

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 07.02.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Es soll die Dynamik einer Wurfmachine (Floating Arm Trebuchet) analysiert werden. Ein schweres Gegengewicht mit der Masse M sorgt für die Beschleunigung des Projektils mit der Masse m und dem Trägheitsmoment θ_{zz} . Das Gegengewicht gleitet entlang einer Führung vertikal nach unten und ist über ein Gelenk mit dem Wurfarm verbunden. Der Wurfarm hat die Länge $L + l$ und ist an der Achse der Rolle R befestigt, welche sich auf einer horizontalen Schiene bewegt (L und l sind konstant). Am Wurfarm hängt ein Schwungarm mit der Länge r , welcher schließlich das Projektil führt. Vereinfachend werden der Wurfarm, der Schwungarm und die Rolle als masselos angenommen.

10 P. |

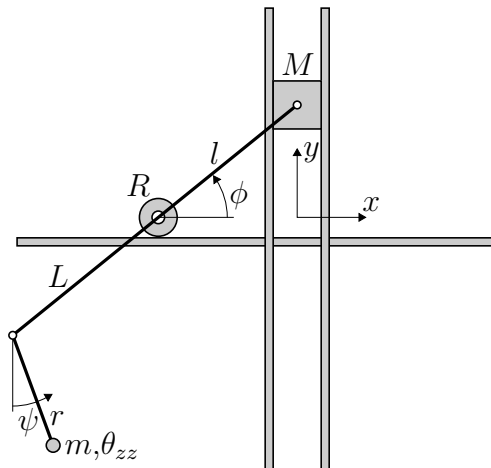


Abbildung 1: Floating Arm Trebuchet.

- a) Geben Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_M$ und $\mathbf{r}_m$ zu den Massen M und m , abhängig von den Winkeln ϕ und ψ , an. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren der Massen M und m . 2 P. |
- c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems als Funktion der Winkel ϕ und ψ . 1.5 P. |
- d) Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems, abhängig von ϕ und ψ . Bestimmen Sie weiters die Ruhelagen (Gleichgewichtslagen) des Systems. 2.5 P. |
- Hinweis:** Die Ruhelagen sind durch $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = \dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0$ charakterisiert.
- e) Nehmen Sie nun an, dass die Lösungen für $\phi(t)$ und $\psi(t)$ bereits berechnet wurden und bekannt sind. 2 P. |

Das Projektil m wird zum Zeitpunkt $t^* > 0$ vom Schwungarm gelöst und beschreibt ab diesem Zeitpunkt eine Wurfparabel der Form

$$\mathbf{r}_m(t) = \mathbf{a} \frac{(t - t^*)^2}{2} + \mathbf{b}(t - t^*) + \mathbf{c}.$$

Berechnen Sie die Parameter $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

Lösung:

a) Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin(\phi) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} -(L+l) \cos(\phi) + r \sin(\psi) \\ -L \sin(\phi) - r \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

b) Geschwindigkeitsvektoren

$$\mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ l \cos(\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_m = \begin{bmatrix} (L+l) \sin(\phi) \dot{\phi} + r \cos(\psi) \dot{\psi} \\ -L \cos(\phi) \dot{\phi} + r \sin(\psi) \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

c) Kinetische Energie

$$T = \frac{M}{2} \|\mathbf{v}_M\|^2 + \frac{m}{2} \|\mathbf{v}_m\|^2 + \frac{\theta_{zz}}{2} \dot{\psi}^2$$
$$= \frac{M}{2} (l \cos(\phi) \dot{\phi})^2 + \frac{m}{2} \left(((L+l) \sin(\phi) \dot{\phi} + r \cos(\psi) \dot{\psi})^2 + \right.$$
$$\left. (-L \cos(\phi) \dot{\phi} + r \sin(\psi) \dot{\psi})^2 \right) + \frac{\theta_{zz}}{2} \dot{\psi}^2$$

d) Potentielle Energie

$$V = Mgl \sin(\phi) - mg(L \sin(\phi) + r \cos(\psi)) + V_0$$

Ruhelagen

$$\phi_R = \arccos(0) = \left(\frac{1}{2} + j\right)\pi, \quad j \in \mathbb{N}$$
$$\psi_R = \arcsin(0) = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

e) Wurfparabel

$$\mathbf{r}_m(t) = \underbrace{-\mathbf{e}_y g}_{\mathbf{a}} \frac{(t-t^*)^2}{2} + \underbrace{\mathbf{v}_m(t^*)}_{\mathbf{b}} (t-t^*) + \underbrace{\mathbf{r}_m(t^*)}_{\mathbf{c}}$$

