



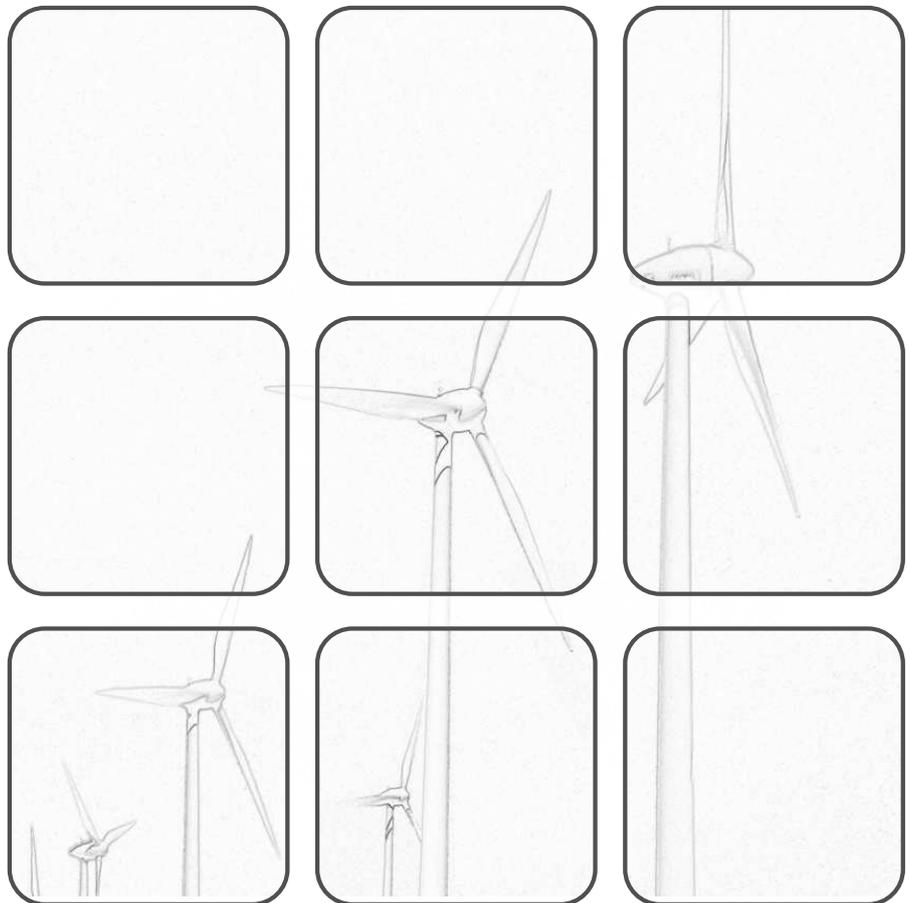
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



Übung
Sommersemester 2019

ACIN - CDS

MODELLBILDUNG



Modellbildung

Übung
Sommersemester 2019

ACIN - CDS

TU Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gußhausstraße 27–29
1040 Wien
Telefon: +43 1 58801 – 37615
Internet: <https://www.acin.tuwien.ac.at>

© Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1. Newtonsche Gesetze	1
1.1. Einführung in die Statik	1
1.1.1. Schnittkräfte und -momente	1
1.1.2. Kräfte- und Drehmomentenbilanz	4
1.1.3. Vorgehensweise	4
1.1.4. Grundlegende Beispiele	4
1.2. Aufgaben	8
2. Euler-Lagrange Gleichungen	14
3. Wärmeübertragung	19

1. Newtonsche Gesetze

1.1. Einführung in die Statik

In der Statik wird *zuerst* vorausgesetzt, dass keine Beschleunigungen auftreten und auf Basis dieser Annahme werden die dann wirkenden Belastungen errechnet. Die daraus folgenden Kräfte und Momente stellen sich also nur dann ein, wenn es tatsächlich zu keinen Beschleunigungen kommt. Systeme mit vernachlässigbaren Beschleunigungen können häufig in guter Näherung als quasi-statisch betrachtet werden und dann durch statische Beziehungen beschrieben werden. Treten durch die errechneten Belastungen Beschleunigungen auf, so muss das System dynamisch beschrieben werden.

1.1.1. Schnittkräfte und -momente

Die Gleichgewichtsbedingungen der Statik gelten nicht nur für jeden Starrkörper, sondern auch für jedes Teilsystem. Insbesondere Teile eines Körpers und das Gesamtsystem erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen. Um diese nutzen zu können, werden Teilsysteme anhand einer Skizze, dem *Freikörperdiagramm*, frei geschnitten. Die Schnittgrenzen sind beliebige geschlossene Konturen, siehe Abbildung 1.1. Häufig ist es zielführend, dass jeder Körper aus allen Kontaktstellen mit seiner Umgebung gelöst wird. Ein freigeschnittener Teilkörper

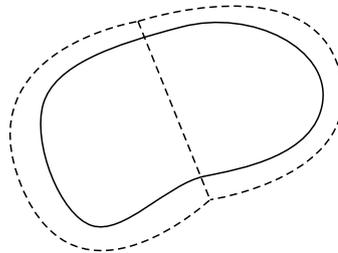


Abbildung 1.1.: Starrkörper mit angedachten Schnittgrenzen.

erfährt nun nicht mehr die Kräfte und Momente, die er im Gesamtsystem erfahren würde. Um diese Wechselwirkungen des Teilkörpers mit seiner Umgebung zu ersetzen, werden *Schnittkräfte* eingeführt, siehe Abbildung 1.2. Dadurch verhält sich der freigeschnittene Teilkörper gleich wie im Gesamtsystem und kann somit zur Berechnung der wirkenden Belastungen herangezogen werden. Da an den Schnittufern (Schnittkanten) im Allgemeinen auch Drehmomente übertragen werden können, müssen auch *Schnittmomente* eingeführt werden. Der Angriffspunkt der Schnittkräfte ist im Allgemeinen unbekannt und kann daher frei gewählt werden. Das Schnittmoment kann auch als Drehmoment interpretiert

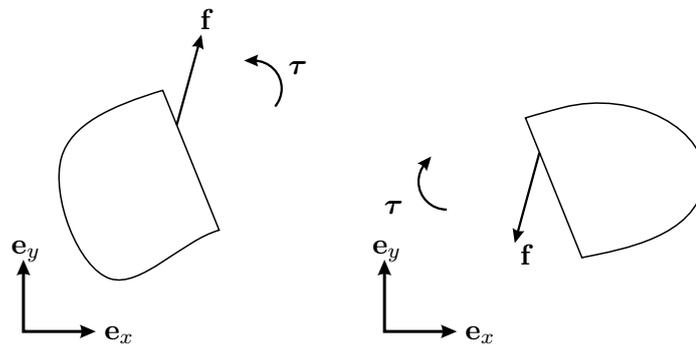


Abbildung 1.2.: Frei geschnittener Starrkörper mit Schnittkräften und -momenten.

werden, das durch den gewählten Angriffspunkt der Schnittkräfte entsteht. Es gibt also einen Angriffspunkt der Schnittkräfte genau so, dass das Schnittmoment verschwindet.

Schnittmomente und -kräfte haben unbekannte Richtung und Betrag. Daher muss für jede Kontaktstelle entlang eines Freischnittes eine allgemeine Kraft und ein allgemeines Drehmoment vorgesehen werden, siehe Abbildung 1.2. Diese beiden Größen können durch Kräfte in jede Raumrichtung und Drehmomente für jede Drehachse angesetzt werden, siehe Abbildung 1.3. Dies entspricht einer Aufteilung der unbekanntes Kraft in Anteile

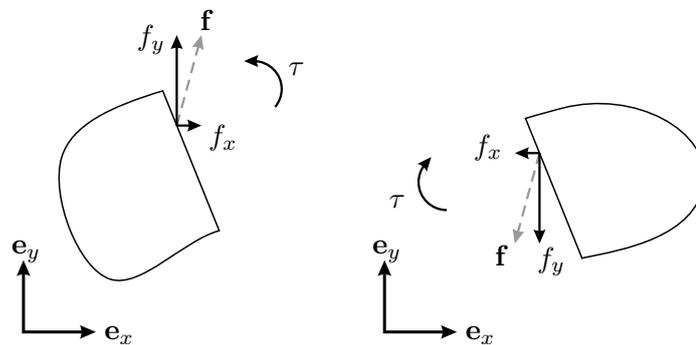


Abbildung 1.3.: Freigeschnittener Starrkörper mit Schnittkräften aufgeteilt in Koordinatenrichtungen.

entlang der gewählten Koordinatenrichtungen, für das betrachtete planare Problem gilt also

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y. \quad (1.1)$$

Auch die Aufteilung der Kräfte kann in beliebige Richtungen erfolgen, oft empfehlen sich Richtungen orthogonal und tangential zum Schnittufer, wie in Abbildung 1.4 dargestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen garantieren, dass die Summe der aufgeteilten Kräfte der ursprünglichen Kraft entspricht.

