

1. Statik und Haftreibung

Einführung in die Statik

In der Statik wird *zuerst* vorausgesetzt, dass keine Beschleunigungen auftreten, und auf Basis dieser Annahme werden die dann wirkenden Belastungen errechnet. Die daraus folgenden Kräfte und Momente stellen sich also nur dann ein, wenn es tatsächlich zu keinen Beschleunigungen oder Deformationen kommt. Systeme mit vernachlässigbaren Beschleunigungen können häufig in guter Näherung als quasi-statisch betrachtet und dann durch statische Beziehungen beschrieben werden. Treten durch die errechneten Belastungen Beschleunigungen auf, so muss das System dynamisch beschrieben werden.

Schnittkräfte und -momente

Die Gleichgewichtsbedingungen der Statik gelten nicht nur für jeden Starrkörper, sondern auch für jedes Teilsystem. Insbesondere Teile eines Körpers und das Gesamtsystem erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen. Um diese nutzen zu können, werden Teilsysteme anhand einer Skizze, dem *Freikörperdiagramm* (auch Freischnitt-Skizze genannt), frei geschnitten. Die Schnittgrenzen sind beliebige geschlossene Konturen, siehe Abbildung 1.1. Häufig ist es zielführend, dass jeder Körper aus allen Kontaktstellen mit seiner Umgebung gelöst wird. Ein freigeschnittener Teilkörper erfährt nun nicht mehr die Kräfte und Momente, die er

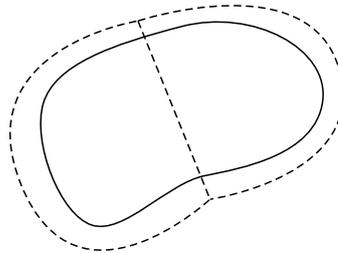


Abbildung 1.1.: Starrkörper mit angedachten Schnittgrenzen.

im Gesamtsystem erfahren würde. Um diese Wechselwirkungen des Teilkörpers mit seiner Umgebung zu ersetzen, werden *Schnittkräfte* eingeführt, siehe Abbildung 1.2. Dadurch verhält sich der freigeschnittene Teilkörper gleich wie im Gesamtsystem und kann somit zur Berechnung der wirkenden Belastungen herangezogen werden. Da an den Schnittufern (Schnittkanten) im Allgemeinen auch Drehmomente übertragen werden können, müssen auch *Schnittmomente* eingeführt werden. Der Angriffspunkt der Schnittkräfte ist im Allgemeinen unbekannt und kann daher frei gewählt werden. Durch die angewandten Gleichungen werden die frei gewählten Variablen bestimmt. Das Schnittmoment kann

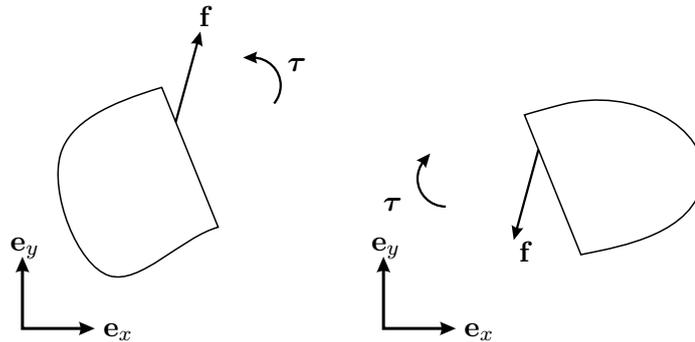


Abbildung 1.2.: Freigeschnittener Starrkörper mit Schnittkräften und -momenten.

auch als Drehmoment interpretiert werden, das durch den gewählten Angriffspunkt der Schnittkräfte entsteht. Es gibt also einen Angriffspunkt der Schnittkräfte genau so, dass das Schnittmoment verschwindet.

