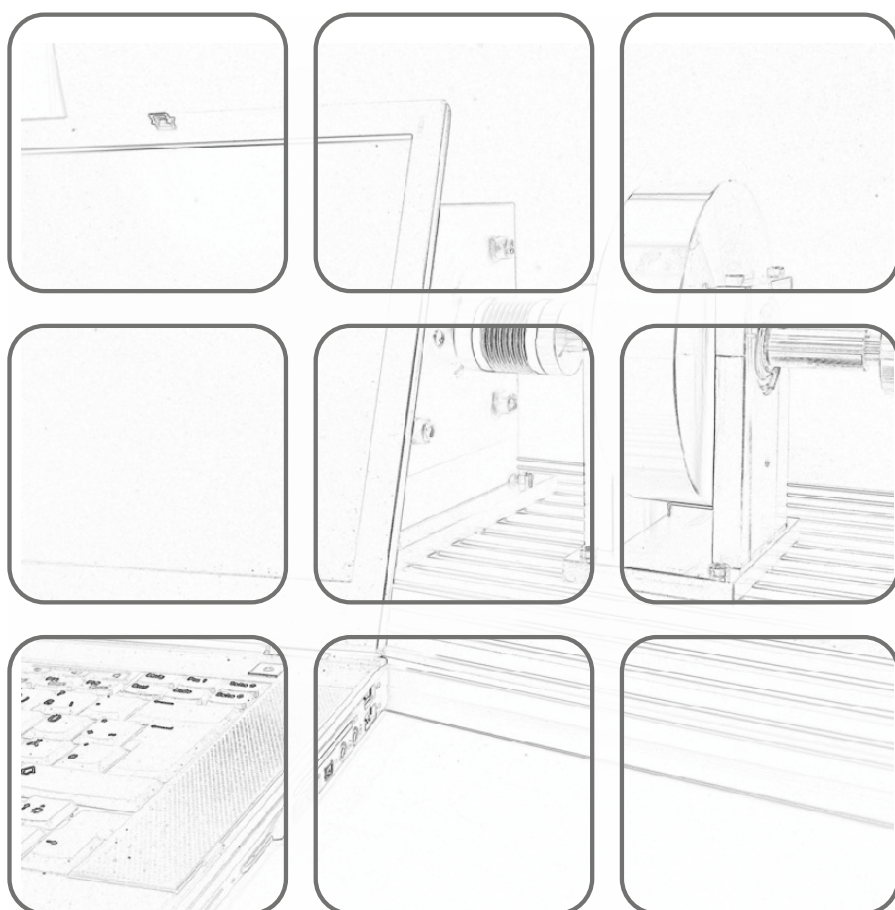


FORTGESCHRITTENE METHODEN DER MODELLBILDUNG

Vorlesung und Übung
Sommersemester 2020

Tobias Glück, Wolfgang Kemmettmüller, Andreas Steinböck



Fortgeschrittene Methoden der Modellbildung

Vorlesung und Übung
Sommersemester 2020

Tobias Glück, Wolfgang Kemmetmüller, Andreas Steinböck

TU Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gußhausstraße 27–29
1040 Wien
Telefon: +43 1 58801 – 37615
Internet: <https://www.acin.tuwien.ac.at>

© Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	1
1.1 Grundlagen der Elastomechanik	2
1.1.1 Spannung	2
1.1.2 Verzerrung	4
1.1.3 Stoffgesetze	7
1.2 Kinematik von deformierbaren Körpern	9
1.2.1 Bewegung eines deformierbaren Körpers	11
1.2.2 Materielle und räumliche Beschreibung	12
1.2.3 Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld	15
1.2.4 Deformationsgradient	17
1.2.5 Deformations- und Verzerrungstensor	21
1.2.6 Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	24
1.2.7 Geometrische Linearisierung	25
1.2.8 Kompatibilitätsbedingungen	26
1.3 Kinetik von deformierbaren Körpern	27
1.4 Bilanzgleichungen	30
1.4.1 Lagrangesche und Eulersche Beschreibung	30
1.4.2 Generalisierte Bilanzgleichung	31
1.4.3 Massenerhaltung	34
1.4.4 Impuls- und Drehimpulserhaltung	36
1.4.5 Energieerhaltung	38
1.5 Materialmodelle	42
1.5.1 Elastizität	43
1.5.2 Linear-elastischer Festkörper	43
1.6 Folgerungen für eine linear-elastische Deformation	47
1.6.1 Arbeitssatz	47
1.6.2 Betti-Rayleigh Beziehungen	48
1.7 Energieprinzipien und Variationsmethoden	49
1.7.1 Virtuelle Verschiebung	49
1.7.2 Anfangs-Randwertaufgabe der Kontinuumsmechanik	51
1.7.3 Prinzip der virtuellen Arbeit	52
1.7.4 Hamilton-Prinzip	56
1.7.5 Freie Schwingung und Eigenwertproblem	61
1.7.6 Finit-dimensionale Approximation elastischer Strukturen	66
1.8 Einfache Beispiele zur Elastostatik von geraden Stäben	70
1.8.1 Schnittgrößen eines Stabes	70
1.8.2 Zug/Druckbelastung eines geraden Stabes	72
1.8.3 Reine Torsion eines geraden Stabes	76

1.8.4	Reine Biegung eines geraden Stabes	83
1.8.5	Biegung und Torsion eines geraden Stabes durch Einzelkraft am Stabende	88
1.9	Lineare Theorien zum Verformungsverhalten von geraden Stäben	97
1.9.1	Dynamisches Verhalten von Zug/Druck-Stäben	99
1.9.2	Dynamisches Verhalten von Torsions-Stäben	101
1.9.3	Theorie eines schubweichen Balkens bei ebener stationärer Biegung	103
1.9.4	Balkentheorie nach Timoshenko bei stationären Verhältnissen . . .	108
1.9.5	Balkentheorie nach Euler-Bernoulli bei stationären Verhältnissen .	111
1.9.6	Dynamisches Verhalten von geraden Stäben bei Biegebelastung . .	117
1.9.7	Dynamisches Verhalten von biegeschlaffen Zugelementen	120
1.9.8	Struktur der Bewegungsgleichungen von geraden Stäben	125
1.10	Literatur	127
2	Elektromagnetische Energiewandler	129
2.1	Grundlagen	129
2.2	Konstitutivgleichungen	131
2.3	Reluktanzen und Permeanzen	136
2.4	Reluktanzmodellierung	141
2.5	Faradaysches Induktionsgesetz	148
2.6	Energie und Koenergie	151
2.7	Magnetische Kräfte und Momente	155
2.7.1	Berücksichtigung von Permanentmagneten	158
2.8	Netzwerkanalyse	159
2.8.1	Magnetische Verschaltung	160
2.8.2	Elektrische Verschaltung	163
2.9	Netzwerkanalyse für den magnetisch linearen Fall	177
2.10	Permanentmagnet-Synchronmotoren	180
2.10.1	PSM mit innenliegenden Magneten	182
2.11	Literatur	203
	Prüfungsfragen	204

1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Physikalische Objekte bestehen aus Molekülen, welche wiederum aus Atomen aufgebaut sind. Unter einem mikroskopischen Modell versteht man ein Modell, welches physikalische Zusammenhänge auf atomarer Ebene beschreibt. Mikroskopische Modelle sind damit äußerst wichtig für die Untersuchung physikalischer Phänomene. Für Ingenieuranwendungen ist dieser Zugang allerdings nur bedingt einsetzbar. Wir werden uns im Folgenden daher mit der Methode der Kontinuumsmechanik beschäftigen, die ein mächtiges und effektives Werkzeug zur Beschreibung von vielen physikalischen Phänomenen darstellt und ohne ein detailliertes Wissen der komplexen internen (Mikro-) Strukturen angewandt werden kann. Hierzu ein Beispiel: Wasser besteht aus unzähligen Molekülen. In guter Näherung kann Wasser als kontinuierliches Medium anhand von bestimmten Feldgrößen, die im Zusammenhang mit internen Strukturen, wie etwa die Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit, beschrieben werden. Aus physikalischer Sicht ist dies eine Näherung, für welche die große Anzahl an Molekülen durch eine kleine Anzahl an Eigenschaften ersetzt wird. Solch ein Modell wird auch als makroskopisches Modell bezeichnet. Ein makroskopisches Modell beschreibt damit Eigenschaften, welche einer Mittelung über Dimensionen entsprechen, die klein genug sind, um große Gradienten und mikrostrukturelle Effekte zu erfassen. Selbstverständlich sind die Vorhersagen basierend auf makroskopischen Modellen nicht exakt, allerdings hinreichend genau um physikalische Phänomene zu beschreiben. Die Kernaufgabe der Kontinuumsmechanik besteht prinzipiell darin,

- (i) die Bewegung und Deformation (Kinematik) und
- (ii) die wirkenden Spannungen und Kräfte (Kinetik) eines physikalischen Objektes zu untersuchen sowie
- (iii) sogenannte Erhaltungssätze zu formulieren, anhand derer die Bewegung des physikalischen Objektes mathematisch beschrieben werden kann.

In der Kontinuumsmechanik wird angenommen, dass ein *Körper*, im Folgenden mit $\mathcal{B}$ bezeichnet, eine kontinuierliche (oder zumindest stückweise kontinuierliche) Massen- und Volumenverteilung im Raum und der Zeit aufweist. Der Körper kann damit als kontinuierliche Menge von *materiellen Punkten* beschrieben werden und wird auch als *Kontinuum* bezeichnet.

1.1 Grundlagen der Elastomechanik

Bevor die kinematischen und kinetischen Beziehungen für den allgemeinen Fall beschrieben werden, soll das folgende Kapitel einige fundamentale Konzepte der Mechanik von deformierbaren Körpern erläutern.

1.1.1 Spannung

Die auf einen Körper wirkenden äußeren Kräfte werden innerhalb des Körpers übertragen. Diese Übertragung von Kräften führt zu inneren Kräften. Deren Intensitäten sind durch *Spannungen* charakterisiert. Man unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen *Normalspannungen* und *Schubspannungen*.

Normalspannung

Man betrachtet zur Definition der Normalspannung einen geraden Stab mit der Querschnittsfläche $\mathcal{A}$, auf den äußere Kräfte $\mathbf{f}$ mit dem Betrag $\|\mathbf{f}\| = f$ wirken. Deren gemeinsame Wirkungslinie sei die Stabachse, vgl. Abbildung 1.1. Zunächst schneidet man den

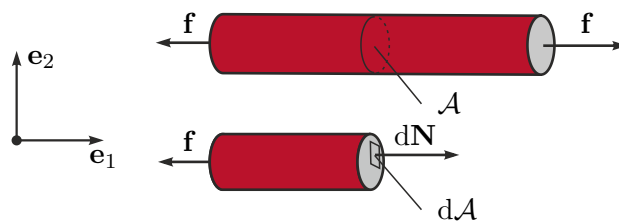


Abbildung 1.1: Normalspannung in einem Stab.

Stab entlang einer Querachse frei. Es wirkt dann auf ein infinitesimales Flächenelement $d\mathcal{A}$ der Querschnittsfläche $\mathcal{A}$ eine innere Kraft $d\mathbf{N}$, mit dem Betrag $\|d\mathbf{N}\| = dN$, die normal zur Fläche $\mathcal{A}$ ist. Man definiert nun die *Normalspannung* σ an einem Punkt der Schnittfläche $\mathcal{A}$ in der Form

$$\sigma = \frac{dN}{d\mathcal{A}} . \quad (1.1)$$

Damit Kräftegleichgewicht herrscht, muss $\int_{\mathcal{A}} \sigma d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} dN = f$ gelten. Es folgt damit die mittlere Normalspannung σ_N über die Querschnittsfläche $\mathcal{A}$ zu

$$\sigma_N = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \sigma d\mathcal{A} = \frac{f}{\mathcal{A}} . \quad (1.2)$$

Im Falle einer positiven Normalkraft ist auch die Spannung σ_N positiv und damit eine *Zugspannung*. Bei einer negativen Normalkraft ist σ_N negativ und damit eine *Druckspannung*.

Schubspannung

Es wird eine Vernietung von drei Platten zur Definition der Schubspannung betrachtet, vgl. Abbildung 1.2. Zunächst wird die Niete mit der Querschnittsfläche $\mathcal{A}$ freigeschnitten.

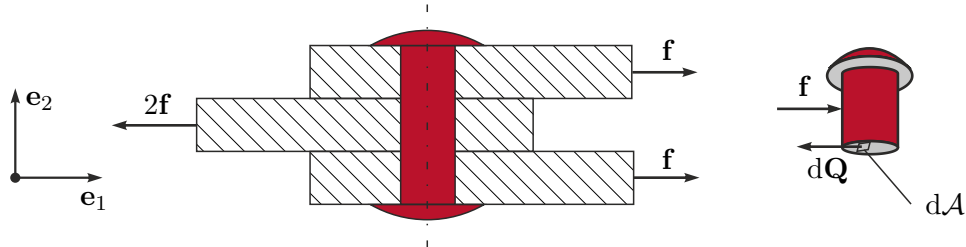


Abbildung 1.2: Schubspannung, die auf eine Niete wirken.

Auf jedes infinitesimale Flächenelement $d\mathcal{A}$ der Querschnittsfläche $\mathcal{A}$ wirkt eine innere Kraft $d\mathbf{Q}$, mit dem Betrag $\|d\mathbf{Q}\| = dQ$, tangential zur Querschnittsfläche, eine sogenannte *Scherkraft*. Ihr entgegen wirkt eine äußere Kraft $\mathbf{f}$. Man definiert die Schubspannung τ an einem Punkt der Schnittfläche $\mathcal{A}$ in der Form

$$\tau = \frac{dQ}{d\mathcal{A}}. \quad (1.3)$$

Damit Kräftegleichgewicht herrscht, muss $\int_{\mathcal{A}} \tau d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} dQ = f$ gelten. Es folgt damit die mittlere Schubspannung τ_Q über die Querschnittsfläche $\mathcal{A}$ zu

$$\tau_Q = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \tau d\mathcal{A} = \frac{f}{\mathcal{A}}. \quad (1.4)$$

Spannungskomponenten

Mit diesen Vorüberlegungen können die Spannungskomponenten eines deformierbaren Körpers angegeben werden. Es wird dazu ein Körper betrachtet, auf welchen mehrere äußere Kräfte $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots$ wirken, vgl. Abbildung 1.3.

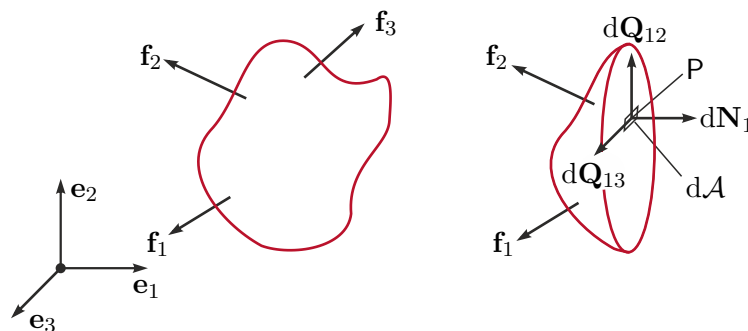


Abbildung 1.3: Interne Kräfte, die an einem Punkt P , in einer normal zur Richtung $\mathbf{e}_1$ definierten Schnittfläche $\mathcal{A}$ wirken.

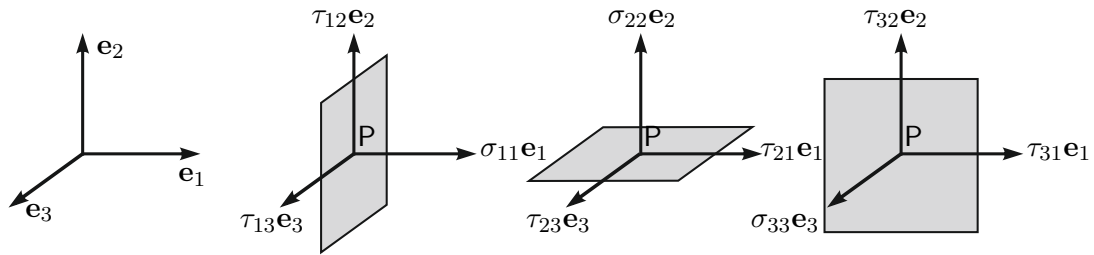


Abbildung 1.4: Spannungskomponenten.

Um die innere Kraft an einem Punkt P zu charakterisieren, legt man eine Ebene durch P , die senkrecht zur Richtung von $\mathbf{e}_1$ ist. Auf ein infinitesimales Flächenelement $d\mathcal{A}$, welches den Punkt P einschließt, wirken eine Normalkraft dN_1 in Richtung von $\mathbf{e}_1$ und Scherkräfte dQ_{12} in Richtung von $\mathbf{e}_2$ bzw. dQ_{13} in Richtung von $\mathbf{e}_3$. Man kann damit drei Spannungskomponenten am Punkt P in der Form

$$\sigma_{11} = \frac{dN_1}{d\mathcal{A}}, \quad \tau_{12} = \frac{dQ_{12}}{d\mathcal{A}}, \quad \tau_{13} = \frac{dQ_{13}}{d\mathcal{A}} \quad (1.5)$$

definieren, wobei $\|d\mathbf{N}_1\| = dN_1$, $\|d\mathbf{Q}_{12}\| = dQ_{12}$ und $\|d\mathbf{Q}_{13}\| = dQ_{13}$ gilt. Analog kann man Ebenen durch P einführen, die senkrecht zu den Richtungen von $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ sind, siehe Abbildung 1.4. Damit ergeben sich sechs weitere Komponenten σ_{22}, τ_{21} und τ_{22} bzw. σ_{33}, τ_{31} und τ_{32} . Der erste Index (i) der Schubspannung τ_{ij} gibt damit die Richtung der Flächennormale an, auf welcher sie definiert ist, und der zweite (j), die Richtung in welche sie wirkt. Anhand des Momentengleichgewichts kann gezeigt werden, dass $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{23} = \tau_{32}$ und $\tau_{31} = \tau_{13}$ gilt. D.h., nur sechs Komponenten sind unabhängig. Die sechs unabhängigen Komponenten beschreiben also vollständig die inneren Kräfte an einem Punkt P innerhalb des Körpers.

1.1.2 Verzerrung

Unter der *Verzerrung* eines Körpers versteht man sowohl die *Längsdehnungen* als auch die *Scherungen*.

Längsdehnung

Die Längsdehnung kann wie folgt definiert werden. Am Punkt P definiert man ein infinitesimales Stabelement dx . Mit du wird im Folgenden die Änderung der Stablänge des Elements unter dem Einwirken einer Kraft $\mathbf{f}$ bezeichnet. Die Längsdehnung am Punkt P ist definiert als

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (1.6)$$

Besitzt der Stab eine einheitliche Querschnittsfläche, so ist die Längsdehnung einheitlich über die gesamte Länge l_0 des Stabes und die Dehnung ist gegeben durch $\varepsilon = dl/l_0$. Hierbei ist l_0 die Länge des Stabes im Originalzustand und dl die Gesamtänderung der Länge des Stabes.

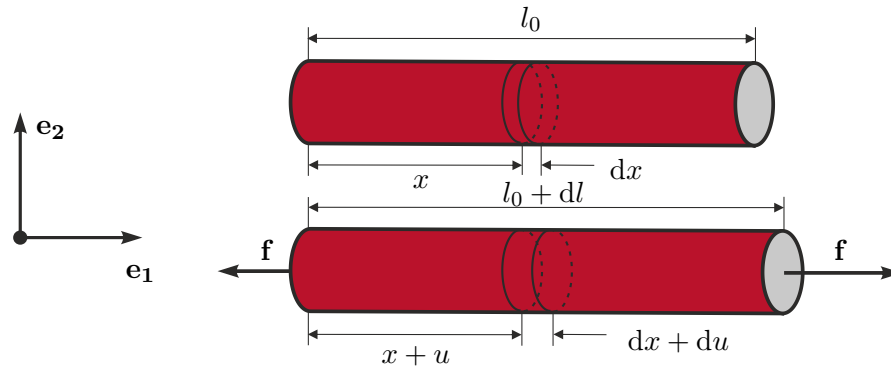


Abbildung 1.5: Dehnung eines Stabs.

Scherung

Zur Definition der Scherung betrachtet man den rechteckigen Körper aus Abbildung 1.6, auf welchen Schubkräfte τ wirken. Die (orthogonale) *Scherung* ist definiert als die Reduktion

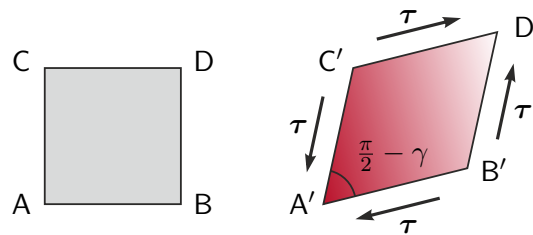


Abbildung 1.6: Orthogonale Scherung.

des rechten Winkels $\angle BAC = \pi/2$, d. h. in der Form

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle B'A'C' . \quad (1.7)$$

Verzerrungskomponenten

Mit diesen Vorüberlegungen können die Verzerrungskomponenten eines deformierbaren Körpers angegeben werden. Man betrachtet dazu das zweidimensionale, infinitesimale Flächenelement aus Abbildung 1.7. Die im Folgenden hergeleiteten Ergebnisse lassen sich einfach auf den dreidimensionalen Fall erweitern. Das Element sei in seiner Initialkonfiguration rechtwinklig und die Kanten weisen die Längen dx_1 und dx_2 auf. Während der Deformation wird ein Punkt A, mit den Koordinaten (x_1, x_2) , auf ein Punkt A', mit den Koordinaten $(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$, verschoben. Dabei bezeichnen u_1 und u_2 die *Verschiebungen* in die 1-Richtung bzw. 2-Richtung. Bei einer Deformation ändern die Kanten ihre Längen und schließen Winkel γ_1 und γ_2 ein. Die Verschiebung eines Punktes B, initial bei den Koordinaten $(x_1 + dx_1, x_2)$, kann in eine Taylorreihe entwickelt werden. Für hinreichend kleine Verschiebungen kann die Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen werden, so dass

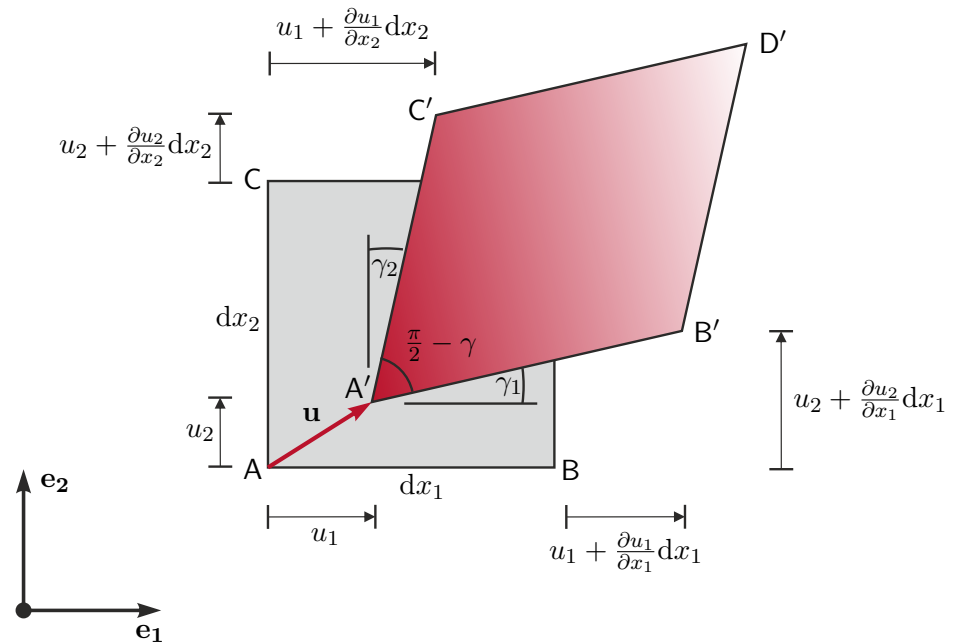


Abbildung 1.7: Verzerrungskomponenten.

für die Verschiebung des Punktes B in 1-Richtung

$$u_1(x_1 + dx_1, x_2) \approx u_1(x_1, x_2) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \quad (1.8)$$

und in 2-Richtung

$$u_2(x_1 + dx_1, x_2) \approx u_2(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \quad (1.9)$$

gilt. Die Verschiebung anderer Punkte kann auf analoge Art und Weise gewonnen werden. Beachtet man zum einen, dass die Längsdehnung in 1-Richtung durch $\varepsilon_{11} = (l - l_0)/l_0$ gegeben ist, wobei $l_0 = dx_1$ bezeichnet. Wird zusätzlich angenommen, dass $\gamma_1 \ll 1$ gilt, so folgt für die Länge des deformierten Körpers $l \approx dx_1(1 + \partial u_1/\partial x_1)$. Insgesamt berechnet sich folglich die Längsdehnung in 1-Richtung zu

$$\varepsilon_{11} = \frac{dx_1 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} . \quad (1.10)$$

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ergibt

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} , \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} . \quad (1.11)$$

Die Scherung zwischen der 1- und der 2-Richtung ist durch $\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2$ gegeben. Wird angenommen, dass $\partial u_1/\partial x_1 \ll 1$ und $\partial u_2/\partial x_1 \ll 1$ gilt, dann findet man

$$\gamma_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right) \approx \tan^{-1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (1.12)$$

bzw. mit $\partial u_1/\partial x_2 \ll 1$ und $\partial u_2/\partial x_2 \ll 1$

$$\gamma_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \right) \approx \tan^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2} . \quad (1.13)$$

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ergibt schließlich

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} , \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} , \quad \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} . \quad (1.14)$$

Zu beachten ist, dass die Beziehungen (1.11) und (1.14) nur Näherungen sind und damit nur für infinitesimale Änderungen der Verschiebungen ihre Gültigkeit haben.

1.1.3 Stoffgesetze

Spannungen sind ein Maß für die Beanspruchung des Materials eines Körpers. Dehnungen hingegen sind ein Maß für die Verformung. Sowohl Spannungen als auch Dehnungen hängen von den auf einen Körper wirkenden Kräften ab. Experimentell kann nachgewiesen werden, dass die Beziehung zwischen der Spannung und der Dehnung eine Materialeigenschaft ist, d. h. sie ist unabhängig von der Geometrie des Körpers. Diese physikalische Beziehung nennt man *Stoffgesetz (Konstitutivgleichung)*. Der Zusammenhang zwischen der Normalspannung und der Längsdehnung eines Probestabes kann in einem *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* dargestellt werden. Abbildung zeigt schematisch die in einem Zugversuch gewonnene Beziehung. Die Beziehung zwischen Normalspannung und Längsdehnung ist bis zu einer

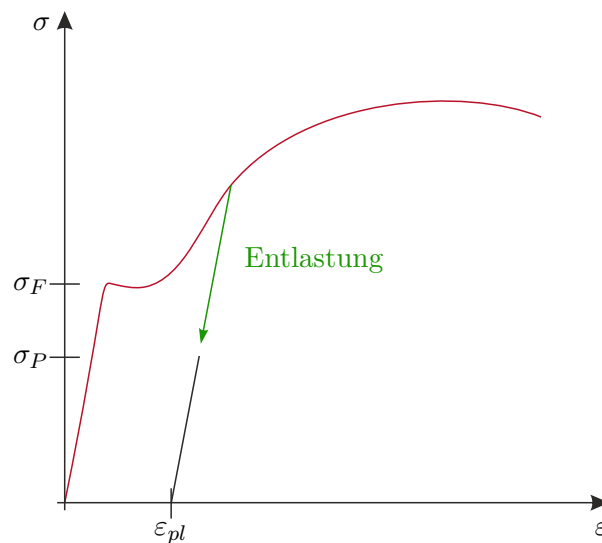


Abbildung 1.8: Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Eisenstabs.

Proportionalitätsgrenze σ_P linear. Wird die Normalspannung weiter erhöht, dann wächst die Dehnung überproportional. Beim Erreichen der sogenannten *Fließspannung* (Streckgrenze) σ_F nimmt die Längsdehnung bei praktisch gleichbleibender Normalspannung zu. Der Werkstoff beginnt zu fließen. Anschließend steigt die Kurve wieder. Belastet man einen Probestab bis zu einer Spannung $\sigma < \sigma_F$ und entlastet ihn anschließend vollständig, so wird

er wieder seine ursprüngliche Länge einnehmen. D. h., die Dehnung geht auf Null zurück und die Belastungs- und die Entlastungskurve fallen zusammen. Dieses Materialverhalten nennt man *elastisch*. Entsprechend heißt der Bereich $\sigma < \sigma_P$ *linear-elastisch*. Wird der Stab hingegen über die Fließspannung σ_F hinaus belastet, dann verläuft die Entlastungslinie parallel zur Geraden im linear-elastischen Bereich. D.h., dass bei völliger Entlastung die Längsdehnung dann nicht mehr auf Null zurück geht, sondern vielmehr eine plastische Längsdehnung ε_{pl} erhalten bleibt. Dieses Stoffverhalten bezeichnet man als *plastisch*. In viele Ingenieursanwendung reicht es aus, lediglich den linearen Bereich, in dem das Material elastisch ist, mathematisch zu beschreiben. Die Beziehung zwischen der Spannung und der Dehnung ist dann näherungsweise linear und kann in der Form

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.15)$$

angegeben werden. Die Beziehung (1.15) ist als *Elastizitätsgesetz oder Hooksches Gesetz* bekannt und die Materialkonstante E wird als *Elastizitätsmodul* bezeichnet. Der Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante, die mithilfe eines Zugversuchs bestimmt werden kann.

Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand

Es soll nun das Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand angegeben werden. Dazu werden homogene und isotrope Werkstoffe betrachtet. Ein *homogener Werkstoff* weist an jeder Stelle die gleichen Eigenschaften auf. Bei einem *isotropen Werkstoff* sind die Eigenschaften in alle Raumrichtungen gleich. Zur Herleitung des Elastizitätsgesetzes betrachtet man ein Rechteck, auf das die Normalspannungen σ_{11} wirken. Dann gilt entsprechend (1.15)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} . \quad (1.16)$$

Erfahrungsgemäß führt eine Spannung σ_{11} nicht nur zu einer Längsdehnung $\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$, sondern auch zu *Querdehnungen* ε_{22} und ε_{33} in die Richtungen $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Das Vorzeichen dieser Querdehnungen unterscheidet sich von jenem von ε_{11} , weshalb auch von *Querkontraktion* gesprochen wird. Im Folgenden wird ε_{33} nicht weiter betrachtet. Die Querdehnung ε_{22} ist proportional zur Längsdehnung ε_{11} und es gilt

$$\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} . \quad (1.17)$$

Hierbei bezeichnet ν eine dimensionslose Materialkonstante, welche als *Querkontraktionszahl* oder auch *Poissonsche Zahl* bezeichnet wird. Die Spannung σ_{11} verursacht also die Dehnungen $\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$ und $\varepsilon_{22} = -\nu\sigma_{11}/E$. Entsprechend erzeugt eine Spannung σ_{22} die Dehnungen $\varepsilon_{11} = -\nu\sigma_{22}/E$ und $\varepsilon_{22} = \sigma_{22}/E$. Die gesamte Dehnung erhält man damit durch Superposition zu

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) , \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) . \quad (1.18)$$

Wenn man eine Scheibe nur durch Schubspannungen τ_{12} belastet (reiner Schub), so stellt man im Experiment einen linearen Zusammenhang zwischen der Scherung γ_{12} und der Schubspannung τ_{12} fest. Es gilt folglich

$$\tau_{12} = \mu \gamma_{12} , \quad (1.19)$$

wobei μ eine Materialkonstante, den sogenannten *Schubmodul*, bezeichnet. Indem die Deformation eines Körpers in verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet wird, kann für isotrope elastische Werkstoffe gezeigt werden, dass der Elastizitätsmoduls E , die Querkontraktionszahl ν und der Schubmodul μ nicht unabhängig voneinander sind und der Beziehung

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.20)$$

genügen. Die Beziehungen (1.18) und (1.19) stellen das Hookesche Gesetz für einen ebenen Spannungszustand dar.

1.2 Kinematik von deformierbaren Körpern

Das Gebiet, das vom Körper $\mathcal{B}$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t eingenommen wird, wird als *Konfiguration* $\Omega_0, \dots, \Omega$ von $\mathcal{B}$ bezeichnet. Jeder materielle Punkt $P \in \mathcal{B}$ entspricht damit einem geometrischen Punkt mit der zugehörigen Position in einer Konfiguration.

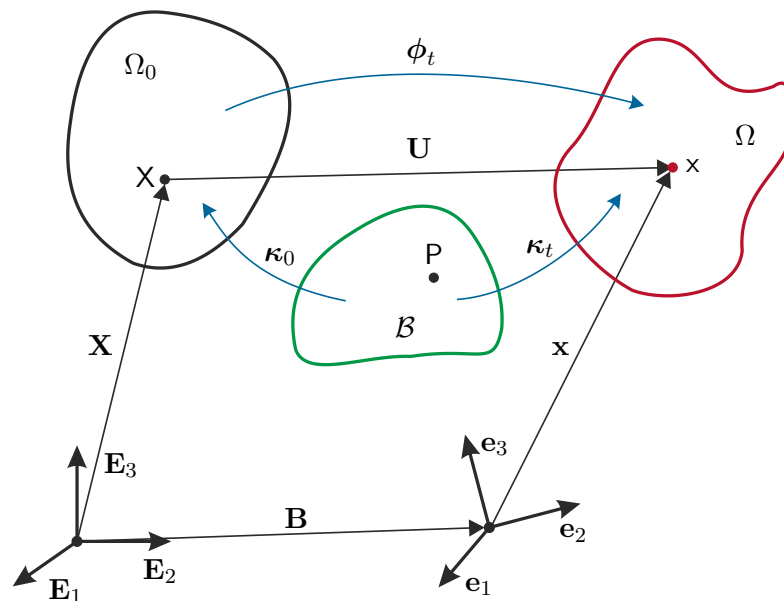


Abbildung 1.9: Konfigurationen und Bewegung eines deformierbaren Körpers.

Die Konfiguration Ω_0 bezieht sich auf eine feste Referenzzeit. Das Gebiet wird als *Referenzkonfiguration* und die Position eines materiellen Punktes P in diesem wird mit X bezeichnet. Man nennt die *Referenzkonfiguration* auch *Initialkonfiguration*, wenn die

Referenzzeit mit der Startzeit übereinstimmt, d. h. $t = 0$ gilt. In diesem Fall beschreibt der Punkt $\mathbf{X}$, mit dem Positionsvektor $\mathbf{X}$ und den Koordinaten $\{X_A\}$, $A = 1, 2, 3$, die Lage des materiellen Punkts $\mathbf{P} \in \mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Bewegt man sich aus der Referenzkonfiguration ($t > 0$), so wird der Körper eine neue Konfiguration Ω einnehmen. Die Konfiguration Ω wird auch als *aktuelle Konfiguration* oder auch als *Momentankonfiguration* bezeichnet. Ein materieller Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t > 0$ nimmt in Ω die Position $\mathbf{x}$ ein und kann anhand des Positionsvektors $\mathbf{x}$ mit den Koordinaten $\{x_a(t)\}$, $a = 1, 2, 3$, beschrieben werden. Man bezeichnet dabei $\{X_A\}$, $A = 1, 2, 3$, auch als *materielle (oder Referenz-) Koordinaten (Karte)* auf Ω_0 und $\{x_a(t)\}$, $a = 1, 2, 3$, als *räumliche (oder momentan) Koordinaten (Karte)* auf Ω . Um die Momentankonfiguration mit dem euklidischen Raum in Verbindung zu setzen, werden kartesische Koordinaten¹ $\{x_a(t)\}$, $a = 1, 2, 3$ als Komponenten des Positionsvektors

$$\mathbf{x} = x_a \mathbf{e}_a \quad (1.21)$$

definiert². Dabei bezeichnet $\{\mathbf{e}_a\}$ eine Orthonormalbasis mit der Eigenschaft $\langle \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \rangle = \delta_{ab}$, wobei $\delta_{ab} = 1$ für $a = b$ und $\delta_{ab} = 0$ für $a \neq b$ gilt. Nachdem jeder Vektor $\mathbf{v}$ als Linearkombination der Einheitsvektoren dargestellt werden kann, errechnet sich das innere Produkt zweier Vektoren $\mathbf{v} = v_a \mathbf{e}_a$ und $\mathbf{w} = w_b \mathbf{e}_b$ in kartesischen Koordinaten zu

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_a w_b \delta_{ab} = v_a w_a . \quad (1.22)$$

Ebenso kann man vorgehen, um die materiellen Koordinaten $\{X_A\}$, $A = 1, 2, 3$ zu interpretieren. Dazu werden kartesische Koordinaten $\{X_A\}$, $A = 1, 2, 3$ als Komponenten des Positionsvektors

$$\mathbf{X} = X_A \mathbf{E}_A \quad (1.23)$$

definiert. Die Orthonormalbasis $\{\mathbf{E}_A\}$ weist ebenso die Eigenschaft $\langle \mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B \rangle = \delta_{AB}$ auf.

Bemerkung 1.1. Man unterscheidet in der Differentialgeometrie zwischen *geradlinigen und krummlinigen Koordinaten*. Geradlinige (krummlinige) Koordinaten bilden Koordinatensysteme auf dem euklidischen Raum, bei denen die Koordinatenlinien gerade (krummlinig) sind. Z. B. sind kartesische Koordinaten geradlinig und Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten krummlinig. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass vektorielle oder tensorielle Größen im Allgemeinen unterschiedliche Komponentendarstellungen in unterschiedlichen Koordinatensystemen besitzen. Außerdem unterscheiden sich Operatoren, wie zum Beispiel der Gradient, in unterschiedlichen Koordinaten. Anzumerken ist, dass eine koordinatenfreie Darstellung existiert. Diese würde jedoch den Rahmen dieser Einführung sprengen. Für eine Übersicht sei auf [1.1, 1.2] verwiesen.

¹Die kartesischen Koordinaten sind gegeben als die Projektion des Positionsvektors $\mathbf{x}$ auf die Koordinatenachsen $\mathbf{e}_a$, d. h. in der Form $x_a = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_a \rangle$.

²Nach der *Einsteinschen Summenkonvention* wird über doppelt auftretende Indizes (hier a) automatisch summiert. D. h., es gilt $\mathbf{x} = x_a \mathbf{e}_a = \sum_{a=1}^3 x_a \mathbf{e}_a = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$.

1.2.1 Bewegung eines deformierbaren Körpers

Eine Konfiguration Ω_0 von $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ wird durch eine Abbildung $\kappa_0 : \mathcal{P} \rightarrow \kappa_0(\mathcal{P})$ beschrieben. Ebenso kann die Konfiguration Ω von $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t > 0$ durch eine Abbildung $\kappa_t : \mathcal{P} \rightarrow \kappa_t(\mathcal{P})$ beschrieben werden. Der Punkt $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration Ω , mit dem zugehörigen Positionsvektor $\mathbf{x} = \kappa_t(\mathcal{P})$, den ein materieller Punkt $\mathcal{P}$ zum Zeitpunkt $t > 0$ einnimmt, kann dementsprechend in der Form

$$\mathbf{x} = \kappa_t(\kappa_0^{-1}(\mathbf{X})) = \phi_t(\mathbf{X}) \quad (1.24)$$

angegeben werden und durch $\mathbf{X}$ und t aus der Referenzkonfiguration Ω_0 beschrieben werden. Eine Konfiguration Ω von $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt $t > 0$ kann damit auch durch eine Abbildung $\phi_t : \Omega_0 \rightarrow \phi_t(\Omega_0) = \Omega$ formuliert werden. Dabei beschreibt die Abbildung ϕ_t die Bewegung eines materiellen Punktes $\mathcal{P}$ des Körpers $\mathcal{B}$ als Funktion der Zeit t , dementsprechend eine *Trajektorie* des materiellen Punktes $\mathcal{P}$.

Definition 1.1 (Reguläre Abbildung). Eine Abbildung ϕ_t wird als *regulär* bezeichnet, wenn sie eine eindeutige Inverse $\phi_t^{-1} : \phi_t(\Omega_0) \rightarrow \Omega_0$ besitzt. In diesem Sinne ist ϕ_t eine C^r reguläre Abbildung, wenn die Elemente von $\phi_t(\mathbf{X})$ r -fach stetig differenzierbare (C^r) Funktionen von $\mathbf{X}$ und t sind und ϕ_t^{-1} ebenfalls C^r ist.

