},$$

$$\dot{q}_2 = \frac{s_{23}}{d_2 c_3} \dot{x}_B, \quad \dot{q}_3 = \frac{d_2 c_2 - d_3 s_{23}}{d_2 d_3 c_3} \dot{x}_B.$$

Physikalisch: die Gelenke regeln die durch die Brückenbewegung verursachte Endeffektorgeschwindigkeit aktiv aus.

3. Abbildung 3 zeigt ein heckgetriebenes Rennmotorrad, das auf ebener Strecke einen Sprintfahrt absolviert. Das Motorrad wird als zwei identische Räder mit Masse m_1 , Radius r_1 und Trägheitsmoment I_1 modelliert, die an einem masselosen Rahmen mit Radstand L montiert sind. Der Motor zwischen Rahmen und dem Hinterrad bringt am Hinterrad ein konstantes Drehmoment M auf, damit das Motorrad die Ziellinie in der Entfernung x_t erreicht, wobei das Vorderrad um den Winkel θ angehoben ist. Nehmen Sie an, dass das Vorderrad für $t > 0$ keinen Bodenkontakt hat und relativ zum Rahmen nicht rotiert. Für $t = 0$ gilt: $x = \dot{x} = \theta = 0$.

10 P. |

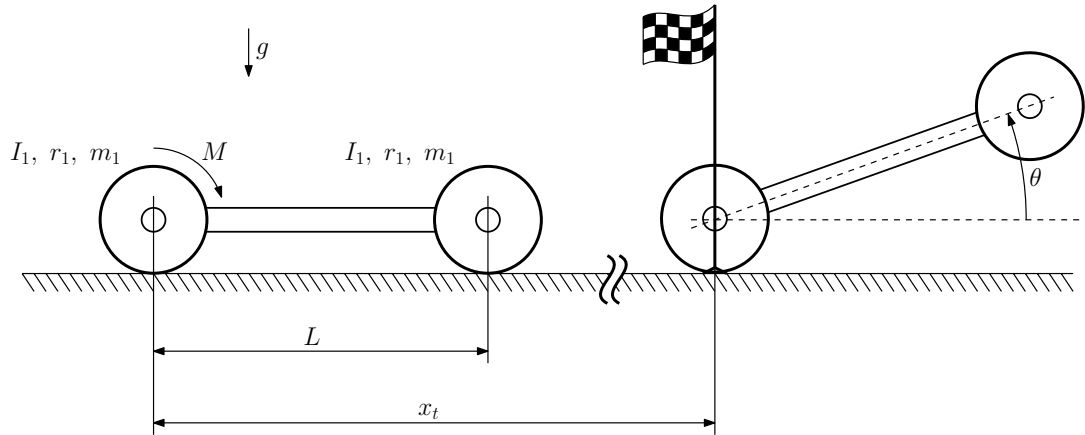


Abbildung 3: Motorrad am Start (links) und am Ziel (rechts) der Strecke.

- Schneiden Sie das Hinterrad sowie den restlichen Motorradkörper frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte und Momente während der Beschleunigungsphase ein.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das Hinterrad und für den Rahmen mit Vorderrad auf.
- Berechnen Sie die Größe des konstanten Antriebsmoments M , die erforderlich ist, damit das Motorrad genau in dem Moment, in dem das Hinterrad die Ziellinie passiert, das Vorderrad um den Winkel θ_t angehoben hat, als Funktion der bekannten Größen. Nehmen Sie an, dass das Hinterrad nicht rutscht und der Rollwiderstand vernachlässigbar ist.