Wichtig ist dabei, dass in der *ersten* Skizze die Schnittkräfte und -momente beliebig eingezeichnet werden können. Jeder angrenzende Freischnitt muss allerdings zu diesem

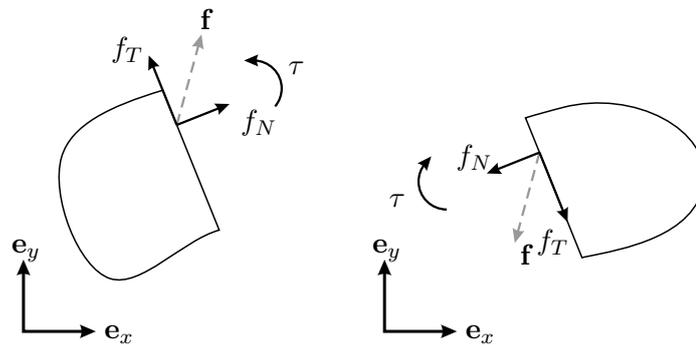


Abbildung 1.4.: Frei geschnittener Starrkörper mit Schnittkräften aufgeteilt entlang des Schnittufers.

konsistent sein, das heißt, dass die gleichen Schnittgrößen in gegengleiche Richtung verwendet werden. Der Betrag der Schnittgrößen zweier Schnittufer muss also gleich sein, die Richtung umgekehrt. Dies garantiert, dass beim gedachten Zusammensetzen der Freikörperdiagramme die Schnittbelastungen verschwinden. Daraus folgt, dass vollständige Skizzen nur *äußere Kräfte*, wie Gravitationskräfte, äußere Anregungen, Motoren, etc., enthalten. Schnittkräfte, beziehungsweise *innere Kräfte*, dürfen dagegen nur in Freikörperdiagrammen eingezeichnet werden.

Reaktionskräfte und *-momente* (auch *Zwangskräfte* genannt) sind Größen, die sich zur Einhaltung vorgegebener Zwangsbedingungen ergeben. Sie stellen sich so ein, dass ein Körper den Einschränkungen seiner Bewegungsfreiheit, also den gegebenen Zwangsbedingungen, genügt. Reaktionskräfte entstehen zum Beispiel bei Führungen, bei starren Kontakten, oder auch quer zu einem ideal rollenden Rad, sowie auch bei Lagerungen. Schnittkräfte sind Reaktionskräfte, da sie sich durch das statische Gleichgewicht aus den Belastungen des Systems ergeben. Sie erfüllen den Zwang, dass der Zusammenhalt der Teilkörper gewährleistet sein muss. Die Haftkraft ist eine Reaktionskraft, da sie den festen Kontakt zwischen zwei Körpern sicherstellt. Die Haftkraft wird also als Schnittkraft behandelt und berechnet. Infolge dessen muss die Haftbedingung nach dem Errechnen der Reaktionskräfte genutzt werden, um die Annahme des Haftens zu überprüfen. Wird die Haftbedingung nicht erfüllt, also die Reaktionskraft der Reibung ist größer, als die maximale Reibkraft des Kontakts, kommt es zur Beschleunigung der Körper.

Eingeprägte Kräfte und *Momente* sind all jene Belastungen, deren Richtung und Betrag durch äußere Gesetze vorgegeben ist. Die gesamte auf einen Körper wirkende Kraft ist die Summe aus Reaktionskräften und eingeprägten Kräften. Zu den eingeprägten Kräften zählen zum Beispiel die Gravitationskraft und Motormomente, die von außen auf ein System wirken. Gleichsam gilt dies auch für äußere Störungen, wie zum Beispiel Windlasten auf eine Hausfront. Auch die Gleitreibungskraft ist eine eingeprägte Kraft. Im Gegensatz zur Haftkraft wird beim gleitenden Kontakt keine Reaktionskraft der Reibung berechnet, sondern die Gleitreibungskraft kann direkt durch ein mathematisches Reibmodell bestimmt werden. Die Richtung der Gleitreibungskraft ist immer entgegen der Relativgeschwindigkeit zweier Körper.

Zusammenfassend: Schnittkräfte sind Reaktionskräfte und kommen durch das Auftrennen des Systems zustande. Sie garantieren, dass Teile eines Systems die Kräfte und Momente erfahren, die sie im Gesamtsystem erfahren würden, obwohl sie gedacht frei geschnitten werden. Schnittgrößen ersetzen also in Freikörperdiagrammen die Wechselwirkungen der betrachteten Teile mit ihrer Umgebung. Da es sich um Reaktionskräfte handelt, können Schnittgrößen beliebig eingezeichnet werden. Ihre Richtung und ihr Betrag werden durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Lediglich auf die Konsistenz der Schnittkräfte an den Schnittufern ist zu Achten.

1.1.2. Kräfte- und Drehmomentenbilanz

Die Gleichgewichtsbedingungen postulieren, dass Impuls- und Drehimpulserhaltung für jedes beliebige Teilsystem gelten. In der Statik überzeugt man sich leicht (Beschleunigungen sind vernachlässigbar), dass die Summe aller Kräfte und Drehmomente bezüglich jedes Punktes verschwinden muss. Insbesondere gelten diese Bilanzen für jeden beliebigen Freischnitt. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern für ebene Probleme 3 Gleichungen (2 Kräfte- und 1 Momentenbilanz). Dementsprechend können Schnittgrößen durch Momenten- und Kräftebilanz (statisch) bestimmt werden.

Die Drehmomentenbilanz wird bezüglich eines beliebigen Punktes für jeden Teilkörper bestimmt. Es ist zweckmäßig den Bezugspunkt so zu wählen, dass möglichst viele uninteressante Kräfte kein Moment liefern. Dies geschieht genau dann, wenn der gewählte Bezugspunkt auf der Wirkungslinie der Kräfte liegt und dadurch der Normalabstand zwischen Kraftlinie und Bezugspunkt verschwindet.

1.1.3. Vorgehensweise

Um die Belastungen eines statischen Systems zu bestimmen geht man wie folgt vor:

- a) Auftrennen des Systems in geeignete Teilsysteme
 - Anfertigen eines Freikörperdiagramms für jedes freigeschnittene Teilsystem
 - Einzeichnen der Schnittgrößen in die Freischnittdiagramme
 - Überprüfen, ob sich diese beim Zusammensetzen gegenseitig aufheben
- b) Aufstellen der Kräftebilanz
- c) Aufstellen der Momentenbilanz bezüglich eines geeigneten Punktes
- d) Auflösen der resultierenden Gleichungen nach den gesuchten Größen
- e) Überprüfen der Annahme der (Quasi-) Statik (z.B. Haftbedingungen)

1.1.4. Grundlegende Beispiele

Diese Zusammenhänge sollen im Folgenden anhand grundlegender Beispiele gezeigt werden. Abbildung 1.5 zeigt einen Stab zwischen zwei Lagern. Im Punkt A ist ein *Festlager* schematisch dargestellt. Dieser Lagertyp kann vertikale wie auch horizontale Kräfte vom

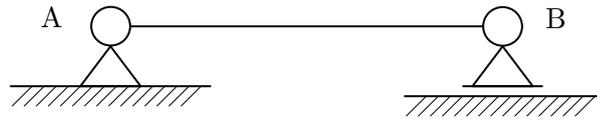


Abbildung 1.5.: Gelagerter Stab.

Stab auf den festen Untergrund (strichliert angedeutet) übertragen. Das Lager im Punkt B wird als *Loslager* oder auch verschiebliches Lager bezeichnet. Es kann nur vertikale Kräfte aufnehmen, da es in horizontaler Richtung reibungsfrei gleitet. Loslager sind üblicherweise verschieblich eingebaute Lager, die unter Anderem die Wärmedehnung des Stabes durch Verschiebung ausgleichen. Da wir von idealen Lagern ausgehen, entstehen in diesen keine Reibungsmomente und somit muss das übertragene Moment in den Lagern verschwinden. Dadurch können also im Lager einige Schnittkräfte ausgeschlossen werden. Es bietet sich also an zur Berechnung der Lagerkräfte die Lager aufzutrennen und frei zu schneiden. Die Freischnittskizze 1.6 ist nur vollständig, wenn alle Einzelteile des Systems abgebildet werden und ein frei wählbares Koordinatensystem eingezeichnet wurde. Weiters wird hier

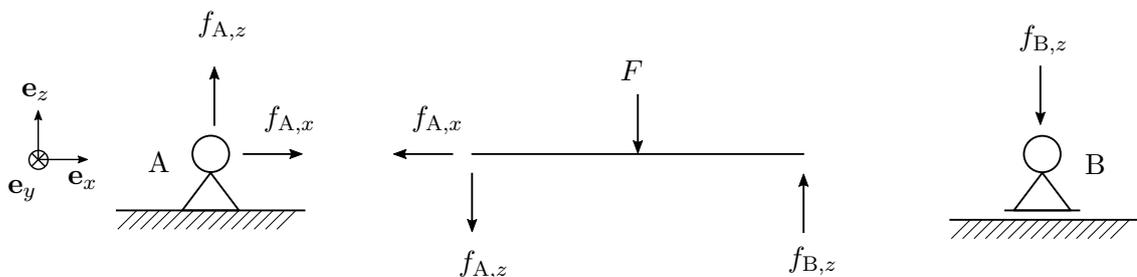


Abbildung 1.6.: Freischnittskizze des Stabes und der Lager.

deutlich, dass sich die Schnittkräfte des Lagers im Punkt A und die Schnittkräfte des Stabes im Punkt A aufheben müssen. Darum wirken hier die gleichen Kräfte in entgegengesetzte Richtung. Die Gravitationskraft der Masse des Stabes F ist eine eingeprengte Kraft und wirkt in der Stabmitte. Sie muss durch die Lagerkräfte ausgeglichen werden.

