

## 2 Reglerentwurf und Simulation

Ziel dieser Übung ist der Entwurf einer geeigneten Regelung für dynamische Systeme sowie der Verifikation dieser Regelung mittels Simulation. Dies wird an einer Operationsverstärkerschaltung und an einer Gleichstrommaschine mit Propeller durchgeführt.

Der Reglerentwurf soll mittels Frequenzkennlinienverfahren (FKL) sowohl im  $s$ -Bereich als auch im  $q$ -Bereich erfolgen. Die für die Zeitdiskretisierung und den Reglerentwurf nach dem Frequenzkennlinienverfahren benötigten Grundlagen wurden in der VU Automatisierung vorgestellt. Studieren Sie daher zur Vorbereitung dieser Übung das folgende Skriptum:

- Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2025/26) [2.0]
  - Kapitel 1 bis Kapitel 6

Bei Fragen oder Anregungen zu dieser Übung wenden Sie sich bitte an

- Jozef Janus <[janus@acin.tuwien.ac.at](mailto:janus@acin.tuwien.ac.at)> oder
- Bernhard Schimkowitsch <[schimkowitsch@acin.tuwien.ac.at](mailto:schimkowitsch@acin.tuwien.ac.at)>.

Für organisatorische Fragen wenden Sie sich bitte an

- Michael Girsch <[girsch@acin.tuwien.ac.at](mailto:girsch@acin.tuwien.ac.at)>.



Alle MATLAB/SIMULINK Dateien, die zum Bearbeiten dieser Übung benötigt werden, finden Sie in **uebung2.zip** auf der Homepage der Lehrveranstaltung.



### 2.1 Elektrisches System

In der folgenden Aufgabe soll das elektrische System aus der ersten Übung (Abbildung 2.1) untersucht werden.

Das betrachtete Netzwerk besteht aus einem Operationsverstärker, den Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  sowie den Widerständen  $R_1, R_2$  und  $R_3$ . Weiters, sei die Spannung  $U_e$  der Eingang  $u$ , die Spannung  $U_s$  ein Störeingang  $d$  und die Spannung  $U_a$  der Ausgang  $y$  des Systems. Die Streckenübertragungsfunktion des linearisierten Systems ist durch

$$G(s) = \frac{V}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2}$$

mit  $V = 1.382$ ,  $\xi = 0.829$  und  $T = 0.975 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  gegeben.

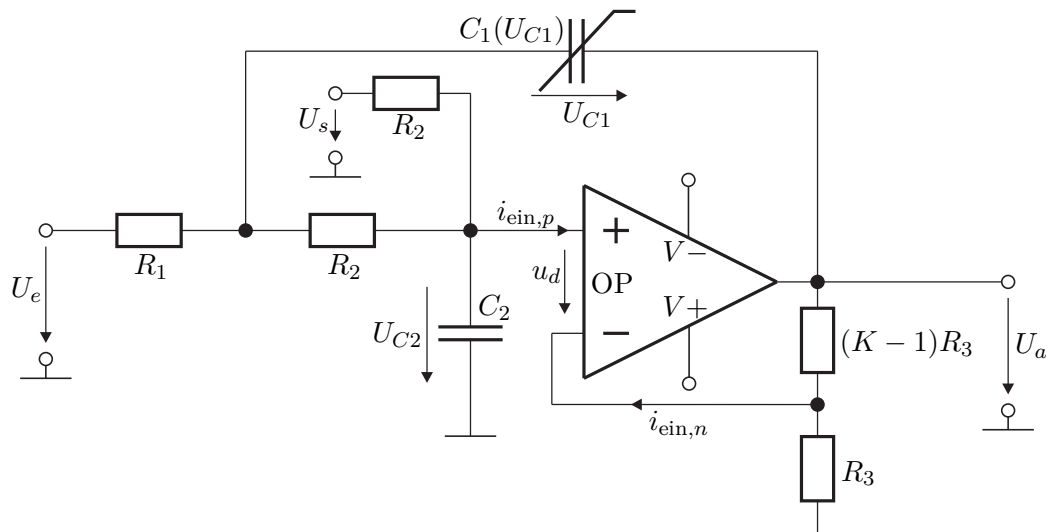


Abbildung 2.1: Elektrisches System.