Ebenso kann der Punkt $\mathbf{X}$, mit dem Positionsvektor $\mathbf{X}$, den ein materieller Punkt $\mathcal{P}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Referenzkonfiguration einnimmt, in der Form

$$\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

angegeben werden und durch $\mathbf{x}$ und t aus der Momentankonfiguration Ω beschrieben werden. Zu jedem Zeitpunkt beschreiben die Beziehungen (1.24) und (1.25) eine Abbildung zwischen der Referenzkonfiguration Ω_0 und der Momentankonfiguration Ω um sicherzustellen, dass nicht zwei materielle Punkte die gleiche Position im Raum und der Zeit einnehmen.

Bleiben die Distanzen zwischen allen Punkten eines Körpers $\mathcal{B}$ während einer Bewegung ϕ_t konstant, so spricht man von einer *Starrkörperbewegung*. Ist dies nicht der Fall, so ändert die Bewegung ϕ_t auch die Form des Körpers, d. h. es kommt zu einer *Deformation*.

Man kann sich die Referenzposition $\mathbf{X}$ als eine Markierung eines materiellen Punktes $\mathcal{P}$ vorstellen. Eine gegebene Referenzposition $\mathbf{X}$ bezieht sich immer auf den gleichen materiellen Punkt $\mathcal{P}$. Im Gegensatz dazu bezieht sich der Positionsvektor $\mathbf{x}$ immer auf eine feste Position $\mathbf{x}$ im Raum, an der sich unterschiedliche materielle Punkte $\mathcal{P}$ zu verschiedenen Zeitpunkten $t > 0$ befinden. Für einen *fixen* Positionsvektor $\mathbf{X}$ liefert die Abbildung $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{X})$ die Momentanposition $\mathbf{x}$ eines bestimmten materiellen Punktes $\mathcal{P}$ als Funktion der Zeit t , dessen Referenzposition $\mathbf{X}$ ist. Hingegen für einen *fixen* Positionsvektor $\mathbf{x}$ liefert die Abbildung $\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$ die Referenzposition $\mathbf{X}$ unterschiedlicher materieller Punkte $\mathcal{P}$, die die Position $\mathbf{x}$ zu unterschiedlichen Zeiten $t > 0$ einnehmen.

Beispiel 1.1. Man betrachtet einen Einheitswürfel ($0 \leq X_A \leq 1$, $A = 1, 2, 3$) als Körper in kartesischen Koordinaten in der Referenzkonfiguration Ω_0 . Die Bewegung $x_a = \phi_a(X_1, X_2, X_3)$ des materiellen Punkts $\mathbf{X}$ mit dem Positionsvektor $\mathbf{X}$ ist gegeben durch

$$x_1 = X_1 + a_1 X_2^2, \quad x_2 = X_2 + a_2, \quad x_3 = X_3 + a_3 X_2 X_3. \quad (1.26)$$

Die inverse Abbildung $X_A = \phi_A^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ berechnet sich zu

$$X_1 = x_1 - a_1(x_2 - a_2)^2, \quad X_2 = x_2 - a_2, \quad X_3 = \frac{x_3}{1 + a_3(x_2 - a_2)}. \quad (1.27)$$

1.2.2 Materielle und räumliche Beschreibung

Die sogenannte *materielle Beschreibung* (1.24) ist eine Charakterisierung der Bewegung eines Körpers und (skalarer, vektorieller oder tensorieller) Feldgrößen $\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{F}(X_1, X_2, X_3, t)$ des Körpers (z. B. der Spannungen, der (Massen-) Dichte ρ , der Temperatur θ) in der Referenzkonfiguration anhand der materiellen Koordinaten $\{X_A\}$, $A = 1, 2, 3$, und der Zeit t . Im Gegensatz dazu ist die sogenannte *räumliche Beschreibung* (1.25) eine Charakterisierung der Bewegung und der Feldgrößen $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, t)$ eines Körpers in der Momentankonfiguration anhand der räumlichen Koordinaten $\{x_a\}$, $a = 1, 2, 3$, und der Zeit t .

Beispiel 1.2. Die materielle Beschreibung der aktuellen Temperaturverteilung eines Einheitswürfels aus Beispiel 1.1 ist gegeben durch

$$\vartheta = A(1 + X_2 X_3), \quad (1.28)$$

wobei A eine Konstante bezeichnet. Substituiert man (1.27) findet man die aktuelle Temperatur in räumlicher Beschreibung

$$\vartheta = A \left(1 + \frac{x_3(x_2 - a_2)}{1 + a_3(x_2 - a_2)} \right). \quad (1.29)$$

Man unterscheidet zusätzlich zwischen der materiellen und räumlichen Zeitableitung [1.3]. Unter der *materiellen (auch substantiellen) Zeitableitung* einer (skalaren, vektoriellen oder tensoriellen) Feldgröße $\mathbf{T}$ versteht man die totale Zeitableitung d/dt . Für eine Feldgröße $\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, t)$ in materieller Darstellung ist diese äquivalent zur partiellen Zeitableitung. Unter der *räumlichen (auch lokalen) Zeitableitung* einer Feldgröße $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in räumlicher Darstellung versteht man die partielle Zeitableitung $\partial/\partial t$. Um die materielle und lokale Zeitableitung einer räumlichen Feldgröße $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in Verbindung zu setzen, sind folgende Vorüberlegungen notwendig.

Die Ortsableitung einer (vektoriellen oder tensoriellen) materiellen Feldgröße $\mathbf{T} =$

$\mathcal{F}(\mathbf{X}, t)$ kann als *materieller Gradientenoperator*

$$\text{Grad}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_A} \mathbf{E}_A \quad (1.30)$$

interpretiert werden. Analog dazu kann die Ortsableitung einer (vektoriellen oder tensoriellen) räumlichen Feldgröße $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ als *räumlicher Gradientenoperator*

$$\text{grad}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_a} \mathbf{e}_a \quad (1.31)$$

verstanden werden. Für eine vektorielle, räumliche Feldgröße $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_a(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_a$ findet man

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_b} = \frac{\partial f_a}{\partial x_b} \mathbf{e}_a = f_{a,b} \mathbf{e}_a . \quad (1.32)$$

Damit kann der Gradient einer vektoriellen Feldgröße $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_a \mathbf{e}_a$ (Tensor erster Stufe) in der Form

$$\text{grad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial f_a}{\partial x_b} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = f_{a,b} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \quad (1.33)$$

angegeben werden. Der Gradient einer vektoriellen Feldgröße ist dementsprechend ein Tensor zweiter Stufe. Dieses Ergebnis kann für Tensoren höherer Stufe verallgemeinert werden. Für eine Tensor zweiter Stufe $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_{ab}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_c} = \frac{\partial}{\partial x_c} (f_{ab}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b) = \frac{\partial f_{ab}}{\partial x_c} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b . \quad (1.34)$$

Damit ist der Gradient des Tensors zweiter Stufe ein Tensor dritter Stufe der Form

$$\text{grad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial f_{ab}}{\partial x_c} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \mathbf{e}_c . \quad (1.35)$$

Ebenso wie der Gradient, kann die Divergenz einer vektoriellen Feldgröße $\mathbf{T}$ definiert werden:

$$\text{Div}(\mathcal{F}(\mathbf{X}, t)) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_A} \cdot \mathbf{E}_A = \frac{\partial \mathcal{F}_A}{\partial X_A} = \mathcal{F}_{A,A} \quad (1.36a)$$

$$\text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_a} \cdot \mathbf{e}_a = \frac{\partial f_a}{\partial x_a} = f_{a,a} . \quad (1.36b)$$

Bemerkung 1.2 (Tensor zweiter Stufe und Tensorprodukt in kartesischen Koordinaten).

Ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{f}$ kann anhand des *Tensorprodukts* zweier Vektoren $\mathbf{w} = w_b \mathbf{e}_b$ und $\mathbf{v} = v_a \mathbf{e}_a$ in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{w} \mathbf{v} = (w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3)(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \\ &= w_1 v_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + w_1 v_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + w_1 v_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + w_2 v_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + w_2 v_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + w_2 v_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + w_3 v_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + w_3 v_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + w_3 v_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.37)$$

beschrieben werden. In der Indexschreibweise gilt folglich^a

$$\mathbf{f} = \mathbf{w} \mathbf{v} = w_a v_b \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b . \quad (1.38)$$

Wie man erkennt, kann das Tensorprodukt $\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ als Basis und $f_{ab} = w_a v_b$ als Komponenten des Tensors zweiter Stufe $\mathbf{f}$ aufgefasst werden. Multipliziert man skalar von rechts den Vektor $\mathbf{v} = v_c \mathbf{e}_c$ auf den Tensor $\mathbf{f} = f_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ findet man

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = (f_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b) \cdot (v_c \mathbf{e}_c) = f_{ab} v_c \mathbf{e}_a \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c \rangle \quad (1.39a)$$

$$= f_{ab} v_c \delta_{bc} \mathbf{e}_a = f_{ab} v_b \mathbf{e}_a . \quad (1.39b)$$

Der rechte Vektor $\mathbf{e}_b$ wurde also aus dem Tensor herausgelöst und bildet mit dem Basisvektor $\mathbf{e}_c$ ein Skalarprodukt. Man nennt diese Operation *verjüngendes Produkt von rechts*. Entsprechend kann man auch von links skalar multiplizieren und erhält

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = f_{ab} v_c \langle \mathbf{e}_c, \mathbf{e}_a \rangle \mathbf{e}_b = f_{ab} v_a \mathbf{e}_b . \quad (1.40a)$$

Man erkennt, dass das verjüngende Produkt eines Tensors zweiter Stufe mit einem Tensor erster Stufe einen Tensor erster Stufe ergibt. Ebenso kann man ein doppelt verjüngendes Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe $\mathbf{f} = f_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ und $\mathbf{h} = h_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ einführen^b:

$$\mathbf{f} : \mathbf{h} = \mathbf{h} : \mathbf{f} = f_{ab} h_{ab} = h_{ab} f_{ab} . \quad (1.41)$$

^aNach der *Einsteinschen Summenkonvention* wird über doppelt auftretende Indizes (hier a und b) automatisch summiert. D. h., es gilt $\mathbf{f} = f_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 f_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$.

^bNach der *Einsteinschen Summenkonvention* gilt $\mathbf{f} : \mathbf{h} = f_{ab} h_{ab} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 f_{ab} h_{ab}$.

Bemerkung 1.3 (Kronecker-Symbol und Epsilon-Tensor in kartesischen Koordinaten). Das *Kronecker-Symbol* δ_{ab} ist definiert als

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases} \quad (1.42)$$

und kann als Einheitstensor $\boldsymbol{\delta}$ bezüglich einer festen Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_a\}$ aufgefasst werden, es gilt

$$\boldsymbol{\delta} = \delta_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b . \quad (1.43)$$

Unter dem *Epsilon-Tensor* versteht man den Tensor dritter Stufe

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{abc} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \mathbf{e}_c \quad (1.44)$$

mit

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{für } (a, b, c) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{für } (a, b, c) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 0 & \text{sonst (zwei oder drei gleiche Indizes)} \end{cases} . \quad (1.45)$$

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{v} = v_a \mathbf{e}_a$ und $\mathbf{w} = w_b \mathbf{e}_b$ lässt sich mit dem Epsilon-Tensor schreiben als

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_a \mathbf{e}_a) \times (w_b \mathbf{e}_b) = v_a w_b \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = v_a w_b \epsilon_{abc} \mathbf{e}_c . \quad (1.46)$$

1.2.3 Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld

Bevor der Zusammenhang zwischen der materiellen und räumlichen Zeitableitung einer räumlichen Feldgröße $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ angegeben wird, muss noch das Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eingeführt werden.

Das *Verschiebungsfeld* $\mathbf{U}$ eines materiellen Punktes P zum Zeitpunkt t ist definiert als der Vektor von der Position in der Referenzkonfiguration zur Position in der Momentan-konfiguration, d. h. in der Form $\mathbf{U}(P, t) = \mathbf{x}(P, t) - \mathbf{X}(P) + \mathbf{B}(P)$, vgl. Abbildung 1.9. Die *materielle Darstellung des Verschiebungsfeldes* lautet damit

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \phi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X}) \quad (1.47)$$

und die *räumliche Darstellung des Verschiebungsfeldes* ist gegeben durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \phi_t^{-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x})) . \quad (1.48)$$

Die beiden Darstellungen können über den Zusammenhang (1.24) in Verbindung gebracht werden, da

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.49)$$

gilt. D. h., $\mathbf{u}$ und $\mathbf{U}$ haben den selben Wert. Sie repräsentieren allerdings Funktionen mit unterschiedlichen Argumenten. Bei einer reinen Starrkörpertranslation bewegt sich jeder materielle Punkt um die gleiche Distanz. Das Verschiebungsfeld ist damit unabhängig von $\mathbf{X}$ und damit nur noch eine Funktion der Zeit t . Besitzen beiden Koordinatensysteme den gleichen Fußpunkt, so gilt $\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$.

Beispiel 1.3. Es wird der Einheitswürfel aus Beispiel 1.1 betrachtet und das materielle und räumliche Verschiebungsfeld berechnet. Für das materielle Verschiebungsfeld $U_A = \phi_A(X_1, X_2, X_3) - X_A$ findet man

$$U_1 = a_1 X_2^2 , \quad U_2 = a_2 , \quad U_3 = a_3 X_2 X_3 . \quad (1.50)$$

Analog dazu ergibt sich das räumliche Verschiebungsfeld $u_a = x_a - \phi_a^{-1}(X_1, X_2, X_3)$ zu

$$u_1 = a_1(x_2 - a_2)^2, \quad u_2 = a_2, \quad u_3 = \frac{a_3 x_3(x_2 - a_2)}{1 + a_3(x_2 - a_2)}. \quad (1.51)$$

Die *materielle Darstellung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeldes* ist definiert als

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{X}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_t(\mathbf{X}). \quad (1.52)$$

Sie können auch durch das materielle Verschiebungsfeld (1.47) ausgedrückt werden:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t). \quad (1.53)$$

Die *räumliche Darstellung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeldes* ergibt sich anhand der Bewegung (1.24) und (1.52) zu

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{X}) \right|_{\mathbf{X}=\phi_t^{-1}(\mathbf{x})} = \mathbf{V}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t). \quad (1.54)$$

Mithilfe der Kettenregel kann jetzt ein Zusammenhang zwischen der materiellen und der lokalen Zeitableitung der räumlichen Feldgröße $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ hergestellt werden:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{X}), t) \right|_{\mathbf{X}=\phi_t^{-1}(\mathbf{x})} \quad (1.55a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{X}) \right|_{\mathbf{X}=\phi_t^{-1}(\mathbf{x})} \quad (1.55b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \text{grad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.55c)$$

Man erkennt, dass sich die materielle Zeitableitung aus einem *lokalen Anteil* und einem *konvektiven Anteil* zusammensetzt. Der lokale Anteil entspricht der partiellen Zeitableitung $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) / \partial t$ und beschreibt die lokale Änderung der Feldgröße. Der konvektive Anteil ist die Richtungsableitung bei $\mathbf{x}$ in Richtung von $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, d. h.

$$\text{grad}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \eta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right|_{\eta=0}. \quad (1.56)$$

Er beschreibt die Änderung, die sich zusätzlich aufgrund der Bewegung eines materiellen Punktes einstellt. Wichtig ist es zu verstehen, dass $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ eine materielle Feldgröße ist - als Funktion von $(\mathbf{X}, t)$ - und $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ die gleiche (räumliche) Feldgröße ist - allerdings als Funktion von $(\mathbf{x}, t)$. Für die Ableitung gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.57)$$

Die Anwendung dieser Zusammenhänge auf das räumliche Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ergibt unter Berücksichtigung von (1.47) für das räumliche Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}=\phi_t^{-1}(\mathbf{x})} = \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\phi_t^{-1}(\mathbf{x})}. \quad (1.58)$$

Die Anwendung dieser Zusammenhänge auf das räumliche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ergibt für das räumliche Beschleunigungsfeld

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \text{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.59)$$

Hier tritt der Gradient des räumlichen Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ auf. Dieser wird auch als räumlicher Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.60)$$

bezeichnet. Er kann (wie jeder Tensor zweiter Stufe) in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{d}$ und einen schiefsymmetrischen Anteil $\mathbf{w}$ aufgespalten werden

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (1.61)$$

wobei

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{l}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{d}^T(\mathbf{x}, t) \quad (1.62a)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{l}^T(\mathbf{x}, t)) = -\mathbf{w}^T(\mathbf{x}, t) \quad (1.62b)$$

bzw. wegen (1.58)

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\text{grad}^T(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \text{grad}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))) \quad (1.62c)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\text{grad}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - \text{grad}^T(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))) \quad (1.62d)$$

gilt. Den symmetrischen Anteil $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet man als *Streck- oder Deformationsgeschwindigkeitstensor* und den schiefsymmetrischen Anteil als *Drehgeschwindigkeitstensor*.

1.2.4 Deformationsgradient

Eine wichtige Größe zur Beschreibung der Deformation eines Körpers $\mathcal{B}$ zufolge einer Bewegung ϕ_t ist der *Deformationsgradient* $\mathbf{F}$. Dafür betrachtet man eine materielle Linie

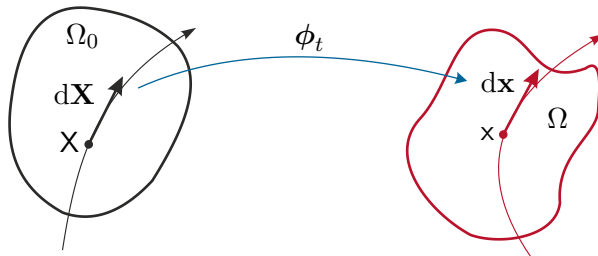


Abbildung 1.10: Vektorielle Linienelemente.

$\mathcal{C}_0 \subset \Omega_0$ in der Referenzkonfiguration eines Punktes $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}(\xi) \in \Omega_0$, wobei ξ eine

geeignete Parametrierung ist. Wird eine Bewegung des Körpers durchgeführt, so wird die materielle Linie deformiert und es gilt für die deformierte Linie $\mathcal{C} \subset \Omega$ eines Punktes $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \gamma(\xi, t) \in \Omega$. Die materielle Linie $\mathcal{C}_0$ in der Referenzkonfiguration Ω_0 zu einem festen Zeitpunkt t ist dann definiert durch

$$\mathbf{x} = \gamma(\xi, t) = \phi_t(\mathbf{\Gamma}(\xi)) . \quad (1.63)$$

Daraus ergeben sich die räumlichen Linienelemente $d\mathbf{x}$ und die materiellen Linienelemente $d\mathbf{X}$ der materiellen Linie zu

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, t) d\xi , \quad d\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{\Gamma}(\xi) d\xi . \quad (1.64)$$

Wendet man auf (1.63) die Kettenregel an, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \phi_t(\mathbf{X}) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{\Gamma}(\xi) \quad (1.65)$$

und mit (1.64) findet man

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} , \quad (1.66)$$

wobei der *Deformationsgradient*

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}(\phi_t(\mathbf{X})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \phi_t(\mathbf{X}) \quad (1.67)$$

eingeführt wurde. Der Deformationsgradient beschreibt also, wie sich ein vektorielles Linienelement zufolge der Bewegung ändert.

Die vektoriellen Linienelemente können mit den Basisvektoren $\{\mathbf{e}_a\}$ und $\{\mathbf{E}_A\}$ in der Form $d\mathbf{x} = dx_a \mathbf{e}_a$ bzw. $d\mathbf{X} = dX_A \mathbf{E}_A$ angegeben werden. Damit folgt

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= dx_a \mathbf{e}_a = \frac{\partial x_a}{\partial X_A} dX_A \mathbf{e}_a = \frac{\partial x_a}{\partial X_A} \mathbf{e}_a \delta_{AB} dX_B \\ &= \underbrace{\frac{\partial x_a}{\partial X_A} \mathbf{e}_a}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{\mathbf{E}_B dX_B}_{d\mathbf{X}} = \left(\frac{\partial x_a}{\partial X_A} \mathbf{e}_a \mathbf{E}_A \right) \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.68)$$

und für die Komponenten des Deformationsgradienten

$$F_{aA} = \frac{\partial x_a}{\partial X_A} . \quad (1.69)$$

Der Deformationsgradient ist also ein Tensor zweiter Stufe, der Punkte aus zwei Konfigurationen verknüpft. Man nennt einen Tensor mit dieser Eigenschaft auch Zwei-Punkt-Tensor. Der *inverse Deformationsgradient* bestimmt sich zu

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi_t^{-1}(\mathbf{x}) . \quad (1.70)$$

Dieser beschreibt, wie sich ein vektorielles Linienelement zufolge der inversen Bewegung ändert. Der inverse Deformationsgradient kann damit zu

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Aa} \mathbf{E}_A \mathbf{e}_a , \quad (1.71)$$

mit den Komponenten

$$\left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Aa} = \frac{\partial X_A}{\partial x_a} \quad (1.72)$$

angegeben werden. Der *transponierte* (oder adjungierte) *Deformationsgradient* $\mathbf{F}^T$ von $\mathbf{F}$ kann aus der Vorschrift

$$\langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, d\mathbf{x} \rangle = \langle d\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{x} \rangle , \quad (1.73)$$

welche für alle $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ gültig sein muss, bestimmt werden. Darin bezeichnet $\langle \mathbf{W}, \mathbf{V} \rangle$ bzw. $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ das innere Produkt auf Ω_0 bzw. $\phi_t(\Omega_0)$. Bei der Berechnung des transponierten Deformationsgradienten ist Vorsicht geboten. Es macht im Allgemeinen keinen Sinn, die Indizes einfach zu vertauschen $\left(\left(\mathbf{F}^T \right)_{aA} \neq \partial x_A / \partial X_a \right)$, da $\mathbf{X}$ in Referenz- und $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration definiert ist. Stattdessen muss das Tensorprodukt vertauscht werden, d. h. der transponierte Deformationsgradienten in der Form

$$\mathbf{F}^T = F_{aA} \mathbf{E}_A \mathbf{e}_a \quad (1.74)$$

definiert werden. Der inverse, transponierte Deformationsgradienten lautet folglich

$$\left(\mathbf{F}^{-T} \right) = \left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Aa} \mathbf{e}_a \mathbf{E}_A . \quad (1.75)$$

Für die Zeitableitung des Deformationsgradienten rechnet man

$$\frac{d}{dt} F_{aA} = \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial t \partial X_A} = \frac{\partial v_a}{\partial X_A} = \frac{\partial v_a}{\partial x_b} \frac{\partial \phi_b}{\partial X_A} = \frac{\partial v_a}{\partial x_b} F_{bA} , \quad (1.76)$$

d. h.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{V}) = \mathbf{l} \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{l} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{F} \right) \mathbf{F}^{-1} , \quad (1.77)$$

wobei $\mathbf{l}$ wieder den Geschwindigkeitsgradient (1.60) bezeichnet.

Beispiel 1.4. Es wird wieder der Einheitswürfels aus Beispiel 1.1 betrachtet und der Deformationsgradient und der inverse Deformationsgradient berechnet. Die Komponenten $F_{aA} = \partial x_a / \partial X_A$ des Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ sind mit (1.26) in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 2a_1 X_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 X_3 & 1 + a_3 X_2 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

gegeben. Mithilfe der Beziehung $(\mathbf{F}^{-1})_{Aa} = \partial X_A / \partial x_a$ und der inversen Abbildung (1.27) findet man

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -2a_1(x_2 - a_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-a_3x_3}{(1+a_3(x_2-a_2))^2} & \frac{1}{1+a_3(x_2-a_2)} \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

Definition 1.2. Es seien $\{d\mathbf{x}_a\}$, $a = 1, 2, 3$, und $\{d\mathbf{X}_A\}$, $A = 1, 2, 3$, korrespondierende materielle Linienelemente in der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration. Die materiellen Flächenelemente sind mit Kreuzprodukten in der Form

$$d\mathbf{a} = da_a \mathbf{n} = d\mathbf{x}_b \times d\mathbf{x}_c \quad \text{und} \quad d\mathbf{A} = dA_a \mathbf{N} = d\mathbf{X}_b \times d\mathbf{X}_c, \quad (1.80)$$

mit den Normalenvektoren $\mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{N}$ definiert. Die materiellen Volumenelemente sind mit Spatprodukten in der Form

$$d\nu = \langle (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2), d\mathbf{x}_3 \rangle \quad \text{und} \quad dV = \langle (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2), d\mathbf{X}_3 \rangle \quad (1.81)$$

definiert.

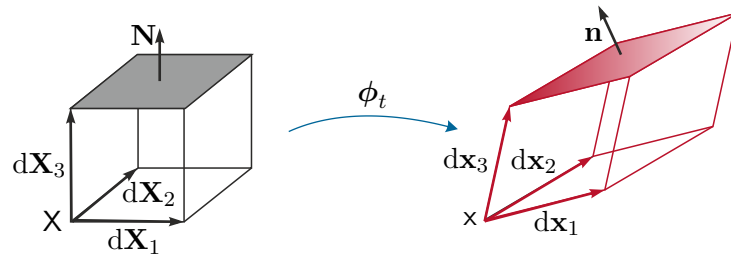


Abbildung 1.11: Volumenelemente in der Referenz- und Momentankonfiguration.

Die Transformationsvorschrift für Linien-, Flächen- und Volumenelemente kann anhand des Deformationsgradienten beschrieben werden:

Lemma 1.1. Es sei $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}(\phi_t(\mathbf{X}))$ der Deformationsgradienten einer Bewegung $\phi_t(\mathbf{X})$ und $d\mathbf{x}, d\mathbf{X}, d\mathbf{a}, d\mathbf{A}, d\nu$ bzw. dV seien materielle Linien-, Flächen- und Volumenelemente, dann gilt:

- (1) $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, $dx_a = F_{aA} dX_A$
- (2) $d\mathbf{a} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}$, $da_a = J \left(\mathbf{F}^{-T} \right)_{aA} dA_A$
- (3) $d\nu = J dV$, $J = \det(\mathbf{F}) = \frac{1}{6} \epsilon_{ABC} \epsilon_{abc} F_{aA} F_{bB} F_{cC}$.

Die Determinante $\det(\mathbf{F}) = J(\mathbf{X}, t)$ wird auch als *Volumenverhältnis* oder *Jacobideterminante* bezeichnet. Da Materie nicht vernichtet werden kann, gilt $J(\mathbf{X}, t) > 0$ für alle $\mathbf{X} \in \Omega_0$ und für alle Zeiten t . Eine Bewegung für die $J = 1$ gilt, wird auch als *isochor* oder *volumenerhaltend* bezeichnet. Für die zeitliche Änderung der Jacobideterminante J erhält

man

$$\frac{d}{dt} J = J \operatorname{div}(\mathbf{v}) . \quad (1.82)$$

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie die Gültigkeit von $dJ/dt = J \operatorname{div}(\mathbf{v})$ und der in Lemma (1.1) angegebenen Zusammenhänge. Verwenden Sie dazu die Definition des Epsilon-Tensors (1.45) und die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten (1.77).

1.2.5 Deformations- und Verzerrungstensor

Der Deformationsgradient ist leider kein geeignetes Verzerrungsmaß. Betrachtet man die Deformation eines Linienelements, so kann diese aufgeteilt werden in eine Starrkörpertranslation, eine Starrkörperrotation und eine Streckung, an der man eigentlich interessiert ist. Durch die Gradientenbildung fällt die Translation zwar heraus, die Starrkörperrotation steckt allerdings noch im Deformationsgradienten. Diese muss also abgespalten werden.

Eine wesentliche Aufgabe in der Kontinuumsmechanik ist die Beschreibung der *Deformation* eines Körpers, d. h. die Beschreibung der Änderung der Länge und der Orientierung von Linienelementen des Körpers. Dies führt unmittelbar auf die Frage, wie sich das innere Produkt zweier vektoriellen Linienelemente $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ durch die Bewegung ϕ_t verändert.

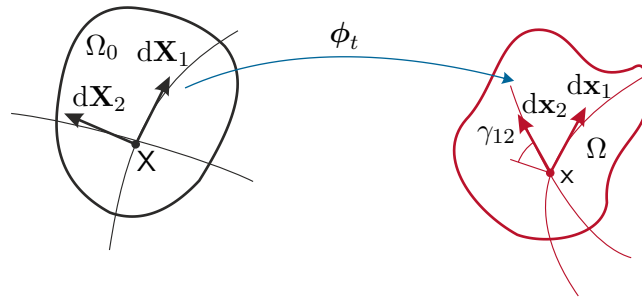


Abbildung 1.12: Zur Beschreibung des Deformations- und Verzerrungstensors.

Zur Klärung dieser Frage betrachte man einen Punkt $\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration Ω_0 sowie die orthonormalen Linienelemente $d\mathbf{X}_1$ und $d\mathbf{X}_2$, siehe Abbildung 1.12. Dieser Punkt $\mathbf{X}$ wird durch die Bewegung ϕ_t auf den Punkt $\mathbf{x} \in \phi_t(\Omega_0)$ abgebildet. Berechnet man das innere Produkt zweier Linienelemente $d\mathbf{X}_A$ und $d\mathbf{X}_B$, so erhält man aufgrund der Orthonormalität

$$\langle d\mathbf{X}_A, d\mathbf{X}_B \rangle = \delta_{AB} . \quad (1.83)$$

Die zugehörigen Linienelemente $d\mathbf{x}_1$ und $d\mathbf{x}_2$ errechnen sich über den Deformationsgradienten $\mathbf{F}$, zu

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1, \quad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 . \quad (1.84)$$

Berechnet man hingegen das innere Produkt der transformierten Linienelemente $d\mathbf{x}_1$ und $d\mathbf{x}_2$, so erhält man

$$\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle = \langle d\mathbf{X}_1, \underbrace{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}_{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle . \quad (1.85)$$

Damit ist $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ein Maß für die Deformation des Körpers $\mathcal{B}$ zufolge der Bewegung ϕ_t . In der Kontinuumsmechanik sind im Wesentlichen zwei Deformationstensoren gebräuchlich, deren formale Definition im Folgenden gegeben wird.

Definition 1.3 (Green Deformationstensor). Der rechte Cauchy-Green (Green) Deformationstensor $\mathbf{C}$ ist definiert durch

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) . \quad (1.86)$$

Er besitzt die folgenden wesentlichen Eigenschaften:

1. Wenn $\{X_A\}$ ein Koordinatensystem auf Ω_0 ist, dann gilt

$$C_{AB} = F_{aA} F_{aB} . \quad (1.87)$$

2. $\mathbf{C}$ ist symmetrisch und positiv semi-definit, d. h. $\langle \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle \geq 0$ für alle $d\mathbf{X}$. Wenn die Bewegung ϕ_t regulär ist, dann ist $\mathbf{F}$ regulär und $\mathbf{C}$ ist invertierbar und positiv definit.

Offensichtlich ist $\mathbf{C}$ ein Objekt, welches auf Elemente der Referenzkonfiguration Ω_0 angewandt wird. Alternativ dazu kann auch ein Deformationstensor für die Momentankonfiguration Ω definiert werden. Man betrachte dazu das innere Produkt der Linienelemente $d\mathbf{X}_1$ und $d\mathbf{X}_2$.

$$\langle d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2 \rangle = \langle \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_1, \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_2 \rangle = \langle d\mathbf{x}_1, \underbrace{\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{c}} \cdot d\mathbf{x}_2 \rangle \quad (1.88)$$

Definition 1.4 (Cauchy Deformationstensor). Der Cauchy Deformationstensor $\mathbf{c}$ wird durch

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t) \quad (1.89)$$

definiert, wobei $\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$. Wenn $\phi_t \in C^1$ und regulär ist, dann gilt

1. die Komponentendarstellung

$$c_{ab} = \left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Aa} \left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Ab} \quad (1.90)$$

2. und $\mathbf{c}$ ist symmetrisch und positiv definit.

Man kann zeigen, dass jede Bewegung ϕ_t durch eine Starrkörperbewegung (Rotation und Verschiebung) und eine Deformation dargestellt werden kann. Gilt $\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta}$, so erfahren materielle Punkte des deformierbaren Körpers $\mathcal{B}$ keine relative Bewegung zueinander (keine Abstandsänderung) und ϕ_t stellt damit eine reine Starrkörperbewegung dar. Offensichtlich enthält $\mathbf{C}$ also einen Starrkörperanteil. Dieser Anteil der Starrkörperbewegung ist für die Beschreibung der Deformation des Körpers irrelevant. Um diesen Anteil abzuspalten, muss die Abstandsänderung infinitesimal benachbarter Punkte betrachtet werden, d. h.

$\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \rangle - \langle d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2 \rangle$. Es ergibt sich mit (1.85)

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \rangle - \langle d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2 \rangle &= \langle d\mathbf{X}_1, \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle - \langle d\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle \\ &= \langle d\mathbf{X}_1, \underbrace{(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}))}_{2\boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle . \end{aligned} \quad (1.91)$$

Damit ist $\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{X})$ ein Maß für die reine Verzerrung.

Definition 1.5 (Green-Lagrange Verzerrungstensor). Der Green-Lagrange Verzerrungstensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ wird durch

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{X})) \quad (1.92)$$

definiert. Wenn $\phi_t \in C^1$ und regulär ist, dann gilt

1. die Komponentendarstellung

$$\mathcal{E}_{AB} = \frac{1}{2}(C_{AB} - \delta_{AB}) \quad (1.93)$$

2. und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ist symmetrisch.

Alternativ dazu kann auch ein Verzerrungstensor für die Momentankonfiguration Ω definiert werden.

Definition 1.6 (Euler-Almansi Verzerrungstensor). Der Euler-Almansi Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.94)$$

definiert. Wenn $\phi_t \in C^1$ und regulär ist, dann gilt

1. die Komponentendarstellung

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2}(\delta_{ab} - c_{ab}) \quad (1.95)$$

2. und $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist symmetrisch.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ verschwinden, wenn der Körper nur Starrkörperbewegungen ausführt. Für die Umrechnung zwischen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ergibt sich

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} . \quad (1.96)$$

Beispiel 1.5. Es wird wieder der Einheitswürfels aus Beispiel 1.1 betrachtet und der rechte Cauchy-Green Deformationstensor und der Verzerrungstensor berechnet.

Verwendet man (1.78), so gilt für den rechten Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 2a_1X_2 & 0 \\ 2a_1X_2 & 1 + 4a_1^2X_2^2 + a_3^2X_3^2 & a_3X_3(1 + a_3X_2) \\ 0 & a_3X_3(1 + a_3X_2) & (1 + a_3X_2)^2 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

und für den Verzerrungstensor findet man

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & a_1X_2 & 0 \\ a_1X_2 & 2a_1^2X_2^2 + 1/2a_3^2X_3^2 & 1/2a_3X_3(1 + a_3X_2) \\ 0 & 1/2a_3X_3(1 + a_3X_2) & a_3X_2(1 + 1/2a_3X_2) \end{bmatrix}. \quad (1.98)$$

1.2.6 Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

Gelegentlich (z. B. in manchen Stoffgesetzen für plastische Verformung) werden materielle Zeitableitungen von Verzerrungstensoren, d. h. Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren, benötigt. Ausgehend von der Definition des Green-Lagrange Verzerrungstensors in (1.92) und den Zusammenhängen (1.62a) und (1.77) folgt

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F} \right)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \frac{d}{dt}\mathbf{F} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{l}^T + \mathbf{l}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}. \quad (1.99)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die materielle Zeitableitung von (1.91) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \rangle - \langle d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2 \rangle) &= 2 \langle d\mathbf{X}_1, \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle \\ &= 2 \langle d\mathbf{X}_1, \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \rangle = 2 \langle d\mathbf{x}_1, \mathbf{d} \cdot d\mathbf{x}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.100)$$

was die Bezeichnung Streck- oder Deformationsgeschwindigkeitstensor für $\mathbf{d}$ motiviert. Ferner liefert die materielle Zeitableitung von (1.96)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{F} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\varepsilon} \frac{d}{dt}\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \mathbf{l}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{l} \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (1.101)$$

so dass ein Vergleich mit (1.99) auf den Zusammenhang

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.102)$$

führt. Damit ergeben sich die nachfolgenden Definitionen der Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren.

Definition 1.7 (Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren). Der materielle Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ist in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{d}(\phi_t(\mathbf{X}), t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1.103)$$

definiert. Der räumliche Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ist in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{l}^T(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (1.104)$$

definiert.

Aus dem Zusammenhang $\mathbf{d} = (\mathbf{l}^T + \mathbf{l})/2$ zeigt sich also, dass für kleine Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ die Tensoren $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\mathbf{d}$ in guter Näherung übereinstimmen.

1.2.7 Geometrische Linearisierung

In vielen Anwendungen sind die auftretenden Deformationen sehr klein. Man kann daher die kinematischen Größen der Kontinuumsmechanik durch eine *geometrische oder kinematische Linearisierung* vereinfachen. Die Größe einer Verschiebung wird durch die Norm $\Delta = \|\mathbf{H}\| \ll 1$ des Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)) \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.105)$$

gemessen.

Bemerkung 1.4 (Landausymbol). Eine Funktion $\mathbf{H}$ ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta)$, falls für jede positive Zahl M und $\Delta \rightarrow 0$

$$\|\mathcal{O}(\Delta)\| < M\Delta \quad (1.106)$$

gilt.

Es kann nun gezeigt werden, dass alle kinematischen Größen der Kontinuumsmechanik exakt mithilfe der Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}$ bzw. $\mathbf{h}$ darstellbar sind. Betrachtet man also nur kleine Deformationen, dann können alle kinematischen Größen bezüglich des Verschiebungsgradienten linearisiert werden. Beispielhaft betrachtet man den Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, welcher durch das Verschiebungsfeld ausgedrückt werden kann. Mit der Definition $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$ des Verschiebungsfeldes gemäß (1.47) folgt

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{X}) \quad (1.107)$$

und daraus ergibt sich für den Green-Lagrange Verzerrungstensor die Darstellung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2}((\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H})^T(\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}) - \boldsymbol{\delta}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) . \end{aligned} \quad (1.108)$$

Offensichtlich gilt damit für den Verzerrungstensor die asymptotische Beziehung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \mathcal{O}(\Delta^2) . \quad (1.109)$$

Falls in der Referenz- und Momentankonfiguration das gleiche Koordinatensystem verwendet wird ($\mathbf{e}_a = \mathbf{E}_a$), kann die Ableitung nach den materiellen Koordinaten $\{X_a\}$ durch

die Ableitung nach den räumlichen Koordinaten $\{x_a\}$ ersetzt werden, da für beliebige Feldgrößen $\mathbf{T}$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial X_A} = \frac{\partial x_b}{\partial X_A} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_b} = F_{bA} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_b} = \frac{\partial (X_b + U_b)}{\partial X_A} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_b} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_A} + \mathcal{O}_{bA}(\Delta) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_b} \quad (1.110)$$

gilt. Damit fällt der materielle und der räumliche Verschiebungsgradient $\mathbf{H} \approx \mathbf{h}$ bzw. der materielle und räumliche Verzerrungstensor $\mathbf{\mathcal{E}} \approx \mathbf{\varepsilon}$ zusammen. Aus diesem Grund kann man einen *infinitesimalen Verzerrungstensor* $\bar{\mathbf{\varepsilon}} \approx \mathbf{\mathcal{E}} \approx \mathbf{\varepsilon}$ definieren.

Definition 1.8 (Infinitesimaler Verzerrungstensor). Der infinitesimale Verzerrungstensor $\bar{\mathbf{\varepsilon}}$ ist definiert durch

$$\bar{\mathbf{\varepsilon}}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\text{Grad}(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)) + \text{Grad}^T(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)) \right). \quad (1.111)$$

In kartesischen Koordinaten $\{X_a\}$ errechnen sich die Komponenten von $\bar{\mathbf{\varepsilon}}$ zu

$$\bar{\varepsilon}_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_b}{\partial X_a} + \frac{\partial U_a}{\partial X_b} \right). \quad (1.112)$$

Beispiel 1.6. Es wird wieder der Einheitswürfel aus Beispiel 1.1 betrachtet und der infinitesimale Verzerrungstensor berechnet. Für den Gradienten findet man

$$\text{Grad}(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)) = \begin{bmatrix} 0 & 2a_1X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3X_3 & a_3X_2 \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

und für den Verzerrungstensor ergibt sich

$$\bar{\mathbf{\varepsilon}}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} 0 & a_1X_2 & 0 \\ a_1X_2 & 0 & (1/2)a_3X_3 \\ 0 & (1/2)a_3X_3 & a_3X_2 \end{bmatrix}. \quad (1.114)$$

Der Vergleich des Cauchy-Green Verzerrungstensors (1.98) aus Beispiel 1.5 mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor (1.114) zeigt, dass $\bar{\mathbf{\varepsilon}} = \mathbf{\mathcal{E}}$ gilt, wenn höhere Terme in a_1X_2 , a_3X_2 und a_3X_3 vernachlässigt werden.