2. Die in Abbildung 2 gezeigte Anordnung wird konzentriert parametrisch als thermisches RC-Netzwerk modelliert. Es gelten folgende Annahmen:

10 P. |

- Der zylinderförmige Glühfaden hat die homogene Temperatur T_G , die Oberfläche A_G , die Emissivität ε und eine vernachlässigbare Wärmekapazität. Er wird mit der elektrischen Leistung P gespeist, welche zur Gänze in Wärme umgewandelt wird. Der Glühfaden tauscht Wärme mit der Umgebung (Temperatur T_∞) nur über thermische Strahlung und mit dem Sockel nur über Wärmeleitung in den Leitern aus.
- Jeder Leiter hat die Wärmeleitfähigkeit λ , die Länge L , die Querschnittsfläche A_L und eine adiabate Mantelfläche. Die Wärmeleitung in den Leitern wird als stationär modelliert, da ihre Wärmekapazität vernachlässigbar klein ist.
- Der Sockel hat die homogen verteilte Temperatur $T_S(t)$, die spezifische Wärmekapazität c_S , die Masse m_S und die Oberfläche A_S . Er tauscht Wärme mit der Umgebung über Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α_S) aus.

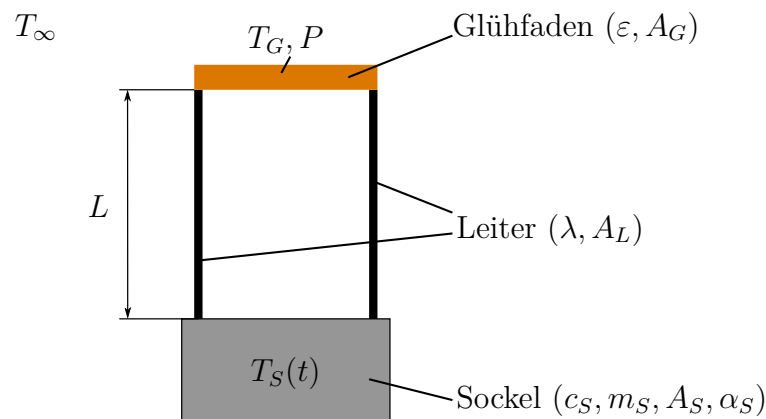


Abbildung 2: Glühfaden auf einem Sockel.

- Geben Sie den thermischen Widerstand R_U zwischen Sockel und Umgebung und die thermische Kapazität C_S des Sockels als Funktionen der bekannten Größen an. 1 P. |
- Berechnen Sie den Nettowärmestrom $\dot{Q}_G$ zufolge thermischer Strahlung zwischen Glühfaden und Umgebung als Funktion von T_G und T_∞ . Geben Sie alle dafür erforderlichen Sichtfaktoren an und vereinfachen Sie den Ausdruck für $\dot{Q}_G$ soweit als möglich. 3 P. |
- Jeder der beiden Leiter soll durch einen thermischen Widerstände R_L repräsentiert werden. Berechnen Sie R_L . 2 P. |
- Zeichnen Sie das thermische RC-Netzwerk zur Abbildung 2. Verwenden Sie hierbei zur Darstellung der thermischen Strahlung einen nichtlinearen thermischen Widerstand $R_S(T_G, T_\infty)$. 2 P. |
- Geben Sie die Differentialgleichung für die Sockeltemperatur $T_S(t)$ an. In dieser Differentialgleichung muss T_G nicht eliminiert werden. 1 P. |
- Geben Sie die Gleichung zur Berechnung der stationären Glühfadentemperatur T_G an. Sie müssen diese Gleichung nicht lösen. 1 P. |

Hinweis: Abgesehen von e) und f) können alle Teilaufgaben unabhängig voneinander gelöst werden. Zuvor berechnete Bauteilwerte müssen nicht eingesetzt werden.

Lösung:

a)

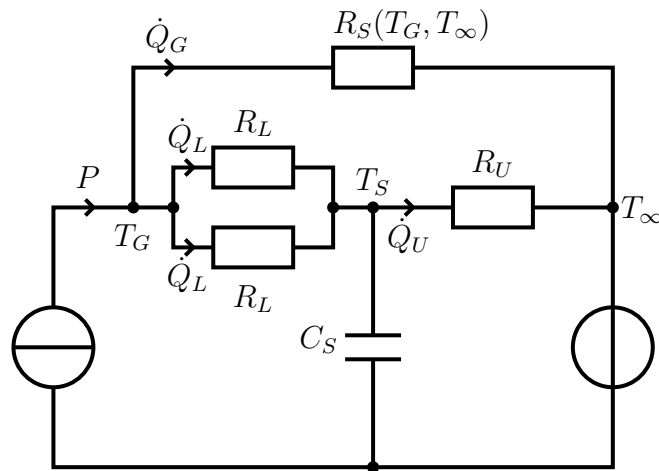
$$R_U = \frac{1}{A_S \alpha_S}, \quad C_S = m_S c_S$$