Als nächsten Schritt betrachte man die Kräftebilanz des Stabes (mittlerer Freischnitt), die wie folgt lautet

$$x : 0 = -f_{A,x} \quad (1.2a)$$

$$z : 0 = -f_{A,z} - F + f_{B,z}. \quad (1.2b)$$

Es zeigt sich also, dass das Lager im Punkt A nur vertikal belastet wird, da keine weiteren horizontalen Kräfte wirken. Weiters gilt durch Umformen

$$F = -f_{A,z} + f_{B,z}, \quad (1.3)$$

also dass die Summe der Lagerkräfte der Gewichtskraft des Stabes entspricht. Da diese Gleichung allein nicht nach $f_{A,z}$ und $f_{B,z}$ auflösbar ist, wird die Drehmomentenbilanz um

den Punkt A betrachtet

$$\sum_i \tau_i^{(A)} = 0 = F \frac{l}{2} - f_{B,z} l, \quad (1.4)$$

wobei l die Stablänge ist. Daraus ergibt sich die Lösung durch Auflösen der Kräfte- und Drehmomentenbilanz

$$f_{B,z} = \frac{F}{2} \quad (1.5a)$$

$$f_{A,z} = -\frac{F}{2}. \quad (1.5b)$$

Die Kraft F des Stabes wird also gleich auf die Lager verteilt. Man beachte, dass $f_{A,z}$ hier negativ eingeht und somit physikalisch in positive z -Richtung auf den Stab wirkt. Intuitiv sieht man, dass die Kräfte der Lager den Stab halten. Dagegen wirken die Lagerkräfte auf die freigeschnittenen Lager jeweils in negative z -Richtung, übertragen also das Gewicht des Stabes in den Boden.

Analog dazu soll noch ein Balken nach Abbildung 1.7 betrachtet werden, der von einer äußeren Kraft belastet wird. Hierbei sind die Kräfte und Momente auf die Wand zu

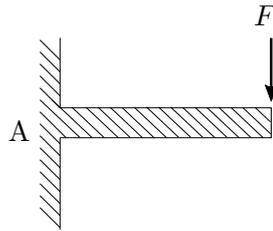


Abbildung 1.7.: Balken an einer Wand.

berechnen, die, unter Vernachlässigung der Schwerkraft, durch die Kraft entstehen. Da die Kräfte an der Wand gefunden werden sollen, wird die Schnittgrenze durch den Punkt A gelegt, siehe Abbildung 1.8. Neben einer Normalkraft $f_{A,x}$ und einer Scherkraft $f_{A,z}$

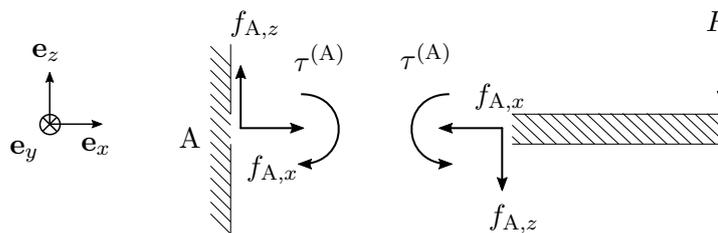


Abbildung 1.8.: Balken an einer Wand.

wirkt bei allgemeinen Kontaktflächen auch ein Moment $\tau^{(A)}$. Dieses Moment wirkt einem Verdrehen des freigeschnittenen Balkens entgegen. Im Gegensatz dazu kann durch ideale Lager oder Punktkontakte kein Moment übertragen werden.

Die Kräftebilanz des freigeschnittenen Balkens liefert

$$x : 0 = -f_{A,x} \quad (1.6a)$$

$$z : 0 = -f_{A,z} - F. \quad (1.6b)$$

Die Scherkraft gleicht also die äußere Kraft F aus. Zur Berechnung der Drehmomentenbilanz wird der Punkt A gewählt, da hier sowohl $f_{A,x}$ als auch $f_{A,z}$ keinen Anteil am Drehmoment haben. Die Kraftlinien schneiden den Bezugspunkt wodurch der Normalabstand verschwindet. Die Drehmomentenbilanz liefert also

$$\sum_i \tau_i^{(A)} = 0 = Fl - \tau^{(A)} \quad (1.7)$$

und damit gilt für die Belastungen der Wand

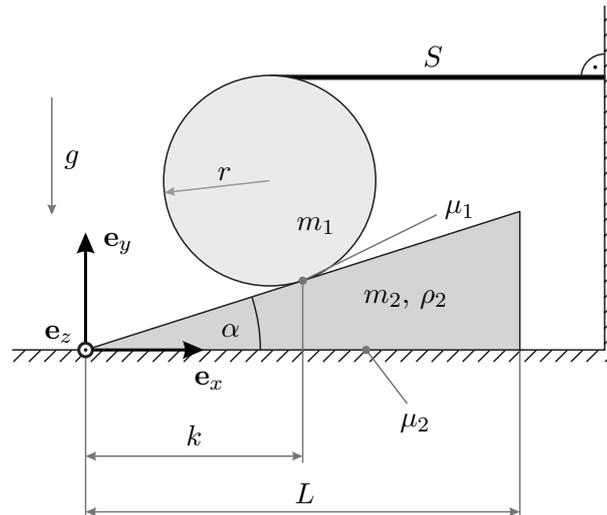
$$f_{A,z} = F \quad (1.8a)$$

$$f_{A,x} = 0 \quad (1.8b)$$

$$\tau^{(A)} = Fl. \quad (1.8c)$$

1.2. Aufgaben

Aufgabe 1.1 (Rolle und Keil). Gegeben ist eine Rolle der Masse m_1 , welche mit dem Seil S an einer Wand befestigt ist. Die Rolle liegt auf einem Keil der Tiefe T (entlang e_z) und der Dichte ρ_2 . Zwischen Rolle und Keil gilt der Haftreibungskoeffizient μ_1 , zwischen Keil und Boden gilt μ_2 . Die Erdbeschleunigung g wirkt entlang $-\mathbf{e}_y$.



- Berechnen Sie die Masse m_2 und den Schwerpunkt des Keils bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems in \mathbf{e}_x - und \mathbf{e}_y -Richtung.
- Schneiden Sie die Körper frei und zeichnen Sie alle Schnittkräfte und -momente ein.
- Stellen Sie die Kräfte- und Momentenbilanz für die Schnittkörper auf.
- Berechnen Sie alle Normal- und Reibkräfte, sowie die Seilkraft f_S als Funktionen von m_1 , m_2 , g und α .
- Welche Bedingungen müssen für μ_1 und μ_2 gelten, damit alle Körper in Ruhe bleiben?
- Berechnen Sie die x -Koordinate der Normalkraft vom Boden auf den Keil, sodass das Schnittmoment verschwindet.

Lösung von Aufgabe 1.1.

- a) Mit der Höhe

$$h(x) = x \tan(\alpha)$$

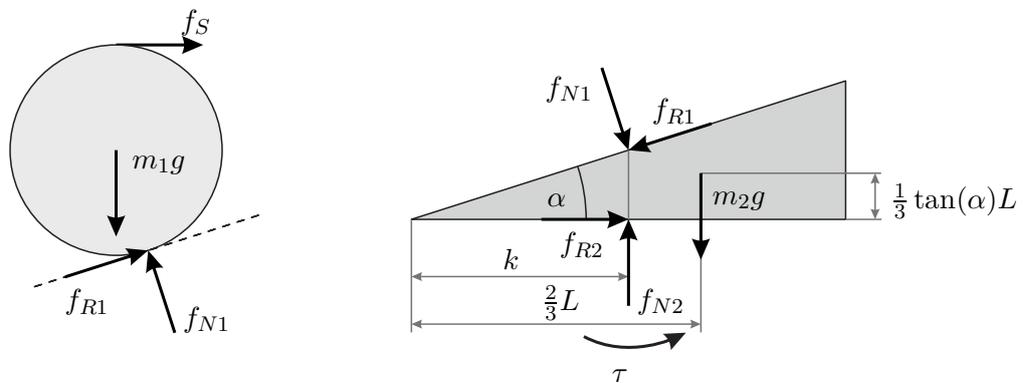
ergibt sich für den ersten Teilpunkt:

$$m_2 = \int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} \rho_2 \, dy dx dz = \frac{1}{2} \rho_2 L^2 T \tan(\alpha)$$

$$s_x = \frac{\int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} x \rho_2 \, dy dx dz}{m_2} = \frac{2}{3} L$$

$$s_y = \frac{\int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} y \rho_2 \, dy dx dz}{m_2} = \frac{1}{3} \tan(\alpha) L$$

b)



c) Rolle

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : & \quad f_S + f_{R1} \cos(\alpha) - f_{N1} \sin(\alpha) = 0 \\ \mathbf{e}_y : & \quad -m_1 g + f_{R1} \sin(\alpha) + f_{N1} \cos(\alpha) = 0 \\ \tau_z : & \quad -r f_S + r f_{R1} = 0 \end{aligned}$$

$$f_{N1} = m_1 g$$

$$f_{R1} = f_S = m_1 g \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

Keil

Der Angriffspunkt der Kraft f_{N1} wird in x -Richtung mit k bezeichnet, siehe

Grafik, der Angriffspunkt von f_{N2} in x -Richtung mit e .