1.2.8 Kompatibilitätsbedingungen

Für ein beliebiges Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$, welches eine injektive Abbildung der Referenz- auf die Momentankonfiguration beschreibt, sind die kartesischen Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors $\bar{\mathbf{\varepsilon}}$ eindeutig durch (1.112) gegeben. Das inverse Problem, die Ermittlung des Verschiebungsfeldes durch Integration des Verzerrungsfeldes, gestaltet sich schwieriger. Das Lösen der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen für $\mathbf{u}$ beinhaltet sechs unabhängige Gleichungen für drei Unbekannte. D. h., das resultierende Problem

ist überbestimmt und es besteht die Möglichkeit, dass kein injektives Verschiebungsfeld existiert. Existiert ein zulässiges Verschiebungsfeld, dann nennt man das zugehörige Verzerrungsfeld *verträglich oder kompatibel*. Es werden also notwendige und hinreichende Kompatibilitätsbedingungen benötigt, die ein Verzerrungsfeld erfüllen muss, so dass die Existenz eines injektiven Verschiebungsfeldes garantiert ist. Zur Bestimmung der Kompatibilitätsbedingungen wird (1.112) partiell differenziert:

$$\bar{\varepsilon}_{ab,cd} = \frac{1}{2}(U_{a,bcd} + U_{b,acd}) . \quad (1.115)$$

Nutzt man die Symmetrie des Verzerrungstensors und Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen aus, so erhält man $3^4 = 81$ Gleichungen der Form

$$\bar{\varepsilon}_{ab,cd} + \bar{\varepsilon}_{cd,ab} - \bar{\varepsilon}_{bd,ac} - \bar{\varepsilon}_{ac,bd} = 0 . \quad (1.116)$$

Sie stellen die notwendigen und hinreichenden Kompatibilitätsbedingungen in kartesischen Koordinaten für die Existenz eines Verschiebungsfeldes für einen einfach zusammenhängenden Körper dar. In einem einfach zusammenhängenden Körper kann jede geschlossene Kurve auf einen Punkt geschrumpft werden, ohne dass sich die Kurve jemals außerhalb des Körpers befindet. Von den 81 Gleichungen sind aufgrund der Symmetrie des Verzerrungstensors nur sechs linear unabhängig. Ausführlich angeschrieben, lauten die sechs Gleichungen [1.4]:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11,22} + \bar{\varepsilon}_{22,11} - 2\bar{\varepsilon}_{12,12} &= 0 , & (\bar{\varepsilon}_{12,3} + \bar{\varepsilon}_{13,2} - \bar{\varepsilon}_{23,1})_{,1} - \bar{\varepsilon}_{11,23} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{22,33} + \bar{\varepsilon}_{33,22} - 2\bar{\varepsilon}_{23,23} &= 0 , & (\bar{\varepsilon}_{23,1} + \bar{\varepsilon}_{21,3} - \bar{\varepsilon}_{31,2})_{,2} - \bar{\varepsilon}_{22,31} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33,22} + \bar{\varepsilon}_{11,33} - 2\bar{\varepsilon}_{31,31} &= 0 , & (\bar{\varepsilon}_{31,2} + \bar{\varepsilon}_{32,1} - \bar{\varepsilon}_{12,3})_{,3} - \bar{\varepsilon}_{33,12} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.117)$$

1.3 Kinetik von deformierbaren Körpern

Im vorangegangenen Kapitel wurden einige kinematische Aspekte der Bewegung und Deformation von Körpern diskutiert. Die Bewegung und Deformation eines Körpers führt zu Spannungen innerhalb des Körpers, vgl. Kapitel 1.1.1. Diese werden im Folgenden genauer beschrieben.

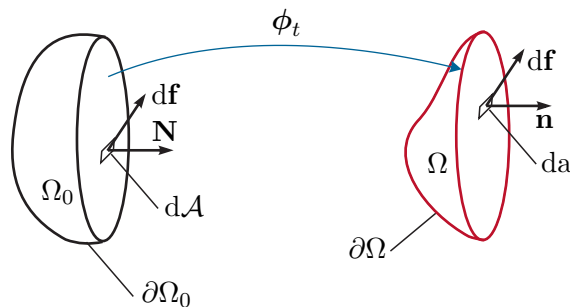


Abbildung 1.13: Zum Spannungsvektor.

Man betrachtet einen deformierbaren Körper $\mathcal{B}$, der ein Gebiet Ω des physikalischen Raumes mit dem Rand $\partial\Omega$ zum Zeitpunkt $t > 0$ einnimmt. Man postuliert, dass beliebige Kräfte auf Teile des Körpers oder auf den ganzen Körper wirken. Diese Kräfte unterteilt man in äußere Kräfte, die auf den Rand $\partial\Omega$ wirken, und interne Kräfte, die im Inneren Ω auftreten. Man schneidet den Körper nun so auf, dass eine infinitesimale Querschnittsfläche $da \in \partial\Omega$ einen Punkt $\mathbf{x}$ mit den räumlichen Koordinaten $\{x_a\}$ zum Zeitpunkt t beinhaltet. An der infinitesimalen Querschnittsfläche greift eine resultierende Kraft $d\mathbf{f}$ an. Zusätzlich definiert man dort den Normalenvektor $\mathbf{n}$ bei $\mathbf{x}$. Bevor die Bewegung stattfand, befand sich der Körper $\mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration Ω_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ und nahm das Gebiet Ω_0 mit dem Rand $\partial\Omega_0$ ein. Ebenso wie in der Momentankonfiguration, führt man eine infinitesimale Querschnittsfläche $dA \in \partial\Omega_0$ ein, die einen Punkt $\mathbf{X}$ mit den materiellen Koordinaten $\{X_A\}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ beinhaltet. Dort greift die gleiche resultierende Kraft $d\mathbf{f}$ an und man definiert auch für diese Konfiguration einen Normalenvektor $\mathbf{N}$ am Punkt $\mathbf{X}$. Für jedes Flächenelemente gilt dann laut Abbildung 1.13

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (1.118a)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{f}}{dA} . \quad (1.118b)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{t}$ den *Cauchy Spannungsvektor*, d. h. eine Kraft bezogen auf da mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$, und $\mathbf{T}$ den *ersten Piola-Kirchhoff Spannungsvektor*, d. h. die gleiche Kraft bezogen auf dA mit dem Normalenvektor $\mathbf{N}$. Man beachte, dass daher die Komponenten von $\mathbf{T} = T_a \mathbf{e}_a$ in räumlichen Koordinaten mit den Basisvektoren $\{\mathbf{e}_a\}$ definiert sind.

Satz 1.1 (Cauchy und Piola-Kirchhoff Spannungstensor). *Es wird angenommen, dass die Impulserhaltung (1.153) gilt, dass ϕ_t eine C^1 reguläre Abbildung ist und dass der Cauchy Spannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ und der Piola-Kirchhoff Spannungsvektor $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$ stetig in ihren Argumenten sind. Dann existieren eindeutig definierte Tensorfelder $\boldsymbol{\sigma}$ (der Cauchy Spannungstensor) und $\mathbf{P}$ (der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor), welche nur vom Ort $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X}$ und der Zeit t abhängen, sodass*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.119a)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N} \quad (1.119b)$$

und

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (1.120)$$

gelten. Für die Komponenten von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{T}$ gilt daher

$$t_a = \sigma_{ab} n_b \quad (1.121a)$$

$$T_a = P_{aA} N_A = J\sigma_{ab} (\mathbf{F}^{-1})_{Ab} N_A . \quad (1.121b)$$

Der Cauchy Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ab} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b$ ist symmetrisch. Dies gilt im Allgemeinen nicht für den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\mathbf{P} = P_{aA} \mathbf{e}_a \mathbf{E}_A$. Der Zusammenhang (1.120) kann unter Verwendung der Beziehung $\mathbf{n} da = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA$ (siehe Lemma 1.1) wie

folgt hergeleitet werden.

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{a} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T}}_{\mathbf{P}} \mathbf{N} d\mathcal{A} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) d\mathcal{A} = \mathbf{P} \mathbf{N} d\mathcal{A} \quad (1.122)$$

Eine Konsequenz aus (1.119) ist das *dritte Newtonsche Gesetz* (actio gleich reactio)

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) \quad \text{oder} \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = -\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, -\mathbf{N}) . \quad (1.123)$$

Um einen Spannungsvektor $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{T}_A \mathbf{E}_A$ zu erhalten, der vollständig in der Referenzkonfiguration, d. h. in materiellen Koordinaten mit den Basisvektoren $\{\mathbf{E}_A\}$, definiert ist, transformiert man zunächst analog zu (1.66) die resultierende Kraft $d\mathbf{f}$. Dies führt auf einen fiktiven Kraftvektor

$$d\tilde{\mathbf{f}} = d\tilde{f}_A \mathbf{E}_A = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} \quad (1.124)$$

und den zugehörigen Pseudospannungsvektor

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\tilde{\mathbf{f}}}{d\mathcal{A}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} . \quad (1.125)$$

Folglich kann hierzu auch ein (vollständig in der Referenzkonfiguration definierter) Spannungstensor $\mathbf{S} = S_{AB} \mathbf{E}_A \mathbf{E}_B$ eingeführt werden, so dass der Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \quad (1.126)$$

gilt. Der Spannungstensor $\mathbf{S}$ ist symmetrisch und heißt *zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor*.

Definition 1.9 (Zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor). Der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\mathbf{S}$ ist definiert als

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (1.127)$$

und in Koordinaten $\{X_A\}$ auf Ω_0 gilt für $\mathbf{S}$

$$S_{AB} = (\mathbf{F}^{-1})_{Aa} P_{aB} = J (\mathbf{F}^{-1})_{Aa} \sigma_{ab} (\mathbf{F}^{-1})_{Bb} . \quad (1.128)$$

Zusätzlich soll noch kurz dargestellt werden, welchen Einfluss die geometrische Linearisierung auf die Spannungstensoren hat. Betrachtet man wieder infinitesimale Deformationen für die $\|\mathbf{H}\| \ll 1$ gilt, so findet man für den Deformationsgradienten $F_{Ba} = \delta_{Ba} + \mathcal{O}_{Ba}(\Delta)$ den inversen Deformationsgradienten $(\mathbf{F}^{-1})_{Ba} = \delta_{Ba} + \mathcal{O}_{Ba}(\Delta)$ und die Jacobimatrix $J = 1 + \mathcal{O}(\Delta)$. Das bedeutet, dass die Spannungstensoren für eine infinitesimale Deformation identisch sind ($\mathbf{S} \approx \mathbf{P} \approx \boldsymbol{\sigma}$). Damit kann, wie zuvor bei den Verzerrungstensoren, ein *infinitesimaler Spannungstensor*

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, t) \quad (1.129)$$

eingeführt werden.

1.4 Bilanzgleichungen

In diesem Abschnitt werden die zur Beschreibung der Strömung einer Flüssigkeit bzw. Deformation eines Festkörpers benötigten Bilanzgleichungen (Massenerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Energieerhaltung) formuliert. Dazu wird ausgehend von der Lagrangeschen Beschreibung die differentielle sowie die Eulersche Beschreibung abgeleitet, siehe auch [1.1, 1.2].

1.4.1 Lagrangesche und Eulersche Beschreibung

In der Kontinuumsmechanik sind zwei Formulierungen der Erhaltungsgleichungen üblich. In der *Lagrangeschen Darstellung* wird ein *körperfestes Kontrollvolumen*, d. h. eine Teilmenge Ω_0 eines deformierbaren Körpers $\mathcal{B}$, festgelegt und dessen Verhalten über die Zeit t betrachtet, siehe Abbildung 1.14. Da in der Lagrangeschen Darstellung das Kontrollvolumen $\phi_t(\Omega_0) = \Omega$ fest mit der Materie verbunden ist, gibt es *keinen Transport von Masse* über die Berandung $\partial\phi_t(\Omega_0) = \partial\Omega$ der Menge.

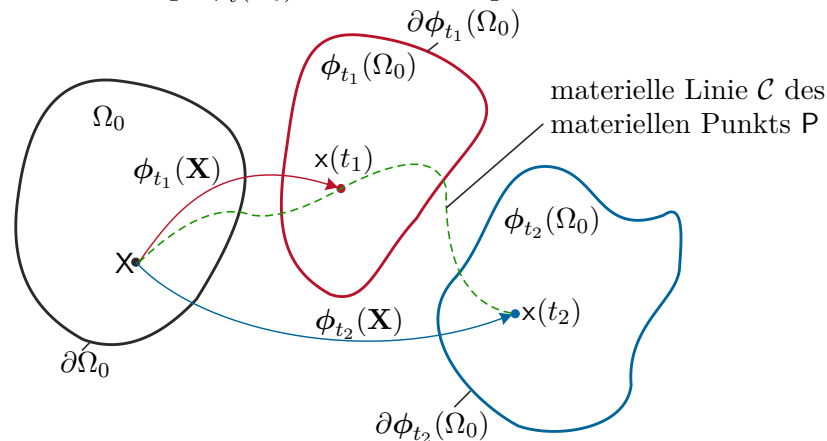


Abbildung 1.14: Zur Lagrangeschen Darstellung (geschlossenes System: konstante Masse, Energie kann über die Berandung fließen).

Im Gegensatz dazu wird bei der Eulerschen Darstellung ein ortsfestes, konstantes Kontrollvolumen Ω_c verwendet, vgl. Abbildung 1.15. Betrachtet man nun einen materiellen Punkt P , so kann dieser über die Zeit durch Ω_c wandern und sich über die Berandung $\partial\Omega_c$ des Kontrollvolumens bewegen. Es erfolgt daher im Allgemeinen ein Massentransport über die Berandung $\partial\Omega_c$ des ortsfesten, konstanten Kontrollvolumens.

Die Lagrangesche Darstellung ist besonders gut zur Beschreibung von elastischen Körpern geeignet, da hier eine Festlegung und Beschreibung der Teilmenge Ω des Körpers $\mathcal{B}$ über die Zeit einfach möglich ist. Zur Beschreibung von Flüssigkeiten ist diese Vorgehensweise nicht praktikabel, da hier die Beschreibung einer Teilmenge für längere Zeitspannen t schwierig, wenn nicht unmöglich, wird. Daher wird im Rahmen der Strömungsmechanik meist die Eulersche Darstellung verwendet.

Eine direkte Formulierung der Bilanzgleichungen in Eulerscher Darstellung gestaltet sich jedoch schwierig und die resultierenden Gleichungen sind nicht unmittelbar einsichtig.

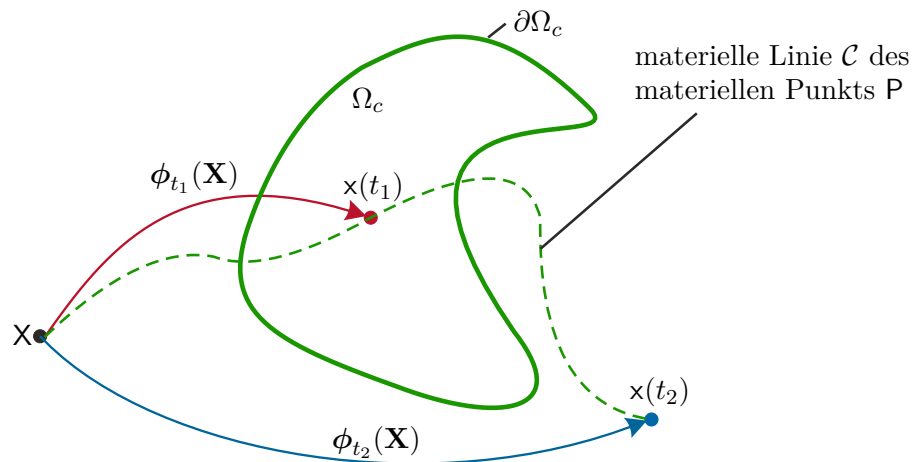


Abbildung 1.15: Zur Eulerschen Darstellung (offenes System: konstantes Volumen, Masse und Energie können über die Berandung fließen).

Daher wird im Rahmen dieser Lehrveranstaltung ausgehend von der Lagrangeschen Darstellung eine differentielle Darstellung abgeleitet. Auf Basis dieser differentiellen Darstellung ist dann die Ermittlung der Eulerschen Darstellung einfach möglich.

1.4.2 Generalisierte Bilanzgleichung

Die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls, den Drall, die Energie und auch die Entropie können in eleganter Weise als Spezialfälle einer generalisierten Volumenbilanz für eine beliebige Größen Ψ gewonnen werden. Dazu betrachtet man ein materielles Volumen Ω und untersucht für eine beliebige skalare, vektor- oder tensorwertige Feldgröße $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ die zeitliche Änderung des Volumenintegrals über $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Satz 1.2 (Reynoldssches Transporttheorem). Gegeben sei die reellwertige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1$ als Funktion der Position $\mathbf{x} \in \Omega$ und der Zeit t . Weiterhin sei Ω eine wohldefinierte offene Teilmenge von $\mathcal{B}$ und $\partial\Omega$ die Berandung von Ω . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{f} \, d\nu &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} \, d\nu + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, da \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} + \text{grad}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \, \text{div}(\mathbf{v}) \right) d\nu \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f} + \mathbf{f} \, \text{div}(\mathbf{v}) \right) d\nu . \end{aligned} \quad (1.130)$$

Bemerkung 1.5. Zur Formulierung des Reynoldsschen Transporttheorems wurden sowohl Volumen- als auch Flächenintegrale verwendet. Mithilfe des nachfolgenden Divergenztheorems ist es möglich, Flächenintegrale in Volumenintegrale umzuwandeln.

Satz 1.3 (Divergenztheorem (Gaußscher Integralsatz)). Wenn $\mathbf{w}$ ein Vektorfeld auf Ω ist, dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w}) \, d\nu = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle \, da, \quad (1.131)$$

wobei $\mathbf{n}$ den Flächennormalenvektor auf $\partial\Omega$ bezeichnet.

Beweis: Reynoldssches Transporttheorem. Man transformiert die Integrationsvariable auf materielle Koordinaten $\{X_A\}$, sodass der Integrationsbereich in der Referenzkonfiguration dargestellt wird:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, d\nu = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{X}), t) J(\mathbf{X}, t) \, d\mathcal{V}. \quad (1.132)$$

Hierfür kann Differentiation und Integration vertauscht werden, da Ω_0 als Teilmenge der Referenzkonfiguration nicht von der Zeit abhängt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, d\nu = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} \mathbf{f} J + \mathbf{f} \frac{d}{dt} J \, d\mathcal{V} \quad (1.133a)$$

$$= \int_{\Omega_0} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f} + \mathbf{f} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) J \, d\mathcal{V} \quad (1.133b)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f} + \mathbf{f} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) \, d\nu. \quad (1.133c)$$

□

Man betrachtet nun eine beliebige physikalische Größe $\Psi(\Omega, t)$ im Volumen Ω . Deren zeitliche Änderung setzt sich im Allgemeinen aus drei Anteilen zusammen:

- (i) Dem Fluss $\mathbf{F}(\partial\Omega, t)$ von Ψ durch die Berandung $\partial\Omega$,
- (ii) der Produktion $\mathbf{P}(\Omega, t)$ von Ψ im Volumen Ω und
- (iii) der Zufuhr $\mathbf{Z}(\Omega, t)$ von Ψ im Volumen Ω .

Es gilt dementsprechend die generalisierte Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \Psi(\Omega, t) = \mathbf{P}(\Omega, t) + \mathbf{Z}(\Omega, t) - \mathbf{F}(\partial\Omega, t), \quad (1.134)$$

wobei der Fluss als Abfluss aus dem Volumen positiv gezählt wird, woraus das negative Vorzeichen resultiert. Weiter wird angenommen, dass sich die physikalische Größe $\Psi(\Omega, t)$, die Produktion $\mathbf{P}(\Omega, t)$ und die Zufuhr $\mathbf{Z}(\Omega, t)$ als Volumenintegrale über die zugehörigen Dichten $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ darstellen lassen. Ähnlich fordert man für den nach außen positiv gezählten Fluss, dass sich dieser als Flächenintegral über die Flussdichte $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$, mit dem Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$ zur Berandung $\partial\Omega$, angeben lässt. Es wird also für die Flussdichte gefordert, dass diese auf der Fläche $\partial\Omega$ nur von deren äußeren Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$, nicht aber von anderen differentialgeometrischen Eigenschaften, z. B. der Krümmung, abhängt. Diese Forderung wird auch als *Cauchy Postulat* bezeichnet.

Unter der Annahme, dass das Cauchy Postulat erfüllt ist, hängt die Flussdichte $\mathbf{f}$ also nur von $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}$ und t ab und es kann gezeigt werden [1.1], dass sie eine lineare Funktion von $\mathbf{n}$ ist, d. h. es gilt $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$, wobei die neue Größe $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ebenfalls als Flussdichte bezeichnet wird. Die Lagrangesche Darstellung der generalisierten Bilanzgleichung lautet damit:

Definition 1.10 (Lagrangesche integrale generalisierte Bilanzgleichung). Gegeben seien die Dichten $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ und $\varphi(\mathbf{x}, t)$ definiert für $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Die Größen ψ , $\mathbf{p}$, $\mathbf{z}$ und φ erfüllen die generalisierte Bilanzgleichung, falls für jede wohldefinierte offene Teilmenge^a $\Omega \subset \mathcal{B}$ (i) die folgenden Integrale existieren, (ii) das Integral $\int_{\Omega} \psi \, d\nu$ bezüglich der Zeit t differenzierbar ist und (iii)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi \, d\nu = \int_{\Omega} \mathbf{p} + \mathbf{z} \, d\nu - \int_{\partial\Omega} \langle \varphi, \mathbf{n} \rangle \, da \quad (1.135)$$

gilt. Darin bezeichnet $\mathbf{n}$ den Einheitsnormalenvektor zur Berandung $\partial\Omega$, $d\nu$ das Volumenelement auf Ω und da das Flächenelement auf der Berandung $\partial\Omega$.

^aEine offene Menge $\Omega \subset \mathcal{B}$ wird als wohldefiniert bezeichnet, falls deren Berandung $\partial\Omega$ stückweise stetig differenzierbar (C^1) ist.

Die integrale generalisierte Bilanzgleichung (1.135) besagt also, dass die Zu- oder Abnahme einer Größe ψ in einer Teilmenge Ω des Körpers sowohl durch den Zu- oder Abfluss φ über die Berandung $\partial\Omega$ der Teilmenge als auch über die Produktion $\mathbf{p}$ bzw. die Zufuhr $\mathbf{z}$ innerhalb der Teilmenge Ω verändert wird, siehe Abbildung 1.16. Wenn $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ und $\varphi = \mathbf{0}$ gelten, dann ist ψ zeitlich konstant und wird häufig als *Erhaltungsgröße* bezeichnet.

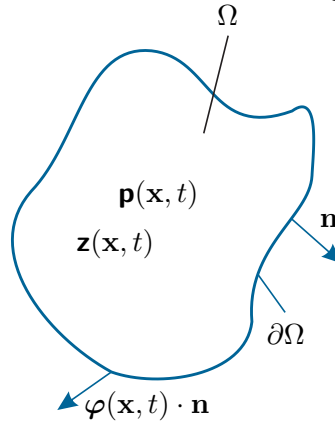


Abbildung 1.16: Zur Definition der generalisierten Bilanzgleichung.

Um die Eulersche integrale generalisierte Bilanzgleichung zu bestimmen, wird zunächst eine differentielle, lokalisierte Version der generalisierten Bilanzgleichung gesucht. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass zur Formulierung der lokalisierten Version der Bilanzgleichungen höhere Anforderungen an die Stetigkeit bzw. die stetige Differenzierbarkeit der beteiligten Größen als zur Formulierung der integralen Version notwendig sind. In den weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass alle vorkommenden Größen hinreichend oft stetig differenzierbar sind, sodass alle Operationen sinnvoll sind. Nichtsdestoweniger

gibt es Situationen, wo diese Annahme zu restriktiv ist. Ein Beispiel ist die Beschreibung von Schockwellen (Überschallströmungen), bei denen Diskontinuitäten auftreten können.

Wendet man das Reynoldssche Transporttheorem (1.130) auf die linke Seite der Lagrangeschen integralen generalisierten Bilanzgleichung (1.135) an und formt die Oberflächenintegrale mit dem Divergenztheorem 1.3 um, folgt unmittelbar die differentielle, lokalisierte Version der generalisierten Bilanzgleichung.

Definition 1.11 (Differentielle generalisierte Bilanzgleichung). Es sei $\psi(\mathbf{x}, t) \in C^1$ eine skalare stetig differenzierbare Funktion und $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei die Funktionen $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ stetig, d. h. $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) \in C^0$. Diese Größen erfüllen dann und nur dann die generalisierte Bilanzgleichung, wenn

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{p} + \mathbf{z} - \operatorname{div}(\varphi) \quad (1.136)$$

gilt.

Durch Integration der differentiellen generalisierten Bilanzgleichung über ein ortsfestes Kontrollvolumen $\Omega_c \in \mathbb{R}^3$ und durch Anwendung des Divergenztheorems erhält man die Eulersche Darstellung der generalisierten Bilanzgleichung.

Definition 1.12 (Eulersche integrale generalisierte Bilanzgleichung). Gegeben sind die Funktionen $\psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ definiert für $t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \Omega_c$ und ein Vektorfeld $\varphi(\mathbf{x}, t)$ von Ω_c . Die Größen $\psi, \mathbf{p}, \mathbf{z}$ und φ erfüllen die generalisierte Bilanzgleichung, falls für jede wohldefinierte offene Teilmenge $\Omega_c \subset \mathcal{B}$ (i) die folgenden Integrale existieren, (ii) das Integral $\int_{\Omega_c} \psi \, d\nu$ bezüglich der Zeit t differenzierbar ist und (iii)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \psi \, d\nu + \int_{\partial\Omega_c} \psi \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, da = \int_{\Omega_c} \mathbf{p} + \mathbf{z} \, d\nu - \int_{\partial\Omega_c} \langle \varphi, \mathbf{n} \rangle \, da \quad (1.137)$$

gilt. Darin bezeichnet $\mathbf{n}$ den Einheitsnormalenvektor zur Berandung $\partial\Omega_c$, $d\nu$ das Volumenelement auf Ω_c und da das Flächenelement auf der Berandung $\partial\Omega_c$.

Anhand der generalisierten Bilanzgleichung kann nun elegant die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung hergeleitet werden.

1.4.3 Massenerhaltung

Eine der grundlegenden Annahmen der Kontinuumsmechanik ist die Existenz einer positiven Masse

$$m(\Omega_0) = m(\Omega) > 0 \quad (1.138)$$

für alle Zeiten t . Die differentielle Form für ein Massenelement dm lautet sinngemäß

$$dm(\mathbf{X}) = dm(\mathbf{x}, t) > 0. \quad (1.139)$$

Die Massendichtefunktion der Referenzkonfiguration $\rho_0(\mathbf{X})$ und der Momentankonfiguration $\rho(\mathbf{x}, t)$ können dann mit $d\nu = J dV$ zu

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{dm}{d\nu} \quad , \quad \rho_0(\mathbf{X}) = \frac{dm}{dV} = \rho(\phi_t(\mathbf{X}), t) J(\mathbf{X}, t) \quad (1.140)$$

angegeben werden, sodass die Masse m durch

$$m = \int_{\Omega} \rho d\nu = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV \quad (1.141)$$

gegeben ist. Unter der Annahme, dass Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann, lässt sich die *Massenerhaltung in Lagrangescher Darstellung* in der Form

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\nu = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = 0 \quad (1.142)$$

darstellen. Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass in der Lagrangeschen Darstellung Ω eine Menge ist, welche fest mit der Materie verbunden ist, d. h. es gibt keinen Massenfluss über die Berandung $\partial\Omega$. Die Massenerhaltung ist äquivalent zur Lagrangeschen integralen generalisierten Bilanzgleichung (1.135), falls man $\psi = \rho$ und $\mathbf{p} = \mathbf{z} = 0$ sowie $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ setzt. Wendet man Definition 1.11 auf (1.142) an, so erhält man die *differentielle (lokalisierte) Version der Massenerhaltung* in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (1.143)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur häufig auch als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet, siehe z. B. [1.1, 1.2]. Ein wichtiger Spezialfall ist der eines *dichtebeständigen oder inkompressiblen Materials*, welches sich dadurch auszeichnet, dass dessen Massendichte konstant ist ($\rho = \text{const}$). Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich dann zu $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$. Die differentielle Massenerhaltung ist eine partielle Differentialgleichung, die die Änderung der Massendichte mit der räumlichen Ableitung der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors verknüpft. Die symbolische Schreibweise ist für beliebige Koordinaten gültig. Die Formulierung hängt also von der Wahl der Koordinaten ab, in denen die Geschwindigkeit dargestellt wird. In kartesischen Koordinaten $\{x_a\}$ lautet sie

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3) = 0 \quad . \quad (1.144)$$

Die *Eulersche integrale Darstellung der Massenerhaltung* ergibt sich wiederum einfach durch Integration von (1.143) über das ortsfeste Kontrollvolumen Ω_c . Man erhält dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \rho d\nu = - \int_{\partial\Omega_c} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle da \quad , \quad (1.145)$$

wobei der Term auf der rechten Seite den Massenstrom über die Berandung $\partial\Omega_c$ des ortsfesten Volumens Ω_c beschreibt.

Bemerkung 1.6. In vielen Fällen ist es sinnvoll das Transporttheorem mithilfe der Massenerhaltung umzuformulieren. Dazu ersetzt man $\mathbf{f}$ durch $\rho \mathbf{f}$ und erhält eine neue Form des Transporttheorems durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\nu = \int_{\Omega} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{f} \, d\nu \quad (1.146)$$

Aufgabe 1.2. Beweisen Sie die geänderte Form des Transporttheorems (1.130).

1.4.4 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Die Impulserhaltung in der Kontinuumsmechanik ist eine Erweiterung von Newtons zweitem Gesetz. Der Ausgangspunkt der Herleitung der Impulserhaltung für deformierbare Körper ist eine C^1 reguläre Bewegung eines Körpers $\mathcal{B}$ im $\mathbb{R}^3$. Der *translatorische Impuls* zum Zeitpunkt t ist durch

$$\mathbf{I}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\nu = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{V} \, d\nu \quad (1.147)$$

und der *Drehimpuls* durch

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, d\nu = \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{V} \, d\nu, \quad (1.148)$$

definiert. Der Drehimpuls wurde auf einen beliebig gewählten Punkt, mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_0$, bezogen. Der Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ist folglich der Ortsvektor vom Bezugspunkt zu einem materiellen Punkt. Die Impulserhaltung besagt, dass die totale Zeitableitung des Impulses gleich der resultierenden Kräfte $\mathbf{f}$ bzw. Momente $\boldsymbol{\tau}$ ist, d. h.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (1.149)$$

gilt. Die auf eine Teilmenge des Körpers wirkenden Kräfte können in zwei Klassen unterteilt werden:

- (i) Die erste Klasse von Kräften beschreibt Spannungskräfte, auch *Oberflächenkräfte*, welche auf die Berandung der Teilmenge wirken und die Interaktion mit dem Rest des Körpers bzw. mit seiner Umgebung beschreiben. Die Spannungskräfte können mithilfe des Cauchy Spannungsvektors $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ bzw. des ersten Piola Kirchhoff Spannungsvektors $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$ identifiziert werden, vgl. (1.119), welche die Flächenkraftdichte (Kraft pro verformter Einheitsfläche) auf ein Oberflächenelement da an der Position $\mathbf{x}$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ bzw. auf ein Oberflächenelement $d\mathcal{A}$ an der Position $\mathbf{X}$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{N}$ beschreiben.
- (ii) Die zweite Klasse von Kräften resultiert aus extern eingepägten Kräften, sogenannten *Volumenkräften*, (z. B. Gravitation, elektrostatische oder elektrodynamische Kräfte) und wirkt auf die Masse innerhalb der Teilmenge. Im Folgenden wird die Massenkraftdichte (Kraft pro Einheitsmasse) der äußeren Kräfte mit $\mathbf{f}_b(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_b(\mathbf{X}, t)$ bezeichnet.

Die resultierenden Kräfte $\mathbf{f}(t)$ und Momente $\boldsymbol{\tau}(t)$ können also mit $dm = \rho dV = \rho_0 dV$ in der Form

$$\mathbf{f}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_b dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} da = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{F}_b dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} dA \quad (1.150a)$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}_b dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da = \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{F}_b dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dA \quad (1.150b)$$

dargestellt werden. Die integrale *Impulserhaltung in Lagrangescher Darstellung* ist erfüllt,

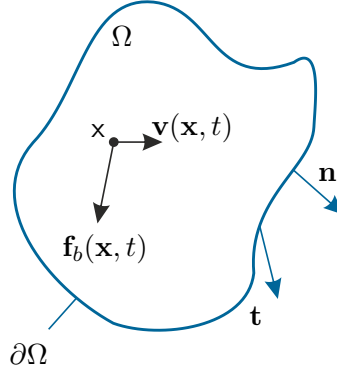


Abbildung 1.17: Zur Lagrangeschen Darstellung der Impulserhaltung.

wenn für jedes Ω die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_b dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} da \quad (1.151)$$

gilt. In der Momentankonfiguration wird dabei in jedem Punkt $\mathbf{x}$ der Flächennormalenvektor $\mathbf{n}$ der Berandung $\partial\Omega$ für die Auswertung des Vektors $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ verwendet. Analoges gilt für die Darstellung in der Referenzkonfiguration. Ersetzt man die Spannungsvektoren in (1.150) gemäß (1.119), so erhält man direkt die Lagrangesche integrale Darstellung der Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_b dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da \quad (1.152a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}_b dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) da \quad (1.152b)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{V} dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{F}_b dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dA \quad (1.152c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{V} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{F}_b dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{r} \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) dA . \quad (1.152d)$$

Durch Vergleich mit der generalisierte Bilanzgleichung in der Form (1.135) mit der translatorischen Impulserhaltung in Lagrangescher Darstellung (1.152a) erkennt man, dass $\boldsymbol{\psi} = \rho \mathbf{v}$ die Impulsdichte, $\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\sigma}$ die Flussdichte und $\mathbf{z} = \rho \mathbf{f}_b$ die Zufuhrdichte ist. Die Anwendung von Definition 1.11 in Kombination mit der differentiellen Massenerhaltung (1.142) und (1.143) liefert die *differentielle (lokalisierte) Version der Impulserhaltung* in der Form

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \rho \mathbf{f}_b + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.153)$$

bzw. analog dazu

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \rho_0 \mathbf{F}_b + \operatorname{Div}(\mathbf{P}) . \quad (1.154)$$

Die *Eulersche integrale Darstellung der translatorischen Impulserhaltung* ergibt sich mit der generalisierten Bilanzgleichung (1.136) folglich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{v} \, d\nu + \int_{\partial\Omega_c} \rho \mathbf{v} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, da = \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{f}_b \, d\nu + \int_{\partial\Omega_c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (1.155)$$

Die differentielle translatorische Impulserhaltung besteht aus drei partiellen Differentialgleichungen, die die Komponenten des Beschleunigungsvektors mit den räumlichen Ableitungen des Spannungstensors und den Volumenkräften verknüpft. Die Formulierung ist wieder für beliebige Koordinaten gültig und in kartesischen Koordinaten $\{x_a\}$ kann sie in der Form

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \sigma_{ij,j} + \rho f_i \quad (1.156)$$

angegeben werden. Wie in [1.1] gezeigt, kann der nachfolgende Satz aus der integralen Darstellung der Drehimpulserhaltung hergeleitet werden.

Satz 1.4 (Differentielle Drehimpulserhaltung). *Es sei angenommen, dass die Massenerhaltung und die translatorische Impulserhaltung erfüllt sind. Die Drehimpulserhaltung ist dann und nur dann erfüllt, wenn der Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bzw. der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor $\mathbf{S}$ symmetrisch ist, d. h. es gilt*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (1.157)$$

oder in Komponentendarstellung

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba}, \quad S_{AB} = S_{BA} . \quad (1.158)$$

Der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Allerdings impliziert die Transformationsvorschrift (1.128), dass für den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T, \quad P_{aA} F_{bA} = F_{aA} P_{bA}, \quad (1.159)$$

gelten muss und in Koordinaten $\{X_A\}$ auf Ω_0 gilt für $\mathbf{S}$

$$S_{AB} = (\mathbf{F}^{-1})_{Aa} P_{aB} = J (\mathbf{F}^{-1})_{Aa} \sigma_{ab} (\mathbf{F}^{-1})_{Bb} . \quad (1.160)$$

Die Symmetrie der Spannungstensoren ist dabei wieder unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

1.4.5 Energieerhaltung

Eines der Grundprinzipien der Physik ist, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur von einer Form in eine andere Form umgewandelt werden kann. Zunächst wird lediglich mechanische Energie betrachtet. Andere Energieformen, wie thermische,

elektrische, magnetische oder chemische werden vernachlässigt. Unter diesen Umständen stellt die Energiebilanz keine zusätzliche Bedingung dar. Sie ist vielmehr eine Konsequenz der Impulserhaltung. Zur Formulierung der Energieerhaltung für deformierbare Körper betrachtet man wieder eine wohldefinierte offene Teilmenge eines Körpers $\mathcal{B}$. Die externe mechanische Leistung P_{ext} ist definiert als die Leistungszufuhr in eine Teilmenge zum Zeitpunkt t , die durch die Kräfte $\mathbf{t}$ und $\rho \mathbf{f}_b$ bzw. $\mathbf{T}$ und $\rho_0 \mathbf{F}_b$ hervorgerufen werden:

$$P_{\text{ext}}(t) = \int_{\Omega} \langle \rho \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle d\nu + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle da = \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \mathbf{F}_b, \mathbf{V} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}, \mathbf{V} \rangle d\mathcal{A} . \quad (1.161)$$

Die *kinetische Energie* T der Masse innerhalb dieser Menge ist zu jedem Zeitpunkt t durch

$$T(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle d\nu = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle d\mathcal{V} \quad (1.162)$$

gegeben. Im Falle elastischer Materialien kann eine Verzerrungsenergiedichte π (Energie pro Einheitsvolumen) in der Form

$$\pi(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{F}}) : d\tilde{\mathbf{F}} = \int_0^{\mathcal{E}} \mathbf{S}(\tilde{\mathcal{E}}) : d\tilde{\mathcal{E}} \quad (1.163)$$

definiert werden. Die interne mechanische Leistung P_{int} beschreibt die Leistung des Spannungsfeldes zum Zeitpunkt t und ist definiert als

$$P_{\text{int}}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} d\nu = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathcal{E}} d\mathcal{V} \quad (1.164)$$

mit $\mathbf{d}$ gemäß (1.62a) und $\dot{\mathcal{E}}$ gemäß (1.103). Wird nur mechanische Energie betrachtet, so kann die Energieerhaltung in der Form

$$\frac{d}{dt} T(t) + P_{\text{int}}(t) = P_{\text{ext}}(t) \quad (1.165)$$

formuliert werden. Nunmehr kann die innere Energie eingeführt werden. Die *innere Energie* E_{in} berechnet sich aus der spezifischen Energie e (innere Energie pro Einheitsmasse) zu

$$E_{\text{in}}(t) = \int_{\Omega} \rho e d\nu = \int_{\Omega_0} \rho_0 E d\mathcal{V} . \quad (1.166)$$

Die spezifische innere Energie $e(\mathbf{x}, t)$ ist dabei eine makroskopische Darstellung der Energie innerhalb eines Stoffes. Die Verzerrungsenergiedichte π ist im Term ρe enthalten. Da zunächst nur mechanische Energie betrachtet wird, ist die interne Leistung identisch mit der Änderung der internen Energie:

$$P_{\text{int}}(t) = \frac{d}{dt} E_{\text{in}}(t) . \quad (1.167)$$

Die Gleichung (1.165) kann mit der inneren Energie zu

$$\frac{d}{dt}T(t) + \frac{d}{dt}E_{\text{in}}(t) = P_{\text{ext}}(t) \quad (1.168)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\mathbf{e} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) d\nu = \int_{\Omega} \langle \rho \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle d\nu + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle da \quad (1.169)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \right) d\mathcal{V} = \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \mathbf{F}_b, \mathbf{V} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}, \mathbf{V} \rangle d\mathcal{A} \quad (1.170)$$

angegeben werden. Der Anteil auf der linken Seite charakterisiert dabei die *totale Leistung*. Sie resultiert lediglich aus externer mechanischer Energie.