Schnittmomente und -kräfte haben unbekannte Richtung und Betrag. Daher muss für jede Kontaktstelle entlang eines Freischnittes eine allgemeine Kraft und ein allgemeines Drehmoment vorgesehen werden, siehe Abbildung 1.2. Diese beiden Größen können durch Kräfte in jede Raumrichtung und Drehmomente für jede Drehachse angesetzt werden, siehe Abbildung 1.3. Dies entspricht einer Aufteilung der unbekanntes Kraft in Anteile

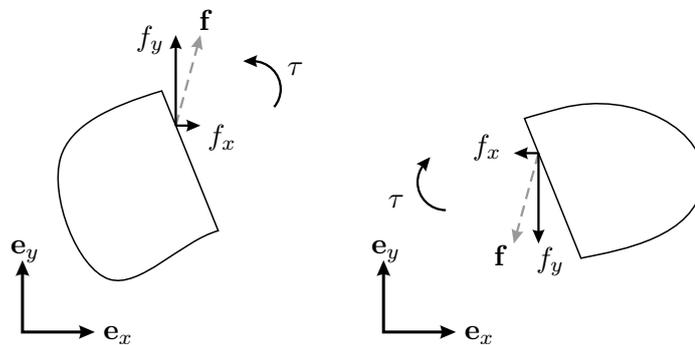


Abbildung 1.3.: Freigeschnittener Starrkörper mit Schnittkräften aufgeteilt in Koordinatenrichtungen.

entlang der gewählten Koordinatenrichtungen, für das betrachtete planare Problem gilt also

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y. \quad (1.1)$$

Auch die Aufteilung der Kräfte kann in beliebige Richtungen erfolgen, oft empfehlen sich Richtungen orthogonal und tangential zum Schnittufer, wie in Abbildung 1.4 dargestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen garantieren, dass die Summe der aufgeteilten Kräfte der ursprünglichen Kraft entspricht.

Wichtig ist dabei, dass in der *ersten* Skizze die Schnittkräfte und -momente beliebig

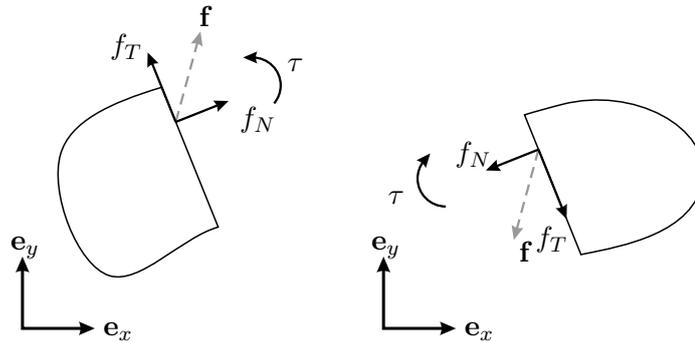


Abbildung 1.4.: Frei geschnittener Starrkörper mit Schnittkräften aufgeteilt entlang des Schnittufers.

ingezeichnet werden können. Jeder angrenzende Freischnitt muss allerdings zu diesem *konsistent* sein, das heißt, dass die gleichen Schnittgrößen in gegengleiche Richtung verwendet werden. Der Betrag der Schnittgrößen zweier Schnittufer muss also gleich sein, die Richtung umgekehrt. Dies garantiert, dass beim gedachten Zusammensetzen der Freikörperdiagramme die Schnittbelastungen verschwinden. Daraus folgt, dass vollständige Skizzen nur *äußere Kräfte* wie Gravitationskräfte, äußere Anregungen, Motoren etc. enthalten. Schnittkräfte, beziehungsweise *innere Kräfte*, dürfen dagegen nur in Freikörperdiagrammen eingezeichnet werden.

Reaktionskräfte und *-momente* (auch Zwangskräfte genannt) sind Größen, die sich zur Einhaltung vorgegebener Zwangsbedingungen ergeben. Sie stellen sich so ein, dass ein Körper den Einschränkungen seiner Bewegungsfreiheit, also den gegebenen Zwangsbedingungen, genügt. Reaktionskräfte entstehen zum Beispiel bei Führungen, bei starren Kontakten, oder auch quer zu einem ideal rollenden Rad, sowie auch bei Lagerungen. Schnittkräfte sind Reaktionskräfte, da sie sich durch das statische Gleichgewicht aus den Belastungen des Systems ergeben. Sie erfüllen den Zwang, dass der Zusammenhalt der Teilkörper gewährleistet sein muss. Die Haftkraft ist eine Reaktionskraft, da sie den festen Kontakt zwischen zwei Körpern sicherstellt. Die Haftkraft wird also als Schnittkraft behandelt und berechnet. Infolge dessen muss die Haftbedingung nach dem Errechnen der Reaktionskräfte genutzt werden, um die Annahme des Haftens zu überprüfen. Wird die Haftbedingung nicht erfüllt, d.h. die Reaktionskraft der Reibung ist größer als die maximale Reibkraft des Kontakts, kommt es zur Beschleunigung der Körper.