$$\mathbf{e}_x : \quad f_{R2} - f_{R1} \cos(\alpha) + f_{N1} \sin(\alpha) = 0$$

$$\mathbf{e}_y : \quad f_{N2} - m_2g - f_{R1} \sin(\alpha) - f_{N1} \cos(\alpha) = 0$$

$$\tau_z : \quad k \tan(\alpha)A - (k - e)B - \left(\frac{2}{3}L - e\right)m_2g + \tau = 0$$

$$A = f_{R1} \cos(\alpha) - f_{N1} \sin(\alpha)$$

$$B = f_{R1} \sin(\alpha) + f_{N1} \cos(\alpha)$$

d)

$$f_{R2} = -m_1g \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

$$f_{N2} = m_1g + m_2g$$

e) Es muss gelten, dass beide Kontaktstellen in Haftung bleiben, also

$$\mu_1 > \frac{f_{R1}}{f_{N1}}, \quad \mu_2 > \frac{f_{R2}}{f_{N2}}.$$

f) Die Momentenbilanz, mit $M = 0$, nach e aufgelöst ergibt

$$e = \frac{-k \tan(\alpha)A + kB + \frac{2}{3}Lm_2g}{B + m_2g}.$$

Alternativ kann statt des Moments ein Kräftepaar verwendet werden. Ein Kräftepaar kann die Auswirkung eines Moments auf einen Körper ersetzen. Die Größen der parallelen Kräfte ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen so, dass die Summe der Normalkräfte gleich der ursprünglichen Normalkraft ist und das Moment durch den Abstand der parallelen Kräfte erzeugt wird.

$$\mathbf{e}_y : \quad f_{N2} + N_3 - m_2g - f_{R1} \sin(\alpha) - f_{N1} \cos(\alpha) = 0$$

$$\tau_z : \quad -kf_{N1} \cos(\alpha) - m_2g \frac{2}{3}L + LN_3 = 0$$

Es folgt

$$N_3 = \frac{\frac{2}{3}Lm_2g + kf_{N1} \cos(\alpha)}{L}$$

und

$$f_{N2} = m_2g + f_{N1} \cos(\alpha) + f_{R1} \sin(\alpha) - N_3.$$

Aufgabe 1.2 (Hebelbremse). Im folgenden Beispiel wird eine Trommel mit dem Radius r und dem Massenträgheitsmoment θ betrachtet, siehe Abb. 1.9. Die Trommel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und hat anfangs die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t=0) = \omega_0$. Der Drehwinkel der Trommel $\varphi(t)$ ist zum Anfangszeitpunkt gleich Null. Die Trommel soll durch einen Bremshebel der Länge L zum Stillstand gebracht werden. Hierzu ist der Bremshebel an der Stelle $x=0$ drehbar gelagert und an der Stelle $x=L$ wirkt eine externe Kraft f . Bei $x=l$ kommt es zum reibungsbehafteten Kontakt zwischen Hebel und Trommel. Die Reibung dieses Kontakts wird durch trockene Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ modelliert.

Gegeben: $l, L, \theta, \omega_0, r, \mu, f, \tau_{ext}, c, d$

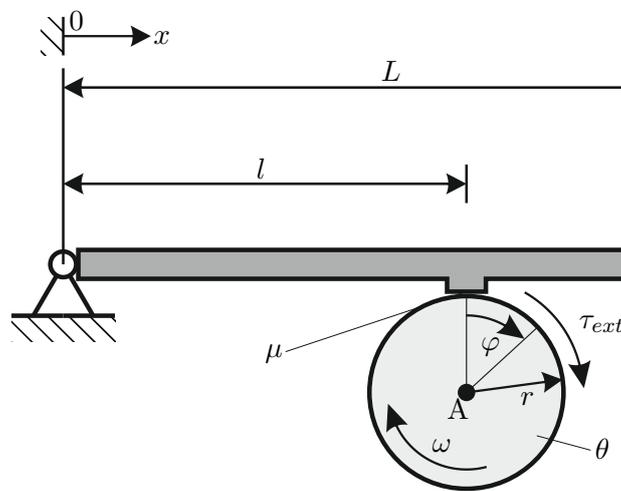


Abbildung 1.9.: Trommel mit Bremshebel.

Für die Unterpunkte a) bis e) gilt, dass die Trommel reibungsfrei im Punkt A gelagert ist sowie dass das externe Moment τ_{ext} gleich Null ist:

- Schneiden Sie die Trommel und den Bremshebel frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. Bestimmen Sie die Normalkraft f_N zwischen dem Hebel und der Trommel sowie die Reibkraft f_R .
- Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an sowie die entsprechenden Anfangsbedingungen.
- Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie mittels der Lösung die Zeit t_s , den Drehwinkel φ_s sowie die Anzahl an Umdrehungen n_s bis zum Stillstand.
- Wie lautet die kinetische Energie T_0 und T_E der Trommel im Anfangszustand sowie im Endzustand (Stillstand)?

- e) Der Winkel φ_s bis zum Stillstand kann auch aus der Reibarbeit W berechnet werden. Die verrichtete Reibarbeit ergibt sich aus dem Arbeitssatz zu $W = T_E - T_0$. Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen n_s bis zum Stillstand aus der Reibarbeit.
Hinweis: Die Reibarbeit lautet $W = \int_0^{\varphi_s} \tau_R d\varphi$, wobei τ_R das Reibmoment definiert.

Für die Unterpunkte f) bis g) gilt, dass im Punkt A eine Drehfeder mit der Federkonstanten c und dem entspannten Winkel $\varphi = 0$, eine Dämpfung mit der Konstanten d sowie das externe Moment $\tau_{ext} \neq 0$ wirkt. Die Feder ist im Ruhezustand entspannt:

- f) Welche zusätzlichen Momente wirken nun an der Trommel? Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an.
- g) Schreiben Sie das resultierende Gleichungssystem als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an und bestimmen Sie die Ruhelagen.

Lösung von Aufgabe 1.2.

- a) Der freigeschnittene Bremshebel sowie die Trommel sind in Abb. 1.10 dargestellt.

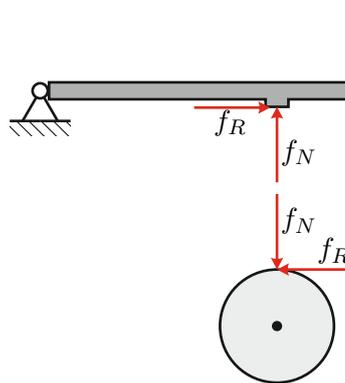


Abbildung 1.10.: Freischnittskizze der Trommel und des Bremshebels. Aus dem Momentengleichgewicht ergibt sich die Normalkraft f_N und die Reibkraft f_R zu

$$f_N = \frac{L}{l} f$$

$$f_R = \mu f_N = \mu \frac{L}{l} f.$$

- b) Drehimpulserhaltung und Anfangsbedingungen:

$$\theta \ddot{\varphi} = -r f_R = -r \mu \frac{L}{l} f \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

- c) Es folgt für die Zeit t_s , den Drehwinkel $\varphi_s = \varphi(t_s)$ und die Anzahl an Umdre-

hungen n_s bis zum Stillstand

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{\theta l}{r\mu Lf} \omega_0 \\ \varphi_s &= \frac{\theta l}{2r\mu Lf} \omega_0^2 \\ n_s &= \frac{\varphi_s}{2\pi} = \frac{\theta l}{4\pi r\mu Lf} \omega_0^2. \end{aligned}$$

d) Die kinetische Energie des Anfangszustands sowie des Endzustands lautet:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \theta \omega_0^2 \\ T_E &= 0 \end{aligned}$$

e) Mithilfe des Arbeitssatzes $W = T_E - T_0$ und $W = \int_0^{\varphi_s} \tau_R d\varphi$ mit $\tau_R = -rf_R$ ergibt sich die Anzahl der Umdrehungen zu

$$n_s = \frac{\varphi_s}{2\pi} = \frac{\theta l}{4\pi r\mu Lf} \omega_0^2.$$

f) Zuzufolge der Drehfeder und der vorhandenen Dämpfung müssen die beiden Momente $M_f = c\varphi$ und $M_d = d\dot{\varphi}$ berücksichtigt werden und somit lautet die Impulserhaltung wie folgt

$$\theta \ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + c\varphi = \tau_{ext} - rf_R \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}).$$

g) Der Zustandsvektor \mathbf{x} ist gegeben durch $\mathbf{x}^T = [\varphi, \dot{\varphi}]$ und somit ergibt sich die Zustandsraumdarstellung zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/\theta & -d/\theta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\tau_{ext} - rf_R \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}))/\theta \end{bmatrix}.$$

Die entsprechenden Ruhelagen lauten

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{c} \tau_{ext} \\ \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist besonders im Bezug auf die Automatisierung von Interesse (Zustandsraum-Darstellung als Standard Form).