**Aufgabe 2.1 (Reglerentwurf).** In dieser Aufgabe sollen zeitkontinuierliche Regler für das elektrische System nach dem Frequenzkennlinienverfahren entworfen werden. Beginnen Sie Ihre Arbeit im MATLAB-File `FKL.m` und in den darin aufgerufenen Files. Dort müssen Sie Ihre Ergebnisse aus der ersten Übung einfügen.

1. Es soll nun ein PID-Regler nach dem Frequenzkennlinienverfahren entworfen werden. Der geschlossene Kreis soll dabei folgende Anforderungen erfüllen:

bleibende Regelabweichung	$e_{\infty} _{r(t)=t} = 1 \cdot 10^{-3}$
Überschwingen	$\ddot{u} \leq 5 \%$
Anstiegszeit	$t_r = 1.5 \text{ ms}$

Die Zeitkonstante des Integralterms soll  $T_I = 0.25 \text{ ms}$  betragen. Eventuell auftretende nichtlineare Gleichungen können Sie z. B. mittels `fsolve` lösen.

2. Stellen Sie den geschlossenen Kreis mit dem linearisierten System in Form eines Blockschaltbildes dar. Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  und die Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}(s)$  des geschlossenen Kreises für den PID-Regler. Berechnen Sie die zugehörigen Sprungantworten und die Rampenantworten und plotten Sie diese in MATLAB.
3. Implementieren Sie den Regler im SIMULINK-Modell `E_Netzwerk.slx`, welches in der Datei [uebung2.zip](#) von der Homepage der Lehrveranstaltung zur Verfügung gestellt wird, und testen Sie diesen am linearisierten sowie am vollständigen nichtlinearen Modell. Ist der geschlossene Regelkreis stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. Simulieren Sie das Verhalten des geschlossenen Kreises für eine sprungförmige Eingangsgröße mit und ohne Störung. Werden die Anforderungen erfüllt?

4. Bisher wurde davon ausgegangen, dass dem Regler ein idealer Messwert der Ausgangsgröße  $y$  zur Verfügung steht. Da dies in der Realität nicht der Fall ist, ist es sinnvoll in einer Simulation den Einfluss von Messrauschen zu untersuchen. Dazu kann in der Simulation mit einem Schalter zusätzliches Messrauschen auf den Systemausgang aufgeschaltet werden. Testen Sie Ihren Regler in der Simulation mit und ohne Messrauschen. Wie verhält sich das System mit Messrauschen im Vergleich zum idealen System?
5. Im Simulationsmodell steht ein weiterer Schalter zur Verfügung, der die zeitliche Änderungsrate des Sollwertes begrenzt. Welche Auswirkung hat die Steigungsbeschränkung auf die Stellgröße und den Ausgang? Welcher Vorteil kann sich aus der Begrenzung der Änderungsrate ergeben?

## 2.2 Gleichstrommaschine mit Propeller

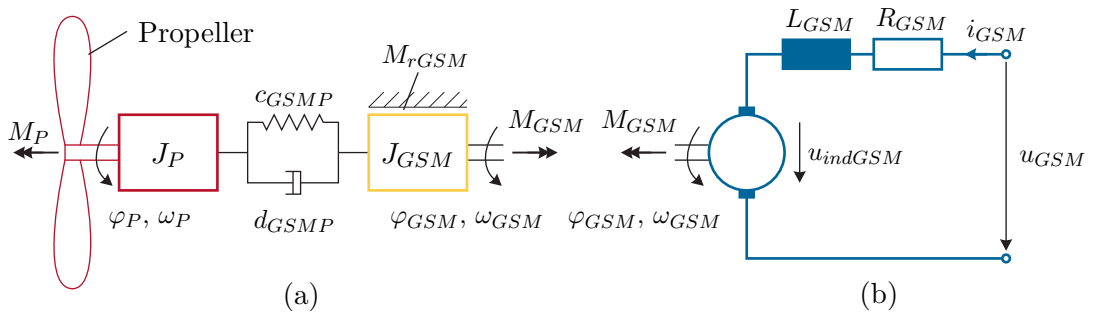


Abbildung 2.2: Gleichstrommaschine mit Propeller, (a) mechanisches Teilsystem, (b) elektrisches Teilsystem.