Im Folgenden wird sowohl mechanische als auch thermische Energie betrachtet. Ein Kontinuum, welches mechanische und thermische Energie besitzt, wird als *thermodynamisches Kontinuum* bezeichnet. Der *thermodynamische Zustand* ist bekannt, wenn alle Größen zur Beschreibung des Systems bekannt sind. Diese Größen nennt man auch *thermodynamische Zustandsgrößen*. Sie sind makroskopische Größen die im Allgemeinen von der Position und der Zeit abhängen. Zum Beispiel kann der thermodynamische Zustand eines thermoelastischen Festkörpers im sieben dimensionalen Zustandsraum mit sechs Spannungsvariablen und der Temperatur beschrieben werden. Die Funktionen, die eine bestimmte Zustandsvariable beschreiben, werden als *Zustandsgleichungen oder Konstitutivgleichungen* bezeichnet. Zur Charakterisierung des thermodynamischen Zustands ist die Beschreibung der mechanischen und thermischen Energie notwendig. Dazu wird das Konzept der Wärme $Q(t)$ eingeführt. Wärme ist eine thermische Energieform, die zwischen einem System und der Umgebung aufgrund eines Temperaturgradienten ausgetauscht wird. Die thermische Leistung ist definiert als

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} d\nu + \int_{\partial\Omega} q da = \int_{\Omega_0} \mathbf{R} d\nu + \int_{\partial\Omega_0} Q d\mathcal{A} . \quad (1.171)$$

Hierin bezeichnen die skalare Funktionen $q(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ und $Q(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t)$ die Wärmeflussdichten über die Berandung $\partial\Omega$ bzw. $\partial\Omega_0$ mit den Normalenvektoren $\mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{N}$ und $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ bzw. $\mathbf{R}(\mathbf{X}, t)$ die Wärmeproduktion pro Einheitsvolumen. Das Analogon zum Cauchy Postulat bildet das *Stoksche Wärmefluss Theorem* der Thermodynamik. Es besagt, dass die skalaren Funktionen q und Q als lineare Funktionen

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = -\langle \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n} \rangle \quad (1.172a)$$

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = -\langle \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t), \mathbf{N} \rangle \quad (1.172b)$$

dargestellt werden können. Das räumliche Vektorfeld $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ wird dabei als *Cauchy Wärmefluss* und das materielle Vektorfeld $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ als Piola-Kirchhoff Wärmefluss bezeichnet. Das negative Vorzeichen wird benötigt, da gefordert wird, dass dem Körper Wärme zugeführt wird. Wird die thermische Energie mitbetrachtet, so ändert sich die innere Energie auch zufolge der Änderung der Wärme und es gilt für die thermische Energieerhaltung

$$P_{\text{int}}(t) + \frac{d}{dt}Q(t) = \frac{d}{dt}E_{\text{in}}(t) . \quad (1.173)$$

Setzt man (1.173) in (1.165) ein, so ergibt sich die *Energieerhaltung*

$$\frac{d}{dt}T(t) + \frac{d}{dt}E_{\text{in}}(t) = \frac{d}{dt}Q(t) + P_{\text{ext}}(t) , \quad (1.174)$$

die auch als *erster Hauptsatz der Thermodynamik* bezeichnet wird. Die *Energieerhaltung* ist nun für jede wohldefinierte offene Menge erfüllt (*Lagrangesche integrale Darstellung*), falls

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) d\nu = \int_{\Omega} \rho (\langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle + r) d\nu + \int_{\partial\Omega} (\langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle) da \quad (1.175)$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho_0 \left(E + \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \right) dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 (\langle \mathbf{F}_b, \mathbf{V} \rangle + R) dV + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}, \mathbf{V} \rangle - \langle \mathbf{Q}, \mathbf{N} \rangle dA \quad (1.176)$$

gilt. Auch für die Energieerhaltung soll eine differentielle, lokalisierte Version hergeleitet werden. Verwendet man die vorangegangenen Erhaltungssätze und (1.172), so erhält man die *differentielle, lokalisierte Version der Energieerhaltung* in der Form

$$\rho \frac{d}{dt} e + \text{div}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r \quad (1.177a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} E + \text{div}(\mathbf{Q}) = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_0 R . \quad (1.177b)$$

Bemerkung 1.7. Der Ausgangspunkt des Beweises von (1.177a) ist die Lagrangesche integrale Darstellung (1.175) in der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) d\nu = \int_{\Omega} \rho (\langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle + r) d\nu + \int_{\partial\Omega} (\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle) da . \quad (1.178)$$

Mithilfe von Definition (1.130) für das Reynoldssche Transporttheorem folgt für die linke Seite damit unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) + \text{div} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) \mathbf{v} \right) \\ = \frac{d}{dt} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) \right) + \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) \text{div}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.179)$$

und die rechte Seite ergibt sich mit dem Divergenztheorem zu

$$\rho \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle + \rho r + \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \text{div}(\mathbf{q}) . \quad (1.180)$$

Im ersten Schritt betrachtet man nun den Term $\text{div}(\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle)$, welcher in der Form

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_b} (v_a \sigma_{ab}) = \frac{\partial v_a}{\partial x_b} \sigma_{ab} + v_a \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial x_b} \quad (1.181)$$

dargestellt werden kann. Man beachtet weiterhin, dass aufgrund der Drehimpulserhaltung (1.157) der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ symmetrisch ist und das doppelt verjüngende Produkt des schiefsymmetrischen Drehgeschwindigkeitstensors (1.62b) mit dem

symmetrischen Spannungstensor verschwindet. Es ergibt sich insgesamt mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{d}$ gemäß (1.62a)

$$\frac{\partial v_a}{\partial x_b} \sigma_{ab} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_b}{\partial x_a} - \frac{\partial v_a}{\partial x_b} \right) \sigma_{ab}}_{=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_a}{\partial x_b} + \frac{\partial v_b}{\partial x_a} \right) \sigma_{ab} = d_{ab} \sigma_{ab} \quad (1.182)$$

und es folgt schließlich

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \langle \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{v} \rangle . \quad (1.183)$$

Verwendet man noch

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \frac{d}{dt} \rho + \rho \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v}, \mathbf{v} \right\rangle , \quad (1.184)$$

so erhält man für die Energieerhaltung

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} e + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right)}_A + \underbrace{\rho \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v}, \mathbf{v} \right\rangle}_B = \\ \underbrace{\rho \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle}_B + \rho r + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \underbrace{\langle \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{v} \rangle}_B - \operatorname{div}(\mathbf{q}) . \end{aligned} \quad (1.185)$$

Aufgrund der Massenerhaltung (1.143) verschwindet der Ausdruck A . Die mit B gekennzeichneten Terme verschwinden aufgrund der Impulserhaltung (1.153). Damit resultiert unmittelbar die differentielle Darstellung der Energieerhaltung (1.177a).

Analog kann vorgegangen werden, um die Darstellung (1.177b) zu beweisen.

Ausgehend von (1.179) und (1.180) kann die *Eulersche integrale Darstellung der Energieerhaltung* angegeben werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) d\nu + \int_{\partial\Omega_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle da = \\ \int_{\Omega_c} \rho (\langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle + r) d\nu + \int_{\partial\Omega} (\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle) da . \end{aligned} \quad (1.186)$$

1.5 Materialmodelle

In den letzten beiden Abschnitten wurden die Kinematik sowie die zugehörigen Bilanzgleichungen hergeleitet. Um die Bewegungsgleichungen für Festkörper oder Fluide zu berechnen, fehlen noch Materialmodelle, die einen *Zusammenhang zwischen der Verzerung bzw. Verzerrungsgeschwindigkeit und der Spannung* herstellen. Diese Materialmodelle werden auch als Konstitutivgleichungen bezeichnet. Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung werden lediglich linear-elastische Festkörper behandelt. Ein Material wird als *einfaches Material* bezeichnet, wenn dessen momentaner Spannungszustand nur von der lokalen Vergangenheit der Deformation abhängt. D. h., der Wert des Cauchy Spannungstensors an

einem materiellen Punkt kann als Funktion der Vergangenheit des Deformationsgradienten an diesem Punkt dargestellt werden. Es zeigt sich in Experimenten, dass nahezu alle realen Materialien als einfache Materialien modelliert werden können.

1.5.1 Elastizität

Unter einem *elastischen Material* versteht man ein Material, in welchem die Änderung der Spannung an einem materiellen Punkt im Körper zwischen zwei beliebigen Konfigurationen unabhängig von der Zeit und dem Pfad im Raum für alle möglichen Konfigurationen ist. In einem (isothermen) elastischen Material ist damit der momentane Spannungszustand an einem materiellen Punkt alleine durch die momentane Deformation an diesem materiellen Punkt festgelegt. Der Cauchy Spannungstensor ist damit eine Funktion des Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ und es gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{x}) , \quad (1.187)$$

wobei die Abhängigkeit $\boldsymbol{\sigma}(\cdot, \mathbf{x})$ von der Momentanposition $\mathbf{x}$ eines materiellen Punktes andeutet, dass die Materialeigenschaften an unterschiedlichen materiellen Punkten im Körper verschieden sein können. Ein Material mit dieser Eigenschaft wird auch als *heterogen* bezeichnet. Sind die Materialeigenschaften an jedem Punkt gleich, so hängt die Konstitutivgleichung (1.187) nicht mehr explizit von der Position ab und es gilt für ein sogenanntes *homogenes Material*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}) . \quad (1.188)$$

Materielle Homogenität wird im Folgenden vorausgesetzt.

1.5.2 Linear-elastischer Festkörper

Eine äquivalente Formulierung zu (1.188) kann mithilfe des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors als Funktion des Green-Lagrange Verzerrungstensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ zu

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \quad (1.189)$$

angeben werden. Die Gestalt der Konstitutivgleichung (1.189) kann durch die Annahme einer Verzerrungsenergiedichte π , definiert als Funktion des Green-Lagrange Verzerrungstensors, der Form

$$\pi(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \int_0^{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \mathbf{S}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}) : d\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} , \quad \pi(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \int_0^{\mathcal{E}_{ab}} S_{ab} d\tilde{\mathcal{E}}_{ab} \quad (1.190)$$

eingeschränkt werden. Dazu wird gefordert, dass die Integration im Verzerrungsraum wegunabhängig ist. Man nennt ein Material, welches diese Eigenschaft erfüllt *hyperelastisch* und es folgt für eine orthonormale Basis

$$S_{ab} = \frac{\partial \pi}{\partial \mathcal{E}_{ab}} . \quad (1.191)$$

Unter der Annahme einer infinitesimalen Deformation gelten die kinematischen Linearisierungen $\boldsymbol{\mathcal{E}} \approx \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{S}} \approx \bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Für eine infinitesimale Deformation eines elastischen Materials folgt aus der Konstitutivgleichung (1.189)

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (1.192)$$

und für ein hyperelastisches Material definiert man analog zu (1.190) die infinitesimale Verzerrungsenergiedichte

$$\pi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_0^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \ , \quad \pi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_0^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ab}} \bar{\sigma}_{ab} d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ab} \ . \quad (1.193)$$

Analog zu (1.191) folgt

$$\bar{\sigma}_{ab} = \frac{\partial \pi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ab}} \ . \quad (1.194)$$

Prinzipiell sind die Konstitutivgleichungen (1.189) bzw. (1.192) für eine Deformation bzw. infinitesimale Deformation eines elastischen Materials nichtlinear. Die Spannungen sind damit nicht proportional zu den Verzerrungen. Wird jedoch angenommen, dass dieser Zusammenhang affin ist, so kann die Konstitutivgleichung in der Form³

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \ , \quad \bar{\sigma}_{ab} = C_{abcd} \bar{\varepsilon}_{cd} \quad (1.195)$$

dargestellt werden, wobei die Komponenten des Steifigkeitstensors vierter Stufe $\mathbf{C}$ materielle Parameter darstellen. Diese können von der Referenzposition $\mathbf{X}$ abhängen, falls der Körper nicht materiell homogen ist. Die Konstitutivgleichung (1.195) für eine infinitesimale Deformation eines linear-elastischen Materials wird als *generalisiertes Hookesches Gesetz* bezeichnet. Insgesamt beinhaltet der Tensor vierter Stufe $3^4 = 81$ Komponenten, die allerdings nicht von einander linear unabhängig sind.

- (i) Es wurde bereits festgestellt, dass der Spannungstensor symmetrisch ist, $\bar{\sigma}_{ab} = \bar{\sigma}_{ba}$, um die Drehimpulserhaltung zu erfüllen. Daraus lässt sich unmittelbar ableiten, dass die Drehimpulserhaltung erfüllt ist, wenn der Steifigkeitstensor $\mathbf{C}$ in den ersten zwei Indizes symmetrisch ist, $C_{abcd} = C_{bacd}$. Damit reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf $6 \times 3 \times 3 = 54$.
- (ii) Der Steifigkeitstensor kann in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil aufgespalten werden

$$C_{abcd} = \frac{1}{2}(C_{abcd} + C_{abdc}) + \frac{1}{2}(C_{abcd} - C_{abdc}) \ . \quad (1.196)$$

Da der Verzerrungstensor symmetrisch ist ($\bar{\varepsilon}_{cd} = \bar{\varepsilon}_{dc}$), hat nur der symmetrische Anteil einen Einfluss auf die Spannungen

$$C_{abcd} \bar{\varepsilon}_{cd} = \frac{1}{2}(C_{abcd} \bar{\varepsilon}_{cd} + C_{abdc} \bar{\varepsilon}_{cd}) = \frac{1}{2}(C_{abcd} + C_{abdc}) \bar{\varepsilon}_{cd} \ . \quad (1.197)$$

³Es wird zusätzlich angenommen, dass die Spannungen in der Referenzkonfiguration verschwinden. Falls notwendig, muss eine Vorspannung $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ überlagert werden, so dass $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ gilt.

Der schiefsymmetrische Anteil ist damit beliebig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dieser zu Null gesetzt und gefordert werden, dass der Steifigkeitstensor in den letzten zwei Indizes symmetrisch ist, $C_{abcd} = C_{abdc}$. Die unabhängigen Komponenten reduzieren sich damit auf $6 \times 6 = 36$.

(iii) Ist das linear-elastische Material zudem hyperelastisch, dann folgt aus (1.194)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \bar{\epsilon}_{ab}} = C_{abcd} \bar{\epsilon}_{cd} \quad (1.198)$$

und nochmaliges Differenzieren resultiert in

$$\frac{\partial \pi}{\partial \bar{\epsilon}_{ab} \partial \bar{\epsilon}_{cd}} = C_{abcd} . \quad (1.199)$$

Die Reihenfolge der Differentiation in (1.199) ist beliebig, so dass der Steifigkeitstensor für eine infinitesimale Deformation eines linear-hyperelastischen Materials symmetrisch sein muss ($C_{abcd} = C_{cdab}$) und sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten schließlich zu $(6 \times 6 + 6)/2 = 21$ reduziert. Ebenso kann gezeigt werden, dass ein linear-elastisches Material hyperelastisch ist, falls $C_{abcd} = C_{cdab}$ gilt. Die betrachteten Materialien werden im Folgenden als hyperelastisch angenommen. Die 21 unabhängigen Komponenten können weiter reduziert werden, wenn das Materialverhalten räumliche Symmetrien aufweist.

Die Verzerrungsenergiedichte für eine linear-elastische Deformation lautet

$$\pi(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} : \mathbf{C} : \bar{\epsilon} , \quad \pi(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \bar{\epsilon}_{cd} . \quad (1.200)$$

Dies kann gezeigt werden, indem (1.200) nach $\bar{\epsilon}_{rs}$ partiell differenziert wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \bar{\epsilon}_{rs}} &= \frac{1}{2} \mathbf{C}_{abcd} \bar{\epsilon}_{cd} \delta_{ar} \delta_{bs} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{abcd} \bar{\epsilon}_{ab} \delta_{cr} \delta_{ds} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{C}_{rscd} \bar{\epsilon}_{cd} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{abrs} \bar{\epsilon}_{ab} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{rscd} \bar{\epsilon}_{cd} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{rsab} \bar{\epsilon}_{ab} \\ &= \bar{\sigma}_{rs} . \end{aligned} \quad (1.201)$$

Die Kombination von (1.195) und (1.200) erlaubt eine alternative Formulierung der Verzerrungsenergiedichte

$$\pi(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} , \quad \pi(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ab} \bar{\epsilon}_{ab} . \quad (1.202)$$

Die Konstitutivgleichung (1.195) kann invertiert werden, um eine Konstitutivgleichung für die Verzerrungen als Funktion der Spannungen zu erhalten

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{S} : \bar{\sigma} , \quad \bar{\epsilon}_{cd} = S_{abcd} \bar{\sigma}_{ab} , \quad (1.203)$$

wobei der Nachgiebigkeitstensor vierter Stufe $\mathbf{S}$ eingeführt wurde. Kombiniert man (1.202) und (1.203), findet man die Koverzerrungsenergie für eine linear-elastische Deformation als Funktion der Spannungen

$$\pi^*(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \mathbf{S} : \bar{\sigma} , \quad \pi^*(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} S_{abcd} \bar{\sigma}_{ab} \bar{\sigma}_{cd} . \quad (1.204)$$

Wie bereits erwähnt, können die unabhängigen Komponenten des Steifigkeitstensors weiter reduziert werden, wenn die Symmetrie des Materials berücksichtigt wird. In diesem Zusammenhang bezeichnet man ein Material als ein *anisotropes Material*, wenn die Materialeigenschaften an einem materiellen Punkt unterschiedlich in verschiedene Richtungen sind. In einem *isotropen Material* sind hingegen die materiellen Eigenschaften in alle Richtung identisch. Einen Tensor $\mathbf{T}$ n -ter Stufe bezeichnet man als *isotrop*, wenn die Komponenten der Darstellung in zwei beliebigen orthonormalen Basen identisch sind. Ein Tensor vierter Stufe ist symmetrisch und isotrop, wenn für ihn die skalare Dekomposition

$$C_{abcd} = \lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \quad (1.205)$$

gilt [1.4]. Dabei bezeichnen λ und μ die *Laméschen Konstanten*. Vereinfacht man diesen Ausdruck, so kann (1.195) für ein isotropes Material in der Form

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda \text{spur}(\bar{\varepsilon}) \delta , \quad \bar{\sigma}_{ab} = 2\mu \bar{\varepsilon}_{ab} + \lambda \bar{\varepsilon}_{cc} \delta_{ab} \quad (1.206)$$

dargestellt werden. Die Konsitativgleichung (1.206) gibt die Spannungskomponenten als Funktion der Verzerrungskomponenten wieder. Oft ist es jedoch nützlich die Verzerrungskomponenten als Funktion der Spannungskomponenten anzugeben. Hierfür folgt aus (1.206)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{spur}(\bar{\sigma}) \delta , \quad \bar{\varepsilon}_{ab} = \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma}_{ab} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \bar{\sigma}_{cc} \delta_{ab} . \quad (1.207)$$

Anzumerken ist, dass die *Laméschen Konstanten* auch anhand des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν ausgedrückt werden können, vgl. Kapitel 1.1.2,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} . \quad (1.208)$$

Die einzelnen Komponenten lauten damit

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{11} + \lambda(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) , & \bar{\sigma}_{12} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\sigma}_{22} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{22} + \lambda(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) , & \bar{\sigma}_{13} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\sigma}_{33} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{33} + \lambda(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) , & \bar{\sigma}_{23} &= 2\mu \bar{\varepsilon}_{23} \end{aligned} \quad (1.209)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{11} - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) , & \bar{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{22} - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{33}) , & \bar{\varepsilon}_{13} &= \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{33} - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) , & \bar{\varepsilon}_{23} &= \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma}_{23} . \end{aligned} \quad (1.210)$$

Für Stahl gilt beispielweise $E \approx 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu \approx 0.3$, $\lambda \approx 1.2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ und $\mu \approx 8.1 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$.

1.6 Folgerungen für eine linear-elastische Deformation

Die Beziehungen in diesem Abschnitt gelten für linear-elastische Deformationen und linearisierte Beziehungen (kleine Deformationen).

1.6.1 Arbeitssatz

Es soll noch der *Arbeitssatz* für eine infinitesimale Verzerrung dargestellt werden. Die Verzerrungsenergiedichte für eine linear-elastische Deformation ist durch (1.202) gegeben. Die Verzerrungsenergie in einem Körper, der das Gebiet Ω_0 einnimmt, lautet dementsprechend

$$\int_{\Omega_0} \pi(\bar{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\sigma}_{ab} \bar{\varepsilon}_{ab} dV . \quad (1.211)$$

Man beachte weiterhin, dass aufgrund der Drehimpulserhaltung (1.157) der Spannungstensor σ symmetrisch ist und somit ein doppelt verjüngendes Produkt mit einem schiefsymmetrischen Tensor verschwindet. Es ergibt sich folglich mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor (1.112)

$$\bar{\sigma}_{ab} \bar{\varepsilon}_{ab} = \bar{\sigma}_{ab} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_a}{\partial X_b} + \frac{\partial U_b}{\partial X_a} \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ab} \left(\frac{\partial U_b}{\partial X_a} - \frac{\partial U_a}{\partial X_b} \right)}_{=0} = \bar{\sigma}_{ab} \frac{\partial U_b}{\partial X_a} . \quad (1.212)$$

Anhand der Identität (Produktregel)

$$\bar{\sigma}_{ab} \frac{\partial U_b}{\partial X_a} = \frac{\partial}{\partial X_b} (\bar{\sigma}_{ab} U_a) - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ab}}{\partial X_b} U_a \quad (1.213)$$

bzw.

$$\bar{\sigma} : \text{Grad}(\mathbf{U}) = \text{Div}(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{U}) - \langle \text{Div}(\bar{\sigma}), \mathbf{U} \rangle \quad (1.214)$$

findet man mit dem Divergenztheorem (1.3)

$$\int_{\Omega_0} \pi(\bar{\varepsilon}) dV = \int_{\Omega_0} \bar{\sigma} : \text{Grad}(\mathbf{U}) dV = \int_{\partial\Omega_0} \langle \bar{\sigma} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{U} \rangle dA - \int_{\Omega_0} \langle \text{Div}(\bar{\sigma}), \mathbf{U} \rangle dV . \quad (1.215)$$

Mit der Impulserhaltung $\mathbf{0} = \rho_0 \mathbf{F}_b + \text{Div}(\bar{\sigma})$ für den Gleichgewichtszustand ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$) gemäß (1.154) und der Definition des Spannungsvektors $\mathbf{T} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{N}$ gemäß (1.119b) erhält man schließlich die Beziehung

$$\int_{\Omega_0} \pi(\bar{\varepsilon}) dV = \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \mathbf{F}_b, \mathbf{U} \rangle dV + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle dA . \quad (1.216)$$

Die rechte Seite von (1.216) repräsentiert die durch externe Kräfte verrichtete Arbeit während einer linear-elastischen Deformation. Der *Arbeitssatz* besagt, dass im Gleichgewichtszustand für infinitesimale Verzerrungen die in einem Körper gespeicherte Verzerrungsenergie gleich der durch externe Kräfte verrichteten Arbeit ist.

1.6.2 Betti-Rayleigh Beziehungen

Betrachtet werden zwei Gleichgewichtszustände eines linear-elastischen Körpers. Die (gedachte) verrichtete Arbeit $\mathcal{W}_{12}$ der externen Kräfte $\mathbf{T}^{(1)}$ und $(\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(1)}$ des ersten Gleichgewichtszustands bei der Verschiebung $\mathbf{U}^{(2)}$ des zweiten Gleichgewichtszustands lautet

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_0} \langle (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)} \rangle d\mathcal{A} \right). \quad (1.217)$$

Analog zu den im vorherigen Abschnitt getroffenen Überlegungen gilt dann auch

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} d\mathcal{V} \quad (1.218)$$

bzw. mit (1.195)

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} : \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} d\mathcal{V}. \quad (1.219)$$

Da der Steifigkeitstensor $\mathbf{C}$ symmetrisch ist, entspricht die verrichtete Arbeit $\mathcal{W}_{12}$ des ersten Kräftepaars $(\mathbf{T}^{(1)}, (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(1)})$ bei der Verschiebung $\mathbf{U}^{(2)}$ gleichzeitig auch der (gedachten) verrichteten Arbeit $\mathcal{W}_{21}$ des zweiten Kräftepaars $(\mathbf{T}^{(2)}, (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(2)})$ bei der Verschiebung $\mathbf{U}^{(1)}$. Es gilt somit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \langle (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)} \rangle d\mathcal{A} \\ &= \int_{\Omega_0} \langle (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(2)}, \mathbf{U}^{(1)} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{U}^{(1)} \rangle d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (1.220a)$$

Aus (1.219) folgt ferner dass die Verzerrungsenergie des Spannungsfeldes des ersten Gleichgewichtszustands und des Verzerrungsfeldes des zweiten Gleichgewichtszustands gleich der Verzerrungsenergie des Spannungsfeldes des zweiten Gleichgewichtszustands und des Verzerrungsfeldes des ersten Gleichgewichtszustands ist.

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} d\mathcal{V} \quad (1.220b)$$

Damit gilt natürlich auch

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} d\mathcal{V} = \int_{\Omega_0} \langle (\rho_0 \mathbf{F}_b)^{(2)}, \mathbf{U}^{(1)} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{U}^{(1)} \rangle d\mathcal{A}. \quad (1.220c)$$

Die Gleichungen (1.220) werden als *Betti-Rayleigh (Reziprozitäts-)Beziehungen* bezeichnet.

Beispiel 1.7 (Betti-Rayleigh Beziehungen). Betrachtet wird der in Abbildung ref:fig:Kon:BettiRayleighExample skizzierte, einseitig eingespannte Balken mit zwei unterschiedlichen Belastungsfällen (1) und (2), wobei jeweils ein Gleichgewichtszustand herrschen soll. Im Fall (1) wirkt am Punkt $x_1^{(1)}$ eine vertikale Lastkraft $F^{(1)}$ und die zugehörige Biegelinie (vertikale Verschiebung) sei $U^{(1)}(x_1)$. Im Fall (2) wirkt am Punkt $x_1^{(2)}$ eine vertikale Lastkraft $F^{(2)}$ und die zugehörige Biegelinie sei $U^{(2)}(x_1)$. Die Betti-Rayleigh Beziehungen besagen nun, dass $F^{(1)}U^{(2)}(x_1^{(1)}) = F^{(2)}U^{(1)}(x_1^{(2)})$ gilt.

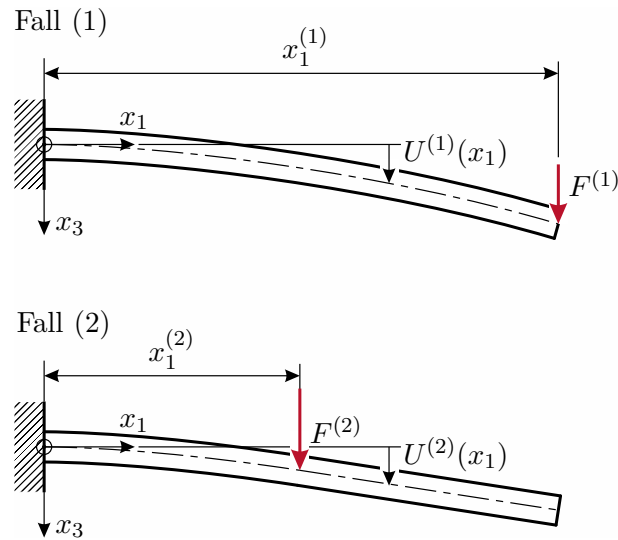


Abbildung 1.18: Anwendung der Betti-Rayleigh Beziehungen.

1.7 Energieprinzipien und Variationsmethoden

Prinzipiell können die Bewegungsgleichungen eines Festkörpers mithilfe der Impulsbilanz und der Konstitutivgleichungen abgeleitet werden. Dazu muss ein Teilgebiet des Körpers Ω isoliert werden und die statischen und dynamischen Kräfte und Momente bilanziert werden. Für einfache Festkörper ist diese Vorgehensweise einfach durchzuführen - für komplizierte Festkörper stößt man jedoch schnell an die Grenzen dieses Verfahrens. Es ist dann oft einfacher die Bewegungsgleichungen anhand der in einem Körper gespeicherten Energie zu bestimmen. Zudem erlaubt ein energiebasiertes Verfahren eine einfache finit-dimensionale Approximation der resultierenden Bewegungsgleichungen. Zur Beschreibung der gespeicherten Energie werden die *virtuelle Verschiebung* und das *Prinzip der virtuellen Arbeit* eingeführt.

1.7.1 Virtuelle Verschiebung

Betrachtet wird ein Körper $\mathcal{B}$ zu einem Zeitpunkt t . Die Punkte $\mathbf{X} \in \Omega_0$ mit dem Positionsvektor $\mathbf{X}$ und $\mathbf{x} \in \Omega$ mit dem Positionsvektor $\mathbf{x}$ charakterisieren die Position eines materiellen Punktes $\mathbf{P} \in \mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration Ω_0 und der Momentankonfiguration Ω . Die Überlegungen werden für ein materielles Verschiebungsfeld $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ angeführt, uns lassen sich einfach auf räumliche Koordinaten übertragen. Das Verschiebungsfeld $\mathbf{U}$ eines materiellen Punktes zeigt von der Referenzposition $\mathbf{X}$ zur Momentanposition $\mathbf{x}$, vgl. Abbildung 1.19.

Es wird ein neues, beliebiges Vektorfeld $\mathbf{W}$ am Punkt $\mathbf{x}$ eingeführt, mithilfe dessen eine virtuelle, deformierte Konfiguration in einer Umgebung von $\mathbf{U}$ beschrieben werden kann.

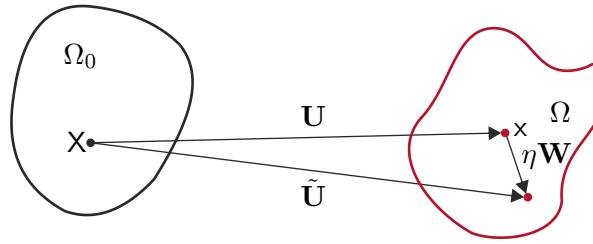


Abbildung 1.19: Zur virtuellen Verschiebung.

Die virtuelle Konfiguration wird anhand des modifizierten Verschiebungsfelds

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \eta \mathbf{W} \quad (1.221)$$

mit dem skalaren Parameter η parametrisiert. Da die beiden Verschiebungsfelder $\mathbf{U}$ und $\tilde{\mathbf{U}}$ kinematisch zulässig sein müssen, d. h. allfällige kinematische Randbedingungen erfüllen müssen, muss $\mathbf{W}$ an allen Rändern mit kinematischen Randbedingungen verschwinden.

Die Differenz zwischen zwei benachbarten Verschiebungsfeldern $\eta\delta\mathbf{U}$, hier $\tilde{\mathbf{U}}$ und $\mathbf{U}$, nennt man auch erste Variation des Verschiebungsfelds $\mathbf{U}$ und man schreibt⁴

$$\eta\delta\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U} = \eta\mathbf{W} . \quad (1.222)$$

Die Variation $\eta\delta\mathbf{U}$ ist dabei beliebig klein, d. h. $\eta \rightarrow 0$. In der Mechanik wird $\eta\delta\mathbf{U}$ als *virtuelle Verschiebung* bezeichnet.

Bemerkung 1.8. Die erste Variation kann als Gâteaux Differential (siehe [1.5]) interpretiert werden.

Definition 1.13 (Gâteaux Differential). Die *erste Variation* einer skalaren, vektoriellen oder tensoriellen Größe $\mathbf{T}(\mathbf{U})$ am Punkt $\mathbf{U}$ in Richtung $\delta\mathbf{U}$, auch als *Gâteaux Differential* von $\mathbf{T}(\mathbf{U})$ bezüglich $\delta\mathbf{U}$ am Punkt $\mathbf{U}$ bezeichnet, ist in der Form

$$\delta\mathbf{T}(\mathbf{U}; \delta\mathbf{U}) := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{U} + \eta\delta\mathbf{U}) - \mathbf{T}(\mathbf{U})}{\eta} = \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{T}(\mathbf{U} + \eta\delta\mathbf{U}) \right|_{\eta=0} \quad (1.223)$$

definiert.

Da das Gâteaux Differential eine lineare Operation ist, kann die Reihenfolge der Variation und Differentiation bzw. Integration vertauscht werden:

$$(1) \quad \delta(\text{Grad}(\mathbf{U})) = \text{Grad}(\delta\mathbf{U})$$

$$(2) \quad \delta \int_{\Omega} \mathbf{U} \, d\mathcal{V} = \int_{\Omega} \delta\mathbf{U} \, d\mathcal{V} ,$$

⁴Die Verwendung des δ -Symbols für die erste Variation einer Größe ist üblich in der Literatur, weshalb die Notation übernommen wurde. Das δ -Symbol sollte allerdings nicht mit dem Kronecker-Delta δ_{ab} verwechselt werden.

wobei Ω hier ein Gebiet beliebiger Dimension bezeichnet. Damit können die ersten Variationen des Deformationsgradienten und des Green-Lagrange Tensors berechnet werden. Mit der Definition $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \text{Grad}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\delta}$ des Deformationsgradienten (vgl. (1.107)) findet man die Variation des Deformationsgradienten

$$\delta \mathbf{F} = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{F}(\mathbf{U} + \eta \delta \mathbf{U}) \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \eta \text{Grad}(\delta \mathbf{U})) \right|_{\eta=0} = \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) . \quad (1.224)$$

Für die erste Variation $\delta \mathcal{E}$ des Green-Lagrange Tensors (1.92) gilt

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}^T \text{Grad}(\delta \mathbf{U}))^T + \mathbf{F}^T \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) \right) \\ &= \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad}(\delta \mathbf{U})) , \end{aligned} \quad (1.225)$$

wobei die Notation $\text{sym}(\cdot)$ meint, dass der symmetrische Anteil des Tensors verwendet wird.

1.7.2 Anfangs-Randwertaufgabe der Kontinuumsmechanik

Eine der fundamentalen Bilanzgleichungen ist die Euler-Cauchy Gleichung (1.153) (differentialle Version der Impulserhaltung). Ersetzt man die Geschwindigkeit in (1.154) durch die Verschiebung anhand von (1.53), so erhält man

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{U}} = \rho_0 \mathbf{F}_b + \text{Div}(\mathbf{P}) . \quad (1.226)$$

Im Folgenden werden nun Rand- und Anfangsbedingungen für die Bewegung vorgegeben, die benötigt werden, um die eindeutige Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung (1.226) zu gewährleisten. Es wird dazu angenommen, dass die Berandung $\partial \Omega_0$ in zwei disjunkte Anteile aufgeteilt werden kann:

$$\partial \Omega_0 = \partial \Omega_U \cup \partial \Omega_T \quad \text{mit} \quad \partial \Omega_U \cap \partial \Omega_T = \{ \} . \quad (1.227)$$

Man unterscheidet zwischen zwei Klassen von Randbedingungen:

- (1) *Dirichlet (wesentliche oder geometrische) Randbedingungen*, die mit der Verschiebung $\mathbf{U}$ korrespondieren und
- (2) *Neumann (natürliche, Kraft-) Randbedingungen*, die physikalisch mit der Oberflächenspannung $\mathbf{T}$ in Verbindung gesetzt werden können.

Man schreibt für die Randbedingungen

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{U}} \quad \text{auf} \quad \partial \Omega_U \quad \text{und} \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \partial \Omega_T , \quad (1.228)$$

wobei $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{T}}$ die Vorgaben auf den jeweiligen Berandungen $\partial \Omega_U$ und $\partial \Omega_T$ sind. Zusätzlich zu den Randbedingungen müssen noch Anfangsbedingungen spezifiziert werden. Die Anfangsbedingungen der Verschiebung und Verschiebungsgeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt $t = 0$ werden in der Form

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{U}}_0(\mathbf{X}) \quad (1.229)$$

vorgegeben, wobei $\mathbf{U}_0(\mathbf{X})$ und $\dot{\mathbf{U}}_0(\mathbf{X})$ wieder die Vorgaben auf Ω_0 bezeichnet. Für Kompatibilität der Randbedingungen mit den Anfangsbedingungen fordert man zusätzlich auf $\partial\Omega_U$

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \dot{\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{U}}_0(\mathbf{X}) . \quad (1.230)$$

Zusammenfassend kann die Impulserhaltung als Anfangs-Randwertaufgabe zu

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\mathbf{U}} &= \rho_0 \mathbf{F}_b + \text{Div}(\mathbf{P}) \quad \text{auf} \quad \Omega_0 \\ \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) &= \bar{\mathbf{U}} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_U, \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_T \\ \mathbf{U}(\mathbf{X}, t=0) &= \mathbf{U}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t=0) = \dot{\mathbf{U}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{auf} \quad \Omega_0 \end{aligned} \quad (1.231)$$

formuliert werden.

1.7.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Um das Prinzip der virtuellen Arbeit herzuleiten, betrachtet man die Anfangs-Randwertaufgabe (1.231). Multipliziert man (1.226) mit der virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{U}$ und integriert über das Gebiet Ω_0 , so folgt

$$\int_{\Omega_0} \left(\langle -\rho_0 \ddot{\mathbf{U}} + \rho_0 \mathbf{F}_b + \text{Div}(\mathbf{P}), \delta\mathbf{U} \rangle \right) d\mathcal{V} = 0 . \quad (1.232)$$

Anhand der Identität (Produktregel)

$$\frac{\partial P_{aA}}{\partial X_A} \delta U_a = \frac{\partial}{\partial X_A} (P_{aA} \delta U_a) - P_{aA} \frac{\partial \delta U_a}{\partial X_A} \quad (1.233)$$

bzw.

$$\langle \text{Div}(\mathbf{P}), \delta\mathbf{U} \rangle = \text{Div}(\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{U}) - \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta\mathbf{U}) \quad (1.234)$$

findet man mit dem Divergenztheorem (1.3) und den Randbedingungen nach (1.231)

$$\int_{\Omega_0} \langle \text{Div}(\mathbf{P}), \delta\mathbf{U} \rangle d\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega_T} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \delta\mathbf{U} \rangle d\mathcal{A} - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta\mathbf{U}) d\mathcal{V} . \quad (1.235)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\int_{\Omega_0} \left(\langle -\rho_0 \ddot{\mathbf{U}} + \rho_0 \mathbf{F}_b, \delta\mathbf{U} \rangle - \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta\mathbf{U}) \right) d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_T} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \delta\mathbf{U} \rangle d\mathcal{A} = 0 . \quad (1.236)$$

Wie sich nachfolgend zeigen wird, setzt sich die linke Seite dieser Gleichung aus den Termen $\delta\mathcal{T} - \delta\Pi_{\text{int}} + \delta\mathcal{W}_{\text{ext}}$ zusammen. Die Formulierung (1.236) wird als *schwache Form* der Anfangs-Randwertaufgabe (1.231) bezeichnet. Die Spannungsrandbedingungen sind teil dieser Formulierung - daher der Name natürliche Randbedingungen.