b)

$$\dot{Q}_G = A_G \sigma \varepsilon (T_G^4 - T_\infty^4), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$R_L = \frac{L}{\lambda A_L}$$



d)

e)

$$\dot{T}_S(t) = \frac{1}{C_S} \left(\frac{T_G(t) - T_S(t)}{\frac{R_L}{2}} - \frac{T_S(t) - T_\infty}{R_U} \right)$$

f)

$$P - \frac{T_G - T_\infty}{R_U + \frac{R_L}{2}} - \frac{T_G - T_\infty}{R_S(T_G, T_\infty)} = 0$$

zur Info:

$$R_S(T_G, T_\infty) = \frac{1}{A_G \sigma \varepsilon (T_G^2 + T_\infty^2)(T_G + T_\infty)}$$

3. Die in Abbildung 3 dargestellte Konstruktion zum Ziehen einer Last über eine Rampe befindet sich ohne äußere Krafteinwirkung ($F = 0$) in einer statischen Ruhelage. Die Masse m_1 ist über ein masseloses Seil mit der Masse m_2 verbunden. Das Seil wird über eine Rolle mit dem Radius r , der Masse m_R und dem Massenträgheitsmoment I_R , welche im Punkt R reibungsfrei gelagert ist, umgelenkt und verläuft parallel zur im Winkel α geneigten Rampe. Zwischen der Masse m_2 und der Rampe herrscht der Haftreibungskoeffizient μ_H . Die Konstruktion zum Halten der Rolle kann als masseloser Starrkörper modelliert werden. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer e_y -Richtung. Alle benötigten Längenangaben können der Zeichnung entnommen werden.