2. Euler-Lagrange Gleichungen

Aufgabe 2.1 (Balken). In Abb. 2.1 ist ein drehbar gelagerter Balken (Trägheitsmoment $\theta_{B,zz}^{(A)}$ um den Drehpunkt A, Länge l , Masse vernachlässigbar) abgebildet auf den das Moment τ wirkt. Im betrachteten ebenen Beispiel gleitet ein Würfel mit der Kantenlänge $2k$, dem Massenträgheitsmoment $\theta_{W,zz}^{(S)}$ um den Schwerpunkt S des Würfels und der Masse m reibungsfrei auf diesem Balken. Weiters greift eine parallel zum Balken wirkende Störkraft F_d am Schwerpunkt des Würfels an. Am rechten Ende des Balkens ist eine lineare Feder mit der Federkonstante c und der entspannten Federlänge x_0 angebracht.

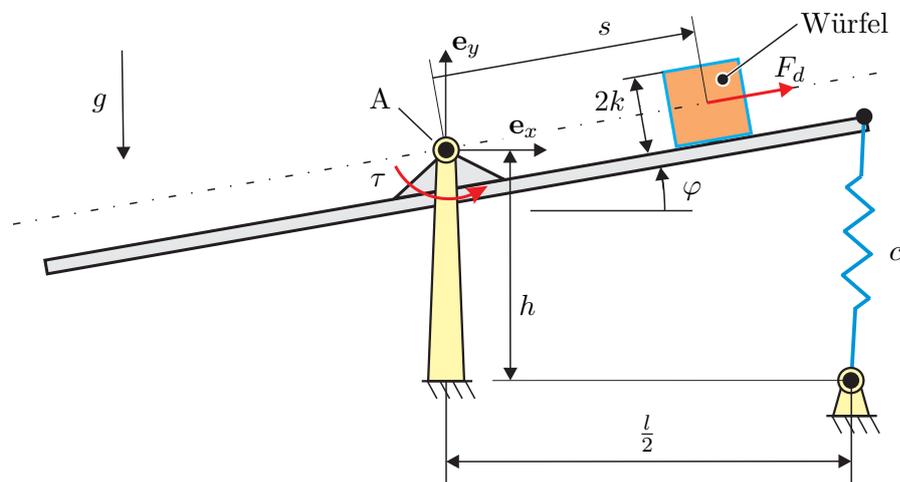


Abbildung 2.1.: Drehbar gelagerter Balken mit gleitendem Würfel.

- Leiten Sie die Winkelgeschwindigkeit und die translatorische Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Würfels in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [\varphi \ s]^T$ und deren zeitlicher Ableitungen her.
- Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und deren zeitlicher Ableitungen.
- Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie für $\varphi = 0$ verschwindet.
- Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an.
- Leiten Sie mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems her.

Lösung von Aufgabe 2.1.

- a) Der Ortsvektor vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt des Würfels \mathbf{x}_W folgt zu

$$\mathbf{x}_W = \begin{bmatrix} s \cos(\varphi) \\ s \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

und somit die translatorische Geschwindigkeit \mathbf{v}_W zu

$$\mathbf{v}_W = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_W = \begin{bmatrix} \dot{s} \cos(\varphi) - s \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{s} \sin(\varphi) + s \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

bzw. ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit des Würfels $\omega_W = \dot{\varphi}$.

- b) Die kinetische Energie ergibt sich unter Vernachlässigung der Masse des Balkens zu

$$T = \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_W^T \mathbf{v}_W = \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2).$$

- c) Für die potentielle Energie der Feder V_F ist die Länge der Feder zu bestimmen. Dazu wird der Ortsvektor \mathbf{x}_F vom unteren zum oberen Aufhängungspunkt der Feder

$$\mathbf{x}_F = \begin{bmatrix} k \sin(\varphi) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) - \frac{l}{2} \\ h - k \cos(\varphi) + \frac{l}{2} \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

benötigt. Damit folgt die potentielle Energie der Feder zu

$$V_F = \frac{1}{2} c (|\mathbf{x}_F| - x_0)^2$$

mit $|\mathbf{x}_F| = \sqrt{\mathbf{x}_F^T \mathbf{x}_F}$. Die potentielle Energie V_G zufolge der Gravitation berechnet sich zu $V_G = mgs \sin(\varphi)$ und weiters die gesamte potentielle Energie zu

$$V = V_G + V_F - V_F(\varphi = 0).$$

- d) Die Lagrangefunktion L ergibt sich zu

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2) - mgs \sin(\varphi) \\ &\quad - \frac{1}{2} c (|\mathbf{x}_F| - x_0)^2 + \frac{1}{2} c (h - k - x_0)^2. \end{aligned}$$

e) Euler-Lagrange-Formalismus:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{f}_{np}$$

Die einzelnen Ableitungen folgen zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \begin{bmatrix} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)} + ms^2)\ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\dot{\varphi} \\ m\ddot{s} \end{bmatrix}$$

und

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} -mgs \cos(\varphi) - c(|\mathbf{x}_F| - x_0) \frac{1}{|\mathbf{x}_F|} \mathbf{x}_F^T \left[k \cos(\varphi) - \frac{l}{2} \sin(\varphi) \quad k \sin(\varphi) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) \right]^T \\ ms\dot{\varphi}^2 - mg \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Der Vektor der äußeren Kräfte \mathbf{f}_{np} folgt zu

$$\mathbf{f}_{np} = \begin{bmatrix} \tau \\ F_d \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2.2 (Pendel). In Abbildung 2.2 sind zwei Pendel (Länge L_1 , Masse m_1) starr mit Hilfe eines Querstabes (Länge L_2 , Masse m_2) miteinander gekoppelt. Die Pendel sind durch eine lineare Drehfeder (Federkonstante c_1 , entspannte Lage für $\varphi = 0$) mit dem Querstab verbunden. Über eine masselose Stange der Länge l wird auf eine Punktmasse m_K mittels eines Elektromotors (Masse m_M , fix im Schwerpunkt des Querstabes befestigt) ein externes Drehmoment τ aufgebracht. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibungsmomente in den Aufhängepunkten (horizontaler Abstand L_2) durch drehwinkelgeschwindigkeitsproportionale Drehdämpfer (Dämpferkonstante d_1) ausgedrückt werden können.

Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes (Masse m , Länge l), der um eine Querachse durch den Schwerpunkt rotiert, lautet $\theta = \frac{1}{12}ml^2$.

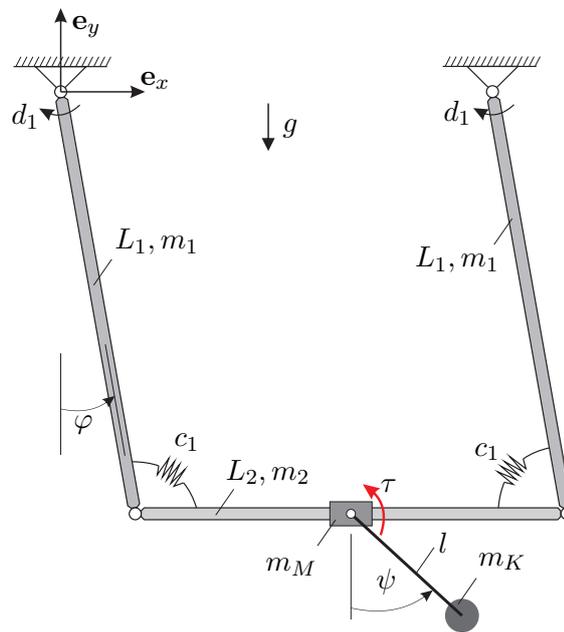


Abbildung 2.2.: Pendel

- Wählen Sie einen geeigneten Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und stellen Sie die Ortsvektoren \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_K , vom Ursprung des Koordinatensystems zu den Schwerpunkten des Querstabes und der Punktmasse, auf.
- Bestimmen Sie die translatorische Geschwindigkeit der Punktmasse m_K .
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und deren Zeitableitung $\dot{\mathbf{q}}$.
- Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} .
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus her.

Lösung von Aufgabe 2.2.

- a) Der Vektor der generalisierten Koordinaten wird mit Hilfe der Winkel φ und ψ entsprechend

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi \\ -L_1 \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi + l \sin \psi \\ -L_1 \cos \varphi - l \cos \psi \end{bmatrix}$$

- b)

$$\dot{\mathbf{r}}_K = L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}$$

- c)

$$T = 2\frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_M)L_1^2 \dot{\varphi}^2 \\ + \frac{1}{2}m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right]$$

- d)

$$V = 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) + (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) \\ + m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] + 2\frac{1}{2}c_1 \varphi^2$$

- e)

$$\left(2 \left(\frac{1}{12}m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K)L_1^2 \right) \ddot{\varphi} \\ + m_K L_1 l \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) \\ + \sin \varphi (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 + 2c_1 \varphi = -2d_1 \dot{\varphi} \\ m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 l \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ + m_K g l \sin \psi = \tau$$

3. Wärmeübertragung

Aufgabe 3.1 (Strahler). Ein halbkugelförmiger Strahler (Durchmesser d , Temperatur T_2 , Emissivität ε_2) heizt eine ebene Scheibe (Durchmesser D , Dicke H , Emissivität ε_1 , Wärmeleitfähigkeit λ_1) auf, siehe Abb. 3.1. Der Wärmeaustausch durch Konvektion wird hierbei vernachlässigt. Die Temperatur der Unterseite der Scheibe ist konstant und entspricht der Umgebungstemperatur T_∞ . Die Außenfläche des Strahlers und die Mantelfläche der Scheibe sind ideal isoliert.