Abbildung 2.2 zeigt schematisch eine permanenterregte Gleichstrommaschine (Index GSM), die über eine linear elastische und dämpfende Welle (konstante Steifigkeit  $c_{GSMP}$ , viskose Dämpfung  $d_{GSMP}$ ) einen Propeller (Index P) antreibt. Die Freiheitsgrade  $\mathbf{q}$  des Systems sind die Drehwinkel  $\mathbf{q}^T = [\varphi_{GSM} \quad \varphi_P]$ . Die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten werden mit  $\dot{\mathbf{q}}^T = [\omega_{GSM} \quad \omega_P]$  benannt. Im Folgenden wird stets von  $\omega_{GSM} > 0$  und  $\omega_P > 0$  ausgegangen, so dass Haftreibungseffekte beim Nulldurchgang der Geschwindigkeit unberücksichtigt bleiben können.

Auf den Propeller (Massenträgheitsmoment  $J_P$ ) wirkt ein Lastmoment der Form

$$M_P = d_{cP} + d_{vP}\omega_P + d_{qP}\omega_P^2 + M_{ext} , \quad (2.1)$$

wobei  $d_{cP}$  die Coulombsche Reibkonstante,  $d_{vP}$  die viskose Dämpfungskonstante,  $d_{qP}$  der Koeffizient des zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Dämpfungsanteils und  $M_{ext}$  ein zusätzliches externes Moment ist. Die Lagerung des Ankers verursacht ein Reibmoment der Form

$$M_{rGSM} = d_{cGSM} + d_{vGSM}\omega_{GSM} \quad (2.2)$$

mit der Coulombschen Reibkonstante  $d_{cGSM}$  und der viskosen Dämpfungskonstante  $d_{vGSM}$ . Das Kopplungsmoment  $M_{kopp}$  zwischen Motor und Propeller, also das über die Feder  $c_{GSMP}$  und den Dämpfer  $d_{GSMP}$  übertragene Moment, berechnet sich zu

$$M_{kopp} = (\omega_{GSM} - \omega_P)d_{GSMP} + (\varphi_{GSM} - \varphi_P)c_{GSMP} .$$

Das von der (idealen) Gleichstrommaschine erzeugte elektrische Moment ist  $M_{GSM} = k_{GSM}i_{GSM}$ , wobei  $k_{GSM}$  die Ankerkreiskonstante bezeichnet, die aus der Maschinenkonstante  $c_A$  und dem verketteten Fluss der Erregerwicklung  $\Psi_{EGSM}$  in der Form  $k_{GSM} = c_A\Psi_{EGSM}$  berechnet wird. Aufgrund der Impulserhaltung ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$J_{GSM}\dot{\omega}_{GSM} = M_{GSM} - M_{rGSM} - M_{kopp} \quad (2.3a)$$

$$J_P\dot{\omega}_P = M_{kopp} - M_P . \quad (2.3b)$$

Dabei bezeichnet  $J_{GSM}$  das Massenträgheitsmoment der Gleichstrommaschine und  $J_P$  das Massenträgheitsmoment des Propellers.

Die Differentialgleichung für das in Abbildung 2.2(b) dargestellte elektrische Subsystem wird mithilfe der Maschenregel bestimmt. Für die induzierte Spannung gilt  $u_{indGSM} = k_{GSM}\omega_{GSM}$ . Die Ankerkreisinduktivität wird mit  $L_{GSM}$ , der Ankerkreiswiderstand mit  $R_{GSM}$  und die Eingangsspannung mit  $u_{GSM}$  bezeichnet. Damit erhält man

$$\frac{d}{dt}i_{GSM} = \frac{1}{L_{GSM}}(u_{GSM} - R_{GSM}i_{GSM} - k_{GSM}\omega_{GSM}) . \quad (2.4)$$

Somit kann das vollständige, nichtlineare mathematische Modell der Gleichstrommaschine in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m, u_m, d_m) \quad (2.5)$$

mit den Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_m^T = [i_{GSM} \ \varphi_{GSM} \ \omega_{GSM} \ \varphi_P \ \omega_P]$ , dem Eingang  $u_m = u_{GSM}$  und der Störung  $d_m = M_{ext}$  dargestellt werden. Als Ausgang des Systems wird  $y = \omega_P$  verwendet.