Ein deformierbarer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die extern eingepprägten und internen resultierenden Kräften identisch sind. Die virtuelle Arbeit die extern eingepprägte Kräfte entlang der virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{U}$ verrichten wird als *externe virtuelle Arbeit* $\delta\mathcal{W}_{\text{ext}}$ bezeichnet. Die Arbeit welche von den inneren Kräften entlang der virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{U}$ verrichtet wird bezeichnet man als *interne virtuelle Arbeit* $\delta\Pi_{\text{int}}$. Die externe virtuelle Arbeit ist definiert als

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \mathbf{F}_b, \delta \mathbf{U} \rangle d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_T} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \delta \mathbf{U} \rangle d\mathcal{A} \quad (1.237)$$

und die interne virtuelle Arbeit $\delta \Pi_{\text{int}}$ ist definiert als

$$\delta \Pi_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\mathcal{V} = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) d\mathcal{V} . \quad (1.238)$$

Dabei wurde die Symmetrieeigenschaft des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors (1.159), die Transformationsvorschrift (1.127) und die erste Variation des Green-Lagrange Tensors (1.225) verwendet, um die Identität

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{P}^T \mathbf{F}^{-T} : \underbrace{\text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad}(\delta \mathbf{U}))}_{\delta \mathbf{F}} \\ &= \mathbf{P}^T \mathbf{F}^{-T} : (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \mathbf{P}^T : (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{P} : \underbrace{\text{Grad}(\delta \mathbf{U})}_{\delta \mathbf{F}} \end{aligned} \quad (1.239)$$

zu erhalten. Die *kinetische Energie* T laut (1.162) kann mithilfe des Verschiebungsfeldes (1.53) ausgedrückt werden

$$\mathsf{T} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \langle \dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}} \rangle d\mathcal{V} . \quad (1.240)$$

Bilden der Gâteaux Ableitung liefert die virtuelle kinetische Energie

$$\delta \mathsf{T} = \frac{d}{d\eta} \mathsf{T}(\dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}}) \Big|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta} \left(\int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \langle \dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle d\mathcal{V} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (1.241a)$$

$$= \left(\int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \langle \delta \dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle + \frac{1}{2} \rho_0 \langle \dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}}, \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle d\mathcal{V} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (1.241b)$$

bzw.

$$\delta \mathsf{T} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \langle \dot{\mathbf{U}}, \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle d\mathcal{V} . \quad (1.242)$$

Beispiel 1.8 (Virtuelle Energie eines Zug/Druck-Stabes). Betrachtet wird die axiale Dehnung eines isotropen, elastischen Stabes in 1-Richtung, vgl. Abbildung 1.20. Der Einfluss der Gravitation wird vernachlässigt. Für das Gebiet und die Berandung gelten $\Omega_0 : X_1 \in (0, L)$ und $\partial\Omega_0 : X_1 = 0, L$. Der Stab ist an der Stelle $X_1 = 0$ fest eingespannt. Er wird mit einer Linienlast $q(X_1, t)$ in 1-Richtung und am Stabende $X_1 = L$ mit einer Einzelkraft $f(t)$ in 1-Richtung belastet. Ferner hat er die Länge L und die ortsabhängige Querschnittsfläche $\mathcal{A}(X_1)$. In diesem einfachen Fall verschwinden (in guter Näherung) alle Spannungen mit Ausnahme von $\bar{\sigma}_{11}$ und das Materialgesetz (1.206) reduziert sich zu $\bar{\sigma}_{11} = E \bar{\varepsilon}_{11}$. Es wird eine infinitesimale Deformation angenommen und die Verschiebung ist gegeben als

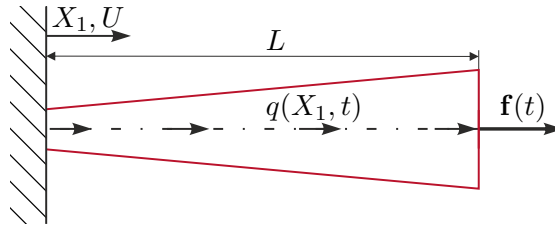


Abbildung 1.20: Einseitig eingespannter Zug/Druck-Stab.

$$U_1(\mathbf{X}, t) = U(X_1, t) , \quad U_2(\mathbf{X}, t) = 0 , \quad U_3(\mathbf{X}, t) = 0 , \quad (1.243)$$

wobei U die axiale Verschiebung an einem Punkt auf der 1-Achse des Stabes ist. Die einzige, nicht verschwindende Verzerrung ist damit

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial U}{\partial X_1} . \quad (1.244)$$

Die virtuelle externe und interne Arbeit lautet

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = f(t) \delta U(L, t) + \int_0^L q(X_1, t) \delta U(X_1, t) dX_1 \quad (1.245a)$$

$$\delta \Pi_{\text{int}} = \int_0^L \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11} d\mathcal{A} dX_1 = \int_0^L \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta U}{\partial X_1} d\mathcal{A} dX_1 \quad (1.245b)$$

$$= \int_0^L E\mathcal{A}(X_1) \frac{\partial U}{\partial X_1} \frac{\partial \delta U}{\partial X_1} dX_1 , \quad (1.245c)$$

wobei

$$N_{11} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} d\mathcal{A} = E\mathcal{A}(X_1) \frac{\partial U}{\partial X_1} \quad (1.246)$$

die resultierende Normalkraft ist. Der Term $E\mathcal{A}(X_1)$ wird als Zugsteifigkeit bezeichnet. Die virtuelle kinetische Energie lautet mit $dV = \mathcal{A}(X_1) dX_1$

$$\delta \mathcal{T} = \int_0^L \rho_0(X_1) \mathcal{A}(X_1) \dot{U}(X_1, t) \delta \dot{U}(X_1, t) dX_1 . \quad (1.247)$$

Beispiel 1.9 (Virtuelle Energie eines Euler-Bernoulli Biegebalkens). Betrachtet wird die Biegung eines beidseitig gelenkig gelagerten Euler-Bernoulli Biegebalkens, vgl. Abbildung 1.21. Der Einfluss der Gravitation wird vernachlässigt. Für das Gebiet und die Berandung gelten $\Omega_0 : X_1 \in (0, L)$ und $\partial\Omega_0 : X_1 = 0, L$. Der Stab hat die Länge L und die ortsabhängige Querschnittsfläche $\mathcal{A}(X_1)$. Auf den Balken wirkt eine verteilte Last $q(X_1, t)$. Es werden kleine Deformationen angenommen und die Verschiebung ist gegeben als

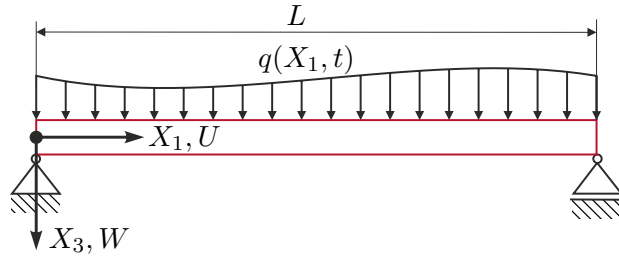


Abbildung 1.21: Gelenkig gelagerter Balken.

$$U_1(\mathbf{X}, t) = -X_3 \frac{\partial W}{\partial X_1}, \quad U_2(\mathbf{X}, t) = 0, \quad U_3(\mathbf{X}, t) = W(X_1, t), \quad (1.248)$$

wobei $W(X_1, t)$ die Verschiebung der Balkenachse in Richtung x_3 ist. Ferner wird der lineare Zusammenhang $\bar{\sigma}_{11} = E\bar{\varepsilon}_{11}$ vorausgesetzt. Die einzige, nicht verschwindende Verzerrungen ist

$$\bar{\varepsilon}_{11} = -X_3 \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \quad (1.249)$$

und die externe und interne virtuelle Arbeit lautet mit $d\mathcal{V} = d\mathcal{A} dX_1$

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_0^L q(X_1, t) \delta W(X_1, t) dX_1 \quad (1.250a)$$

$$\delta \Pi_{\text{int}} = \int_0^L \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11} d\mathcal{A} dX_1 = \int_0^L \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} X_3 \frac{\partial^2 \delta W}{\partial X_1^2} d\mathcal{A} dX_1 \quad (1.250b)$$

$$= \int_0^L EI_{22}(X_1) \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial X_1^2} dX_1, \quad (1.250c)$$

wobei

$$\tau_{11} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\sigma}_{11} X_3 d\mathcal{A} = E \int_{\mathcal{A}} X_3^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} d\mathcal{A} = EI_{22}(X_1) \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} \quad (1.251)$$

der Betrag des Biegemoments um die 2-Achse mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I_{22}(X_1) = \int_{\mathcal{A}} X_3^2 d\mathcal{A} \quad (1.252)$$

ist. Die virtuelle kinetische Energie lautet

$$\delta \mathcal{T} = \int_0^L \rho_0(X_1) \mathcal{A}(X_1) \dot{W}(X_1, t) \delta \dot{W}(X_1, t) dX_1. \quad (1.253)$$

1.7.4 Hamilton-Prinzip

In der Variationsrechnung stellt man sich die Frage, wie ein *Wirkungsintegral*

$$J(\mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) dt \quad (1.254)$$

mit der Anfangszeit t_0 und der Endzeit t_1 minimiert werden kann. Für eine gegebene Verschiebung $\mathbf{U}$ ist der Ausdruck $F(t, \mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ nur von der Zeit t abhängig und es kann über t integriert werden. Der Wert von J hängt von der Trajektorie $\mathbf{U}(t)$ im Zeitraum $[t_0, t_1]$ ab, nicht aber von der Zeit t selbst. $J(\mathbf{U})$ ist also ein Funktional in Abhängigkeit von $\mathbf{U}$.

Bemerkung 1.9. Eine formale Definition eines Funktionals würde umfangreiche Kenntnisse der Funktionalanalysis voraussetzen. Zusammenfassend kann man jedoch sagen, dass eine stetige Abbildung zwischen normierten Vektorräumen stetiger Operator heißt. Ist der Bildraum der Skalarkörper, sagt man Funktional anstatt Operator. Man spricht von einem linearen Funktional (es gilt Additivität und Homogenität) wenn

$$J(c_1 \mathbf{U} + c_2 \mathbf{V}) = c_1 J(\mathbf{U}) + c_2 J(\mathbf{V}) \quad (1.255)$$

gilt. Hierbei bezeichnen c_1 und c_2 zwei Konstanten und $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ zwei Variablen.

Um das Wirkungsintegral (1.254) zu minimieren, muss die erste Variation des Funktionals (1.254) berechnet werden. Sie kann als Richtungsableitung (Gâteaux Ableitung) bestimmt werden, vgl. Definition 1.13. Bezeichnet (1.254) ein Funktional auf dem Zeitintervall $[t_0, t_1]$, so schreibt man für die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{U}; \delta \mathbf{U}) &= \left. \frac{d}{d\eta} J(\mathbf{U} + \eta \delta \mathbf{U}) \right|_{\eta=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{d\eta} F(t, \mathbf{U} + \eta \delta \mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}} + \eta \delta \dot{\mathbf{U}}) \right|_{\eta=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \delta \dot{\mathbf{U}} \right] dt. \end{aligned} \quad (1.256)$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Minimum eines Funktionals lassen sich nun wie folgt formulieren.

Satz 1.5 (Notwendige Bedingungen erster Ordnung). Angenommen $\mathbf{U}^* \in \mathcal{U}$ ist ein (lokales) Minimum des Funktionals J , welches in einer Teilmenge $\mathcal{U}$ eines normierten linearen Vektorraums $(\mathcal{U}, \|\cdot\|)$ definiert ist. Dann gilt

$$\delta J(\mathbf{U}^*; \delta \mathbf{U}) = 0 \quad (1.257)$$

für alle zulässigen Richtungen $\delta \mathbf{U}$ an der Stelle $\mathbf{U}^*$. Man nennt dabei eine Richtung $\delta \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \delta \mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ an der Stelle $\mathbf{U}^*$ zulässig, wenn

(a) $\delta J(\mathbf{U}^*; \delta \mathbf{U})$ existiert und

(b) $\mathbf{U}^* + \eta \delta \mathbf{U} \in \mathcal{U}$ für alle $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt.

Bedingung (b) impliziert, dass $\mathbf{U}^*$ im Inneren von $\mathcal{U}$ zu liegen kommt.

Da $\mathbf{U}^*$ ein Minimum ist, muss wegen Satz 1.5

$$\delta J(\mathbf{U}^*; \delta \mathbf{U}) = \int_{t_0}^{t_1} \delta F dt = 0 \quad (1.258)$$

gelten. Führt man für den zweiten Summanden in (1.256) eine partielle Integration durch, so erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \delta \dot{\mathbf{U}} \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) \right] \delta \mathbf{U} dt + \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \delta \mathbf{U} \right]_{t_0}}_{=0} = 0. \quad (1.259)$$

Es werden nur Variationen $\delta \mathbf{U}$ zugelassen, die an den zeitlichen Rändern t_0 und t_1 verschwinden. Dies wurde in (1.259) durch Verwendung von $\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{0}$ und $\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}, t_1) = \mathbf{0}$ ausgenutzt. Wählt man nun für ein festes $i = 1, \dots, n$ die Variation $\delta \mathbf{U} = [\delta U_1 \ \dots \ \delta U_n]^T$ so, dass $\delta U_j = 0$ für $j \neq i$ und $\delta U_i(t_0) = \delta U_i(t_1) = 0$ gilt, dann ergibt sich

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial U_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{U}_i} \right) \right] \delta U_i dt = 0. \quad (1.260)$$

Lemma 1.2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Angenommen $g(t)$ ist eine stückweise stetige Funktion auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ und es gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t) \delta U_i(t) dt = 0 \quad (1.261)$$

für alle stückweise stetigen Funktionen $\delta U_i(t)$ im Intervall $[t_0, t_1]$, dann folgt fast überall (abgesehen von einer abzählbaren Menge von Punkten) $g(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgen unmittelbar die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.262)$$

Das *Hamilton-Prinzip* (Prinzip der stationären Wirkung) basiert auf der Annahme, dass ein dynamisches System anhand der kinetischen und potentiellen Energie charakterisiert werden kann. Es besagt, dass ein dynamisches System sich in der Form bewegt, dass seine *Wirkung* minimiert wird, d. h. es gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (1.263)$$

Der Integrand in (1.263) kann als *Variation der Lagrange Funktion* in der Form

$$\delta L = \delta T - \delta W \quad (1.264)$$

aufgefasst werden. Dabei ist δT die virtuelle kinetische Energie (1.242) und $\delta W = \delta \Pi_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}}$ die Differenz der virtuellen internen und externen Energie nach (1.237) und (1.238), die auch als *virtuelle totale potentielle Energie* bezeichnet wird. Es kann nun gezeigt werden, dass das Hamilton-Prinzip (1.263) auf die Anfangs-Randwertaufgabe (1.231) führt. Setzt man in das Hamilton-Prinzip (1.263) die Lagrange Funktion (1.264) ein, erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}}) \, dt = 0 . \quad (1.265)$$

Die erste Variation der Lagrange Funktion lautet mit der virtuellen kinetischen Energie (1.242) bzw. der internen und externen virtuellen Arbeit (1.238) und (1.237)

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \dot{\mathbf{U}}, \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle \, dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) \, dV \\ & + \int_{\Omega_0} \langle \rho_0 \mathbf{F}_b, \delta \mathbf{U} \rangle \, dV + \int_{\partial \Omega_T} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \delta \mathbf{U} \rangle \, dA . \end{aligned} \quad (1.266)$$

Anhand der Identität (Produktregel)

$$P_{aA} \frac{\partial \delta U_a}{\partial X_A} = \frac{\partial}{\partial X_A} (P_{aA} \delta U_a) - \frac{\partial P_{aA}}{\partial X_A} \delta U_a \quad (1.267)$$

bzw.

$$\mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) = \text{Div}(\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{U}) - \langle \text{Div}(\mathbf{P}), \delta \mathbf{U} \rangle \quad (1.268)$$

findet man mit dem Divergenztheorem (1.3)

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{U}) \, dV = \int_{\partial \Omega_T} \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \delta \mathbf{U} \rangle \, dA - \int_{\Omega_0} \langle \text{Div}(\mathbf{P}), \delta \mathbf{U} \rangle \, dV . \quad (1.269)$$

Wird die virtuelle kinetische Energie (1.247) bezüglich der Zeit partiell integriert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt &= \int_{\Omega_0} \left[\int_{t_0}^{t_1} \langle \rho_0 \dot{\mathbf{U}}, \delta \dot{\mathbf{U}} \rangle \, dt \right] \, dV \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\left[\langle \rho_0 \dot{\mathbf{U}}, \delta \mathbf{U} \rangle \right]_{t_1}^{t_0} - \int_{t_0}^{t_1} \langle \rho_0 \ddot{\mathbf{U}}, \delta \mathbf{U} \rangle \, dt \right] \, dV . \end{aligned} \quad (1.270)$$

Da für eine zulässige Variation $\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}, t_0) = \delta \mathbf{U}(\mathbf{X}, t_1) = 0$ gilt, verschwinden die Randterme. Insgesamt lautet die integrale Darstellung damit

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_0} \left(\langle -\rho_0 \ddot{\mathbf{U}} + \text{Div}(\mathbf{P}) + \rho_0 \mathbf{F}_b, \delta \mathbf{U} \rangle \right) \, dV \right] \, dt . \quad (1.271)$$

Wie es sein muss, entspricht dies gerade dem Zeitintegral des Ausdrucks (1.236) (nach Einsetzen von (1.235)). Die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung 1.2 auf (1.271) liefert folglich die Anfangs-Randwertaufgabe (1.231).

Beispiel 1.10 (Bewegungsgleichung eines Zug/Druck-Stabes). Für den Stab aus Beispiel 1.8 soll nun die Bewegungsgleichung hergeleitet werden. Um die Notation zu vereinfachen wird $X_1 = X$ gesetzt. Partielle Integration der virtuellen internen Arbeit (1.245c) ergibt

$$\delta \Pi_{\text{int}} = \int_0^L E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \delta U}{\partial X} dX \quad (1.272a)$$

$$= \left[E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \delta U \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial X} \left(E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \right) \delta U dX . \quad (1.272b)$$

Wird die virtuelle kinetische Energie (1.247) bezüglich der Zeit partiell integriert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_0^L \left[\int_{t_0}^{t_1} \rho_0 \mathcal{A} \dot{U} \delta \dot{U} dt \right] dX \\ &= \int_0^L \left[\left[\rho_0 \mathcal{A} \dot{U} \delta U \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho_0 \mathcal{A} \ddot{U} \delta U dt \right] dX \end{aligned} \quad (1.273)$$

und, da für eine zulässige Variation $\delta U(X_1, t_0) = \delta U(X_1, t_1) = 0$ gilt, folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^L \rho_0(X) \mathcal{A}(X) \ddot{U}(X, t) \delta U(X, t) dX \right] dt . \quad (1.274)$$

Die externe virtuelle Arbeit lautet

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L q(X, t) \delta U(X, t) dX + f(t) \delta U(L, t) dt . \quad (1.275)$$

Insgesamt findet man durch Anwendung des Hamilton-Prinzips (1.263) die integrale Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left[-\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \ddot{U}(X, t) + \frac{\partial}{\partial X} \left(E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q(X, t) \right] \delta U(X, t) dX \right. \\ &\quad \left. - \left[E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \delta U(X, t) \right]_0^L + f(t) \delta U(L, t) \right\} dt = 0 . \end{aligned} \quad (1.276)$$

Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung liefert die Bewegungsgleichungen in der starken Form

$$\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \ddot{U}(X, t) = \frac{\partial}{\partial X} \left(E\mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \right) + q(X, t) \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.277)$$

mit der Bedingung

$$EA(0) \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} \delta U(0, t) + \left(-EA(L) \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=L} + f(t) \right) \delta U(L, t) = 0 . \quad (1.278)$$

Da der Zug/Druck-Stab am Rand $X = 0$ eingespannt ist, d. h. die (geometrische) Randbedingung

$$U(0, t) = 0 \quad (1.279)$$

zu erfüllen ist, muss $\delta U(0, t) = 0$ gelten. Die Variation $\delta U(L, t)$ kann grundsätzlich beliebig sein, so dass aus (1.278) die (natürliche) Randbedingung

$$EA(L) \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=L} = f(t) \quad (1.280)$$

folgt.

Die partielle Differentialgleichung (1.277) hat die Ordnung zwei und wird auch als (lineare) Wellengleichung bezeichnet. Andere elastische Strukturen, wie etwa ein Torsionsstab oder eine schwingende Saite, können ebenfalls mithilfe einer strukturell ähnlichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden (siehe Abschnitte 1.9.2 und 1.9.7).

Beispiel 1.11 (Bewegungsgleichung eines Euler-Bernoulli Biegebalkens). Betrachtet wird der Euler-Bernoulli Biegebalken aus Beispiel 1.9, für welchen die Bewegungsgleichung hergeleitet werden sollen. Es gilt wieder $X_1 = X$. Partielle Integration der virtuellen internen Arbeit (1.250c) ergibt

$$\delta \Pi_{\text{int}} = \int_0^L EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial X^2} dX \quad (1.281a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial \delta W}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \delta W \right]_0^L \\ &\quad + \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \right] \delta W dX . \end{aligned} \quad (1.281b)$$

Insgesamt findet man durch Anwendung des Hamilton-Prinzips (1.263) die integrale Darstellung

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left[-\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \ddot{W}(X, t) - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + q(X, t) \right] \delta W dX \right. \\ &\quad \left. - \left[EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial \delta W}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \delta W \right]_0^L \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.282)$$

und mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Bewegungsgleichung in der starken Form

$$\rho_0(X)\mathcal{A}(X)\ddot{W}(X,t) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EI_{22}(X) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) = q(X,t) \quad \text{für } X \in (0,L) . \quad (1.283)$$

Für die verbleibenden Randterme in (1.282) gilt aufgrund der beiseitigen gelenkigen Lagerung (geometrische Randbedingung) $\delta W(0,t) = 0$ und $\delta W(L,t) = 0$, wohingegen $\delta \partial W(X,t)/\partial X|_{X=0}$ und $\delta \partial W(X,t)/\partial X|_{X=L}$ beliebige Werte annehmen können. Hieraus folgen die Randbedingungen

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \quad \text{für } X = 0, L , \quad (1.284)$$

welche ein verschwindendes Biegemoment an den Rändern erzwingen.

Die partielle Differentialgleichung (1.283) wird auch als biharmonische Differentialgleichung bezeichnet.

1.7.5 Freie Schwingung und Eigenwertproblem

Unter einer freien Schwingung versteht man die Schwingung einer elastischen Struktur ohne Einwirkung einer externen Kraft, die nur durch von Null verschiedene Anfangsbedingungen hervorgerufen werden. Im Falle von linear elastischem Systemverhalten (lineare partielle Differentialgleichung und lineare Randbedingungen) kann die Berechnung von freien Schwingungen basierend auf Eigenwertproblemen erfolgen. Anhand von zwei Beispielen werden daher nachfolgend Eigenwertprobleme von elastischen Strukturen formuliert.

Beispiel 1.12 (Freie Schwingung und Eigenwertproblem eines beidseitig eingespannten Zug/Druck-Stabes). Im Folgenden wird die Lösung der Differentialgleichung (1.277) für $f(t) = 0$ und $q(X,t) = 0$, einen konstanten Querschnitt $\mathcal{A}$ und eine konstante Massendichte ρ_0 gesucht. Es wird dazu angenommen, dass der Stab an beiden Enden eingespannt ist. Im Speziellen wird eine Lösung betrachtet, für welche der Stab insofern eine synchrone Bewegung durchführt, als das Verhältnis der Verschiebungen an zwei beliebigen Punkten konstant ist. Die Lösung von (1.277) ist dann separierbar in der Ortsvariablen X und der Zeit t , so dass diese in der Form

$$U(X,t) = \alpha(t)\phi(X) \quad (1.285)$$

darstellbar ist, wobei $\phi(X)$ nur von der Ortsvariablen X und $\alpha(t)$ nur von der Zeit t abhängt. Setzt man den sogenannten *Separationsansatz* (1.285) in die Differentialgleichung

$$\rho_0 \mathcal{A} \ddot{U}(X,t) = E \mathcal{A} \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} \quad (1.286)$$

ein, vgl. (1.277), so folgt unter den getroffenen Annahmen

$$\rho_0 \mathcal{A} \phi(X) \ddot{\alpha}(t) = \alpha(t) E \mathcal{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.287a)$$

$$\alpha(t) \phi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha(t) \phi(L) = 0 . \quad (1.287b)$$

Dividiert man (1.287a) durch $\rho_0 \alpha(t) \phi(X)$ und führt die Wellengeschwindigkeit c mit $c^2 = E/\rho_0$ ein, findet man

$$\frac{1}{\alpha(t)} \ddot{\alpha}(t) = c^2 \frac{1}{\phi(X)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \quad \text{für } X \in (0, L) . \quad (1.288)$$

Die linke Seite von (1.288) hängt nur von der Zeit und die rechte Seite nur vom Ort ab. Die Ortsvariable und die Zeit sind jetzt unabhängige Variablen und (1.288) kann nur erfüllt sein, wenn die beiden Seiten konstant sind. Daher führt man eine positive Konstante ω ein und setzt die linke Seite von (1.288) gleich $-\omega^2$, womit man eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \alpha(t) = 0 \quad (1.289)$$

erhält. Die Differentialgleichung (1.289) ist ungedämpft und weist damit rein konjugiert komplexe Eigenwerte bei $s_{1,2} = \pm i\omega$ auf. Die Fundamentallösung der Differentialgleichung (1.289) lautet

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) , \quad (1.290)$$

wobei A und B unbekannte Konstanten sind. Setzt man nun die rechte Seite von (1.288) ebenfalls gleich $-\omega^2$ und eliminiert man $\alpha(t)$ in den Randbedingungen (1.287b), so ergibt sich mit $\beta^2 = \omega^2/c^2$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \beta^2 \phi(X) = 0 \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.291a)$$

$$\phi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \phi(L) = 0 . \quad (1.291b)$$

Die Gleichungen (1.291) repräsentieren das *Eigenwertproblem* für einen beidseitig eingespannten Zug/Druck-Stab. Die Fundamentallösung dieses Problems ist mit den unbekannten Konstanten a und b gegeben durch

$$\phi(X) = a \cos(\beta X) + b \sin(\beta X) . \quad (1.292)$$

Die Randbedingung $\phi(0) = 0$ wird für $a = 0$ eingehalten und die Randbedingung $\phi(L) = 0$ kann nur nichttrivial erfüllt werden, wenn die sogenannte *charakteristische Gleichung*

$$\sin(\beta L) = 0 \quad (1.293)$$

erfüllt ist. Mit der Bedingung $j\pi = \beta L$, $j = 1, 2, \dots$ lässt anhand der charakteristischen Gleichung auf

$$\beta_j = \frac{\omega_j}{c} = \frac{j\pi}{L}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.294)$$

und folglich

$$\omega_j = \frac{j\pi c}{L}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.295)$$

schließen. Die Frequenzen ω_j werden als *Eigenfrequenzen* und die zugehörigen Funktionen

$$\phi_j(X) = b_j \sin\left(\frac{j\pi}{L}X\right), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.296)$$

als *Eigenfunktionen* oder *Eigenmoden* bezeichnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind und

$$\int_0^L \phi_i(X) \phi_j(X) dX = \begin{cases} L_j = \text{konst.} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1.297)$$

gilt. Die Amplitude L_j ist von den Koeffizienten b_j abhängig. Für eine Normierung der Eigenfunktionen ($L_j = 1$) wird daher

$$\int_0^L \phi_j^2(X) dX = 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.298)$$

festgelegt, womit man die orthonormalen Eigenfunktionen

$$\phi_j(X) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi}{L}X\right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.299)$$

erhält. Die Lösung kann nun als Superposition aller Eigenfunktionen angegeben werden

$$U(X, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \phi_j(X) = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\omega t) + B_j \sin(\omega t)) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi}{L}X\right). \quad (1.300)$$

Um die Konstanten A_j und B_j zu berechnen, müssen die Anfangsbedingungen $U(X, t = 0) = U_0(X)$ und $\dot{U}(X, t = 0) = \dot{U}_0(X)$ berücksichtigt werden. Eingesetzt in die Lösung (1.300) ergibt sich

$$U_0(X) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \phi_j(X), \quad \dot{U}_0(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j B_j \phi_j(X). \quad (1.301)$$

Bildet man das innere Produkt von (1.301) mit $\phi_i(X)$, so erhält man aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen die Koeffizienten

$$A_j = \int_0^L U_0(X) \phi_j(X) dX, \quad B_j = \frac{1}{\omega_j} \int_0^L \dot{U}_0(X) \phi_j(X) dX, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.302)$$

Für unterschiedliche Randbedingungen ergeben sich unterschiedliche charakteristische Gleichung, Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen. Eine Zusammenstellung einiger Möglichkeiten ist in Tabelle 1.1 angegeben. Für ein eingespanntes Ende eines Stabes gilt $U(X, t) = 0$, $X = 0, L$ und für ein freies Ende (ohne externe Last) gilt $\partial U(X, t)/\partial X = 0$, $X = 0, L$.

Randbedingungen bei $X = 0, X = L$	Eigenfrequenzen	Eigenfunktionen
eingespannt, eingespannt	$\omega_j = \frac{j\pi c}{L}$	$\phi_j(X) = \sin\left(\frac{j\pi}{L} X\right)$
frei, frei	$\omega_j = \frac{j\pi c}{L}$	$\phi_j(X) = \cos\left(\frac{j\pi}{L} X\right)$
frei, eingespannt	$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c}{2L}$	$\phi_j(X) = \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2L} X\right)$
eingespannt, frei	$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c}{2L}$	$\phi_j(X) = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2L} X\right)$

Tabelle 1.1: Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen eines Stabes.

Beispiel 1.13 (Freie Schwingung und Eigenwertproblem eines Euler-Bernoulli Biegebalkens). Man betrachtet zunächst einen beidseitig gelenkig gelagerten Euler-Bernoulli Biegebalken mit konstantem Flächenträgheitsmoment I_{22} und konstantem Querschnitt $\mathcal{A}$. Dies führt gemäß (1.283) auf die Differentialgleichung

$$\rho_0 \mathcal{A} \ddot{W}(X, t) + EI_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} = 0 \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.303)$$

mit den Randbedingungen

$$W(X, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad \text{für } X = 0, L. \quad (1.304)$$

Der Separationsansatz

$$W(X, t) = \alpha(t) \phi(X) \quad (1.305)$$

führt auf die Zeitdifferentialgleichungen

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \alpha(t) = 0 \quad (1.306)$$

und das Eigenwertproblem

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} - k^4 \phi(X) = 0 \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.307)$$

$$\phi(X) = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{für } X = 0, L, \quad (1.308)$$

wobei die Abkürzung $k^4 = \omega^2 \rho_0 \mathcal{A} / (EI_{22})$ eingeführt wurde. Die Fundamentallösung dieses Eigenwertproblems lautet

$$\phi(X) = a_1 \sin(kX) + a_2 \cos(kX) + a_3 \sinh(kX) + a_4 \cosh(kX) \quad (1.309)$$

und mit den Randbedingungen findet man

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin(kL) & \cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.310)$$

Nichttriviale Lösungen von (1.310) ergeben sich, wenn die Determinante von $\mathbf{A}$ verschwindet, d. h.

$$\det(\mathbf{A}) = \sin(kL) \sinh(kL) = 0 \quad (1.311)$$

gilt. Offensichtlich ist die charakteristische Gleichung (1.311) für $k_j L = j\pi$, $j = 1, 2, \dots$ erfüllt. Die Eigenfrequenzen lauten somit

$$\omega_j = (j\pi)^2 \sqrt{\frac{EI_{22}}{\rho_0 \mathcal{A} L^4}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.312)$$

und für die Eigenfunktionen findet man mit $a_{1j} = \text{konst.}$, $a_{2j} = a_{3j} = a_{4j} = 0$ und einer entsprechenden Normierung

$$\phi(X) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi}{L} X\right). \quad (1.313)$$

Die Lösung kann wieder durch Superposition aller Eigenfunktionen formuliert werden.

Es soll noch kurz eine weitere Lagerung betrachtet werden. Für einen einseitig eingespannten Euler-Bernoulli Balken mit konstantem Flächenträgheitsmoment I_{22} und konstantem Querschnitt $\mathcal{A}$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\rho_0 \mathcal{A} \ddot{W}(X, t) + EI_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} = 0 \quad \text{für } X \in (0, L) \quad (1.314)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(X, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial X} = 0 \quad \text{für } X = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{\partial w^3}{\partial X^3} = 0 \quad \text{für } X = L. \end{aligned} \quad (1.315)$$

Die Erfüllung dieser Randbedingungen durch die Fundamentallösung (1.309) führt auf die charakteristische Gleichung

$$1 + \cos(kL) \cosh(kL) = 0. \quad (1.316)$$

Sie ist nicht analytisch lösbar. Ihre numerische Lösung lautet $k_1L = 1.875$, $k_2L = 4.694$, $k_3L = 7.855$, ... und die Eigenfrequenzen sind in der Form

$$\omega_j = (k_jL)^2 \sqrt{\frac{EI_{22}}{\rho_0 AL^4}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.317)$$

gegeben.

Wie im vorangegangenen Beispiel gezeigt wurde, ergeben sich für unterschiedliche Randbedingungen unterschiedliche charakteristische Gleichung, Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen. Eine Zusammenstellung der unterschiedlichen Möglichkeiten ist in Tabelle 1.2 gegeben. Für ein eingespanntes Ende eines Balkens gilt $W(X, t) = 0$, $\partial W(X, t)/\partial X = 0$, $X = 0, L$, für ein freies Ende $\partial^2 W(X, t)/\partial X^2 = 0$, $\partial W^3(X, t)/\partial X^3 = 0$, $X = 0, L$ und für ein gelenkig gelagertes Ende $W(X, t) = 0$, $\partial W^2(X, t)/\partial X^2 = 0$, $X = 0, L$.

Randbedingungen bei $X = 0, X = L$	Charakteristische Gleichung $\omega_j = (k_jL)^2 \sqrt{\frac{EI_{22}}{\rho_0 AL^4}}, \quad j = 1, 2, \dots$
gelenkig, gelenkig	$\sin(k_jL)$
eingespannt, frei	$1 + \cos(k_jL) \cosh(k_jL)$
frei, gelenkig	$\tan(k_jL) - \tanh(k_jL)$
eingespannt, eingespannt	$1 - \cos(k_jL) \cosh(k_jL)$
frei, frei	$1 - \cos(k_jL) \cosh(k_jL)$

Tabelle 1.2: Charakteristische Gleichung und Eigenfrequenzen des Euler-Bernoulli Balkens.

1.7.6 Finit-dimensionale Approximation elastischer Strukturen

Die Bewegungsgleichungen elastischer Strukturen stellen partielle Differentialgleichungen dar. Für eine dynamische Simulation müssen diese finit-dimensional approximiert werden. Eine gängige Approximationsmethode dafür ist die Ritz-Methode.

Ritz-Methode

Die Ritz-Methode basiert auf der Variationsformulierung. Dabei wird ein Lösungsansatz als Linearkombination von, dem Problem angepassten, Ansatzfunktionen vorgegeben. Man approximiert $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}^n$ in der schwachen Form (1.265) anhand eines Ansatzes der Art

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \approx \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{10}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \phi_{n0}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}}_{\phi_0(\mathbf{X})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \alpha_1(t), \phi_1(\mathbf{X}) \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_n(t), \phi_n(\mathbf{X}) \rangle \end{bmatrix}}_{\phi_h(\mathbf{X})}, \quad (1.318)$$

mit den Vektoren $\alpha_j(t) = [\alpha_{j1} \ \dots \ \alpha_{jN}]^T$, $\phi_0(t)$ und $\phi_j(t) = [\phi_{j1} \ \dots \ \phi_{jN}]^T$, $j = 1, \dots, n$. Diese beinhalten die Koeffizienten $\alpha_{ji}(t)$ und die Ansatzfunktionen $\phi_{ji}(X)$ mit $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, n$. Durch die Einführung des Ansatzes (1.318) wurde die Ortscharakteristik festgelegt, womit nur noch die Koeffizienten α_i variiert werden können. Die erste Variation der Verschiebung lautet damit

$$\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \approx \delta \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \delta \alpha_1(t), \phi_1(\mathbf{X}) \rangle \\ \vdots \\ \langle \delta \alpha_n(t), \phi_n(\mathbf{X}) \rangle \end{bmatrix}}_{\phi_h(\mathbf{X})}. \quad (1.319)$$

Ziel ist es, die Koeffizienten der Linearkombination (1.318) so zu berechnen, dass die Wirkung

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L(t, \hat{\mathbf{U}}, \dot{\hat{\mathbf{U}}}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n) dt = 0 \quad (1.320)$$

mit der Approximation (1.318) minimiert wird. Damit die Ritz-Methode eine konvergente Approximation liefert müssen folgende Anforderungen erfüllt sein [1.6]:

- (i) Die Ansatzfunktionen ϕ_{ji} müssen stetig und vollständig⁵ sein.
- (ii) Die Ansatzfunktionen ϕ_{ji} , $i = 0, 1, \dots, N$ müssen linear unabhängig sein.
- (iii) Die Ansatzfunktionen ϕ_{ji} , $i = 1, 2, \dots, N$ müssen die homogenen geometrischen Randbedingungen erfüllen.
- (iv) Die Ansatzfunktionen ϕ_{j0} , $j = 0, 1, \dots, n$ müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

Mithilfe der Ansatzfunktionen ϕ_{j0} kann die stationäre Lösung dargestellt werden. Oft ist es einfach möglich, diese direkt analytisch aus der starken Form (1.231) zu bestimmen. Für die Ansatzfunktionen ϕ_{ji} mit $j \geq 1$ können z. B. Eigenfunktionen einer vereinfachten partiellen Differentialgleichung (z. B. durch Annahme eines konstanten Querschnitts) oder allgemeine Polynome angesetzt werden.

⁵Eine Menge von Ansatzfunktionen $\{\phi_{ij}\}$ wird als vollständig bezeichnet, wenn es möglich ist, die analytische Lösung der Differentialgleichung mithilfe der Ansatzfunktionen darzustellen.

Beispiel 1.14 (Ritz-Methode für einen einseitig eingespannten Zug/Druck-Stab). Die Ritz-Methode soll für den einseitig eingespannten Zug/Druck-Stab aus Beispiel 1.8 bzw. 1.10 angewendet werden. Das Hamilton-Prinzip führt (für $q(X, t) = 0$) auf die schwache Form

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left(\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \ddot{U}(X, t) \delta U(X, t) + E \mathcal{A}(X) \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \delta U}{\partial X} \right) dX - f(t) \delta U(L, t) \right\} dt = 0, \quad (1.321)$$

siehe (1.276). Wird ein Ansatz der Form

$$U(X, t) \approx \hat{U}(X, t) = \phi_0(X) + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \phi_j(X) \quad (1.322)$$

gewählt, so lautet dessen erste Variation

$$\delta U(X, t) \approx \delta \hat{U}(X, t) = \sum_{j=1}^N \delta \alpha_j(t) \phi_j(X). \quad (1.323)$$

Das Einsetzen von (1.322) und (1.323) in (1.321) führt auf

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left[\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \left(\sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \phi_j(X) \right) \left(\sum_{i=1}^N \delta \alpha_i(t) \phi_i(X) \right) \right] dX \right. \\ & + \int_0^L \left[E \mathcal{A}(X) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial X} + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial X} \right) \left(\sum_{i=1}^N \delta \alpha_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial X} \right) \right] dX \\ & \left. - f(t) \sum_{i=1}^N \delta \alpha_i(t) \phi_i(L) \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.324)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^N \delta \alpha_i(t) \left[\sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \underbrace{\int_0^L (\rho_0(X) \mathcal{A}(X) \phi_i(X) \phi_j(X)) dX}_{=\mathbf{D}_{ij}} \right. \right. \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \underbrace{\int_0^L \left(E \mathcal{A}(X) \frac{\partial \phi_i}{\partial X} \frac{\partial \phi_j}{\partial X} \right) dX}_{=\mathbf{K}_{ij}} \\ & \left. \left. + \int_0^L \left(E \mathcal{A}(X) \frac{\partial \phi_0}{\partial X} \frac{\partial \phi_i}{\partial X} \right) dX - f(t) \phi_i(L) \right] \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (1.325)$$

$= -\mathbf{f}_i(t)$

Die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung liefert die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\mathbf{D}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.326)$$

mit den Freiheitsgraden $\boldsymbol{\alpha}^T(t) = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_N]$, der konstanten Massenmatrix $\mathbf{D}$, der konstanten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und dem Vektor $\mathbf{f}(t)$. Werden die Ansatzfunktionen ϕ_i orthogonal gewählt, so ist die konstante Massenmatrix $\mathbf{D}$ diagonal, vgl. (1.297). Damit die Ansatzfunktion $\phi_0(X)$ die geometrische Randbedingung $U(X=0, t) = 0$ erfüllt, kann z. B. $\phi_0(X) = 0$ gewählt werden. Für die restlichen Ansatzfunktionen ist ein Polynomansatz der Form

$$\phi_j(X) = \left(\frac{X}{L}\right)^j, \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial X} = \frac{j}{L} \left(\frac{X}{L}\right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.327)$$

sinnvoll. Dieser erfüllt die (homogene) geometrische Randbedingung $U(X=0, t) = 0$.

1.8 Einfache Beispiele zur Elastostatik von geraden Stäben

Im vorliegenden Abschnitt werden einige besonders einfache statisch belastete gerade Linientragwerke (gerade Stäbe) untersucht. Es wird dabei stets von linear elastischen Festkörperkontinua ausgegangen. So nicht anders angegeben, ist das Material homogen und isotrop mit den Materialparametern Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν und es werden nur kleine Verschiebungen u_i zugelassen. Folglich kann mit linearisierten Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen gerechnet werden und eine Unterscheidung zwischen Referenzlage und verformter Lage kann entfallen.