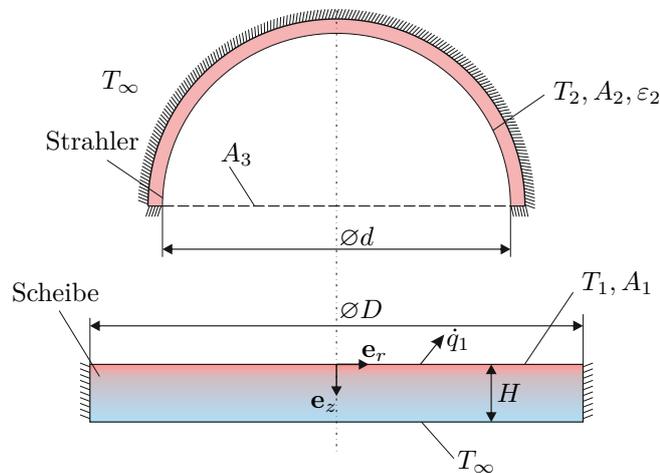


Abbildung 3.1.: Aufheizen einer Scheibe.

- a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren F_{12} , F_{21} , F_{22} und F_{23} . Der Sichtfaktor F_{13} zwischen der Scheibe und der imaginären Fläche A_3 ist bekannt. Geben Sie zuerst den Sichtfaktor F_{32} an.

Hinweis: Nutzen Sie hierbei die Summationsregel für die Strahlungsräume bestehend aus A_1 , A_3 und der Umgebung sowie A_2 und A_3 . Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R beträgt $4\pi R^2$.

- b) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Nettowärmestromdichten

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4$$

her. Gehen Sie von der Nettowärmestromdichte die die Oberfläche A_i verlässt, d.h., $\dot{q}_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i)$ aus, wobei die auf die Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie sich zu

$$G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji}(\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i)G_i)$$
 errechnet.

- c) Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung mit den Randbedingungen für die Scheibe unter der Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in radialer und axialer Richtung sowie bekannter Wärmestromdichte \dot{q}_1 an. Bestimmen Sie das stationäre Temperaturprofil der Scheibe in z -Richtung und die Oberflächentemperatur T_1 für $\lambda_1(z) = \exp(-z)$.

Lösung von Aufgabe 3.1.

a)

$$F_{12} = F_{13} \quad (3.1)$$

$$F_{21} = \frac{D^2}{2d^2} F_{13} \quad (3.2)$$

$$F_{22} = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$F_{23} = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

b) Der gesuchte Zusammenhang folgt aus

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} \left[\text{diag}(\varepsilon) \sigma \mathbf{T}^4 + (\mathbf{E} - \text{diag}(\varepsilon)) \mathbf{G} \right]$$

und

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}(\varepsilon) (\sigma \mathbf{T}^4 - \mathbf{G})$$

durch einfache Umformung

c) Wärmeleitgleichung in z -Richtung mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1(z) \frac{\partial}{\partial z} T(z, t) \right) \\ \lambda_1(0) \frac{\partial}{\partial z} T(0, t) &= \dot{q}_1 \\ T(H, t) &= T_\infty \end{aligned}$$

Stationäres Temperaturprofil der Scheibe in z -Richtung:

$$T_s(z) = T_\infty + \dot{q}_1 (e^z - e^H)$$

Oberflächentemperatur der Scheibe T_1 :

$$T_1 = T_\infty + \dot{q}_1 (1 - e^H)$$

Aufgabe 3.2 (Stromschiene). Durch eine dünne, stromdurchflossene Schiene mit der homogen verteilten Temperatur T_1 werden zwei eingefasste Schienen erhitzt, deren Unterseite durch geeignete Kühlung konstant auf T_∞ gehalten wird (siehe Abb. 3.2). Es wird angenommen, dass alle drei Strahlungskörper gegenüber den schraffierten Körpern perfekt thermisch isoliert und in die Tiefe unendlich ausgedehnt sind und nur durch Strahlung Wärme austauschen. Die obere Schiene 1 wird von einem Gleichstrom I durchflossen und erwärmt sich durch den spezifischen Widerstand ϱ_1 . Da der Strahlungsraum nicht geschlossen ist, wird er durch eine mit Temperatur T_∞ strahlende, unendlich ausgedehnte Umgebung vervollständigt. Im Folgenden sollen die Temperaturen im stationären Fall abhängig vom beaufschlagten Strom I und der Umgebungstemperatur T_∞ berechnet werden.

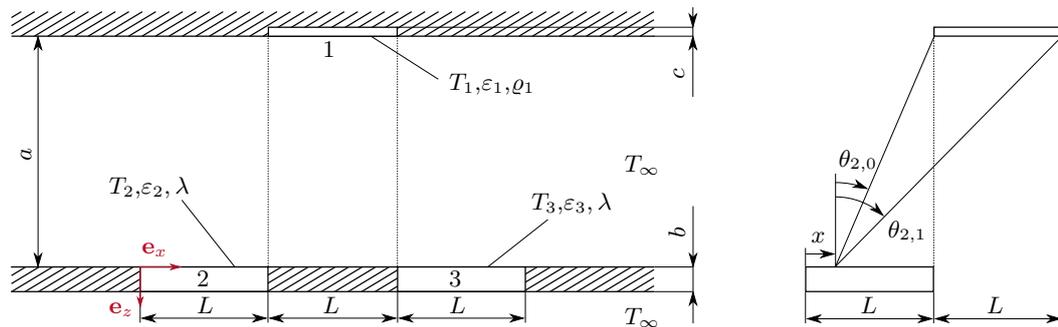


Abbildung 3.2.: Skizze des Strahlungsraumes (links) und Winkeldefinitionen zur Berechnung des Sichtfaktors (rechts).

- Angenommen, der Sichtfaktor $F_{21} = \bar{F}$ ist gegeben. Bestimmen Sie die Sichtfaktormatrix für den Strahlungsraum $i, j \in \{1, 2, 3, \infty\}$. **Hinweis:** Aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Umgebung gilt $F_{\infty 1} = F_{\infty 2} = F_{\infty 3} = 0$ und $F_{\infty \infty} = 1$.
- Berechnen Sie \bar{F} explizit durch Integration entlang der Kontur (siehe Abb 3.2).
- Aufgrund der Symmetrie der Anordnung wird sich stationär $T_2 = T_3$ ergeben, weshalb die beiden Schienen zu einem Körper mit Oberflächentemperatur T_4 zusammengefasst werden können. Zudem wird der Einfluss der strahlenden Umgebung vernachlässigt^a. Geben Sie die Einträge F_{11} , F_{14} , F_{41} und F_{44} der reduzierten Sichtfaktormatrix \mathbf{F}_{red} an. **Hinweis:** Beachten Sie die Additionsregel $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$ für die Zusammensetzung der Flächen $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Wärmeströme \dot{q} in Abhängigkeit der Temperaturen, also $\dot{q}_1(T_1, T_4, T_\infty)$ und $\dot{q}_4(T_1, T_4, T_\infty)$, bekannt sind.

- In den beiden Schienen 2 und 3 wird sich aufgrund des Wärmestromes \dot{q}_4 ein stationäres Profil $T_S(z)$ einstellen. Geben Sie die stationäre Wärmeleitgleichung mit beiden Randbedingungen an und lösen Sie diese.

- e) Stellen Sie das nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung von T_1 und T_4 auf.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis des vorherigen Punktes und die stationäre Leistungsbilanz in Schiene 1.

^aGenau genommen ist dies nur zulässig wenn die Umgebung ausschließlich aus schwarz strahlenden Oberflächen mit einer Temperatur $T_\infty = 0$ besteht. Für dieses Beispiel wird diese Situation zur Vereinfachung angenommen, auch wenn sie etwas praxisfern ist.

Lösung von Aufgabe 3.2.

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{F} & \bar{F} & 1 - 2\bar{F} \\ \bar{F} & 0 & 0 & 1 - \bar{F} \\ \bar{F} & 0 & 0 & 1 - \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{1}{2L} \int_0^L \sin(\theta_{2,1}) - \sin(\theta_{2,0}) \, dx = \frac{1}{2L} \left[\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{a^2+4L^2}} d\sigma - \int_a^{\sqrt{a^2+L^2}} d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{2L} \left[\sqrt{a^2 + 4L^2} + a - 2\sqrt{a^2 + L^2} \right]. \end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{F}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{F} \\ \bar{F} & 0 \end{bmatrix}.$$

d)

$$T_S(z) = T_\infty + \frac{\dot{q}_4}{\lambda}(b - z).$$

e)

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(T_1, T_4, T_\infty) - \frac{\rho_1}{cL^2} I^2 &= 0 \\ T_4 - T_\infty - \frac{\dot{q}_4(T_1, T_4, T_\infty)}{\lambda} b &= 0. \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie die notwendige elektrische Leistung P_{el} um bei stationärem Betrieb die Öltemperatur auf einem konstanten Wert \bar{T}_O zu halten. Der ohmsche Heizdraht hat dabei den Wirkungsgrad η , $0 < \eta < 1$.
- d) Am Ende der Produktion kommt der Lebensmitteldurchfluss zum Stillstand und die beiden Pumpen P_1 und P_2 sowie die Heizung werden abgeschaltet. Geben Sie die Differentialgleichung und notwendige Anfangsbedingungen für den Zeitverlauf der Öltemperatur T_O an.