### Aufgabe 2.2 (Vollständiges Modell).

1. Im System (2.5) treten die Größen  $\varphi_{GSM}$  und  $\varphi_P$  stets in Form der Differenz  $(\varphi_{GSM} - \varphi_P) = \varphi_{GSMP}$  auf. Mithilfe der nichtregulären Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} i_{GSM} \\ \varphi_{GSMP} \\ \omega_{GSM} \\ \omega_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m \quad (2.6)$$

kann daher eine Differentialgleichung eingespart werden. Führen Sie diese Transformation durch, d. h. bestimmen Sie

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{f}_M(\mathbf{x}_M, u_M, d_M) , \quad (2.7)$$

wobei  $u_M = u_m$  und  $d_M = d_m$  gelten soll.

- Bestimmen Sie für stationäre Eingangswerte die Ruhelage des Systems (2.7), linearisieren Sie es bezüglich derselben und stellen Sie es in der Form

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}_u \Delta u + \mathbf{b}_d \Delta d \quad (2.8a)$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} \quad (2.8b)$$

dar. Berechnen Sie weiterhin numerisch die Eigenwerte der Dynamikmatrix des linearisierten Systems in MATLAB, wobei die Parameterwerte aus Tabelle 2.1 und für die stationären Eingangsgrößen  $u_{GSM,R} = 5.6 \text{ V}$  und  $M_{ext,R} = 0 \text{ Nm}$  zu verwenden sind.

Parameter	Wert	
$L_{GSM}$	1.4	mH
$R_{GSM}$	0.46	$\Omega$
$k_{GSM}$	0.1	$\text{Nm A}^{-1}$
$J_{GSM}$	$12.4 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg m}^2$
$d_{cGSM}$	0.152	$\text{Nm}$
$d_{vGSM}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$\text{Nm s rad}^{-1}$
$J_P$	$32.5 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg m}^2$
$d_{cP}$	0.169	$\text{Nm}$
$d_{vP}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$\text{Nm s rad}^{-1}$
$d_{qP}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$\text{Nm s}^2 \text{ rad}^{-2}$
$c_{GSMP}$	0.6822	$\text{Nm rad}^{-1}$
$d_{GSMP}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$\text{Nm s rad}^{-1}$

Tabelle 2.1: Parameter des Systems Gleichstrommaschine mit Propeller.

Bestimmt man die Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i = 1, \dots, 4$  der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  des um die Ruhelage linearisierten Systems (2.8), so ergeben sich diese in aufsteigend sortierter Reihenfolge zu  $\lambda_1 = -326.809 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda_{2,3} = -0.727 \text{ s}^{-1} \pm \text{j} 8.674 \text{ s}^{-1}$  und  $\lambda_4 = -0.727 \text{ s}^{-1}$ . Offensichtlich ist das System (lokal) asymptotisch stabil. Auffällig ist jedoch, dass

$$|\lambda_1| \gg |\lambda_i| \quad \forall i \in \{2, 3, 4\}, \quad (2.9)$$

d. h. der Eigenwert  $\lambda_1$  liegt in der komplexen Ebene sehr viel weiter links als die übrigen Eigenwerte, was eine relativ *schnelle* Dynamik im zugehörigen Unterraum der Lösung nach sich zieht.

Es lässt sich nun mithilfe der *singulären Störungstheorie* [2.0] zeigen, dass dieser Eigenwert zumindest näherungsweise der Stromdynamik zugewiesen werden darf. Somit kann

in weiterer Folge die Dynamik des elektrischen Teilsystems als quasistationär betrachtet werden, womit sich die zugehörige Differentialgleichung zu einer *algebraischen* Gleichung der Form

$$i_{GSM} = \frac{1}{R_{GSM}} u_{GSM} - \frac{k_{GSM}}{R_{GSM}} \omega_{GSM} \quad (2.10)$$

reduziert.

### Aufgabe 2.3 (Reduziertes System).

1. Verwenden Sie die Näherung (2.10), um im System (2.7) die zugehörige Differentialgleichung der Stromdynamik zu eliminieren. Damit erhalten Sie ein reduziertes System

$$\dot{\mathbf{x}}_{red} = \mathbf{f}_{red}(\mathbf{x}_{red}, u, d) \quad (2.11a)$$

$$y = h_{red}(\mathbf{x}_{red}) \quad (2.11b)$$

mit dem neuen Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{red}^T = [\varphi_{GSM P} \quad \omega_{GSM} \quad \omega_P]$ , wobei Eingang  $u$ , Störung  $d$  und Ausgang  $y$  unverändert bleiben.