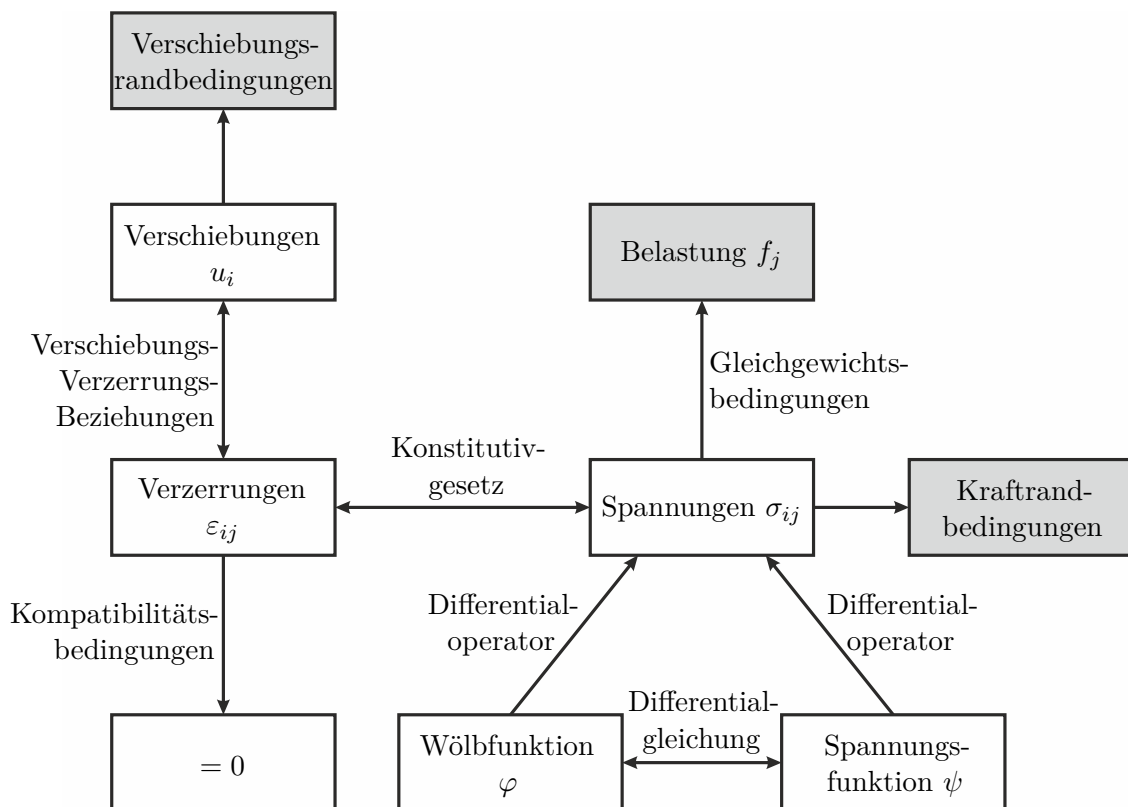


Abbildung 1.22: Tonti-Diagramm für ein elastostatisches kontinuumsmechanisches Problem.

Zur Lösung derartiger kontinuumsmechanischer Problemstellungen sind eine Reihe von Gleichungen und Beziehungen nötig, wobei die meisten von ihnen bereits im Verlauf dieses Kapitels vorgestellt wurden. Der Übersichtlichkeit halber sind einige wichtige Zusammenhänge nochmals in Abbildung 1.22 in Form eines sogenannten *Tonti-Diagramms* dargestellt.

1.8.1 Schnittgrößen eines Stabes

Ein gerader entlang der Achse x_1 ausgerichteter Stab befindet sich im statischen Gleichgewicht. Wird der Stab nun in einer beliebigen Ebene $x_1 = \bar{x}_1 = \text{const.}$ auseinanderge-

schnitten, so verbleiben die beiden entstehenden Stabhälften jeweils für sich im statischen Gleichgewicht, wenn, wie in Abbildung 1.23 gezeigt, an den beiden entstehenden Schnittufern mit dem Querschnitt $\mathcal{A}$ (das muss kein einfach zusammenhängendes Gebiet sein) geeignete Kräfte und Momente aufgebracht werden. Diese Kräfte und Momente werden *Schnittgrößen* genannt und sind die Resultierenden der Spannungsvektoren im geschnittenen Querschnitt. Man betrachte zunächst das positive Schnittufer (Schnittufer I in Abbildung 1.23). An einem infinitesimalen Flächenelement $d\mathcal{A}$ dieses Querschnitts wirkt die Kraft $d\mathbf{F} = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]^T d\mathcal{A}$. Integration über die Querschnittsfläche liefert

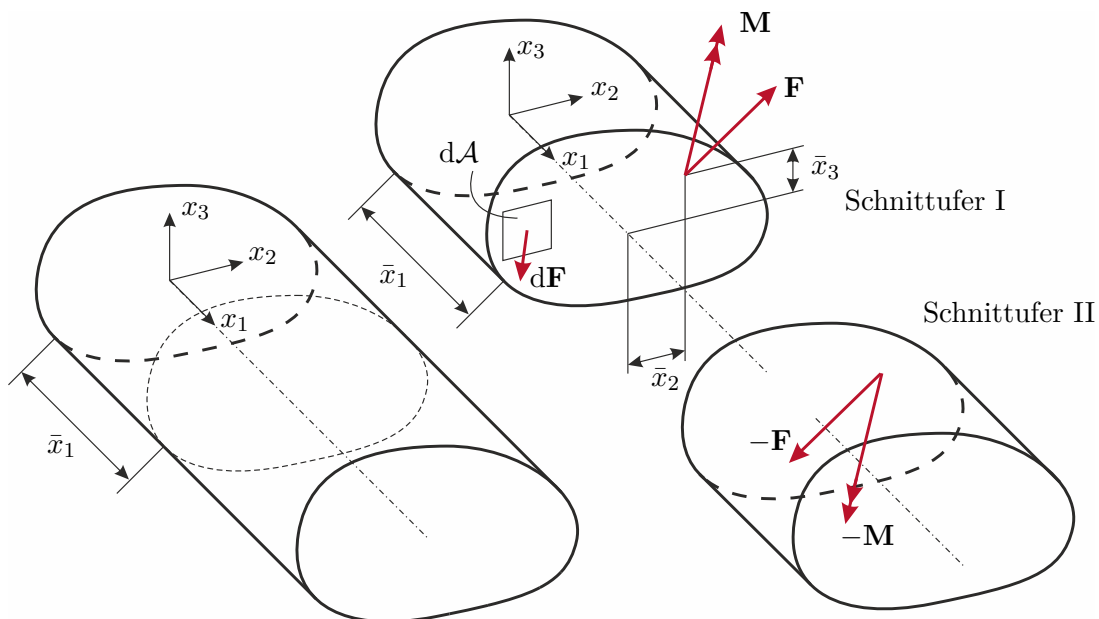


Abbildung 1.23: Schnittgrößen eines Stabes.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} d\mathcal{A} . \quad (1.328)$$

Die Kraft F_1 wird auch Normalkraft genannt. F_2 und F_3 werden als Querkkräfte bezeichnet. Bezüglich des Punktes $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]^T$ übt die in $d\mathcal{A}$ wirkende Kraft $d\mathbf{F}$ das Moment $d\mathbf{M} = [0, x_2 - \bar{x}_2, x_3 - \bar{x}_3]^T \times d\mathbf{F}$ aus. Integration über die Querschnittsfläche liefert

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} (x_2 - \bar{x}_2)\sigma_{13} - (x_3 - \bar{x}_3)\sigma_{12} \\ (x_3 - \bar{x}_3)\sigma_{11} \\ -(x_2 - \bar{x}_2)\sigma_{11} \end{bmatrix} d\mathcal{A} . \quad (1.329)$$

M_1 ist ein Torsionsmoment. M_2 und M_3 sind Biegemomente. Man beachte, dass die Werte von $\mathbf{M}$ grundsätzlich von der Wahl des jeweiligen Bezugspunktes (hier $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$) abhängen. Wie später noch gezeigt wird, werden die Biegemomente häufig auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogen.

Die Schnittgrößen zweier zusammengehöriger Schnittufer müssen im Gleichgewicht stehen. Daher sind an einem negativen Schnittufer (Schnittufer II in Abbildung 1.23) die Schnittgrößen mit negativem Vorzeichen definiert.

1.8.2 Zug/Druckbelastung eines geraden Stabes

Ein gerader entlang der Achse x_1 ausgerichteter Stab mit einem beliebigen homogenen Querschnitt $\mathcal{A}$ sei an seinen Enden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ gleichförmig mit der Normalspannung σ belastet (vgl. Abbildung 1.24). Darüber hinaus treten keine Einspannungen oder Belastungen auf.

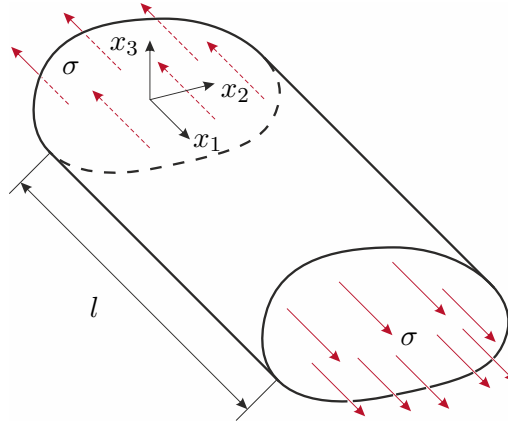


Abbildung 1.24: Stab mit Zug/Druck-Belastung.

In diesem Fall kann leicht gezeigt werden, dass für die Spannungen

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{i1} \delta_{j1} \quad (1.330)$$

gilt. Da sie konstant sind, erfüllen sie natürlich die Gleichgewichtsbedingungen (1.156). Aus dem Hookschen Gesetz (1.195) folgt für die Verzerrungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{E} ((1 + \nu) \delta_{i1} \delta_{1j} - \nu \delta_{ij}) . \quad (1.331)$$

Da auch sie konstant sind, sind die Kompatibilitätsbedingungen (1.117) automatisch erfüllt.

Für die Verzerrungsenergiedichte gemäß (1.202) folgt

$$\pi = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad (1.332)$$

und für die Verzerrungsenergie gemäß (1.211) erhält man

$$\Pi_{\text{int}} = \pi \mathcal{A} l = \frac{1}{2} N \varepsilon_{11} l = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^2 E \mathcal{A} l = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E \mathcal{A}} l . \quad (1.333)$$

Hierbei ist

$$N = F_1 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{11} d\mathcal{A} = \sigma \mathcal{A} = \varepsilon_{11} EA \quad (1.334)$$

die resultierende Zugkraft und EA die Zugsteifigkeit des Stabes.

Integration der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.112) für die Fälle $i = j$ mit ε_{ij} gemäß (1.331) liefert zunächst

$$u_1 = \frac{\sigma}{E} x_1 + f_1(x_2, x_3), \quad u_2 = -\nu \frac{\sigma}{E} x_2 + f_2(x_1, x_3), \quad u_3 = -\nu \frac{\sigma}{E} x_3 + f_3(x_1, x_2) \quad (1.335)$$

mit den noch zu bestimmenden Funktionen f_i . Für sie folgt aus den Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.112) für die Fälle $i \neq j$ mit ε_{ij} gemäß (1.331)

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} = f_4(x_3) \quad (1.336a)$$

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_5(x_2) \quad (1.336b)$$

$$\frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_6(x_1). \quad (1.336c)$$

Integration liefert

$$f_1(x_2, x_3) = x_2 f_4(x_3) + f_7(x_3), \quad f_2(x_1, x_3) = -x_1 f_4(x_3) + f_8(x_3) \quad (1.337a)$$

$$f_1(x_2, x_3) = x_3 f_5(x_2) + f_9(x_2), \quad f_3(x_1, x_2) = -x_1 f_5(x_2) + f_{10}(x_2) \quad (1.337b)$$

$$f_2(x_1, x_3) = x_3 f_6(x_1) + f_{11}(x_1), \quad f_3(x_1, x_2) = -x_2 f_6(x_1) + f_{12}(x_1). \quad (1.337c)$$

Daraus folgt, dass

$$f_1(x_2, x_3) = c_{11} x_2 x_3 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{10} \quad (1.338a)$$

$$f_2(x_1, x_3) = c_{22} x_1 x_3 + c_{21} x_1 + c_{23} x_3 + c_{20} \quad (1.338b)$$

$$f_3(x_1, x_2) = c_{33} x_1 x_2 + c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{30} \quad (1.338c)$$

gilt, wobei die Konstanten c_{i0} und c_{ij} noch zu bestimmen sind. Nach Einsetzen von (1.338) in (1.336) zeigt sich, dass die Konstanten c_{ij} eine schiefsymmetrische Matrix bilden, d. h. $c_{ij} = -c_{ji}$. In dieser Matrix können folglich drei Einträge frei gewählt werden. Auch die Konstanten c_{i0} können frei gewählt werden. Insgesamt bleiben also sechs frei wählbare Parameter übrig und für die Verschiebungen folgt

$$u_1 = \frac{\sigma}{E} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{10} \quad (1.339a)$$

$$u_2 = -\nu \frac{\sigma}{E} x_2 - c_{12} x_1 + c_{23} x_3 + c_{20} \quad (1.339b)$$

$$u_3 = -\nu \frac{\sigma}{E} x_3 - c_{13} x_1 - c_{23} x_2 + c_{30}. \quad (1.339c)$$

Die sechs frei wählbaren Parameter beschreiben genau die Freiheitsgrade einer Starrkörperbewegung, welche natürlich keine Auswirkung auf die Spannungen und Verzerrungen des Bauteils haben. Aus praktischer Sicht sind diese Freiheitsgrade ebenfalls nicht weiter von Relevanz, da meist eine entsprechende Einspannung für deren Sperrung sorgt.

Transformation des Spannungstensors

Aus dem Spannungstensor (1.330) folgt, dass die gewählten Koordinatenachsen gerade *Hauptachsen des Spannungstensors* sind. Man kann sich nun die Frage stellen, ob in dem Stab auch Schubspannungen wirken. Um dies zu beantworten, führt man ein gedrehtes Koordinatensystem mit den Koordinaten $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ und $\bar{x}_3$ ein. Dabei wird zuerst um den Winkel φ_2 um die Achse x_2 gedreht und dann um den Winkel φ_3 um die bereits gedrehte Achse x_3 (vgl. die in [1.7] beschriebenen Euler-Winkel). Die Drehmatrix zur Transformation von den neuen in die ursprünglichen Koordinaten lautet daher

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) & 0 \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2)\cos(\varphi_3) & -\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_3) & \sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 \\ -\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_3) & \sin(\varphi_2)\sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.340)$$

Die Komponenten R_{ij} von $\mathbf{R}$ entsprechen den Richtungskosinus zwischen den Koordinatenachsen x_i und $\bar{x}_j$. Für die Komponenten $\bar{\sigma}_{kl}$ des transformierten Spannungstensors $\bar{\sigma}$ gilt daher

$$\bar{\sigma}_{kl} = R_{ik}R_{jl}\sigma_{ij} \quad (1.341)$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R} \\ &= \sigma \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_2)\cos^2(\varphi_3) & -\cos^2(\varphi_2)\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_3) & \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2)\cos(\varphi_3) \\ -\cos^2(\varphi_2)\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_3) & \cos^2(\varphi_2)\sin^2(\varphi_3) & -\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2)\cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_3) & \sin^2(\varphi_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.342)$$

Abgesehen vom trivialen Spezialfall $\cos(\varphi_2) = 0$ treten also für beliebige Winkel φ_2 und φ_3 von Null verschiedene Schubspannungskomponenten auf. Offensichtlich ist $\sigma/2$ der maximal mögliche Absolutwert einer Schubspannungskomponente. Er tritt z. B. bei $\varphi_2 = \pi/4$ und $\varphi_3 = 0$ auf. Die maximale Schubspannung tritt also in einer Schnittebene auf, die zur Koordinatenachse x_1 um den Winkel $\pi/4$ geneigt ist.

Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern: Es seien die Koordinatenachsen x_1 , x_2 und x_3 Hauptachsen des Spannungstensors σ , d. h.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.343)$$

mit den zugehörigen Hauptnormalspannungen σ_i . Man kann zeigen, dass die extremalen Schubspannungen in Schnittebenen, welche um $\pi/4$ gegen jeweils zwei Hauptachsen geneigt

sind, auftreten und die Werte

$$\bar{\tau}_k = \frac{1}{2}|\sigma_i - \sigma_j| \quad \text{mit} \quad k \neq i \neq j \quad (1.344)$$

haben [1.8]. An diesen Schnittebenen treten außerdem die Normalspannungen

$$\bar{\sigma}_k = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j) \quad \text{mit} \quad k \neq i \neq j \quad (1.345)$$

auf.

Aus der Transformationsvorschrift $\bar{\sigma} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}$ folgt noch, dass der hydrostatische Spannungsanteil (beschrieben durch den Kugeltensor von $\boldsymbol{\sigma}$) keinen Einfluss auf die Schubspannungen hat.

Materialversagen

Abschließend soll geklärt werden, wann, d. h. bei welchen Spannungszuständen, im untersuchten Stab Materialversagen durch plastische Verformung einsetzt. Eine mathematische Funktion $f : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}$ zur Beantwortung dieser Frage muss also jenen Bereich des sechsdimensionalen Spannungsraums definieren, in dem das Material rein elastisch verformt wird. Dieser Bereich sei durch $f < 0$ charakterisiert. Die Berandung dieses Bereiches stellt eine durch $f = 0$ definierte Hyperfläche des Spannungsraums dar und wird oft als *Fließfläche* bezeichnet. Dementsprechend wird $f = 0$ als *Fließbedingung* bezeichnet. Die Funktion f benötigt als Eingangsgröße den Spannungstensor und muss invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems sein. Für isotrope Werkstoffe (das sind jene, deren Materialeigenschaften unabhängig von der Orientierung sind) gilt aufgrund der Transformationsmöglichkeiten des Spannungstensors, dass die Funktion f nur von maximal drei skalaren Größen abhängen darf, welche bereits den Beanspruchungszustand des Materials eindeutig definieren. Das sind z. B. die drei (oft als Invarianten bezeichneten) Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\boldsymbol{\sigma}$, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz auf 1 zu normieren ist. Alternativ können die drei Hauptnormalspannungen σ_i (vgl. (1.343)) verwendet werden, welche ja gerade die Lösungen des charakteristischen Polynoms von $\boldsymbol{\sigma}$, also dessen Eigenwerte sind. Der durch die Hauptnormalspannungen σ_i aufgespannte Raum wird auch Hauptspannungsraum genannt. Er lässt eine anschauliche geometrische Interpretation der Fließfläche zu. Man beachte noch, dass der Fall $f > 0$ physikalisch nicht sinnvoll ist, da die zugehörigen Spannungszustände nicht erreicht werden können.

Zu der grundsätzlich materialabhängigen Form und Lage der durch $f = 0$ definierten Fließfläche gibt es verschiedene Hypothesen, sogenannte *Anstrengungshypothesen*, die basierend auf Experimenten abgesichert wurden. Zwei solcher Hypothesen werden im Folgenden diskutiert, weitere sind z. B. in [1.9, 1.10] beschrieben.

Für duktile Werkstoffe wird häufig die sogenannte *Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises* verwendet. In diesem Fall kann die Funktion f in der Form

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{6} \left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right) \\
&\quad + (\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{31})^2 - \frac{\sigma_Y^2}{3} \\
&= \frac{1}{6} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) - \frac{\sigma_Y^2}{3}
\end{aligned} \tag{1.346}$$

mit der materialabhängigen Fließgrenze σ_Y geschrieben werden. Die Fließgrenze σ_Y ist gerade jener Spannungswert bei dem im einachsigen Spannungszustand das jeweilige Material zu fließen beginnt. Er wird meist experimentell, z. B. durch Zugversuche, ermittelt. Entsprechend (1.346) lässt sich die Vergleichsspannung

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3((\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{31})^2) \right)} \tag{1.347}$$

berechnen und direkt mit σ_Y vergleichen. Im Fall $\sigma_C < \sigma_Y$ liegt eine rein elastische Verformung vor, im Fall $\sigma_C = \sigma_Y$ tritt Fließen ein. Dies entspricht der häufig verwendeten Vorgangsweise, dass ein allgemeiner (mehrachsiger) Spannungszustand auf einen äquivalenten einachsigen umgelegt und mit einem dafür geltenden Grenzwert verglichen wird.

Gemäß (1.346) beschreibt die Fließbedingung $f = 0$ in der Anstrengungshypothese nach von Mises im Hauptspannungsraum einen Kreiszylinder dessen Achse mit der Linie der hydrostatischen Spannungszustände $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ zusammenfällt. Er hat offensichtlich den Radius $\sigma_Y \sqrt{2/3}$ und ist in Abbildung 1.25 mit durchgezogenen Linien skizziert.

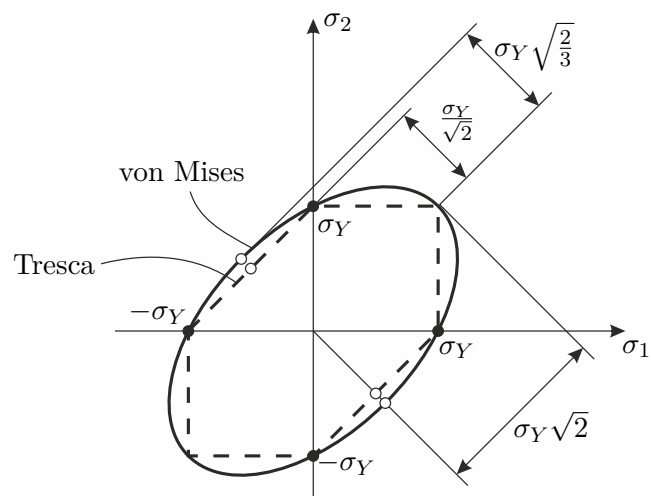
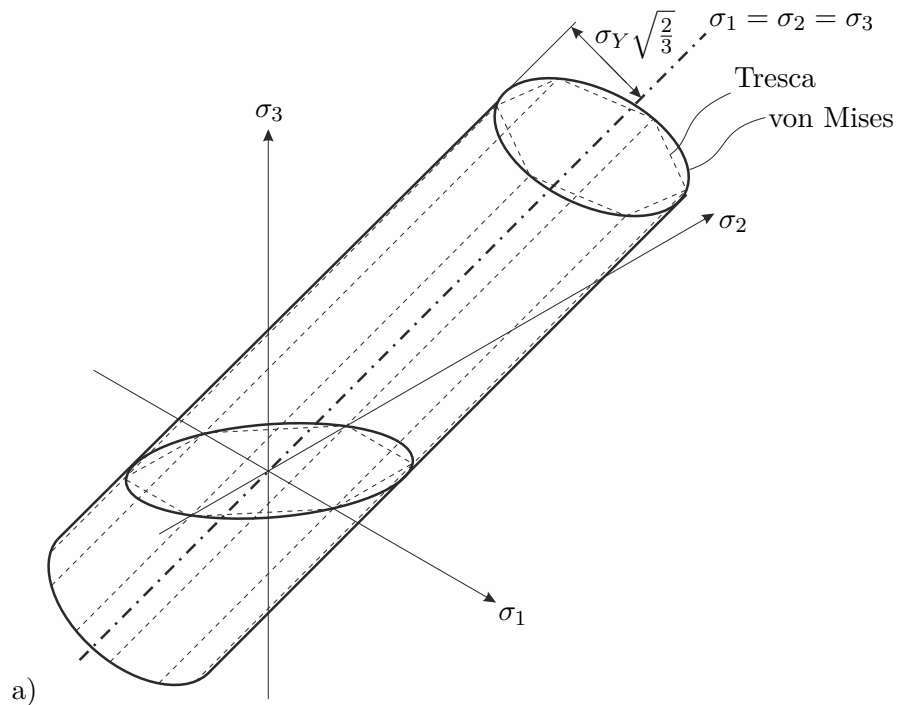
Bei der *Anstrengungshypothese nach Tresca* geht man davon aus, dass Fließen genau dann eintritt, wenn die maximale Schubspannung den Grenzwert $\sigma_Y/2$ erreicht. D. h.

$$\begin{aligned}
f &= \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - \sigma_Y \\
&= \frac{1}{2} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|) - \sigma_Y .
\end{aligned} \tag{1.348}$$

In diesem Fall beschreibt die Fließbedingung $f = 0$ ein Prisma dessen Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck mit Umkreisradius $\sigma_Y \sqrt{2/3}$ ist. Seine Mittelachse fällt wieder mit der Linie der hydrostatischen Spannungszustände $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ zusammen (vgl. strichlierte Linien in Abbildung 1.25).

1.8.3 Reine Torsion eines geraden Stabes

Ein gerader parallel zur Achse x_1 ausgerichteter Stab mit einem beliebigen homogenen Querschnitt $\mathcal{A}$ sei an seinen Enden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ mit dem Torsionsmoment $M_1 = M_T$ belastet (vgl. Abbildung 1.26). Dabei erfolge die Krafteinleitung in den Endquerschnitten genau so, dass die Verschiebungen u_2 und u_3 bei $x_1 = 0$ verschwinden und bei $x_1 = l$ einer reinen Drehung des Querschnitts um den Punkt $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ entsprechen. Darüber hinaus treten keine Einspannungen oder Belastungen auf. Allfällige Verschiebungen in Richtung x_1 werden ungehindert zugelassen.



- Fließbeginn bei einachsigen Spannungszustand
- b) ◦ Fließbeginn bei reiner Scherung

Abbildung 1.25: Fließgrenzen im Hauptspannungsraum, a) allgemeiner Fall, b) für ebenen Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$).

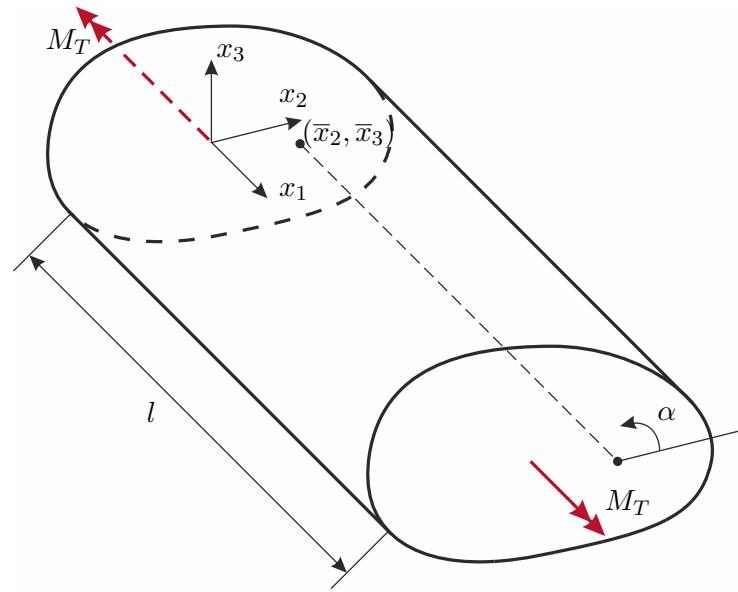


Abbildung 1.26: Stab mit Torsionsbelastung.

Das Torsionsmoment ergibt sich in jedem beliebigen Normalquerschnitt $\mathcal{A}$ des Stabes in der Form

$$M_T = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{13}(x_2 - \bar{x}_2) - \sigma_{12}(x_3 - \bar{x}_3) d\mathcal{A} \quad (1.349)$$

(vgl. (1.329)). Da der Stab frei von Querkraften sein soll, gilt natürlich

$$0 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{12} d\mathcal{A} , \quad 0 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{13} d\mathcal{A} . \quad (1.350)$$

Folglich ist M_T gemäß (1.349) unabhängig von der Lage des Drehpunktes $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Im Folgenden wird eine ursprünglich von Saint Venant vorgeschlagene Methode zur Berechnung von Verformungen und Spannungen in einem unter reiner Torsionsbelastung stehenden geraden Stab mit beliebigem Querschnitt skizziert (vgl. [1.10, 1.11]). Zu Saint Venants zentralen Annahmen zählen:

- Die Form der Stabquerschnitte (nicht deren Lage) ist im unbelasteten und im belasteten Zustand unabhängig von x_1 .
- Die Verschiebungen in der Querschnittsfläche (d. h. u_2 und u_3) ergeben sich aus einer reinen Drehung des Querschnitts.
- Die Verschiebungen u_1 können zu einer Verwölbung der Querschnitte führen. Sie wird ungehindert zugelassen, d. h. $\sigma_{11} = 0$.

Der Querschnitt bei x_1 sei um den Winkel $\alpha(x_1)$ gegenüber seiner unbelasteten Ausgangslage verdreht. Es ergeben sich damit die Ansätze

$$u_2 = -\alpha(x_1)(x_3 - \bar{x}_3) , \quad u_3 = \alpha(x_1)(x_2 - \bar{x}_2) \quad (1.351)$$

und aus den Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.112) folgt

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0 . \quad (1.352)$$

Aus dem Hookschen Gesetz (1.195) und der Annahme $\sigma_{11} = 0$ folgen

$$\varepsilon_{11} = 0 \quad (1.353a)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0 . \quad (1.353b)$$

Die sogenannte Verwindung $d\alpha/dx_1$ des Stabes entspricht dessen Drehwinkeländerung pro Längeneinheit. Die Erfahrung, dass eine ungehinderte Verwölbung der Querschnitte proportional zu dieser Verwindung ist, legt den Ansatz

$$u_1 = \frac{d\alpha}{dx_1} \varphi(x_2, x_3) + c_{10} \quad (1.354)$$

nahe, wobei $\varphi(x_2, x_3)$ die noch zu bestimmende stetige Wölbfunktion ist. Wegen (1.353a) muss dann $d^2\alpha/dx_1^2 = 0$ gelten und gemäß der Annahme, dass die Verschiebungen u_2 und u_3 bei $x_1 = 0$ verschwinden, folgt daraus

$$\alpha(x_1) = \alpha' x_1 \quad (1.355)$$

mit der noch zu bestimmenden Konstanten $\alpha' = d\alpha/dx_1$. Für die verbleibenden im Allgemeinen von Null verschiedenen Komponenten des Verzerrungs- und Spannungstensors erhält man

$$\varepsilon_{12} = \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 + \bar{x}_3 \right) \quad (1.356a)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_2 - \bar{x}_2 \right) \quad (1.356b)$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} = G\alpha' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 + \bar{x}_3 \right) \quad (1.356c)$$

$$\sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} = G\alpha' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_2 - \bar{x}_2 \right) . \quad (1.356d)$$

Da die Verzerrungen aus einem zulässigen Ansatz für die Verschiebungen berechnet wurden, erfüllen sie trivial die Kompatibilitätsbedingungen (1.117). Die Gleichgewichtsbedingungen (vgl. (1.156)) in Richtung von x_2 und x_3 sind trivial erfüllt. Mit $\sigma_{11} = 0$ folgt aus der Gleichgewichtsbedingung in Richtung von x_1

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 . \quad (1.357)$$

D. h. φ muss der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Delta(\varphi) = 0 \quad (1.358)$$

genügen. Da bei reiner Torsion, abgesehen von den Endquerschnitten, alle Oberflächen des Stabes frei von Oberflächenkräften sind, könnten nun Randbedingungen formuliert und

(1.358) gelöst werden. Als praktisch häufig einfacher hat es sich erwiesen, die von Prandtl vorgeschlagene Torsionsfunktion $G\alpha'\psi(x_2, x_3)$ zu bestimmen und sie als *Spannungsfunktion* zu verwenden, um daraus die noch unbekannten Schubspannungen in der Form

$$\sigma_{12} = G\alpha' \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -G\alpha' \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (1.359)$$

zu berechnen. Mit dieser Wahl ist die Gleichgewichtsbedingung (1.357) identisch erfüllt. Es verbleibt die Frage, wie $\psi(x_2, x_3)$ zu wählen ist, damit die Kompatibilitätsbedingungen (1.117) erfüllt werden. Letzteres kann bereits dadurch gewährleistet werden, dass ψ den Identitäten

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 + \bar{x}_3, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - x_2 + \bar{x}_2, \quad (1.360)$$

welche direkt aus der Gleichsetzung von (1.356c) und (1.356d) mit (1.359) folgen, genügt, da ja mit jeder gültigen Funktion φ die Ansätze die Kompatibilitätsbedingungen automatisch erfüllen. Nach Differentiation und Elimination von φ erhält man aus (1.360)

$$\Delta(\psi) = -2. \quad (1.361)$$

D. h. ψ muss der Poisson-Gleichung genügen. Der Spannungsvektor an der Mantelfläche des Stabes (Rand $\partial\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$) muss gemäß den Annahmen verschwinden, d. h. es muss

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (1.362)$$

gelten, wobei $\mathbf{n} = [0, n_2, n_3]^T$ der Einheitsnormalvektor auf die Mantelfläche ist. Einsetzen von (1.359) liefert

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_3 = 0. \quad (1.363)$$

Daraus folgt, dass der Gradient $[\partial\psi/\partial x_1, \partial\psi/\partial x_2, \partial\psi/\partial x_3]^T = \nabla(\psi)$ parallel zu $\mathbf{n}$ sowie normal auf den Tangentialvektor $[0, -n_3, n_2]^T$ von $\partial\mathcal{A}$ steht. Folglich ist ψ entlang von jedem zusammenhängenden Teil von $\partial\mathcal{A}$ konstant. Beschreibt $\mathcal{A}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet (Vollquerschnitt), so kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\psi|_{\partial\mathcal{A}} = 0$ gesetzt werden. Gleichung (1.363) ist daher eine zur Lösung von (1.361) benötigte Randbedingung.

Mit (1.350), (1.356c) und (1.356d) erhält man für das Torsionsmoment gemäß (1.349)

$$M_T = G\alpha' \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_2 - \bar{x}_2 \right) x_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 + \bar{x}_3 \right) x_3 d\mathcal{A}. \quad (1.364)$$

Analog erhält man mit (1.359), (1.361) und dem Gaußschen bzw. Greenschen Integralsatz

für das Torsionsmoment

$$\begin{aligned}
 M_T &= -G\alpha' \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 d\mathcal{A} = G\alpha' \int_{\mathcal{A}} -\frac{\partial x_2 \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3 \psi}{\partial x_3} + 2\psi d\mathcal{A} \\
 &= G\alpha' \left(-\oint_{\partial \mathcal{A}} \psi \begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \mathbf{n} ds + 2 \int_{\mathcal{A}} \psi d\mathcal{A} \right) \\
 &= G\alpha' \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \psi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + 2 \int_{\mathcal{A}} \psi d\mathcal{A} \right) = G\alpha' \int_{\mathcal{A}} (\nabla \psi)^T (\nabla \psi) d\mathcal{A},
 \end{aligned} \tag{1.365}$$

wobei s die Bogenlänge entlang der Kontur $\partial \mathcal{A}$ ist. Bei der Auswertung obiger Konturintegrale ist die Orientierung von s stets so zu wählen, dass das Gebiet des Querschnitts in Richtung steigender Werte von s links der Kontur liegt (mathematisch positive Orientierung).

Sowohl die Erfahrung als auch die Gleichungen (1.356c), (1.356d), (1.358), (1.361), (1.364) und (1.365) legen nahe, dass M_T proportional zu $G\alpha'$ ist. Man bezeichnet die ausschließlich vom Querschnitt abhängige Proportionalitätskonstante

$$\begin{aligned}
 J_T &= \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_2 - \bar{x}_2 \right) x_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 - \bar{x}_3 \right) x_3 d\mathcal{A} \\
 &= - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 d\mathcal{A} \\
 &= - \oint_{\partial \mathcal{A}} \psi \begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \mathbf{n} ds + 2 \int_{\mathcal{A}} \psi d\mathcal{A} \\
 &= \oint_{\partial \mathcal{A}} \psi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + 2 \int_{\mathcal{A}} \psi d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \psi)^T (\nabla \psi) d\mathcal{A}
 \end{aligned} \tag{1.366}$$

als *Drillwiderstand* und GJ_T als *Drillsteifigkeit*. Es gilt also der Zusammenhang

$$M_T = GJ_T \alpha' . \tag{1.367}$$

Aus (1.361) und (1.363) folgt, dass ψ unabhängig von der Lage des Punktes $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ist. Folglich muss dies auch für σ_{ij} , ε_{ij} , M_T und J_T gelten.

Für die Verzerrungsenergiedichte gemäß (1.202) folgt

$$\pi = \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \tag{1.368}$$

und für die Verzerrungsenergie gemäß (1.211) erhält man mit (1.359)

$$\Pi_{\text{int}} = l \int_{\mathcal{A}} \pi d\mathcal{A} = \frac{1}{2} G \alpha'^2 l \int_{\mathcal{A}} (\nabla \psi)^T (\nabla \psi) d\mathcal{A} = \frac{1}{2} G J_T \alpha'^2 l . \tag{1.369}$$

Beispiel 1.15. Als Beispiel soll nun ein mit dem Torsionsmoment M_T belasteter gerader Stab mit homogenem elliptischem Hohlquerschnitt untersucht werden. Der Querschnitt werde durch die Konturen

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x_2^2}{a^2 c^2} + \frac{x_3^2}{b^2 c^2} - 1 = 0 \tag{1.370}$$

mit $0 < c < 1$ begrenzt, d. h. die begrenzenden Ellipsen besitzen die Halbachsen a und b bzw. ac und bc . Das Material besitze den Schubmodul G . Gesucht sind der

Drillwiderstand J_T des Querschnitts, die Verwindung α' , die Spannungen σ_{12} und σ_{13} und die Wölbfunktion φ .

Ein naheliegender Ansatz für die Torsionsfunktion, der zumindest die Randbedingungen identisch erfüllt, ist nun

$$\psi = k \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1 \right) \quad (1.371)$$

mit der noch zu bestimmenden Konstanten k . Damit er (1.361) genügt, muss

$$k = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (1.372)$$

gesetzt werden. Am äußeren Rand gilt

$$\psi = 0, \quad (1.373)$$

am inneren Rand

$$\psi = (1 - c^2) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.374)$$

Für den Drillwiderstand erhält man gemäß (1.366)

$$J_T = \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - c^4) \pi \quad (1.375)$$

und für die Verwindung

$$\alpha' = \frac{M_T (a^2 + b^2)}{G a^3 b^3 (1 - c^4) \pi}. \quad (1.376)$$

Aus (1.359) lassen sich noch die Spannungen

$$\sigma_{12} = -\frac{2x_3 M_T}{ab^3(1 - c^4)\pi}, \quad \sigma_{13} = \frac{2x_2 M_T}{a^3 b(1 - c^4)\pi} \quad (1.377)$$

berechnen. Für die Amplitude der Schubspannung gilt daher

$$\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \frac{2|M_T|}{ab(1 - c^4)\pi} \sqrt{\frac{x_2^2}{a^4} + \frac{x_3^2}{b^4}}. \quad (1.378)$$

Sie steigt also ausgehend vom Mittelpunkt in jede radiale Richtung linear an und ist monoton steigend mit $|x_2|$ und $|x_3|$. Ihr Maximum muss folglich am Rand des Querschnitts auftreten. Für $a > b$ z. B. treten die extremalen Schubspannungen an den Stellen $(x_2, x_3) = (0, \pm b)$ auf und haben dort den Wert

$$\mp \frac{2M_T}{ab^2(1 - c^4)\pi}. \quad (1.379)$$

Aus der Integration von (1.360) folgt die Wölbfunktion

$$\varphi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} (x_2 x_3 - \bar{x}_2 \bar{x}_3) - \bar{x}_3 x_2 + \bar{x}_2 x_3 . \quad (1.380)$$

Hierbei wurde die frei wählbare Integrationskonstante gerade so gesetzt, dass φ am Drehpunkt $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ verschwindet. Offensichtlich sind die Linien konstanter Querschnittsverwölbung hier Hyperbeln. Aus (1.351), (1.354) und (1.380) erkennt man, dass die Wahl von $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ mit Starrkörperdrehungen mit dem Winkel $\alpha' \bar{x}_2$ um die Achse x_2 und dem Winkel $\alpha' \bar{x}_3$ um die Achse x_3 verbunden ist.