Eingeprägte Kräfte und *Momente* sind all jene Belastungen, deren Richtung und Betrag durch äußere Gesetze vorgegeben ist. Die gesamte auf einen Körper wirkende Kraft ist die Summe aus Reaktionskräften und eingeprägten Kräften. Zu den eingeprägten Kräften zählen zum Beispiel die Gravitationskraft und Motormomente, die von außen auf ein System wirken. Gleichsam gilt dies auch für äußere Störungen wie zum Beispiel Windlasten auf eine Hausfront. Auch die Gleitreibungskraft ist eine eingeprägte Kraft. Im Gegensatz zur Haftkraft wird beim gleitenden Kontakt keine Reaktionskraft der Reibung berechnet, sondern die Gleitreibungskraft kann direkt durch ein mathematisches Reibmodell bestimmt werden. Die Richtung der Gleitreibungskraft ist immer entgegen der Relativgeschwindigkeit

zweier Körper.

Zusammenfassend: Schnittkräfte sind Reaktionskräfte und kommen durch das Auftrennen des Systems zustande. Sie garantieren, dass Teile eines Systems die Kräfte und Momente erfahren, die sie im Gesamtsystem erfahren würden, obwohl sie gedacht frei geschnitten werden. Schnittgrößen ersetzen also in Freikörperdiagrammen die Wechselwirkungen der betrachteten Teile mit ihrer Umgebung. Da es sich um Reaktionskräfte handelt, können Schnittgrößen beliebig eingezeichnet werden. Ihre Richtung und ihr Betrag werden durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Lediglich auf die Konsistenz der Schnittkräfte an den Schnittufern ist zu achten.

Kräfte- und Drehmomentenbilanz

Die Gleichgewichtsbedingungen postulieren, dass Impuls- und Drehimpulserhaltung für jedes beliebige Teilsystem gelten. In der Statik überzeugt man sich leicht (Beschleunigungen sind vernachlässigbar), dass die Summe aller Kräfte und Drehmomente bezüglich jedes Punktes verschwinden muss. Insbesondere gelten diese Bilanzen für jeden beliebigen Freischnitt. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern für ebene (zweidimensionale) Probleme 3 Gleichungen (2 Kräfte- und 1 Momentenbilanz). Dementsprechend können Schnittgrößen durch Momenten- und Kräftebilanz (statisch) bestimmt werden.

Die Drehmomentenbilanz wird bezüglich eines beliebigen Punktes für jeden Teilkörper bestimmt. Es ist zweckmäßig, den Bezugspunkt so zu wählen, dass möglichst viele uninteressante Kräfte kein Moment liefern. Dies geschieht genau dann, wenn der gewählte Bezugspunkt auf der Wirkungslinie der Kräfte liegt und dadurch der Normalabstand zwischen Kraftlinie und Bezugspunkt verschwindet.

Vorgehensweise

Um die Belastungen eines statischen Systems zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

- a) Auftrennen des Systems in geeignete Teilsysteme
 - Anfertigen eines Freikörperdiagramms für jedes freigeschnittene Teilsystem
 - Einzeichnen der Schnittgrößen in die Freischnittdiagramme
 - Überprüfen, ob sich diese beim Zusammensetzen gegenseitig aufheben
- b) Aufstellen der Kräftebilanz
- c) Aufstellen der Momentenbilanz bezüglich eines geeigneten Punktes
- d) Auflösen der resultierenden Gleichungen nach den gesuchten Größen
- e) Überprüfen der Annahme der (Quasi-) Statik (z.B. Haftbedingungen)

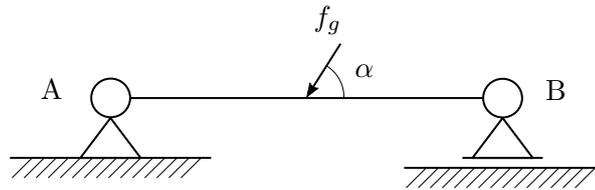


Abbildung 1.5.: Gelagerter Balken.