Lösung von Aufgabe 3.3. Lösung:

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_O}{A_H} & 1 - \frac{A_O}{A_H} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_O \\ \dot{q}_H \end{bmatrix} = \dots (\text{Formelsammlung})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_O \\ \varepsilon_H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_O^4 \\ T_H^4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Q}_{RAD} = A_O \dot{q}_O$$

b)

$$0 = \dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_{LM}) + 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} (T_\infty - T_{LM}) + A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) - \dot{Q}_{RAD} + P_{el} \eta$$

c)

$$P_{el} = \frac{1}{\eta} \left(-\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_{LM}) - 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} (T_\infty - T_{LM}) - A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) + \dot{Q}_{RAD} \right)$$

d)

$$m_{O} c_{p,O} \dot{T}_O(t) = A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) - \dot{Q}_{RAD}$$

$$T_O(t=0) = \bar{T}_O$$

Aufgabe 3.4 (Ofen). Bei der Modellierung eines mit Schamott ausgekleideten Glühofens soll die zeitliche Dynamik der Verkleidung berücksichtigt werden. Der in Abbildung 3.4 dargestellte Längsschnitt des Ofens mit quadratischem Querschnitt zeigt ein durch einen nicht näher untersuchten Prozess aufgeheiztes Medium, welches auf die Verkleidung strahlt. Zur Vereinfachung wird lediglich ein Wandsegment untersucht, welches die Form eines Pyramidenstumpfes hat.

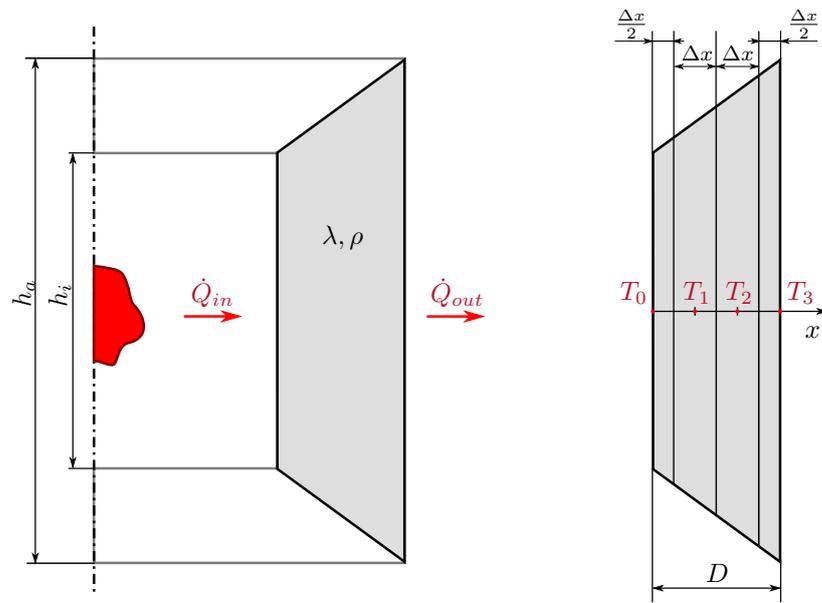


Abbildung 3.4.: Ofen mit Schamottverkleidung. Links: Längsschnitt des Ofens mit betrachtetem Wandsegment (grau) und Wärmeflüssen. Rechts: Wandsegment mit vier diskreten Volumina.

Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird ein eindimensionales Modell des Segments verwendet, wobei sowohl die Temperatur T als auch der lokale Wärmefluss \dot{q} lediglich von x abhängen. Die Seitenflächen des Segments werden als adiabat isoliert betrachtet. Dies führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\rho c_p A(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3.5)$$

wobei $A(x)$ die Querschnittsfläche des Segments bezeichnet.

- Leiten Sie (3.5) unter den getroffenen Annahmen aus der Energieerhaltung her. Erklären Sie weiters, warum die Annahme einer adiabaten Isoliertheit der Seitenflächen näherungsweise gerechtfertigt ist.
- Die partielle Differentialgleichung (3.5) soll durch ein einfacheres konzentriert-parametrisches Modell approximiert werden. Dazu wird das Wandsegment in vier Teilvolumina (siehe Abbildung 3.4 rechts) mit $\Delta x = \frac{D}{3}$ zerlegt, in welchen die Temperatur lokal homogen angenommen wird.

Leiten Sie aus der Energieerhaltung der Teilvolumen die Differentialgleichungen für die Temperaturen T_i mit $i = 0, 1, 2, 3$ her. Approximieren Sie die Ortsableitungen der Temperatur durch geeignete finite Differenzen.

- c) Zeichnen Sie die erhaltene Approximation als RC-Ersatzschaltbild. Welche Bedingung müssen die Wärmeströme \dot{Q}_{in} und \dot{Q}_{out} stationär erfüllen?
- d) Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ mit geeignetem \mathbf{x} und \mathbf{u} .

Lösung von Aufgabe 3.4.

- a) Anschreiben der Energieerhaltung für eine Scheibe von x_1 bis x_2 liefert

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\rho c_p A(x) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \dot{q}(x)) \right] dx = 0,$$

woraus das gesuchte Ergebnis folgt

- b) mit den Abkürzungen

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{\lambda A(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}, \quad C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho c_p A(\xi) d\xi$$

lautet das vierdimensionale Gleichungssystem

$$C_0 \frac{dT_0}{dt} = G_0(T_1 - T_0) + \dot{Q}_{in}$$

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = G_1(T_2 - T_1) - G_0(T_1 - T_0)$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = G_2(T_3 - T_2) - G_1(T_2 - T_1)$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = -G_2(T_3 - T_2) - \dot{Q}_{out}.$$

- c) $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$.

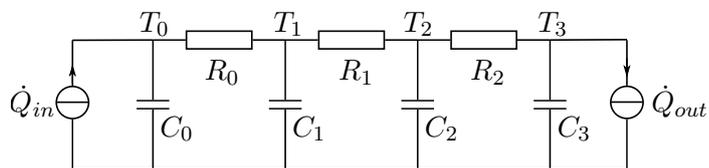


Abbildung 3.5.: Konzentriert-parametrisches Ersatzschaltbild.

d) Mit $\mathbf{x} = [T_0, T_1, T_2, T_3]^T$, $\mathbf{u} = [\dot{Q}_{in}, \dot{Q}_{out}]^T$ folgt die gewünschte Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_0}{C_0} & \frac{G_0}{C_0} & 0 & 0 \\ \frac{G_0}{C_1} & -\frac{G_0+G_1}{C_1} & \frac{G_1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{G_1}{C_2} & -\frac{G_1+G_2}{C_2} & \frac{G_2}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{G_2}{C_3} & -\frac{G_2}{C_3} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_3} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} \mathbf{u}$$

Aufgabe 3.5 (Polymer). In dieser Aufgabe soll das Aufschmelzen eines thermoplastischen Polymers ausgehend von der Raumtemperatur T_∞ betrachtet werden. Abb. 3.6 a) zeigt den Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur.

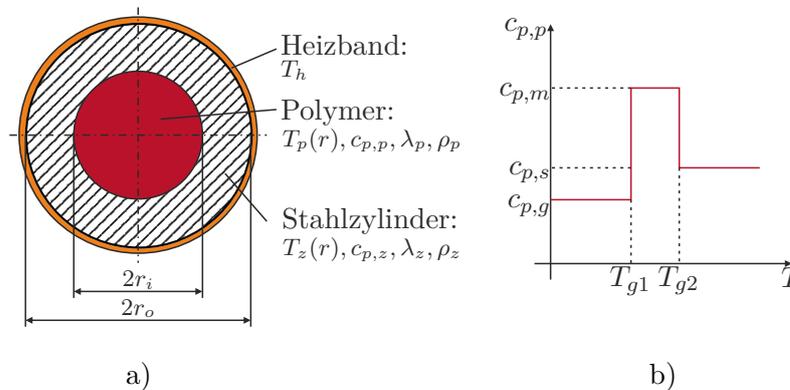


Abbildung 3.6.: a) Querschnitt der zylinderförmigen Apparatur. b) Verlauf der spezifischen Wärmekapazität $c_{p,p}$.

Um den Kunststoff im Inneren zu schmelzen, führen Heizmatten auf der Außenseite eines Hohlzylinders aus Stahl der Länge L konstant die Leistung P zu. Bei der sogenannten Glasübergangstemperatur wird die kristalline Struktur des Polymers in eine flüssige Schmelze gewandelt. Die dafür benötigte Energie kann ersatzweise durch eine von der Kunststofftemperatur T_p abhängige spezifische Wärmekapazität $c_{p,p} = c_{p,p}(T_p)$ beschrieben werden, siehe Abb. 3.6 b).

Die Heizmatten sollen mit homogener Temperaturverteilung T_h und vernachlässigbarer Dicke modelliert werden. Durch freie Konvektion kommt es zum Energieaustausch mit der Umgebung. Diese kann ebenso wie der Wärmeübergang vom Heizband auf den Massezylinder und der Äobergang vom Zylinder auf den Kunststoff durch Randbedingungen dritter Art der Form $\dot{q}_i = \alpha_i \Delta T_i$, $i \in \{\infty, hz, zp\}$ mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten α_i beschrieben werden.