10 P.]

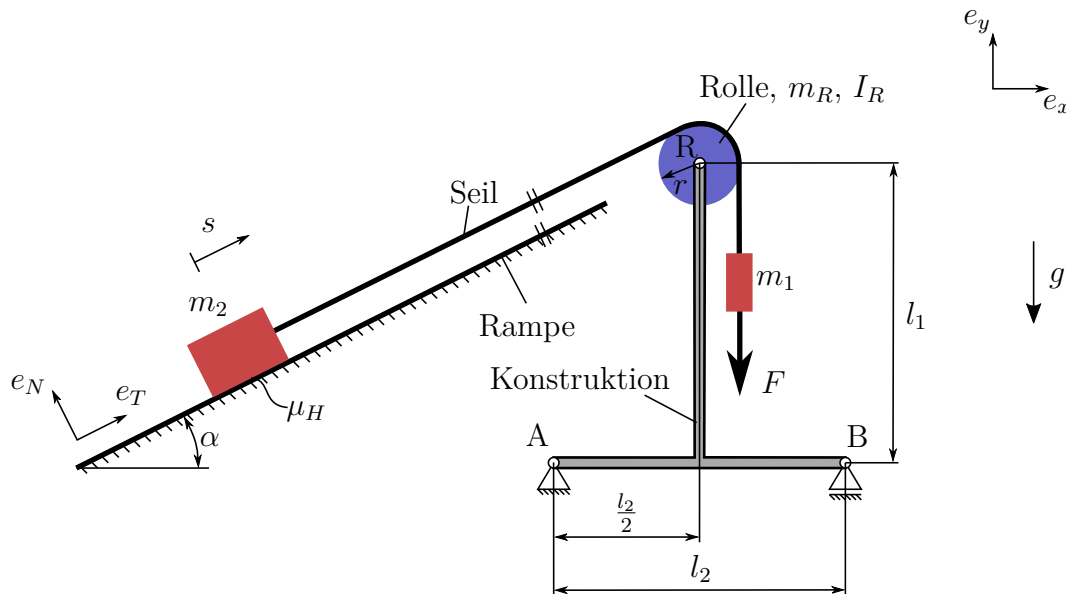


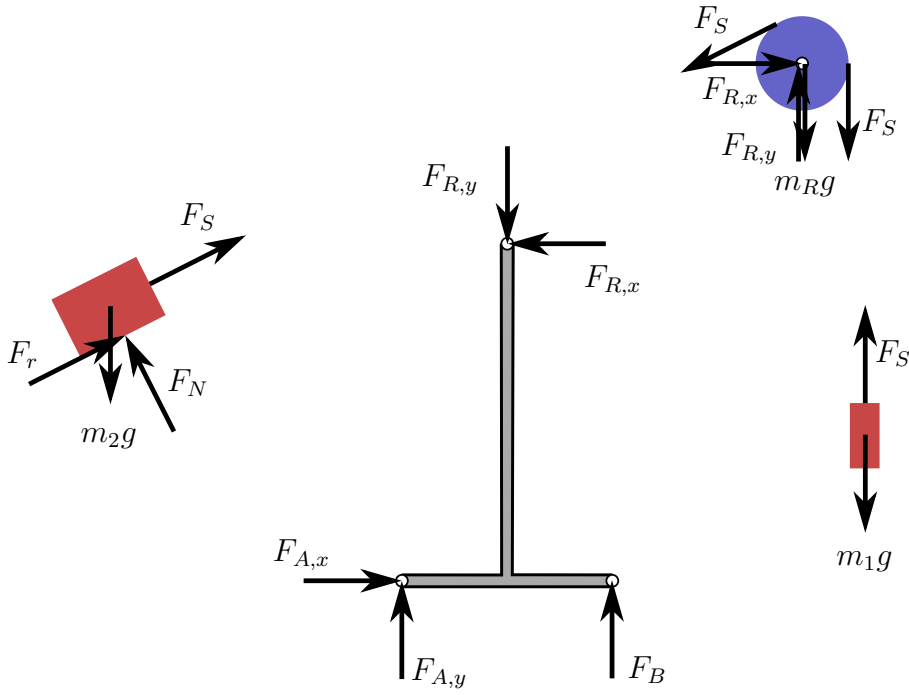
Abbildung 3: Konstruktion zum Ziehen einer Last.

Für die Punkte a)-f) befindet sich das System in Ruhe und es gilt $F = 0$.

- Schneiden Sie die Massen m_1 und m_2 , die Rolle und die Konstruktion zum Halten der Rolle getrennt frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2 P.]
- Berechnen Sie die Seilkraft. 0.5 P.]
- Es gelte $\mu_H < \tan(\alpha)$. Wie groß darf die Masse m_2 maximal sein, damit sich das System in Ruhe befindet? 1.5 P.]
- Berechnen Sie die Lagerkräfte im Punkt R. 0.5 P.]
- Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B. 2 P.]
- Welche Höhe l_1 darf die Konstruktion maximal haben damit sie nicht kippt, wenn man annimmt, dass das Lager B nur Druckkräfte aufnehmen kann? 1 P.]
- Über die externe Kraft F wird die Masse m_2 nun gezogen. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für die Position s der Masse m_2 . Bezeichnen Sie die Reibkraft zwischen der Masse m_2 und der Rampe der Einfachheit halber als F_r . 2.5 P.]

Hinweis: Alle Punkte können getrennt voneinander gelöst werden. Wenn vorhergehende Größen nicht berechnet werden konnten, kann mit den abstrakten Formelzeichen weitergerechnet werden.

Lösung:



a)

b)

$$F_S = m_1g$$

c)

$$m_{2,max} = \frac{m_1}{\sin(\alpha) - \mu_H \cos(\alpha)}$$

d)

$$F_{R,x} = m_1g \cos(\alpha)$$

$$F_{R,y} = m_Rg + m_1g(1 + \sin(\alpha))$$

e)

$$F_{A,x} = m_1g \cos(\alpha)$$

$$F_{A,y} = \frac{1}{2}(m_Rg + m_1g(1 + \sin(\alpha))) + \frac{l_1}{l_2}m_1g \cos(\alpha)$$

$$F_B = \frac{1}{2}(m_Rg + m_1g(1 + \sin(\alpha))) - \frac{l_1}{l_2}m_1g \cos(\alpha)$$

f)

$$l_{1,max} = \frac{l_2(m_R + m_1(1 + \sin(\alpha)))}{2m_1 \cos(\alpha)}$$

g)

$$\ddot{s} = \frac{F + m_1g - F_r - m_2g \sin(\alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{I_R}{r^2}}$$

4. Abbildung 4 zeigt eine wachsende Eisschicht mit der Dicke $d(t)$ auf einem See mit der konstanten Tiefe D . Es wird ein eindimensionales Wärmeübertragungsproblem in Richtung x betrachtet. An der Eisoberfläche ($x = 0$) beträgt die Temperatur konstant T_0 . Der Rand $x = D$ ist adiabat.

10 P.]

Das Eis hat die Temperatur $T_E(x, t)$ und die Materialparameter ρ_E (Dichte), $c_{p,E}$ (spezifische Wärmekapazität) und λ_E (Wärmeleitfähigkeit). Das Wasser hat die Temperatur $T_W(x, t)$ und die Materialparameter ρ_W , $c_{p,W}$ und λ_W .