2. Bestimmen Sie für stationäre Eingangswerte die Ruhelage des reduzierten Systems (2.11) und linearisieren Sie es bezüglich derselben.
3. Ist die Ruhelage des reduzierten Systems (2.11) gleich jener des vollständigen Systems (2.7)? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2.4 (Implementierung in MATLAB/SIMULINK).** Erstellen Sie für das System Gleichstrommaschine mit Propeller ein Simulationsmodell. Es soll das vollständige nichtlineare Modell (2.7) (inklusive Stromdynamik) in Form einer MATLAB Function implementiert werden. Wählen Sie hierzu als Eingänge  $u_1 = u_{GSM}$  und  $u_2 = M_{ext}$  und als Ausgangsvektor  $\mathbf{y}^T = [i_{GSM} \quad \varphi_{GSM P} \quad \omega_{GSM} \quad \omega_P]$ . Verwenden Sie als Anfangszustand die Ruhelage für  $u_{GSM} = 5.6 \text{ V}$  und  $M_{ext} = 0 \text{ Nm}$ .

Implementieren Sie außerdem das vollständige linearisierte Modell und das reduzierte linearisierte Modell in Form von **State-Space-Blöcken**.

Simulieren Sie alle Systeme für eine Eingangsgröße der Form  $M_{ext} = 0.25\sigma(t - 11)$  und  $u_{GSM} = 5.6 - \sigma(t - 2) + \sigma(t - 5) - 2\sigma(t - 8) + 2\sigma(t - 13)$  ( $M_{ext}$  in Nm und  $u_{GSM}$  in V). Vergleichen Sie die Ausgangsgrößen der Systeme und dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse.

**Hinweis:** Beachten Sie bei der Implementierung nachfolgende Punkte:

- Verwenden Sie als Vorlage die Simulationsdatei `Simulation_GSM_out.slx`.
- Alle Systemparameter und Anfangszustände sollen als Teil der Parameter Struktur `parGSM` mithilfe der MATLAB-Function `fct_Parameter_GSM.m` bestimmt werden. Dies ermöglicht ein einfaches Austauschen der Parameter für den praktischen Versuchsaufbau. Rufen Sie diese MATLAB-Function mit den entsprechenden Parametern vor dem Start der Simulation aus.
- Übernehmen Sie dabei die analytischen Ausdrücke der Ruhelagen und des linearisierten Modells aus Aufgabe 2.2 (Teilaufgabe 2) in die besagte MATLAB-Function und berechnen Sie erst dort die numerischen Werte. Damit ist es später einfach möglich beliebige Ruhelagen zu untersuchen.
- Bestimmen Sie weiters die benötigten Größen für die **State-Space**-Blöcke als Teil der Struktur `sysGSM` ebenfalls in der MATLAB-Function `fct_Parameter_GSM.m`.

Weiterhin steht Ihnen zum Test und Abgleich ihres Modells eine Referenzimplementierung als Subsystem in der Simulationsdatei `Simulation_GSM_out.slx` zur Verfügung. Es handelt sich um eine chiffrierte MATLAB-Function der Gleichstrommaschine. Das Referenzmodell enthält bereits alle benötigten Parameter mit Ausnahme der Ruhelagen. Die berechnete Ruhelage  $\mathbf{x}_0$  aus der Aufgabe 2.2 (Teilaufgabe 2) ist in der Maske des vollständigen Modells (2.7) zu ergänzen.

**Aufgabe 2.5 (Reglerentwurf).** Entwerfen Sie mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens im  $q$ -Bereich einen zeitdiskreten Kompensationsregler für das reduzierte linearisierte Modell der Gleichstrommaschine mit Propeller mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Delta\omega_P$  als Ausgang. Als Arbeitspunkt für den Betrieb des Reglers wählen Sie die von Ihnen berechnete Ruhelage aus Aufgabe 2.3 (Teilaufgabe 2) für  $u_{GSM,R} = 5.6 \text{ V}$  und  $M_{ext,R} = 0 \text{ N m}$ . Der geschlossene Kreis soll folgende Spezifikationen für einen Sollsprung  $\Delta r = 20 \text{ rad s}^{-1}$  erfüllen:

bleibende Regelabweichung	$e_\infty _{(r^k)=(1^k)} = 0$
Anstiegszeit	$t_r = 1 \text{ s}$
Überschwingen	$\ddot{u} \leq 0 \%$
Stellgrößenbeschränkung	$0 \text{ V} \leq u_{GSM} \leq 12 \text{ V}$