Grundlegende Beispiele

Diese Zusammenhänge sollen im Folgenden anhand grundlegender Beispiele gezeigt werden. Abbildung 1.5 zeigt einen Balken zwischen zwei Lagern. Im Punkt A ist ein *Festlager* schematisch dargestellt. Dieser Lagertyp kann eine allgemeine Kraft, also vertikale wie auch horizontale Kräfte, vom Balken auf den festen Untergrund (strichliert angedeutet) übertragen. Das Lager im Punkt B wird als *Loslager* oder auch verschiebliches Lager bezeichnet. Es kann nur Kräfte senkrecht zur verschieblichen Richtung, hier also vertikale Kräfte, aufnehmen, da es in horizontaler Richtung reibungsfrei gleitet. Loslager sind üblicherweise verschieblich eingebaute Lager, die unter anderem die Wärmedehnung des Balkens durch Verschiebung ausgleichen. Da wir von idealen Lagern ausgehen, entstehen in diesen keine Reibungsmomente und somit muss das übertragene Moment in den Lagern verschwinden. Dadurch können also im Lager einige Schnittkräfte ausgeschlossen werden. Es bietet sich also an, zur Berechnung der Lagerkräfte die Lager aufzutrennen und frei zu schneiden. Die Freischnittskizze 1.6 ist nur vollständig, wenn alle Einzelteile des Systems abgebildet werden und ein frei wählbares Koordinatensystem eingezeichnet wurde. Weiters

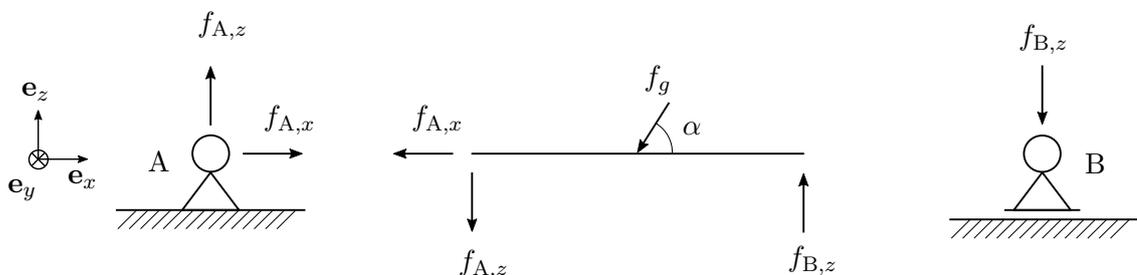


Abbildung 1.6.: Freischnittskizze des Balkens und der Lager.

wird hier deutlich, dass sich die Schnittkräfte des Lagers im Punkt A und die Schnittkräfte des Balkens im Punkt A aufheben müssen. Darum wirken hier die gleichen Kräfte in entgegengesetzte Richtung. Die extern Kraft f_g wirkt in der Mitte des Balkens unter dem Winkel α . Sie muss durch die Lagerkräfte ausgeglichen werden, sodass der Balken nicht beschleunigt wird.

Als nächsten Schritt betrachte man die Kräftebilanz des Balkens (mittlerer Freischnitt), die wie folgt lautet:

$$x : 0 = -f_{A,x} - f_g \cos(\alpha) \quad (1.2a)$$

$$z : 0 = -f_{A,z} - f_g \sin(\alpha) + f_{B,z}. \quad (1.2b)$$

Es zeigt sich also, dass für das Lager im Punkt A

$$f_{A,x} = -f_g \cos(\alpha) \quad (1.3)$$

gilt. Weiters gilt durch Umformen

$$f_g \sin(\alpha) = -f_{A,z} + f_{B,z}, \quad (1.4)$$

also dass die Summe der Lagerkräfte der z -Komponente der externen Kraft entspricht. Da diese Gleichung allein nicht nach $f_{A,z}$ und $f_{B,z}$ auflösbar ist, wird die Drehmomentenbilanz um den Punkt A betrachtet:

$$\sum_i \tau_i^{(A)} = 0 = f_g \frac{l}{2} \sin(\alpha) - f_{B,z} l, \quad (1.5)$$

wobei l die Balkenlänge ist. Daraus ergibt sich die Lösung durch Auflösen der Kräfte- und Drehmomentenbilanz

$$f_{B,z} = \frac{f_g}{2} \sin(\alpha) \quad (1.6a)$$

$$f_{A,z} = -\frac{f_g}{2} \sin(\alpha). \quad (1.6b)$$

Die z -Komponente der externen Kraft wird also gleich auf die Lager verteilt. Man beachte, dass $f_{A,z}$ hier negativ ist und somit physikalisch in positive z -Richtung auf den Balken wirkt. Intuitiv sieht man, dass die Kräfte der Lager den Balken halten (mittlere Skizze). Dagegen wirken die Lagerkräfte auf die freigeschnittenen Lager jeweils in negative z -Richtung, übertragen also das Gewicht des Balkens in den Boden (linke und rechte Skizze).

Auf gleiche Weise soll noch ein Balken nach Abbildung 1.7 betrachtet werden, der von einer äußeren Kraft belastet wird. Hierbei sind die Kräfte und Momente auf die Wand zu

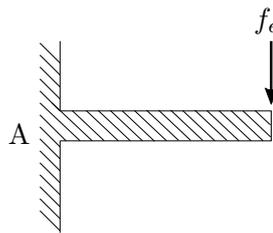


Abbildung 1.7.: Balken an einer Wand.

berechnen, die, unter Vernachlässigung der Schwerkraft, durch die Kraft entstehen. Da die Kräfte an der Wand gefunden werden sollen, wird die Schnittgrenze durch den Punkt A gelegt, siehe Abbildung 1.8. Neben einer Normalkraft $f_{A,x}$ und einer Scherkraft $f_{A,z}$ wirkt bei allgemeinen Kontaktflächen auch ein Moment $\tau^{(A)}$. Dieses Moment wirkt einem Verdrehen des freigeschnittenen Balkens entgegen. Im Gegensatz dazu kann durch ideale Lager oder Punktkontakte kein Moment übertragen werden.

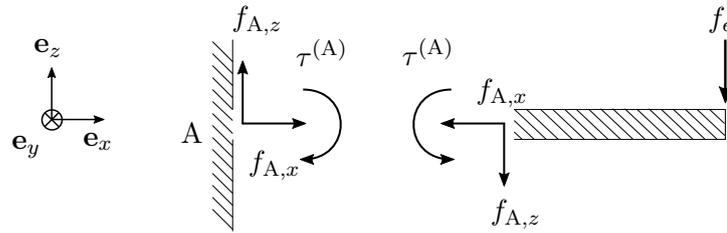


Abbildung 1.8.: Balken an einer Wand.

Die Kräftebilanz des freigeschnittenen Balkens liefert

$$x : 0 = -f_{A,x} \quad (1.7a)$$

$$z : 0 = -f_{A,z} - f_e. \quad (1.7b)$$

Die Scherkraft gleicht also die äußere Kraft f_e aus. Zur Berechnung der Drehmomentenbilanz wird der Punkt A gewählt, da hier sowohl $f_{A,x}$ als auch $f_{A,z}$ keinen Anteil am Drehmoment haben. Die Kraftlinien schneiden den Bezugspunkt, wodurch der Normalabstand verschwindet. Die Drehmomentenbilanz liefert also

$$\sum_i \tau_i^{(A)} = 0 = f_e l - \tau^{(A)}, \quad (1.8)$$

und damit gilt für die Belastungen der Wand

$$f_{A,z} = f_e \quad (1.9a)$$

$$f_{A,x} = 0 \quad (1.9b)$$

$$\tau^{(A)} = f_e l. \quad (1.9c)$$

Aufgabe 1.1 (Fachwerk). Fachwerke bezeichnen eine im Bauingenieurwesen oftmals verwendete Art von Tragwerken. Diese Konstruktionen nehmen die entstehenden Kräfte durch an den Enden gelenkig miteinander verbundene Stäbe auf. Das in Abb. 1.9 dargestellte zweidimensionale Fachwerk einer Auskragung ist aus gleichseitigen Dreiecken aufgebaut. Das Fachwerk wird durch zwei externe Kräfte f_a und f_b belastet, welche aufgrund der Konstruktion eine Zugkraft am oberen Montagepunkt auf die Wand ausüben.