- a) Stellen Sie das gekoppelte System partieller Differentialgleichungen inklusive Anfangs- und Randbedingungen des vorliegenden Wärmeleitproblems mit dem Systemeingang P auf. Die Wärmeleitung in axialer Richtung kann dabei vernachlässigt werden.

Hinweis: Berechnen Sie die Heizbandtemperatur T_h als Funktion der Leistung P , der Raumtemperatur T_∞ und des Wärmestroms \dot{q}_{hz} .

Vernachlässigen Sie für die folgenden Aufgaben die Wärmekapazität des Metallzylinders und nähern Sie den Kunststoff als konzentrierte Masse mit homogener Temperatur T_p an.

- b) Geben Sie ein RC-Ersatzschaltbild des Wärmeleitproblems der vorigen Aufgabe an und bestimmen Sie alle auftretenden Ersatzgrößen inklusive deren Einheiten.
- c) Bestimmen Sie den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur T_p in einem Bereich mit

konstanter spezifischer Wärmekapazität $c_{p,p} = \text{konst.}$ ausgehend von T_∞ und berechnen Sie die stationäre Endtemperatur $T_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} T_p(t)$.

- d) Skizzieren Sie qualitativ den Zeitverlauf der Kunststofftemperatur T_p bis zum Erreichen der Flüssigphase des Polymers. Unterteilen Sie dafür den Aufschmelzvorgang in drei Phasen: Aufheizen bis T_{g1} , Aufschmelzen bis T_{g2} sowie das Erwärmen auf die Endtemperatur $T_p(t_e) = T_e > T_{g2}$.

Lösung von Aufgabe 3.5.

- a) Unter Verwendung der allgemeinen Wärmeströme \dot{q}_{hz} und \dot{q}_{zp} (von außen nach innen orientiert, also z.B. von h nach z) lässt sich der Polymer durch die partielle Differentialgleichung

$$\rho_p c_{p,p} (T_p) \dot{T}_p(r, t) = \lambda_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) \right) \right)$$

mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_p \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) |_{r=r_i} &= \dot{q}_{zp} \\ T_p(r, 0) &= T_\infty \end{aligned}$$

beschreiben. Analog dazu gilt für die Zylinderwand

$$\rho_z c_{p,z} \dot{T}_z(r, t) = \lambda_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) \right) \right)$$

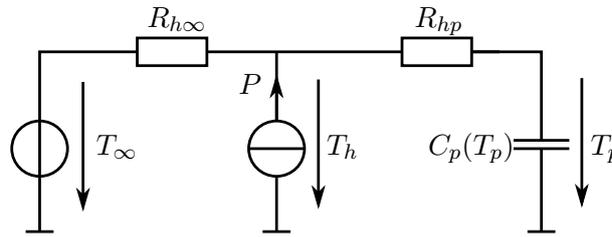
mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) |_{r=r_o} &= \dot{q}_{hz} \\ \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) |_{r=r_i} &= -\dot{q}_{zp} \\ T_z(r, 0) &= T_\infty. \end{aligned}$$

Die Wärmeströme ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \dot{q}_{zp} &= \alpha_{zp} (T_z(r_i) - T_p(r_i)) \\ \dot{q}_{hz} &= \frac{\alpha_{hz}/\alpha_\infty \frac{P}{A} + \alpha_{hz} (T_\infty - T_z(r_o))}{1 + \alpha_{hz}/\alpha_\infty} \end{aligned}$$

- b) Das thermische Ersatzschaltbild



mit den darin auftretenden Größen

$$R_{h\infty} = \frac{1}{2r_o\pi L\alpha_\infty}$$

$$C_p = \int_{V_p} \rho_p c_{p,p} dV = r_i^2 \pi L \rho_p c_{p,p}(T)$$

$$R_{hp} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_{zp} r_i} + \frac{1}{\lambda_z} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{hz} r_o} \right)$$

Die Einheiten der Größen im ESB:

$$[R] = \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$[C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$[P] = \text{W}$$

$$[T] = \text{K}$$

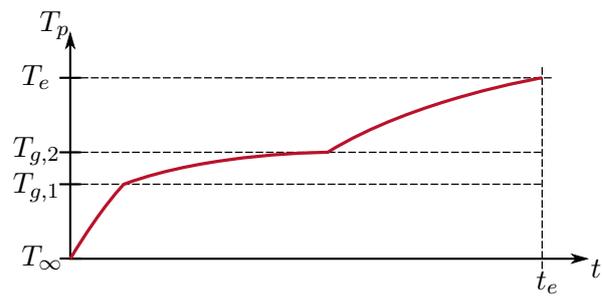
c)

$$\underbrace{(R_{hp} + R_{h\infty})C_p(T_p)}_{\tau(T_p)} \dot{T}_p = T_\infty + PR_{h\infty} - T_p .$$

Für den Fall $c_{p,p} = \text{konst.}$ ergibt sich die Lösung der ODE für die Anfangsbedingung $T_p(0) = T_\infty$ und konstanter Leistung P zu

$$T_p(t) = T_\infty + PR_{h\infty}(1 - \exp(-t/\tau(T_p))) .$$

d) Temperaturverlauf der homogen und konzentriert angenommenen Kunststoff-Masse bei konstanter Heizleistung:



Aufgabe 3.6 (Crank-Nicolson-Verfahren). Die eindimensionale Wärmeleitgleichung mit Reaktionsterm

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha T \quad (3.8a)$$

ist definiert auf dem Gebiet $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+$. Für allgemeine Anfang- und Randbedingungen

$$T(x, 0) = \bar{T}_0(x) \quad (3.8b)$$

$$T(0, t) = \bar{T}_1(t) \quad (3.8c)$$

$$T(1, t) = \bar{T}_2(t) \quad (3.8d)$$

soll eine numerische Lösung mithilfe der Finiten-Differenzen-Methode berechnet werden. Dazu wird das äquidistante Gitter $(i\Delta x, n\Delta t)$ mit $i = 0, \dots, N$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ eingeführt. Ein verbreitetes numerisches Verfahren zur Lösung parabolischer partieller Differentialgleichungen stellt das Crank-Nicolson-Verfahren dar. Dabei wird allgemein die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

mit der Funktion f durch das implizite Differenzenschema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (f_i^{n+1} + f_i^n)$$

approximiert, wobei die Abkürzungen $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$ und $f_i^n = f\left(u_i^n, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i\Delta x, n\Delta t)\right)$ verwendet wurden. Die Ortsableitung in f muss dabei durch eine geeignete Methode approximiert werden.

- Formulieren Sie das Differenzenschema des Crank-Nicolson-Verfahrens für die Wärmeleitgleichung (3.8a) an einem allgemeinen Punkt im Inneren des Definitionsgebiets. Verwenden Sie dabei den zentralen Differenzenquotienten zur Approximation der zweiten örtlichen Ableitung.
- Unter Verwendung der dirichletschen Randbedingungen soll das Crank-Nicolson-Verfahren als System von Differenzgleichungen in Matrixform

$$(\mathbf{I} + \mathbf{Q})\mathbf{T}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{T}^n + \mathbf{R}$$

mit dem Vektor $\mathbf{T}^n = [T_1^n, \dots, T_{N-1}^n]$ dargestellt werden. Geben Sie auch die notwendige Anfangsbedingung an.

- Angenommen, die Randbedingung für $x = 0$ wird durch eine neumannsche Randbedingung der Form

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{\lambda} \dot{q}(t)$$

ersetzt. Was verändert sich im Vergleich zum vorigen Unterpunkt? Schreiben Sie das Crank-Nicolson-Verfahren in Matrixform an.

- d) Lösen Sie das Anfangswert-Randwert-Problem (3.8) in numerischer Software wie beispielsweise MATLAB oder Octave.

Lösung von Aufgabe 3.6.

- a) Mit den Abkürzungen $r = \frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta x^2}$ und $l = 2r - \frac{\alpha \Delta t}{2}$ folgt

$$-rT_{i+1}^{n+1} + (1+l)T_i^{n+1} - rT_{i-1}^{n+1} = rT_{i+1}^n + (1-l)T_i^n + rT_{i-1}^n.$$

- b) Auswerten des Differenzenschemas an $i = 1, \dots, N-1$ liefert das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{I} + \mathbf{Q})\mathbf{T}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{T}^n + \mathbf{R}$$

mit den Elementen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l & -r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & l & -r & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -r & l & -r & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -r & l & -r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r & l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} rT_0^n + rT_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rT_N^n + rT_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

mit den unbekanntenen Werten T_0^n und T_N^n , welche sich aus den Dirichletschen Randbedingungen zu

$$T_0^n = \bar{T}_1(n\Delta t)$$

$$T_N^n = \bar{T}_2(n\Delta t)$$

ergeben. Die Matrix \mathbf{Q} ist eine sogenannte Tridiagonal-Toeplitz-Matrix, welche sich durch Verwendung des Thomas-Algorithmus effizient lösen lässt.

- c) Durch Approximation der Ableitung am Rand mittels einfachen Differenzenquotienten folgt für die Stützstelle am linken Rand

$$T_0^n = T_1^n - \frac{\Delta x}{\lambda} \dot{q}(n\Delta t)$$

- d) wird in der Übungseinheit besprochen.