Als Reglerstruktur wird

$$R^\#(q) = \frac{V_{I,q}(1 + qT_I)}{q} \frac{1 + 2\xi(qT) + (qT)^2}{\prod_{j=1}^2 (q - q_{r,j})} \quad (2.12)$$

gewählt, wobei  $1 + 2\xi(qT) + (qT)^2$  das konjugiert komplexe Polpaar der Streckenübertragungsfunktion als Nullstellen besitzt und  $q_{r,j}$  die gewünschten Realisierungspole bezeichnen. Überlegen Sie, warum die obige Reglerstruktur gewählt wird. Entwerfen Sie dazu zusätzlich einen PI-Regler ohne Kompensationsterm um das Verhalten der beiden Regelkreise miteinander zu vergleichen!

Um den Kompensationsregler später am Laborversuch testen zu können, muss der zeitdiskrete Regler  $R(z)$  in Proportional-, Integral- sowie Kompensationsteil aufgespalten werden,

$$R(z) = \left( V_P + \frac{V_{I,z}}{z-1} \right) R_{komp}(z) . \quad (2.13)$$

Sie können dazu den MATLAB-Befehl `residue` verwenden.

**Hinweis:** Verwenden Sie für die Implementierung die zur Verfügung gestellten MATLAB-Funktion `fct_Kompensationsregler.m`. Dies ermöglicht eine definierte Schnittstelle für den praktischen Versuchsaufbau in der 3. Übung. Der PI-Regler kann auf ähnliche Weise als MATLAB-Funktion implementiert werden. Für die Simulation des Reglers steht die Simulink Datei `Simulation_GSM_Regler_out.slx` zur Verfügung.

**Hinweis:** Beachten Sie, dass  $R_{komp}(z)$  den in den  $z$ -Bereich transformierten Kompensationsanteil der gewählten Reglerstruktur aus (2.12) darstellt. Der PI-Teil und der Kompensationsteil des Reglers können demnach getrennt von einander transformiert werden.

**Hinweis:** Verwenden Sie als Abtastzeit  $T_a = 10$  ms. Weiterhin sei erwähnt, dass in MATLAB folgende Prozeduren für die Transformationen zwischen  $s$ -,  $z$ - und  $q$ -Bereich zur Verfügung stehen:

$$\begin{array}{ll} G(s) \xrightarrow{T_a} G(z) & \text{MATLAB-Befehl: } \text{Gz=c2d(Gs,Ta,'zoh')} \\ G(z) \rightarrow G^\#(q) & \text{MATLAB-Befehl: } \text{Gq=d2c(Gz,'tustin')} \\ G^\#(q) \xrightarrow{T_a} G(z) & \text{MATLAB-Befehl: } \text{Gz=c2d(Gq,Ta,'tustin')} \end{array}$$

**Hinweis:** Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `feedback` für die Berechnung des geschlossenen Regelkreises.

**Aufgabe 2.6 (Verifikation).** Testen Sie durch Simulation in SIMULINK, ob der so entworfene Regelkreis die Spezifikationen auch tatsächlich erfüllt. Vergleichen Sie die Ergebnisse für die drei betrachteten Systemmodelle.

**Aufgabe 2.7 (Einfluss des Messrauschens).** Testen Sie Ihren Regler in der Simulation mit Messrauschen<sup>a</sup>. Wie verhält sich das System mit Messrauschen im Vergleich zum



idealen System? Welchen Einfluss hat die Wahl der Anstiegszeit  $t_r$  auf Rauschanteile im Eingang  $u$  und im Ausgang  $y$ ? Dokumentieren Sie aussagekräftige Ergebnisse für verschiedene Parameter und analysieren Sie dies formal anhand der Übertragungsfunktionen vom Sensorrauschen  $n$  zum Eingang  $u$  bzw. zum Ausgang  $y$ .

<sup>a</sup>Üblicherweise wird Messrauschen als bandbeschränktes, weißes Rauschen modelliert.

## 2.3 Literatur

- [2.0] A. Kugi, *Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2023/2024)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2023. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/automatisierung/>.
- [2.0] P. Kokotovic, H. K. Khalil und J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. USA, Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1999.