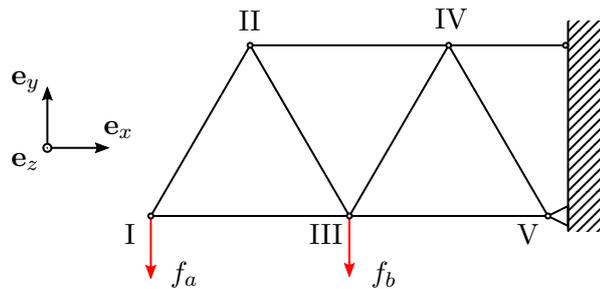
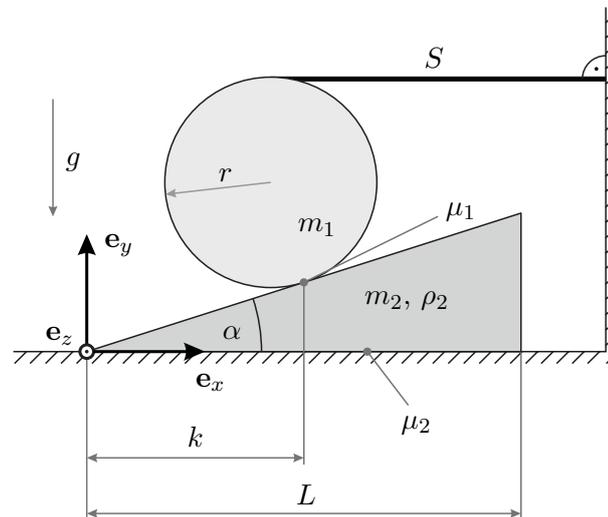


Abbildung 1.9.: Fachwerk

- Geben Sie einen Ausdruck für die Kraft im oberen Montagepunkt als Funktion der Kräfte f_a und f_b an.
- Wie groß sind die Kräfte in x - und y -Richtung am unteren Montagepunkt?
- Stellen Sie die statischen Gleichgewichtsbedingungen für die freigeschnittenen Knoten I-V auf.
- Schreiben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem für die Stabkräfte in Matrixform und zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung existiert.

Hinweis: Die Punkte c) und d) können geeignet mit einem Computeralgebra-System wie z.B. Maple gelöst werden.

Aufgabe 1.2 (Rolle und Keil). Gegeben ist eine Rolle der Masse m_1 , welche mit dem Seil S an einer Wand befestigt ist. Die Rolle liegt auf einem Keil der Tiefe T (entlang \mathbf{e}_z) und der Dichte ρ_2 . Zwischen Rolle und Keil gilt der Haftreibungskoeffizient μ_1 , zwischen Keil und Boden gilt μ_2 . Die Erdbeschleunigung g wirkt entlang $-\mathbf{e}_y$.



- Berechnen Sie die Masse m_2 und den Schwerpunkt des Keils bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems in \mathbf{e}_x - und \mathbf{e}_y -Richtung.
- Schneiden Sie die Körper frei und zeichnen Sie alle Schnittkräfte und -momente ein.
- Stellen Sie die Kräfte- und Momentenbilanz für die Schnittkörper auf.
- Berechnen Sie alle Normal- und Reibkräfte sowie die Seilkraft f_S als Funktionen von m_1 , m_2 , g und α .
- Welche Bedingungen müssen für μ_1 und μ_2 gelten, damit alle Körper in Ruhe bleiben?
- Berechnen Sie die x -Koordinate der Normalkraft vom Boden auf den Keil, sodass das Schnittmoment verschwindet.