Bei der festen Temperatur T_s erstarrt das Wasser. Dabei wird die spezifische Umwandlungsenthalpie h (in J kg^{-1}) frei.

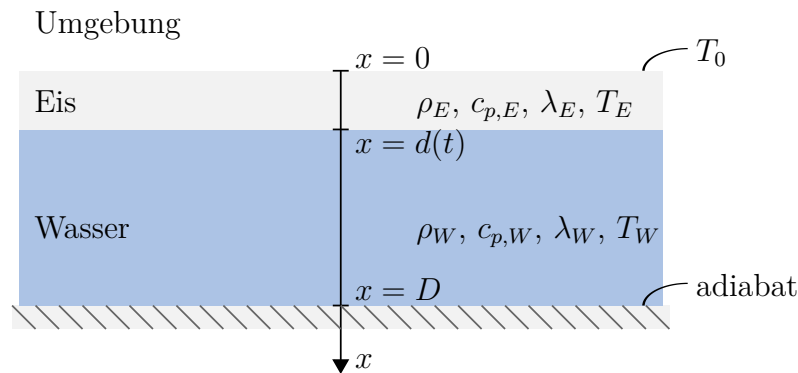


Abbildung 4: Eisschicht auf einem See.

- a) Schreiben Sie jeweils für die Eis- und die Wasserschicht ($0 < x < d$ bzw. $d < x < D$) die Gleichung für quellfreie Wärmeleitung an. Formulieren Sie am Punkt $x = d$ eine Randbedingung für einen stetigen Übergang von T_E zu T_W .
- b) Geben Sie Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = D$ an.
- c) Wenn die Eisdicke $d(t)$ wächst, kann die an der Grenzfläche $x = d$ freiwerdende Umwandlungsenthalpie als flächige Wärmequelle in der Form

2 P.]

1 P.]

3 P.]

$$h\rho_E \dot{d} \quad (1)$$

modelliert werden. Stellen Sie mit (1) und den Wärmestromdichten $\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}$ ($j = E, W$) die Energiebilanz für die Grenzfläche $x = d$ auf.

- d) Es wird ab nun von näherungsweise stationären Temperaturprofilen im Eis und im Wasser ausgegangen, d.h. $\frac{\partial T_j}{\partial t} = 0$. (Die Schichtdicke $d(t)$ wird weiterhin transient betrachtet.)

2 P.]

An der Grenzschicht $x = d$ herrscht die Erstarrungstemperatur $T_s > T_0$. Lösen Sie für diesen Fall die Differentialgleichungen für T_E und T_W .

- e) Fassen Sie die Resultate der Teilaufgaben (c) und (d) zu einer Differentialgleichung für $d(t)$ zusammen. Lösen Sie diese Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $d(0) = 0$.

2 P.]

Hinweis: Die Lösung kann mittels Trennung der Variablen berechnet werden.

Lösung:

a) *PDEs*

$$\begin{aligned}\rho_E c_{p,E} T_{E,t}(t, x) &= \lambda_E T_{E,xx}(t, x) \\ \rho_W c_{p,W} T_{W,t}(t, x) &= \lambda_W T_{W,xx}(t, x) \\ T_E(t, d(t)) &= T_W(t, d(t))\end{aligned}$$

b) *Randbedingungen*

$$\begin{aligned}T_E(t, 0) &= T_0 \\ T_{W,x}(t, D) &= 0\end{aligned}$$

c) *Energiebilanz*

$$h\rho_E \dot{d}(t) = \lambda_E T_{E,x}(t, d(t)) - \lambda_W T_{W,x}(t, d(t))$$

d) *Stationäre PDEs*

$$\begin{cases} 0 &= T_{E,xx}(x, t) \\ T_E(0, t) &= T_0 \\ T_E(d, t) &= T_s \end{cases} \quad \begin{cases} 0 &= T_{W,xx}(x, t) \\ T_W(d, t) &= T_s \\ T_{W,x}(D, t) &= 0 \end{cases}$$

Lösung

$$\begin{aligned}T_E(x, t) &= T_0 + (T_s - T_0) \frac{x}{d(t)} \\ T_W(x, t) &= T_s\end{aligned}$$

e) *ODE*

$$\begin{aligned}h\rho_E \dot{d}(t) &= \lambda_E \frac{T_s - T_0}{d(t)} \\ d(0) &= 0\end{aligned}$$

Lösung

$$d(t) = \sqrt{\frac{2\lambda_E(T_s - T_0)}{h\rho_E}} t$$