Für $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0)$ nimmt φ an den Stellen $(x_2, x_3) = (\pm a/\sqrt{2}, \pm b/\sqrt{2})$ die Extremwerte $\pm \varphi_{max}$ mit

$$\varphi_{max} = \frac{|b^2 - a^2| ab}{a^2 + b^2} \frac{1}{2} \quad (1.381)$$

an. Für $a = 2b$, $c = 0$ und $(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0)$ ist φ in Abbildung 1.27 dargestellt. Man beachte, dass φ unabhängig von c ist.

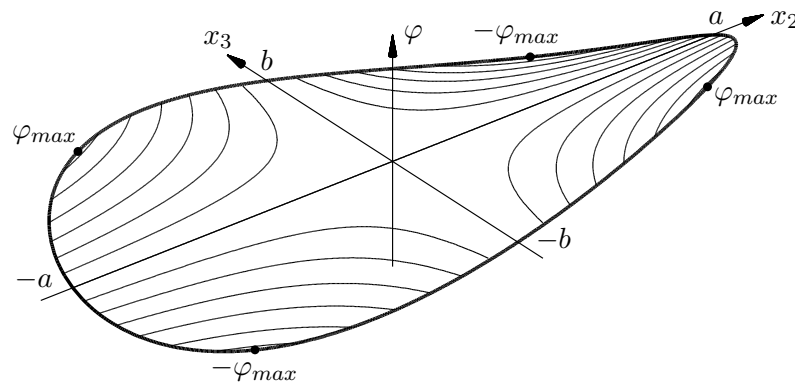


Abbildung 1.27: Wölbfunktion für einen Stab mit elliptischem Querschnitt.

Aus den Ergebnissen für den elliptischen Hohlquerschnitt lassen sich sofort die entsprechenden Größen für die folgenden Spezialfälle berechnen: Für $c = 0$ erhält man die Ergebnisse eines elliptischen Vollquerschnitts, für $a = b$ jene eines kreisförmigen Hohlquerschnitts und für $c = 0$ und $a = b$ jene eines kreisförmigen Vollquerschnitts. Offensichtlich verschwindet φ identisch für alle kreisförmigen Querschnitte, d. h. diese Querschnitte erfahren durch Torsion keine Verwölbung.

Ähnlich dem obigen Beispiel lassen sich für viele Querschnitte die Größen J_T , ψ und φ bestimmen [1.9, 1.10], fertige tabellierte Ergebnisse finden sich z. B. in [1.12, 1.13]. Für weitere allgemeine Querschnitte kann natürlich auch die Differentialgleichung (1.361) numerisch gelöst werden.

1.8.4 Reine Biegung eines geraden Stabes

Ein gerader entlang der Achse x_1 ausgerichteter Stab mit einem beliebigen homogenen Querschnitt $\mathcal{A}$ sei an seinen Enden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ mit den im Gleichgewicht stehenden

Biegemomenten $\mathbf{M}_0 = -[0, M_2, M_3]^T$ bzw. $\mathbf{M} = [0, M_2, M_3]^T$ (vgl. Abbildung 1.28) belastet. Darüber hinaus treten keine Einspannungen oder Belastungen auf.

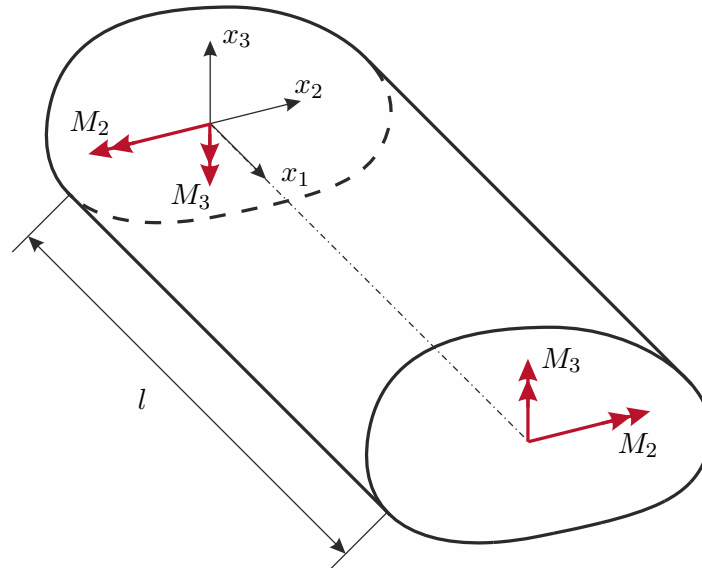


Abbildung 1.28: Stab mit reiner Biegebelastung.

Offensichtlich ist die Biegebelastung in jedem zu x_1 normal liegenden Querschnitt des Stabes gleich. Folglich muss sich auch jeder dieser Querschnitte des Stabes gleich verformen, d. h. sowohl der Verzerrungs- als auch der Spannungszustand muss unabhängig von x_1 sein. Da einer allfälligen Querkontraktion dabei keine äußeren Belastungen oder Einspannungen entgegengesetzt werden, kann diese ungehindert erfolgen. Aus Symmetriegründen muss ein ursprünglich ebener und normal zu x_1 stehender Querschnitt auch durch die Biegebelastung eben bleiben und normal zur verformten Balkenlängsachse stehen (vgl. Abbildung 1.29). Es ist daher naheliegend, die Gesamtverformung des Stabes aus den Verschiebungen $\bar{u}_i$ der durch die Koordinaten $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ definierten Stabachse und zusätzlicher Relativverschiebungen $\tilde{u}_i$ zu berechnen, d. h.

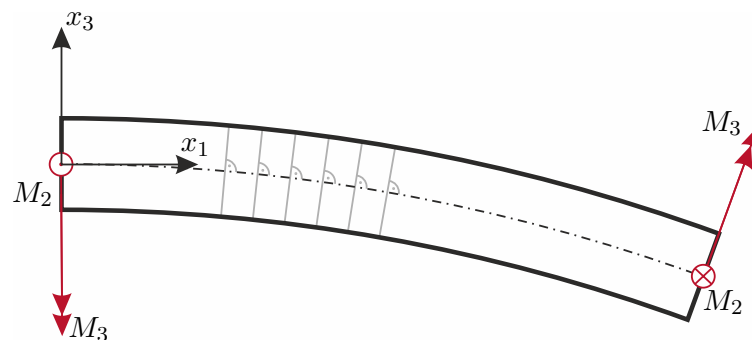


Abbildung 1.29: Bei reiner Biegebelastung bleiben Stabquerschnitte eben und normal zur Stabachse.

$$u_i = \bar{u}_i(x_1) + \tilde{u}_i \quad (1.382)$$

(vgl. Abbildung 1.30). Die Verschiebungen $\bar{u}_i$ der Stabachse können natürlich nur von x_1

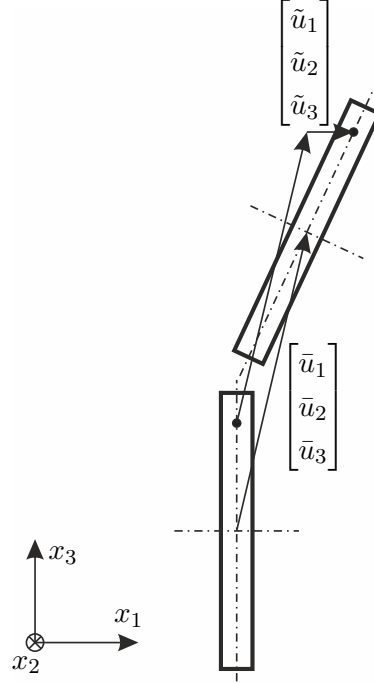


Abbildung 1.30: Verschiebung und Deformation eines Stabquerschnitts bei reiner Biegebelastung.

abhängen. Anders bei den Relativverschiebungen $\tilde{u}_i$, hier müssen die zu Querkontraktionen führenden Verschiebungen $\tilde{u}_2$ und $\tilde{u}_3$ von x_1 unabhängig sein, d. h. $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x_2, x_3)$ und $\tilde{u}_3 = \tilde{u}_3(x_2, x_3)$. Die verbleibende Verschiebung $\tilde{u}_1$ muss nun gerade solche Werte annehmen, dass die Querschnitte eben und normal zur verformten Stabachse bleiben, d. h. $\tilde{u}_1$ beschreibt eine reine Drehung in der Form

$$\tilde{u}_1 = -x_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} . \quad (1.383)$$

Hierbei sind $-\partial \bar{u}_3 / \partial x_1$ und $\partial \bar{u}_2 / \partial x_1$ (in linearer Näherung) die Drehwinkel um die Achsen x_2 und x_3 .

Für die Längsverzerrung erhält man aus obigem Ansatz

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_1^2} . \quad (1.384)$$

Die Ausdrücke $\kappa_2 = \partial^2 \bar{u}_2 / \partial x_1^2$ und $\kappa_3 = \partial^2 \bar{u}_3 / \partial x_1^2$ entsprechen (in guter Näherung) den Krümmungen der deformierten Stabachse. Sie müssen gemäß den Annahmen, genauso wie ε_{11} , unabhängig von x_1 sein. Daraus folgen die Ansätze

$$\bar{u}_2(x_1) = \frac{\kappa_2}{2} x_1^2 + c_{21} x_1 + c_{20} , \quad \bar{u}_3(x_1) = \frac{\kappa_3}{2} x_1^2 + c_{31} x_1 + c_{30} \quad (1.385a)$$

und weiter

$$\bar{u}_1(x_1) = c_{11}x_1 + c_{10} \quad (1.385b)$$

mit den noch zu bestimmenden Konstanten κ_2 , c_{21} , c_{20} , κ_3 , c_{31} , c_{30} , c_{11} und c_{10} . Für die Längsverzerrung gilt damit (vgl. [1.10, 1.11])

$$\varepsilon_{11} = c_{11} - \kappa_2 x_2 - \kappa_3 x_3 \quad (1.386)$$

und die Querschubverzerrungen

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0 \quad (1.387)$$

verschwinden identisch.

Aus dem Hookschen Gesetz (1.195) folgt daher auch

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 . \quad (1.388)$$

Gemäß den Annahmen sollen keine Normalspannungen in Richtung von x_2 und x_3 wirken, d. h. $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Mit dem Hookschen Gesetz (1.195) folgt daher aus (1.386)

$$\sigma_{11} = E(c_{11} - \kappa_2 x_2 - \kappa_3 x_3) \quad (1.389)$$

sowie

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu(c_{11} - \kappa_2 x_2 - \kappa_3 x_3) . \quad (1.390)$$

Damit alle lokalen Gleichgewichtsbedingungen (1.156) erfüllt sind, muss noch

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad (1.391)$$

gelten. Da aber die Schubspannungen am Rand $\partial\mathcal{A}$ des Querschnitts verschwinden müssen, folgt

$$\sigma_{23} = 0 \quad (1.392)$$

und gemäß dem Hookschen Gesetz

$$\varepsilon_{23} = 0 . \quad (1.393)$$

In dem nur durch Biegemomente belasteten Stab verschwinden also alle Spannungen außer σ_{11} (einachsiger Spannungszustand) und alle Schubverzerrungen.

Unter Berücksichtigung von (1.385a) können nun (1.390) und (1.393) integriert werden. Dies führt auf die bislang unbekannten Verschiebungen

$$\tilde{u}_2(x_2, x_3) = -\nu \left(c_{11}x_2 - \frac{\kappa_2}{2}(x_2^2 - x_3^2) - \kappa_3 x_2 x_3 \right) - c_{23}x_3 \quad (1.394a)$$

$$\tilde{u}_3(x_2, x_3) = -\nu \left(c_{11}x_3 - \frac{\kappa_3}{2}(x_3^2 - x_2^2) - \kappa_2 x_2 x_3 \right) + c_{23}x_2 \quad (1.394b)$$

mit der neuen Integrationskonstante c_{23} . Da das Verschiebungsfeld damit bereits berechnet ist, sind die Kompatibilitätsbedingungen (1.117) offensichtlich erfüllt. Zusammengefasst

erhält man für die Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1(x_1) + \tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) \\ &= c_{11}x_1 + c_{10} - \kappa_2 x_1 x_2 - c_{21}x_2 - \kappa_3 x_1 x_3 - c_{31}x_3 \end{aligned} \quad (1.395a)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \bar{u}_2(x_1) + \tilde{u}_2(x_2, x_3) \\ &= \frac{\kappa_2}{2}x_1^2 + c_{21}x_1 + c_{20} - \nu \left(c_{11}x_2 - \frac{\kappa_2}{2}(x_2^2 - x_3^2) - \kappa_3 x_2 x_3 \right) - c_{23}x_3 \end{aligned} \quad (1.395b)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \bar{u}_3(x_1) + \tilde{u}_3(x_2, x_3) \\ &= \frac{\kappa_3}{2}x_1^2 + c_{31}x_1 + c_{30} - \nu \left(c_{11}x_3 - \frac{\kappa_3}{2}(x_3^2 - x_2^2) - \kappa_2 x_2 x_3 \right) + c_{23}x_2 . \end{aligned} \quad (1.395c)$$

Die Konstanten c_{10} , c_{20} , c_{30} , c_{21} , c_{31} und c_{23} beschreiben die sechs Starrkörperfriheitsgrade und sind zunächst nicht weiter von Interesse. Die übrigen Konstanten c_{11} , κ_2 und κ_3 beschreiben den Verformungszustand des Stabes und können z. B. aus den integralen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Wie es sein muss, treten nur diese Konstanten in den von Null verschiedenen Spannungs- und Verzerrungskomponenten in (1.386), (1.389) und (1.390) auf. Aus den Bedingungen, dass die resultierende Normalkraft verschwinden muss und dass das Schnittmoment in jedem Normalquerschnitt mit $\mathbf{M}$ übereinstimmen muss, folgen die Bestimmungsgleichungen

$$0 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{11} d\mathcal{A} = E \left(c_{11} \mathcal{A} - \kappa_2 \int_{\mathcal{A}} x_2 d\mathcal{A} - \kappa_3 \int_{\mathcal{A}} x_3 d\mathcal{A} \right) \quad (1.396a)$$

$$M_2 = \int_{\mathcal{A}} x_3 \sigma_{11} d\mathcal{A} = E \left(c_{11} \int_{\mathcal{A}} x_3 d\mathcal{A} - \kappa_2 \int_{\mathcal{A}} x_2 x_3 d\mathcal{A} - \kappa_3 \int_{\mathcal{A}} x_3^2 d\mathcal{A} \right) \quad (1.396b)$$

$$M_3 = - \int_{\mathcal{A}} x_2 \sigma_{11} d\mathcal{A} = -E \left(c_{11} \int_{\mathcal{A}} x_2 d\mathcal{A} - \kappa_2 \int_{\mathcal{A}} x_2^2 d\mathcal{A} - \kappa_3 \int_{\mathcal{A}} x_2 x_3 d\mathcal{A} \right) \quad (1.396c)$$

für c_{11} , κ_2 und κ_3 . Legt man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt der Querschnittsfläche $\mathcal{A}$, so verschwinden die Flächenmomente 1. Ordnung, d. h. $\int_{\mathcal{A}} x_2 d\mathcal{A} = 0$ und $\int_{\mathcal{A}} x_3 d\mathcal{A} = 0$. Aus (1.396) folgt dann

$$c_{11} = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{E} \frac{M_2 I_{23} + M_3 I_{22}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}, \quad \kappa_3 = -\frac{1}{E} \frac{M_2 I_{33} + M_3 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}, \quad (1.397)$$

wobei für die Flächenmomente 2. Ordnung die Abkürzungen

$$I_{22} = \int_{\mathcal{A}} x_3^2 d\mathcal{A}, \quad I_{33} = \int_{\mathcal{A}} x_2^2 d\mathcal{A}, \quad I_{23} = \int_{\mathcal{A}} x_2 x_3 d\mathcal{A} \quad (1.398)$$

verwendet wurden. Man nennt I_{22} und I_{33} auch Flächenträgheitsmomente und I_{23} Deviationsmoment. Sie besitzen Tensoreigenschaften, d. h. es kann stets ein gegenüber den Achsen x_2 und x_3 gedrehtes Hauptachsensystem gefunden werden, in dem das Deviationsmoment verschwindet. Bei symmetrischen Querschnitten ist jede Symmetrieachse automatisch eine Hauptachse.

Anhand von (1.385a) sei nochmals betont, dass κ_2 und κ_3 die Krümmungen der Stabachse in Richtung x_2 und x_3 sind. Die Beziehungen zwischen κ_2 , κ_3 , M_2 und M_3 lassen sich auch kompakt in Matrixnotation zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} -M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = E \underbrace{\begin{bmatrix} I_{22} & I_{23} \\ I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{J}_B} \begin{bmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{E} \frac{1}{I_{22}I_{33} - I_{23}^2} \begin{bmatrix} I_{33} & -I_{23} \\ -I_{23} & I_{22} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{J}_B^{-1}} \begin{bmatrix} -M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}. \quad (1.399)$$

Die Biegemomente und Krümmungen sind also über die sogenannten Biegesteifigkeiten EI_{22} , EI_{33} und EI_{23} verknüpft. Sie sind in der Matrix $\mathbf{J}_B$ zusammengefasst. Offensichtlich verursacht M_2 im Allgemeinen sowohl eine Krümmung κ_2 in Richtung von x_2 als auch κ_3 in Richtung von x_3 . Gleiches gilt für M_3 . Wenn das Deviationsmoment I_{23} verschwindet, ruft M_2 nur eine Krümmung κ_3 in Richtung von x_3 hervor und M_3 nur eine Krümmung κ_2 in Richtung von x_2 .

Einsetzen von (1.397) in (1.389) liefert

$$\sigma_{11} = -\frac{M_2 I_{23} + M_3 I_{22}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} x_2 + \frac{M_2 I_{33} + M_3 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} x_3. \quad (1.400)$$

Diese Gleichung spannt im Raum x_2 - x_3 - σ_{11} eine Ebene auf. Entlang der Linie

$$x_3 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_3} x_2 = \frac{M_2 I_{23} + M_3 I_{22}}{M_2 I_{33} + M_3 I_{23}} x_2, \quad (1.401)$$

die auch *neutrale Faser* genannt wird, verschwindet σ_{11} . An jedem Punkt des Querschnitts ist σ_{11} proportional zum Normalabstand zur neutralen Faser. Extremwerte von σ_{11} treten daher an den Oberflächenpunkten mit dem größten Normalabstand zur neutralen Faser auf. Diese Aussagen für σ_{11} gelten analog für ε_{11} , ε_{22} und ε_{33} (vgl. (1.386), (1.389) und (1.390)).

Für die Verzerrungsenergiedichte erhält man gemäß (1.202)

$$\pi = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 \quad (1.402)$$

und für die Verzerrungsenergie folgt gemäß (1.211)

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= l \int_{\mathcal{A}} \pi d\mathcal{A} = l \frac{1}{2} E \int_{\mathcal{A}} (\kappa_2 x_2 + \kappa_3 x_3)^2 d\mathcal{A} \\ &= l \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \kappa_3 & \kappa_2 \end{bmatrix} \mathbf{J}_B \begin{bmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = l \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -M_2 & M_3 \end{bmatrix} \mathbf{J}_B^{-1} \begin{bmatrix} -M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.403)$$

1.8.5 Biegung und Torsion eines geraden Stabes durch Einzelkraft am Stabende

Ein gerader entlang der Achse x_1 ausgerichteter Stab mit einem beliebigen homogenen Querschnitt $\mathcal{A}$ sei an seinem Ende $x_1 = l$ im Punkt $(x_2, x_3) = (\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ mit der Einzelkraft $\mathbf{F} = [0, F_2, F_3]^T$ belastet (vgl. Abbildung 1.31). Am Ende $x_1 = 0$ werden Momente und Kräfte gerade so aufgebracht, dass sich der Stab im statischen Gleichgewicht befindet. Etwaige Starrkörperfreiheitsgrade sind so zu wählen, dass die bei $x_1 = 0$ aufgebrachten Momente und Kräfte keine Arbeit verrichten (Einspannstelle). Darüber hinaus treten keine

Einspannungen oder Belastungen auf. Das Koordinatensystem liegt im Flächenschwerpunkt des Querschnitts bei $x_1 = 0$.

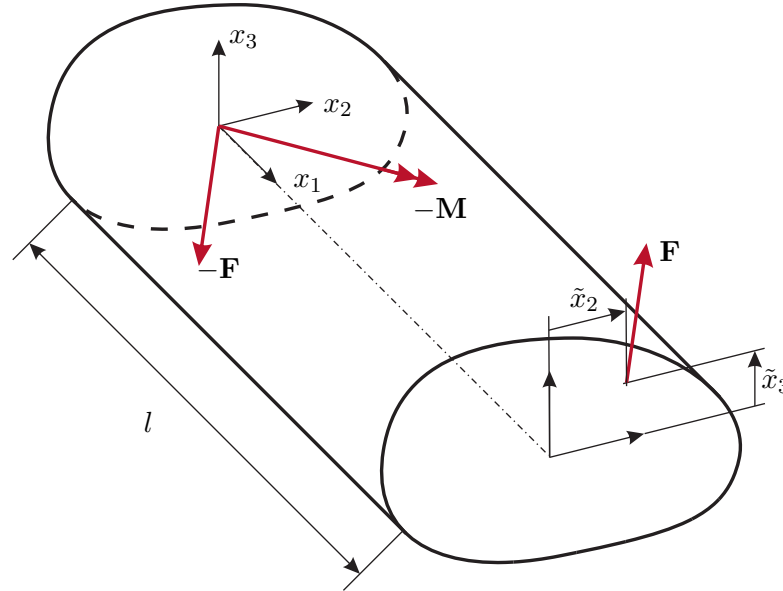


Abbildung 1.31: Stab mit Biege- und Torsionsbelastung.

Es ist zu erwarten, dass diese Belastungssituation zu einer Biegung und Torsion des Stabes führen. Aus den in den Abschnitten 1.8.3 und 1.8.4 gewonnen Erkenntnissen kann daher darauf geschlossen werden, dass sich die Gesamtverformung des Stabes wieder aus Verschiebungen der durch die Koordinaten $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ definierten Stabachse und zusätzlicher Relativverschiebungen des Querschnitts zusammensetzt. Da einer allfälligen Querkontraktion keine äußeren Belastungen oder Einspannungen entgegengesetzt werden, kann diese wieder ungehindert erfolgen.

Für die in einem Stabquerschnitt $x_1 = \text{const.}$ wirkende resultierende Schnittkraft $\mathbf{F}$ und das resultierende Schnittmoment $\mathbf{M}$ (mit dem Bezugspunkt $(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, 0)$) gilt (am positiven Schnittufer) aus Gleichgewichtsgründen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 F_3 - \tilde{x}_3 F_2 \\ -(l - x_1) F_3 \\ (l - x_1) F_2 \end{bmatrix}. \quad (1.404)$$

Anders als bei reiner Biegung (vgl. Abschnitt 1.8.4), wo die Biegemomente entlang der Stabachse konstant sind und wo aus Symmetriegründen die Balkenquerschnitte auch unter Belastung eben bleiben, hängen hier die Biegemomente linear von x_1 ab und es kann eine Verwölbung des Querschnitts auch zufolge der Biegebelastung auftreten.

Basierend auf den Ergebnissen von Abschnitt 1.8.4 (siehe (1.397) und (1.398)) ist zu erwarten, dass sich die lokalen Krümmungen der Stabachse in der Form

$$\kappa_2 = \frac{1}{E} \frac{M_2 I_{23} + M_3 I_{22}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}, \quad \kappa_3 = -\frac{1}{E} \frac{M_2 I_{33} + M_3 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} \quad (1.405)$$

einstellen. Da eine allfällige Torsionsverformung der Querschnitte keinen Beitrag zur Spannung σ_{11} leistet (vgl. Abschnitt 1.8.3) und gemäß den Annahmen wiederum $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ gilt, folgt aus (1.386), (1.389) und (1.390)

$$\sigma_{11} = E(l - x_1)(x_2 k_2 + x_3 k_3) \quad (1.406a)$$

$$\varepsilon_{11} = (l - x_1)(x_2 k_2 + x_3 k_3) \quad (1.406b)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu(l - x_1)(x_2 k_2 + x_3 k_3) \quad (1.406c)$$

mit den Abkürzungen

$$k_2 = \frac{1}{E} \frac{F_3 I_{23} - F_2 I_{22}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}, \quad k_3 = \frac{1}{E} \frac{F_2 I_{23} - F_3 I_{33}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}. \quad (1.407)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung (vgl. (1.156)) in Richtung von x_1 folgt

$$-E(x_2 k_2 + x_3 k_3) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0. \quad (1.408)$$

Aufgrund der formalen Ähnlichkeit zu (1.357) erscheint es sinnvoll, die Spannungen σ_{12} und σ_{13} ähnlich zu dem Fall reiner Torsion (vgl. Abschnitt 1.8.3) durch Ableitung aus einer Spannungsfunktion zu berechnen. Da im vorliegenden Fall die Stabquerschnitte einer gleichzeitigen Torsions- und Biegebelastung ausgesetzt sind, sollen zwei Spannungsfunktionen verwendet werden, wovon eine, nämlich $G\alpha'\psi(x_2, x_3)$, die Torsionsbelastung und die zweite, nämlich $G\chi(x_2, x_3)$, die Biegebelastung abbilden soll. Für den Verdrehwinkel α gelte wieder $\alpha' = d\alpha/dx_1$ und $d\alpha'/dx_1 = 0$. Ein Ansatz, der automatisch (1.408) erfüllt, ist daher

$$\sigma_{12} = G\alpha' \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + G \frac{\partial \chi}{\partial x_3} + Ek_2 \frac{x_2^2}{2}, \quad \sigma_{13} = -G\alpha' \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - G \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + Ek_3 \frac{x_3^2}{2}. \quad (1.409)$$

Der Ansatz nimmt vorweg, dass die Schubspannungen σ_{12} und σ_{13} von x_1 unabhängig sind. Dies erscheint plausibel, da ihre Resultierenden

$$F_2 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{12} d\mathcal{A} \quad (1.410a)$$

$$F_3 = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{13} d\mathcal{A} \quad (1.410b)$$

$$\tilde{x}_2 F_3 - \tilde{x}_3 F_2 = \int_{\mathcal{A}} x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} d\mathcal{A} \quad (1.410c)$$

ebenfalls diese Eigenschaft aufweisen.

Aus den noch übrigen Gleichgewichtsbedingungen (vgl. (1.156)) in Richtung von x_2 und x_3 und dem Hookschen Gesetz (1.195) folgt völlig analog zu Abschnitt 1.8.4, dass

$$\sigma_{23} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0. \quad (1.411)$$

Aus (1.406c), (1.409), (1.411), dem Hookschen Gesetz und den Kompatibilitätsbedingungen (1.117) folgt

$$\frac{1}{2} \alpha' \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial x_2} - \nu k_3 = 0 \quad (1.412a)$$

$$\frac{1}{2} \alpha' \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial x_3} + \nu k_2 = 0. \quad (1.412b)$$

Offensichtlich werden diese Bedingungen erfüllt, wenn ψ und χ den Gleichungen

$$\Delta(\psi) = -2 \quad (1.413a)$$

$$\Delta(\chi) = 2\nu(x_2k_3 - x_3k_2) + c_0, \quad (1.413b)$$

mit der noch zu bestimmenden Integrationskonstante c_0 , genügen (vgl. auch (1.361)). Um c_0 zu bestimmen, geht man zunächst vom unbelasteten Fall $F_2 = F_3 = 0$ aus. Dann gilt $\alpha' = 0$ und gemäß (1.407) auch $k_2 = k_3 = 0$. Damit dann auch $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ erfüllt ist, muss

$$c_0 = 0 \quad (1.414)$$

gelten. Man überzeugt sich leicht, dass die übrigen Kompatibilitätsbedingungen (1.117) automatisch erfüllt sind.

Um ψ und χ aus (1.413) berechnen zu können, werden noch Randbedingungen benötigt. Sie folgen aus der Bedingung, dass der Spannungsvektor an der Mantelfläche des Stabes (Rand $\partial\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$) gemäß den Annahmen verschwinden muss, d. h.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (1.415)$$

wobei $\mathbf{n} = [0, n_2, n_3]^T$ wieder der Einheitsnormalvektor auf die Mantelfläche ist. Offensichtlich ist (1.415) erfüllt, wenn ψ und χ am Rand $\partial\mathcal{A}$ den Bedingungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_3}n_2 - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}n_3 = 0 \quad (1.416a)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_3}n_2 - \frac{\partial\chi}{\partial x_2}n_3 = -(1+\nu)(x_2^2k_2n_2 + x_3^2k_3n_3) \quad (1.416b)$$

genügen (vgl. auch (1.363)). Folglich ist ψ wieder entlang von jedem zusammenhängenden Teil von $\partial\mathcal{A}$ konstant. Aus (1.413), (1.414) und (1.416) lassen sich also die unbekannten Funktionen ψ und χ unabhängig voneinander berechnen. Man beachte, dass $\tilde{x}_2$ und $\tilde{x}_3$ keinen Einfluss auf ψ und χ haben.

Durch Einsetzen von (1.409) in (1.410c) folgt mit dem Drillwiderstand J_T gemäß (1.366) die Definitionsgleichung

$$\tilde{x}_2F_3 - \tilde{x}_3F_2 = \int_{\mathcal{A}} -G \left(x_2 \frac{\partial\chi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} E x_2 x_3 (x_3 k_3 - x_2 k_2) d\mathcal{A} + G \alpha' J_T, \quad (1.417)$$

welche zur Berechnung der derzeit noch unbekannten Verwindung α' herangezogen werden kann. D. h. nur α' und daraus abgeleitete Größen (z. B. σ_{12} und σ_{13}) hängen von $\tilde{x}_2$ und $\tilde{x}_3$ ab. Damit sind alle Spannungen berechnet. Aus (1.409) folgen mit dem Hookschen Gesetz (1.195) noch die Verzerrungen

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \alpha' \frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial\chi}{\partial x_3} + (1+\nu) k_2 \frac{x_2^2}{2} \quad (1.418a)$$

$$\varepsilon_{13} = -\frac{1}{2} \alpha' \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial\chi}{\partial x_2} + (1+\nu) E k_3 \frac{x_3^2}{2}, \quad (1.418b)$$

so dass nun auch alle Verzerrungen bekannt sind.

Bemerkung 1.10. Es stellt sich die Frage unter welchen Umständen α' verschwindet, also der Stab keine Verwindung erfährt. Gemäß (1.417) ist dies der Fall, wenn der Kraftangriffspunkt $(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ gerade so liegt, dass

$$\tilde{x}_2 F_3 - \tilde{x}_3 F_2 = \int_{\mathcal{A}} -G \left(x_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} E x_2 x_3 (x_3 k_3 - x_2 k_2) d\mathcal{A} \quad (1.419)$$

erfüllt ist. In diesem Fall geht die Wirklinie der Lastkraft $\mathbf{F}$ durch den sogenannten *Schubmittelpunkt*, dessen Koordinaten nur vom Querschnitt $\mathcal{A}$ und der Querkontraktionszahl ν abhängen und hier mit $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ bezeichnet werden sollen. Um $\hat{x}_2$ und $\hat{x}_3$ zu bestimmen, berechnet man χ für den Fall $F_2 \neq 0$ und $F_3 = 0$ und ein zweites Mal für den Fall $F_2 = 0$ und $F_3 \neq 0$. Aus (1.419) erhält man im ersten Fall $\hat{x}_3 = \tilde{x}_3$ und im zweiten Fall $\hat{x}_2 = \tilde{x}_2$.

Bei symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ immer auf der Symmetrieachse. Er stimmt im Allgemeinen nicht mit dem Flächenschwerpunkt $(0, 0)$ überein und kann auch außerhalb des Querschnitts $\mathcal{A}$ liegen.

Durch Integration des Verzerrungsfeldes ε_{ij} sollen nun die Verschiebungen u_i berechnet werden. Dies wird besonders einfach, wenn zuvor die Spannungsfunktionen $G\alpha'\psi(x_2, x_3)$ und $G\chi(x_2, x_3)$ mithilfe der Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_3 - \bar{x}_3, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_2 + \bar{x}_2 \quad (1.420a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial \chi}{\partial x_3} + k_2(x_2^2 + \nu x_3^2), \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_3} = -\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + k_3(\nu x_2^2 + x_3^2) \quad (1.420b)$$

in Wölbfunktionen $\varphi(x_2, x_3)$ (vgl. (1.360)) und $\eta(x_2, x_3)$ umgerechnet werden. In (1.420a) wurde wieder angenommen, dass die Torsionsbelastung zu einer Rotation der Stabquerschnitte um den Punkt $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ führt. Durch Einsetzen von (1.420) in (1.409) erhält man

$$\sigma_{12} = G\alpha' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_3 + \bar{x}_3 \right) + G \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + G\nu k_2(x_2^2 - x_3^2) \quad (1.421a)$$

$$\sigma_{13} = G\alpha' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_2 - \bar{x}_2 \right) + G \frac{\partial \eta}{\partial x_3} + G\nu k_3(x_3^2 - x_2^2). \quad (1.421b)$$

Da mit den Funktionen ψ und χ bereits alle Gleichgewichts-, Kompatibilitäts- und Spannungsrandbedingungen erfüllt wurden, genügen die gemäß (1.420) berechneten Ansätze $\varphi(x_2, x_3)$ und $\eta(x_2, x_3)$ automatisch diesen Bedingungen.

Aufgabe 1.3. Schreiben Sie die Gleichgewichts-, Kompatibilitäts- und Spannungsrandbedingungen unter Verwendung von $\varphi(x_2, x_3)$ und $\eta(x_2, x_3)$ an.

Mit dem Hookschen Gesetz (1.195) erhält man aus (1.421) die Verzerrungen ε_{12} und ε_{13} . Die übrigen Verzerrungskomponenten sind in (1.406b), (1.406c) und (1.411) gegeben.

Integration dieser Verzerrungen liefert

$$u_1 = \left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) (x_2 k_2 + x_3 k_3) + \frac{\nu}{2} x_2 \left(\frac{x_2^2}{3} - x_3^2 \right) k_2 + \frac{\nu}{2} x_3 \left(\frac{x_3^2}{3} - x_2^2 \right) k_3 \quad (1.422a)$$

$$+ \alpha' \varphi(x_2, x_3) + \eta(x_2, x_3) + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{10}$$

$$u_2 = \nu(l - x_1) \left(\frac{x_3^2 - x_2^2}{2} k_2 - x_2 x_3 k_3 \right) + \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - l \right) k_2 \quad (1.422b)$$

$$- \alpha' x_1 (x_3 - \bar{x}_3) - c_{12} x_1 + c_{23} x_3 + c_{20}$$

$$u_3 = \nu(l - x_1) \left(\frac{x_2^2 - x_3^2}{2} k_3 - x_2 x_3 k_2 \right) + \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - l \right) k_3 \quad (1.422c)$$

$$+ \alpha' x_1 (x_2 - \bar{x}_2) - c_{13} x_1 - c_{23} x_2 + c_{30}$$

mit den noch zu bestimmenden Konstanten c_{12} , c_{13} , c_{23} und c_{i0} . Diese sechs frei wählbaren Parameter beschreiben wieder genau die sechs Starrkörperfreiheitsgrade und können ermittelt werden, indem z. B. an der Stelle $x_1 = 0$ bestimmte Einspannbedingungen vorgegeben werden. Im vorliegenden Fall wurde eingangs festgelegt, dass die bei $x_1 = 0$ aufgebrachten Momente und Kräfte keine Arbeit verrichten sollen – daraus lassen sich im Allgemeinen die obigen Konstanten bestimmen, denn gemäß dem Arbeitssatz (1.216) muss dann die gesamte Verzerrungsenergie des Stabes durch die Lastkraft $\mathbf{F}$ eingebracht worden sein. Wie diese Berechnung der Konstanten konkret geschehen kann wird am Ende von Beispiel 1.16 gezeigt.

Da die bei $x_1 = 0$ aufgebrachten Momente und Kräfte keine Arbeit verrichten sollen, müssen die Beziehungen $\bar{x}_2 = \hat{x}_2$ und $\bar{x}_3 = \hat{x}_3$ gelten, d. h. die Rotation der Querschnitte zufolge der Torsionsbelastung erfolgt um den Schubmittelpunkt $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Um dies zu zeigen, verwendet man den Betti-Rayleighschen Reziprozitätssatz (siehe Abschnitt 1.6.2): Wenn eine im Schubmittelpunkt $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ angreifende Einzelkraft $\mathbf{F} = [0, F_2, F_3]^T$ zu keiner Verwindung α' des Stabes führt (vgl. Bemerkung 1.10), so darf umgekehrt eine (reine) Torsionsbelastung, die natürlich eine Verwindung α' bewirkt, keine Verschiebungen u_2 und u_3 im Schubmittelpunkt $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ hervorrufen. Die Torsionsbelastung führt zu einer Verdrehung der Querschnitte um den Punkt $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$, d. h. nur an diesem Punkt verschwinden die Verschiebungen u_2 und u_3 . Folglich müssen $\bar{x}_2 = \hat{x}_2$ und $\bar{x}_3 = \hat{x}_3$ gelten.

Ähnlich wie in (1.382) lassen sich die Verschiebungen u_i gemäß (1.422) wieder in die nur von x_1 abhängigen Verschiebungen $\bar{u}_i$ der Stabachse und die Relativverschiebungen $\tilde{u}_i$ aufteilen. Daraus ergibt sich

$$u_i = \bar{u}_i(x_1) + \tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.423)$$

mit

$$\bar{u}_1 = c_{10} \quad (1.424a)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - l \right) k_2 - c_{12} x_1 + c_{20} \quad (1.424b)$$

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - l \right) k_3 - c_{13} x_1 + c_{30} . \quad (1.424c)$$

Alle übrigen Summanden in (1.422) sind den Relativverschiebungen $\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3)$ zuzuordnen. Man beachte, dass anders als bei reiner Biegung (vgl. Abschnitt 1.8.4) hier die Relativverschiebungen $\tilde{u}_i$ im Allgemeinen auch von x_1 abhängen.

Für die Verzerrungsenergiedichte erhält man gemäß (1.202)

$$\pi = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} = \frac{1}{2E}\sigma_{11}^2 + \frac{1}{2G}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \quad (1.425)$$

und für die Verzerrungsenergie folgt gemäß (1.211)

$$\Pi_{\text{int}} = \int_0^l \int_{\mathcal{A}} \pi d\mathcal{A} dx_1 = \Pi_{\text{int}}^N + \Pi_{\text{int}}^S \quad (1.426)$$

mit der Verzerrungsenergie

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^N &= \frac{1}{2E} \int_0^l \int_{\mathcal{A}} \sigma_{11}^2 d\mathcal{A} dx_1 = \frac{E}{2} \int_0^l (l - x_1)^2 \int_{\mathcal{A}} (k_2 x_2 + k_3 x_3)^2 d\mathcal{A} dx_1 \\ &= \frac{l^3}{6} \begin{bmatrix} k_3 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{J}_B \begin{bmatrix} k_3 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6} \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \end{bmatrix} \mathbf{J}_B^{-1} \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.427a)$$

zufolge der Normalspannungen und der Verzerrungsenergie

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^S &= \frac{1}{2G} \int_0^l \int_{\mathcal{A}} \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 d\mathcal{A} dx_1 \\ &= \frac{1}{2} Gl \left(\alpha'^2 J_T + \int_{\mathcal{A}} \left((\nabla \chi)^T (\nabla \chi + 2\alpha' \nabla \psi) + (1 + \nu)^2 (k_2^2 x_2^4 + k_3^2 x_3^4) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1 + \nu) \begin{bmatrix} -k_3 x_3^2 & k_2 x_2^2 \end{bmatrix} (\nabla \chi + \alpha' \nabla \psi) \right) d\mathcal{A} \right) \end{aligned} \quad (1.427b)$$

zufolge der Schubspannungen. Da die Schubspannungen nicht von x_1 abhängen, gilt dies natürlich auch für die auf die Stablänge bezogene Schubverzerrungsenergiedichte $\int_{\mathcal{A}} \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 d\mathcal{A} / (2G)$. Nach erfolgter Berechnung von ψ und χ für den jeweiligen Querschnitt lässt sich Π_{int}^S auch als Bilinearform von F_2 , F_3 und dem effektiven Torsionsmoment $(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)F_3 - (\tilde{x}_3 - \hat{x}_3)F_2$ schreiben.