2 P. |

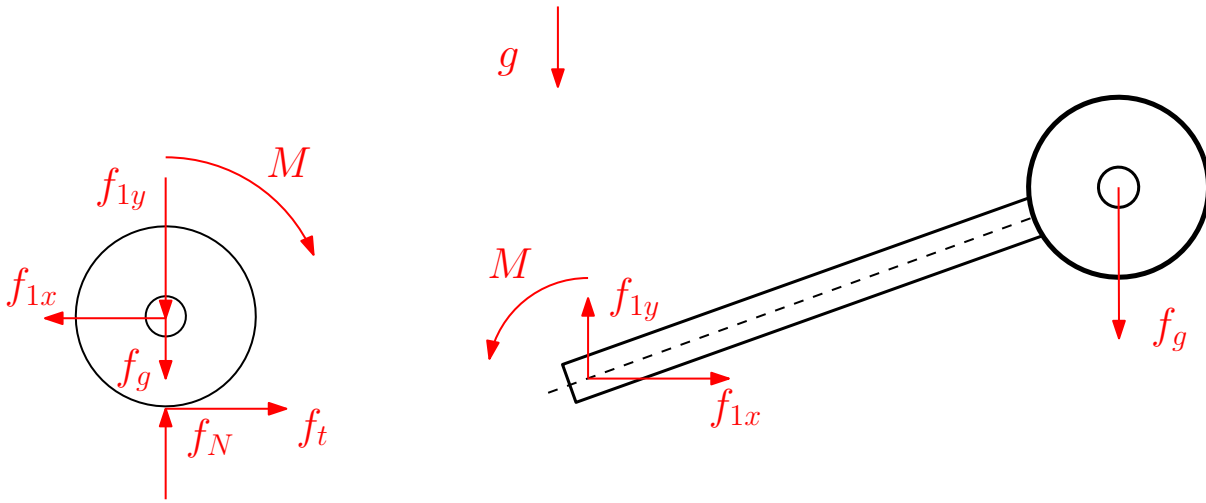
4 P. |

4 P. |

Nehmen Sie für diese Teilaufgabe an, dass $\cos(\theta) = 1$, $\sin(\theta) = 0$ und $\dot{\theta}^2 = 0$.

Lösung:

a) Freischnitt Skizze



b) Hinterrad (Rollbedingung: $\ddot{x} = r_1 \ddot{\alpha}$):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= f_t - f_{1x} \\ I_1 \frac{\ddot{x}}{r_1} &= M - f_t r_1 \\ 0 &= f_N - f_{1y} - m_1 g \end{aligned}$$

Rahmen + Vorderrad

(Kinematik der Vorderradachse:

$$\begin{aligned} x_V &= x + L \cos \theta \Rightarrow \ddot{x}_V = \ddot{x} - L \dot{\theta}^2 \cos \theta - L \ddot{\theta} \sin \theta, \\ y_V &= r + L \sin \theta \Rightarrow \ddot{y}_V = -L \dot{\theta}^2 \sin \theta + L \ddot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_V &= f_{1x} \\ m_1 \ddot{y}_V &= f_{1y} - m_1 g \\ I_1 \ddot{\theta} &= M - f_{1y} L \cos \theta + f_{1x} L \sin \theta \end{aligned}$$

c)

Mit $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$:

$$f_{1x} = m_1 \ddot{x}, \quad f_{1y} = m_1 g + m_1 L \ddot{\theta}$$

$$I_1 \ddot{\theta} = M - (m_1 g + m_1 L \ddot{\theta}) L \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{M - m_1 g L}{I_1 + m_1 L^2}$$

$$f_t = 2m_1 \ddot{x}, \quad M = \left(\frac{I_1}{r_1} + 2m_1 r_1 \right) \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{M}{\frac{I_1}{r_1} + 2m_1 r_1}$$

$$\frac{\theta_t}{x_t} = \frac{\ddot{\theta}}{\ddot{x}} \Rightarrow M = \frac{m_1 g L \left(\frac{I_1}{r_1} + 2m_1 r_1 \right) x_t}{\left(\frac{I_1}{r_1} + 2m_1 r_1 \right) x_t - \theta_t (I_1 + m_1 L^2)}$$