Beispiel 1.16. Als Beispiel soll nun ein gerader Stab mit Länge l und kreisringförmigem Querschnitt untersucht werden. An der Stelle $(x_1, x_2, x_3) = (l, \tilde{x}_2, 0)$ soll die Einzellast $\mathbf{F} = [0, 0, F_3]^T$ angreifen. Der kreisringförmige Querschnitt werde durch die Radien r_a und $r_i = cr_a$ mit $0 \leq c < 1$ begrenzt. Das Material besitze den Schubmodul G . Gesucht sind die Spannungen σ_{1i} , die Verschiebungen u_i und die Verzerrungsenergie Π_{int} .

Aus Beispiel 1.15 folgt

$$\psi = \frac{1}{2}(r_a^2 - x_2^2 - x_3^2) \quad (1.428a)$$

$$\varphi = -\tilde{x}_3 x_2 + \tilde{x}_2 x_3 \quad (1.428b)$$

$$J_T = \frac{\pi}{2}(r_a^4 - r_i^4) . \quad (1.428c)$$

Aus (1.398) folgt

$$I_{22} = I_{33} = \frac{\pi}{4}(r_a^4 - r_i^4), \quad I_{23} = 0, \quad (1.429)$$

und aus (1.407)

$$k_2 = 0, \quad k_3 = -\frac{1}{E} \frac{F_3}{I_{22}}. \quad (1.430)$$

Gemäß (1.413b), (1.414) und (1.416b) ist nun die Differentialgleichung

$$\Delta(\chi) = 2\nu x_2 k_3 \quad (1.431)$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial \chi}{\partial x_2} n_3 = -(1 + \nu) x_3^2 k_3 n_3 \quad (1.432)$$

zu lösen. Diese Gleichung ist besonders einfach in Polarkoordinaten zu lösen und man erhält (ohne eine beliebig wählbare Integrationskonstante)

$$\chi = k_3 \left(\frac{3 + 2\nu}{4} x_2 \left(r_a^2 + r_i^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{x_2^2 + x_3^2} \right) + \frac{1 + 2\nu}{4} x_2 (x_2^2 + x_3^2) - \frac{1 + \nu}{3} x_3^2 \right). \quad (1.433)$$

Aus dieser Lösung kann durch Integration von (1.420b) direkt die Wölbfunktion

$$\eta = \frac{1}{4} k_3 x_3 \left(-(3 + 2\nu) \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{x_2^2 + x_3^2} \right) + (1 + 2\nu) x_2^2 + \frac{3 - 2\nu}{3} x_3^2 \right) \quad (1.434)$$

(ohne eine beliebig wählbare Integrationskonstante) bestimmt werden.

Gemäß Bemerkung 1.10 gilt für den Kreisringquerschnitt, dass der Schubmittelpunkt an der Stelle $(\hat{x}_2, \hat{x}_3) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0)$ liegt, d. h. das Integral in (1.417) verschwindet und es folgt gemäß dieser Gleichung für die Verwindung

$$\alpha' = \frac{\tilde{x}_2 F_3}{G J_T}. \quad (1.435)$$

Mithilfe von (1.406a) und (1.409) können nun die Spannungen

$$\sigma_{11} = E(l - x_1) x_3 k_3 \quad (1.436a)$$

$$\sigma_{12} = G x_3 \left(-\alpha' + \frac{1}{2} k_3 x_2 \left((3 + 2\nu) \frac{r_a^2 r_i^2}{(x_2^2 + x_3^2)^2} + (1 + 2\nu) \right) \right) \quad (1.436b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = G \left(\alpha' x_2 + \frac{1}{4} k_3 \left((3 + 2\nu) \left(-(r_a^2 + r_i^2) + (r_a^2 r_i^2) \frac{x_3^2 - x_2^2}{(x_2^2 + x_3^2)^2} + x_3^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 2\nu) x_2^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (1.436c)$$

ausgerechnet werden. Wie es sein muss, hängen σ_{12} und σ_{13} nicht von x_1 ab. Die Spannungen σ_{12} und σ_{13} enthalten zunächst den bekannten Anteil zufolge der Torsionsbelastung. Der übrige Anteil von σ_{12} ist sowohl bezüglich x_2 als auch bezüglich x_3 schiefsymmetrisch. Der übrige Anteil von σ_{13} ist sowohl bezüglich x_2 als auch bezüglich x_3 symmetrisch. Aufgrund dieser Symmetrieeigenschaften vereinfacht sich die nachfolgende Berechnung der Verzerrungsenergie zufolge der Schubspannungen. Gemäß (1.427) erhält man

$$\Pi_{\text{int}}^N = \frac{l^3}{6} \frac{F_3^2}{EI_{22}} \quad (1.437a)$$

$$\Pi_{\text{int}}^S = \frac{1}{2} l \left(\frac{\tilde{x}_2^2 F_3^2}{GJ_T} + \frac{F_3^2}{k_S G \mathcal{A}} \right) \quad (1.437b)$$

mit der Schubsteifigkeit $k_S G \mathcal{A}$ und dem sogenannten Schubfaktor

$$k_S = \frac{6(1+\nu)^2(1+c^2)^2}{(1+c^2)^2(8\nu^2+14\nu+7)+4c^2(4\nu^2+10\nu+5)} \quad (1.438)$$

(vgl. [1.14]). Er berücksichtigt den Einfluss der Schubspannungsverteilung auf die Verzerrungsenergie. Schubfaktoren für weitere Querschnitte sind z. B. in [1.15, 1.16] gegeben. Im Integral (1.427b) sind die Beiträge eines Torsionsmoments und einer im Schubmittelpunkt wirkenden Querkraft zu den Schubspannungen σ_{12} und σ_{13} orthogonal zueinander. Folglich entkoppelt die Schubverzerrungsenergie in einen Anteil der alleine auf Torsion zurückzuführen ist und einen weiteren Anteil der alleine auf eine im Schubmittelpunkt wirkende Querkraft zurückzuführen ist.

Für die Verschiebungen folgt aus (1.422)

$$u_1 = \left(l x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) x_3 k_3 - \frac{3+2\nu}{4} \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{x_2^2 + x_3^2} \right) x_3 k_3 + \frac{1}{4} (x_2^2 + x_3^2) x_3 k_3 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{10} \quad (1.439a)$$

$$u_2 = -\nu(l - x_1)x_2x_3k_3 - \alpha'x_1x_3 - c_{12}x_1 + c_{23}x_3 + c_{20} \quad (1.439b)$$

$$u_3 = \frac{\nu}{2}(l - x_1)(x_2^2 - x_3^2)k_3 + \frac{1}{2}x_1^2\left(\frac{x_1}{3} - l\right)k_3 + \alpha'x_1x_2 - c_{13}x_1 - c_{23}x_2 + c_{30} . \quad (1.439c)$$

Um die verbleibenden Konstanten c_{12} , c_{13} , c_{23} und c_{i0} zu bestimmen, wird nun angenommen, dass im Querschnitt $x_1 = 0$ die Verschiebungen u_i im Mittel verschwinden, und es wird ausgenutzt, dass die dort aufgebrachten Kräfte und Momente keine Arbeit verrichten sollen. Aus der Bedingung $\int_{\mathcal{A}} u_i d\mathcal{A} = 0$ folgt zunächst

$$c_{i0} = 0 . \quad (1.440)$$

Es handelt sich bei $x_1 = 0$ um ein negatives Schnittufer, weshalb die zu Null zu setzende Arbeit der äußeren Kräfte an dieser Stelle aus dem Spannungsvektor und den Verschiebungen wie folgt berechnet werden kann

$$0 = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} (\sigma_{1i} u_i)|_{x_1=0} d\mathcal{A} = \frac{l F_3}{2} \left(\frac{F_3}{k_S G \mathcal{A}} + c_{13} \right) + \frac{1}{2} E I_{22} \alpha' c_{23} . \quad (1.441)$$

Da diese Identität unabhängig von $\tilde{x}_2$ und damit unabhängig von α' gelten soll, folgt

$$c_{13} = -\frac{F_3}{k_S G \mathcal{A}} , \quad c_{23} = 0 . \quad (1.442)$$

Das gleiche Resultat erhält man aus der dem Arbeitssatz (1.216) entspringenden Forderung nach Gleichheit der von der äußeren Belastung F_3 verrichteten Arbeit und der im Stab gespeicherten Formänderungsenergie (Verzerrungsenergie) Π_{int} . Formal lautet diese Forderung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_3 u_3|_{(x_1, x_2, x_3)=(l, \tilde{x}_2, 0)} &= \frac{l^3}{6} \frac{F_3^2}{E I_{22}} + \frac{1}{2} F_3 \tilde{x}_2 (\alpha' l - c_{23}) - \frac{1}{2} l F_3 c_{13} \\ &= \Pi_{\text{int}} = \frac{l^3}{6} \frac{F_3^2}{E I_{22}} + \frac{1}{2} l \left(\alpha' \tilde{x}_2 F_3 + \frac{F_3^2}{k_S G \mathcal{A}} \right) . \end{aligned} \quad (1.443)$$

Da die noch unbekannte Konstante c_{12} keinen Einfluss auf die Verzerrungsenergie und auf die Arbeit der äußeren Belastungen hat, kann sie aus obigen Bedingungen nicht berechnet werden. Eine naheliegende Forderung zur Bestimmung von c_{12} ist, dass die Stabachse an der Einspannstelle $x_1 = 0$ mit der Achse x_2 einen rechten Winkel einschließen soll, d. h.

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|_{(x_1, x_2, x_3)=(0,0,0)} = -c_{12} = 0 . \quad (1.444)$$

Die Wahl $c_{12} = 0$ führt auf $u_2|_{(x_2, x_3)=(0,0)} = 0$; die verformte Stabachse liegt also in der Ebene $x_2 = 0$.

Durch Spezialisierung obiger Ergebnisse für den Fall $c = 0$ erhält man sofort die Ausdrücke für den geraden Stab mit kreisförmigem Vollquerschnitt. Für den Schubfaktor gilt dann (vgl. [1.15])

$$k_S = \frac{6(1+\nu)^2}{8\nu^2 + 14\nu + 7} . \quad (1.445)$$

1.9 Lineare Theorien zum Verformungsverhalten von geraden Stäben

In diesem Abschnitt soll das dynamische Verformungsverhalten von geraden Stäben untersucht werden. In Abschnitt 1.8 wurden einfache Beispiele zur Elastostatik gerader Stäbe

unter Berücksichtigung der drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Zusammenhänge gelöst. Einfacher lassen sich Stabprobleme lösen, wenn das Stabvolumen alternativ durch eine repräsentative ein-dimensionale Struktur beschrieben wird. In den meisten Fällen stellt dies zwar nur eine Näherungslösung dar, diese ist im Ingenieurwesen jedoch häufig hinreichend genau. Ein Stab kann daher als ein-dimensionales Kontinuum interpretiert werden. Der Einfachheit halber sollen die hier betrachteten Stäbe entlang der Achse x_1 ausgerichtet sein und die Flächenschwerpunkte der Stabquerschnitte sollen sich an der Position $(x_2, x_3) = (0, 0)$ befinden.

Zur Beschreibung des Stabes wird die durch die Flächenschwerpunkte der Stabquerschnitte definierte Stabachse – eine ein-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ – herangezogen. Ausgehend von der Stabachse werden Ansätze für die Verschiebungen gemacht; die verschiedenen Stabtheorien unterscheiden sich in der Komplexität dieser Ansätze. Natürlich sollen die so gefundenen Lösungen für die Spannungen, Verformungen, Verzerrungsenergien, etc. zumindest in hinreichend genauer Näherung mit jenen Lösungen übereinstimmen, die durch Berücksichtigung der vollen drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Zusammenhänge gefunden werden. Aufgrund der im Abschnitt 1.8 beobachteten Verdrehungen und Verwölbungen von Stabquerschnitten ist klar, dass zu einer korrekten Beschreibung der Stabverformung bei allgemeinen Belastungen nicht alleine die Verschiebungen $\bar{u}_i = \bar{u}_i(x_1) = u_i|_{(x_2, x_3)=(0,0)}$ der Stabachse genügen. Es müssen daher in manchen Belastungsfällen weitere (den Punkten der Stabachse zugeordnete) aggregierte Verformungsparameter des Querschnitts verwendet werden.

Kontinua, in denen allen materiellen Punkten neben ihren drei Verschiebungsfreiheitsgraden weitere drei Rotationsfreiheitsgrade zugeordnet werden, nennt man *Cosserat-Kontinua* [1.17, 1.18]. Für die im folgenden betrachteten Stabtheorien reichen diese drei zusätzlichen als Rotationen interpretierten Freiheitsgrade der Punkte der Stabachse.

Wird das dynamische Verhalten eines Kontinuums untersucht, so sind die Zeitverläufe der auftretenden Feldgrößen (Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen, etc.) zu berechnen. Analog weisen bei der Untersuchung des dynamischen Verformungsverhaltens von geraden Stäben die den Punkten der Stabachse zugeordneten Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade eine Zeitabhängigkeit auf. Damit tritt neben der Ortskoordinate x_1 die Zeit t als unabhängige Variable auf, und es ist im Allgemeinen ein *verteilt-parametrisches Problem* zu lösen. Für eine kompaktere Schreibweise werden im Folgenden generell die Abkürzungen

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} = (\cdot)', \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = (\dot{\cdot}) \quad (1.446)$$

verwendet.

In den nachfolgenden Herleitungen wird oft davon ausgegangen, dass der Stabquerschnitt und seine Materialeigenschaften unabhängig von x_1 sind. Ist dies nicht der Fall, so können die in diesem Abschnitt angeführten Beziehungen meist trotzdem verwendet werden – sie stellen dann eine im Ingenieurwesen meist hinreichend genaue Näherung dar.

1.9.1 Dynamisches Verhalten von Zug/Druck-Stäben

Anhand der Ergebnisse aus Abschnitt 1.8.2 lässt sich leicht nachvollziehen, dass gerade Stäbe, die nur eine Zug- oder Druckbelastung erfahren mit dem Verschiebungsansatz

$$u_1 = \bar{u}_1(t, x_1) , \quad u_2 = -\nu \bar{u}_1'(t, x_1) x_2 , \quad u_3 = -\nu \bar{u}_1'(t, x_1) x_3 \quad (1.447)$$

beschrieben werden können. Hierbei ist $\bar{u}_1(x_1)$, also die Längsverschiebung des Stabes, ein aggregierter Verformungsparameter, der zur vollständigen Beschreibung des Zug/Druck-Stabes genügt. Die Beziehungen (1.447) gelten, wenn der Koordinatenursprung in den Flächenschwerpunkt des Stabquerschnitts $\mathcal{A}$ gelegt wurde und Starrkörperverschiebungen nur in Richtung der Achse x_1 zugelassen werden. Diese Einschränkungen vereinfachen die Untersuchung des dynamischen Falls, da damit keine resultierenden Beschleunigungskräfte quer zur Stabachse wirken können.

Natürlich gilt

$$\varepsilon_{11} = \bar{u}_1'(t, x_1) , \quad (1.448)$$

gemäß dem Hookschen Gesetz (1.195)

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} E = \bar{u}_1'(t, x_1) E \quad (1.449)$$

und für die Zugkraft (vgl. (1.334))

$$N = \varepsilon_{11} E \mathcal{A} = \bar{u}_1'(t, x_1) E \mathcal{A} . \quad (1.450)$$

Analog zu (1.333) folgt die Verzerrungsenergie je Längeneinheit in der Form

$$\Pi'_{\text{int}}(t, x_1) = \frac{1}{2} (\bar{u}_1'(t, x_1))^2 E \mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{N(t, x_1)^2}{E \mathcal{A}} . \quad (1.451)$$

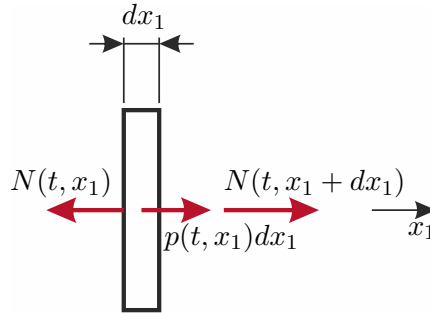


Abbildung 1.32: Infinitesimales Element eines Zug/Druck-Stabes.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung betrachte man das in Abbildung 1.32 dargestellte infinitesimale Stabelement. Hierbei sei $p(t, x_1)$ eine in Richtung x_1 wirkende Streckenlast. Die Beschleunigung $\ddot{u}_1(t, x_1)$ verursacht im betrachteten Stabelement die resultierende Kraft

$$- dx_1 \int_{\mathcal{A}} \rho \ddot{u}_1(t, x_1) d\mathcal{A} = - dx_1 \rho \mathcal{A} \ddot{u}_1(t, x_1) , \quad (1.452)$$

wobei ρ die Massendichte beschreibt. Die integrale Impulsbilanz für das betrachtete Stabelement liefert daher

$$N'(t, x_1) = -p(t, x_1) + \rho A \ddot{u}_1(t, x_1) . \quad (1.453)$$

Mit (1.450) lässt sich dies auch in Form

$$(\bar{u}_1'(t, x_1) EA)' = -p(t, x_1) + \rho A \ddot{u}_1(t, x_1) \quad (1.454)$$

schreiben, so dass nur noch $\bar{u}_1(t, x_1)$ als unbekannte Größe vorkommt. Um diese Gleichung zu lösen, werden noch geeignete Anfangsbedingungen für $\bar{u}_1(t, x_1)$ und $\dot{\bar{u}}_1(t, x_1)$ sowie (zwei) Randbedingungen an den Stabenden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ benötigt. Üblicherweise tritt an jedem der beiden Ränder jeweils eine Randbedingung auf, die sich als algebraische Gleichung der Form

$$b_0(\bar{u}_1(t, 0), N(t, 0)) = 0 , \quad b_l(\bar{u}_1(t, l), N(t, l)) = 0 \quad (1.455)$$

ausdrücken lässt. Grundsätzlich ist es aber auch möglich, über Randbedingungen Größen am Rand $x_1 = 0$ mit Größen am Rand $x_1 = l$ in Beziehung zu setzen, wie dies z. B. zur Beschreibung eines periodisch fortgesetzten Stabes notwendig ist.

Zwei Beispiele für mögliche Randbedingungen an der Stelle $x_1 = 0$ (negatives Schnittufer) sind in Tabelle 1.3 zusammengefasst. Die Konstanten k_1 bis k_3 sind entsprechend zu wählen. Die Konstante $k_2 \geq 0$ stellt eine Längsfedersteifigkeit dar; für $k_2 = 0$ ergibt sich ein in Richtung x_1 frei verschieblicher Rand. Analog zu Tabelle 1.3 lassen sich Randbedingungen für ein positives Schnittufer formulieren. Man beachte, dass es nicht möglich ist, an einem Rand gleichzeitig $\bar{u}_1$ und N beliebig vorzugeben.

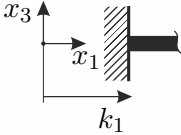
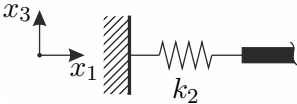
Randbedingung	Bild	Gleichung
Feste Einspannung		$b_0 = \bar{u}_1(t, 0) - k_1$
Elastisch verschiebliches Ende		$b_0 = N(t, 0) - k_2 \bar{u}_1(t, 0) - k_3$

Tabelle 1.3: Mögliche Randbedingungen am Rand $x_1 = 0$ eines Zug/Druck-Stabes.

Wirken auf einen Zug/Druck-Stab im Bereich $x_1 \in (0, l)$ zusätzliche konzentrierte Kräfte (in Richtung x_1), so ist das Rechengebiet an den Angriffspunkten dieser konzentrierten Lasten aufzutrennen und das Problem durch entsprechende Rand- bzw. Übergangsbedingungen zu ergänzen.

Nachdem der Verlauf von $\bar{u}_1(t, x_1)$ berechnet wurde, kann mit (1.450) N ausgerechnet werden. Außerdem können mit (1.447) alle lokalen Verschiebungen u_i und mit (1.449) die von Null verschiedene lokale Spannung σ_{11} ausgerechnet werden. Mit diesen Gleichungen ist es also möglich, ausgehend von $\bar{u}_1$ (der aggregierten, der Stabachse zugeordneten, kinematischen Größe) alle interessierenden Größen im drei-dimensionalen Kontinuum des Stabes zumindest näherungsweise zu bestimmen. Für einen mit einer konstanten Zugkraft belasteten Stab ($N(t, x_1) = \text{const.}_{x_1}$) stimmt die so gefundene Lösung exakt mit jener

überein, die unter Berücksichtigung der vollen drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Zusammenhänge in Abschnitt 1.8.2 gefunden wird. Diese exakte Übereinstimmung wird nicht mehr erzielt, wenn die Belastungssituation des Stabes eine sich über x_1 ändernde Zugkraft $N(t, x_1)$ hervorruft oder wenn an einer Einspannstelle die Verschiebungen u_2 und u_3 zufolge der Querkontraktion behindert werden. Trotzdem stellt das hier beschriebene Rechenverfahren auch in diesen Fällen eine im Ingenieurwesen häufig hinreichend genaue Näherungslösung dar.

Aufgabe 1.4. Herleitung der Gleichungen eines Zug/Druck-Stabes mit dem Hamilton-Prinzip

Leiten Sie (1.454) mit Hilfe des Hamilton-Prinzips (vgl. (1.263)) her. Im Bereich $x_1 \in [0, l]$ sei der Stab mit einer in Richtung x_1 wirkenden Streckenlast $p(t, x_1)$ beaufschlagt. Gehen Sie z. B. von einer festen Einspannung am Rand $x_1 = 0$ und einem freien Rand bei $x_1 = l$ aus.

1.9.2 Dynamisches Verhalten von Torsions-Stäben

Es soll das dynamische Verhalten eines Torsions-Stabes, dessen Verdrehachse mit der Stabachse $(x_2, x_3) = (0, 0)$ zusammenfällt, untersucht werden. Anhand der Ergebnisse aus Abschnitt 1.8.3 lässt sich leicht nachvollziehen, dass gerade Stäbe, die nur eine Torsionsbelastung erfahren mit dem Verschiebungsansatz

$$u_1 = \alpha'(t, x_1)\varphi(x_2, x_3), \quad u_2 = -\alpha(t, x_1)x_3, \quad u_3 = \alpha(t, x_1)x_2 \quad (1.456)$$

beschrieben werden können. Hierbei ist $\alpha(t, x_1)$, also der Verdrehwinkel des Stabquerschnitts, ein aggregierter Verformungsparameter, der zur vollständigen Beschreibung des Torsions-Stabes genügt. Starrkörperrotationen um die Achsen x_2 und x_3 sowie Starrkörperverschiebungen werden außer Acht gelassen. Ferner wird davon ausgegangen, dass radiale Beschleunigungen, d. h. Zentrifugalbeschleunigungen, sowie axiale Beschleunigungen $\ddot{u}_1 = \ddot{\alpha}'(t, x_1)\varphi(x_2, x_3)$ vernachlässigbar klein sind bzw. nur verschwindende resultierende Kräfte und Momente hervorrufen. Diese Annahmen vereinfachen die Untersuchung des dynamischen Falls, da damit nur solche resultierenden Beschleunigungskräfte auftreten, die den Querschnitt in Rotation versetzen.

Gemäß (1.367) gilt für das Torsionsmoment

$$M_T(t, x_1) = GJ_T\alpha'(t, x_1), \quad (1.457)$$

wobei der Drillwiderstand J_T in (1.366) definiert ist. Analog zu (1.369) folgt die Verzerungsenergie je Längeneinheit in der Form

$$\Pi'_{\text{int}}(t, x_1) = \frac{1}{2}(\alpha'(t, x_1))^2 GJ_T = \frac{1}{2} \frac{M_T(t, x_1)^2}{GJ_T}. \quad (1.458)$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung betrachte man das in Abbildung 1.33 dargestellte infinitesimale Stabelement. Hierbei sei $m_T(t, x_1)$ eine äußere Last in Form eines über die Stablänge verteilten Moments um die Achse x_1 . Die Winkelbeschleunigung $\ddot{\alpha}(t, x_1)$

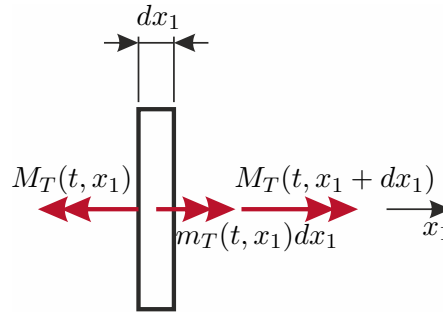


Abbildung 1.33: Infinitesimales Element eines Torsions-Stabes.

verursacht im betrachteten Stabelement das resultierende Moment

$$-dx_1 \int_A \rho(x_2 \ddot{u}_3 - x_3 \ddot{u}_2) dA = -dx_1 \rho \ddot{\alpha}(t, x_1) \underbrace{\int_A (x_2^2 + x_3^2) dA}_{= I_P = I_{22} + I_{33}} \quad , \quad (1.459)$$

wobei der Ausdruck I_P auch *polares Flächenträgheitsmoment* genannt wird. Die integrale Impulsbilanz für das betrachtete Stabelement liefert daher

$$M'_T(t, x_1) = -m_T(t, x_1) + \rho I_P \ddot{\alpha}(t, x_1) \quad . \quad (1.460)$$

Mit (1.457) lässt sich dies auch in Form

$$(\alpha'(t, x_1) G J_T)' = -m_T(t, x_1) + \rho I_P \ddot{\alpha}(t, x_1) \quad (1.461)$$

schreiben, so dass nur noch $\alpha(t, x_1)$ als unbekannte Größe vorkommt. Man beachte die strukturelle Ähnlichkeit zu (1.454). Um (1.461) zu lösen, werden wieder geeignete Anfangsbedingungen für $\alpha(t, x_1)$ und $\dot{\alpha}(t, x_1)$ sowie (zwei) Randbedingungen an den Stabenden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ benötigt, die sich z. B. in der Form

$$b_0(\alpha(0), M_T(0)) = 0 \quad , \quad b_l(\alpha(l), M_T(l)) = 0 \quad (1.462)$$

ausdrücken lassen. Zwei Beispiele für mögliche Randbedingungen an der Stelle $x_1 = 0$ (negatives Schnittufer) sind in Tabelle 1.4 zusammengefasst. Die Konstanten k_1 bis k_3 sind entsprechend zu wählen. Die Konstante $k_2 \geq 0$ stellt eine Drehfedersteifigkeit dar; für $k_2 = 0$ ergibt sich ein um die Achse x_1 frei drehbarer Rand. Analog zu Tabelle 1.4 lassen sich Randbedingungen für ein positives Schnittufer formulieren. Man beachte, dass es nicht möglich ist, an einem Rand gleichzeitig α und M_T beliebig vorzugeben.

Wirken auf einen Torsions-Stab im Bereich $x_1 \in (0, l)$ zusätzliche konzentrierte Torsionsmomente, so ist das Rechengebiet an den Angriffspunkten dieser konzentrierten Lasten aufzutrennen und das Problem durch entsprechende Rand- bzw. Übergangsbedingungen zu ergänzen.

Nachdem der Verlauf von $\alpha(t, x_1)$ berechnet wurde, kann mit (1.457) M_T ausgerechnet werden. Außerdem können mit (1.456) alle lokalen Verschiebungen u_i und mit (1.356c) und (1.356d) oder mit (1.359) die von Null verschiedenen lokalen Spannungen σ_{12} und σ_{13} ausgerechnet werden. Mit diesen Gleichungen ist es also möglich, ausgehend von α (der aggregierten, der Stabachse zugeordneten, kinematischen Größe) alle interessierenden Größen

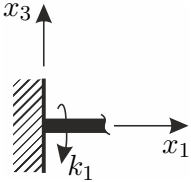
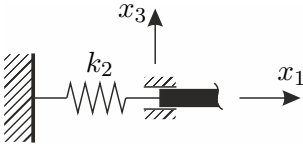
Randbedingung	Bild	Gleichung
Feste Einspannung		$b_0 = \alpha(0) - k_1$
Elastisch verdrehbares Ende		$b_0 = M_T(0) - k_2\alpha(0) - k_3$

Tabelle 1.4: Mögliche Randbedingungen am Rand $x_1 = 0$ eines Torsions-Stabes.

im drei-dimensionalen Kontinuum des Stabes zumindest näherungsweise zu bestimmen. Für einen mit einem konstanten Torsionsmoment belasteten Stab ($M_T(t, x_1) = \text{const.}_{x_1}$) stimmt die so gefundene Lösung exakt mit jener überein, die unter Berücksichtigung der vollen drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Zusammenhänge in Abschnitt 1.8.3 gefunden wird. Diese exakte Übereinstimmung wird nicht mehr erzielt, wenn die Belastungssituation des Stabes ein sich über x_1 änderndes Torsionsmoment $M_T(t, x_1)$ hervorruft oder wenn an einer Einspannstelle die Verschiebungen u_1 zufolge der Querschnittsverwölbung behindert werden. Trotzdem stellt das hier beschriebene Rechenverfahren auch in diesen Fällen eine im Ingenieurwesen häufig hinreichend genaue Näherungslösung dar.

Aufgabe 1.5. Herleitung der Gleichungen eines Torsions-Stabes mit dem Hamilton-Prinzip

Leiten Sie (1.461) mit Hilfe des Hamilton-Prinzips (vgl. (1.263)) her. Im Bereich $x_1 \in [0, l]$ sei der Stab mit einem verteilten Drehmoment $m(t, x_1)$ beaufschlagt. Gehen Sie z. B. von einer festen Einspannung am Rand $x_1 = 0$ und einem freien Rand bei $x_1 = l$ aus.

1.9.3 Theorie eines schubweichen Balkens bei ebener stationärer Biegung

Stäbe deren Achse durch eine Belastung eine Krümmungsänderung erfährt, werden oft als *Balken* bezeichnet. Daher sind Teile der in diesem und den nachfolgenden Abschnitten beschriebenen Zusammenhänge auch unter dem Begriff *Balkentheorie* bekannt. Die Betrachtungen beschränken sich auf die *ebene* Biegung eines geraden Stabes (keine Zug/-Druckbelastung, keine Torsion). Die Abschnitte 1.9.3 bis 1.9.5 sind zunächst auf stationäre Betrachtungen beschränkt, d. h. es kann mit diesen Theorien nur das stationäre Verhalten von Balken berechnet werden. Möglichkeiten zur Modellierung des dynamischen Verhaltens von Balken werden in Abschnitt 1.9.6 skizziert.

Der Flächenschwerpunkt des Stabquerschnitts $\mathcal{A}$ soll mit dem Schubmittelpunkt ident sein und an der Position $(x_2, x_3) = (0, 0)$ liegen. Die durch die Schwerpunkte der Stabquerschnitte gebildete Balkenachse fällt also mit der Achse x_1 zusammen. Der Stab soll die

Länge l aufweisen und sich über den Bereich $x_1 \in [0, l]$ erstrecken. Der Einfachheit halber soll die Biegeverformung in der Ebene $x_2 = 0$ stattfinden, d. h. $\bar{u}_2 = 0$. Diese Annahme ist z. B. unter folgenden Bedingungen gerechtfertigt:

- $I_{23} = 0$, d. h. x_2 und x_3 sind Hauptachsen.
- In jedem Balkenquerschnitt ist das resultierende Schnittmoment $M(x_1)$ in Richtung x_2 und die resultierende Schnittkraft $Q(x_1)$ in Richtung x_3 ausgerichtet.

Folglich gilt $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = Q(x_1)$, $M_1 = M_3 = 0$ und $M_2 = M(x_1)$.

Bemerkung 1.11. Schränkt man die Ergebnisse von Abschnitt 1.8.5 auf diesen Fall ein ($\tilde{x}_2 = 0$, $F_2 = 0$), so ergeben sich gemäß (1.422) bis (1.424) für einen Balken mit der Einzelkraft F_3 am Stabende die Verschiebungen

$$u_1 = x_3 \left(\frac{Q(x_1)}{k_S G \mathcal{A}} - \bar{u}'_3(x_1) \right) + Q(x_1) \theta(x_2, x_3) \quad (1.463a)$$

$$u_2 = -\nu x_2 x_3 \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.463b)$$

$$u_3 = \bar{u}_3(x_1) + \nu \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.463c)$$

mit

$$\bar{u}_3(x_1) = -\frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{x_1}{3} - l \right) \frac{F_3}{EI_{22}} - c_{13} x_1 \quad (1.463d)$$

und der Funktion

$$\theta(x_2, x_3) = -\frac{1}{EI_{22}} \left(\frac{\nu}{2} x_3 \left(\frac{x_3^2}{3} - x_2^2 \right) + \frac{\eta(x_2, x_3)}{k_3} \right) - \frac{x_3}{k_S G \mathcal{A}}. \quad (1.463e)$$

In diesem Fall gilt $Q(x_1) = \text{const.}_{x_1} = F_3$ und $M(x_1) = -(l - x_1)F_3$ (vgl. (1.404)). Die Konstante c_{13} kann als Verdrehwinkel um die Achse x_2 interpretiert werden, denn es gilt $\bar{u}'_3(0) = -c_{13}$. In Beispiel 1.16 wurde das Ergebnis

$$c_{13} = -\frac{Q(x_1)}{k_S G \mathcal{A}} \quad (1.463f)$$

berechnet.

Basierend auf den in Bemerkung 1.11 gemachten Beobachtungen, kann nun folgender Ansatz für die Verschiebungen eines schubweichen Balkens bei ebener Biegung gemacht werden:

Die Punkte eines Querschnitts, der im unbelasteten Zustand eben war, erfahren durch die Belastung eine Verschiebung $\bar{u}_3(x_1)$ in Richtung x_3 , eine Verdrehung um den Winkel $\beta(x_1)$ um die Achse x_2 , eine zusätzliche lokale Verschiebung $\tilde{u}_1$ in Richtung x_1 zufolge der von der lokalen Querkraft abhängigen Verwölbung des Querschnitts sowie zusätzliche lokale Verschiebungen $\tilde{u}_2$ und $\tilde{u}_3$ in Richtung x_2 bzw. x_3 zufolge der vom lokalen Biegemoment

abhängigen Querkontraktion des Querschnitts. Es gilt also

$$u_1 = x_3 \beta(x_1) + \tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) \quad (1.464a)$$

$$u_2 = \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3) \quad (1.464b)$$

$$u_3 = \bar{u}_3(x_1) + \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3) \quad (1.464c)$$

mit den zusätzlichen lokalen Verschiebungen

$$\tilde{u}_1 = Q(x_1) \theta(x_2, x_3) \quad (1.464d)$$

$$\tilde{u}_2 = -\nu x_2 x_3 \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.464e)$$

$$\tilde{u}_3 = \nu \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.464f)$$

und der Funktion

$$\theta(x_2, x_3) = -\frac{1}{EI_{22}} \left(\frac{\nu}{2} x_3 \left(\frac{x_3^2}{3} - x_2^2 \right) + \frac{\eta(x_2, x_3)}{k_3} \right) - \frac{x_3}{k_S G \mathcal{A}} . \quad (1.464g)$$

Der Schubfaktor k_S hängt bei homogenen Querschnitten nur von der Form des Querschnitts $\mathcal{A}$ und von der Querkontraktionszahl ν ab (vgl. (1.438) für den Kreisringquerschnitt in Beispiel 1.16). Aus (1.398), (1.413b), (1.416b) und (1.420b) folgt daher, dass die Funktion $\theta(x_2, x_3)$ nur von $\mathcal{A}$, E und ν abhängt. Aus einem Vergleich von (1.463a) und (1.464a) folgt

$$\beta(x_1) = \frac{Q(x_1)}{k_S G \mathcal{A}} - \bar{u}_3'(x_1) , \quad (1.465)$$

d. h. der Verdrehwinkel $\beta(x_1)$ setzt sich aus einem Anteil $-\bar{u}_3'(x_1)$ zufolge der (kleinen) Verdrehung der Balkenachse und einem Anteil $Q(x_1)/(k_S G \mathcal{A})$ zufolge der lokalen Schubbelastung zusammen.

Gemeinsam mit den Schnittgrößen $Q(x_1)$ und $M(x_1)$ genügen die Freiheitsgrade $\bar{u}_3(x_1)$ und $\beta(x_1)$ zur vollständigen Beschreibung der Verformung des Balkens. Die Sinnhaftigkeit der Identifikation von lokalen Verschiebungen $\tilde{u}_i$ als Anteile an den Gesamtverschiebungen u_i wird sich später noch deutlicher zeigen. Man beachte, dass (neben den üblichen Abhängigkeiten von $\mathcal{A}$, E und ν) $\tilde{u}_1$ nur von $Q(x_1)$, $\tilde{u}_2$ nur von $M(x_1)$ und $\tilde{u}_3$ ebenfalls nur von $M(x_1)$ abhängt. D. h. die lokalen Verschiebungen $\tilde{u}_i$ hängen nur von lokalen Schnittgrößen ab.

Ähnliches gilt für die Spannungen. Aus (1.406a) und (1.421) erhält man

$$\sigma_{11} = x_3 \frac{M(x_1)}{I_{22}} \quad (1.466a)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{Q(x_1)}{2(1+\nu)I_{22}} \frac{1}{k_3} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (1.466b)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{Q(x_1)}{2(1+\nu)I_{22}} \left(\frac{1}{k_3} \frac{\partial \eta}{\partial x_3} + \nu(x_3^2 - x_2^2) \right) . \quad (1.466c)$$

Unter Berücksichtigung von (1.398), (1.413b), (1.416b) und (1.420b) folgt, dass (neben den üblichen Abhängigkeiten von $\mathcal{A}$, E und ν) σ_{11} nur von $M(x_1)$, σ_{12} nur von $Q(x_1)$ und σ_{13} ebenfalls nur von $Q(x_1)$ abhängt. D. h. die (nicht verschwindenden) Spannungen σ_{1i} hängen nur von lokalen Schnittgrößen ab.

Die Biegesteifigkeit des Balkens beträgt gemäß (1.399) EI_{22} . Die Schubsteifigkeit beträgt gemäß (1.427b) bzw. (1.437b) $k_S GA$. Für die Verzerrungsenergie je Längeneinheit erhält man daher

$$\Pi'_{\text{int}}(x_1) = \underbrace{\frac{(M(x_1))^2}{2EI_{22}}}_{=\Pi_{\text{int}}^{N'}} + \underbrace{\frac{(Q(x_1))^2}{2k_S GA}}_{=\Pi_{\text{int}}^{S'}} . \quad (1.467)$$

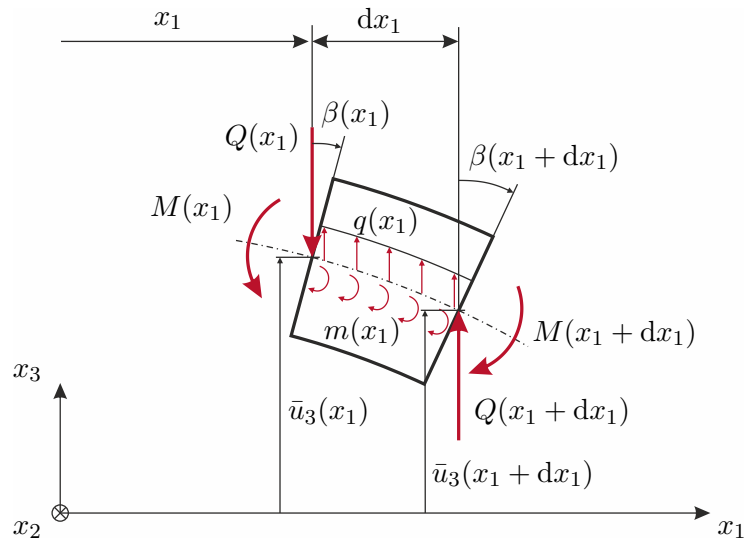


Abbildung 1.34: Infinitesimales Element eines Biegestabes.

Nun ist es noch nötig, die zu den dynamischen Größen $M(x_1)$ und $Q(x_1)$ energetisch konjugierten kinematischen Größen $M(x_1)/(EI_{22})$ und $Q(x_1)/(k_S GA)$ durch die Freiheitsgrade $\bar{u}_3(x_1)$ und $\beta(x_1)$ auszudrücken. Zwei Größen bilden ein energetisch konjugiertes Paar, wenn ihr Produkt eine Energie oder Energiedichte beschreibt (vgl. [1.19]). Um diese Größen zu bestimmen, betrachte man das in Abbildung 1.34 dargestellte infinitesimale Stabelement der Länge dx_1 , auf welches neben den üblichen Schnittgrößen die in Richtung x_3 wirkende Streckenlast $q(x_1)dx_1$ und das um die Achse x_2 wirkende verteilte Moment $m(x_1)dx_1$ wirken. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$Q'(x_1) = -q(x_1) , \quad M'(x_1) = Q(x_1) - m(x_1) . \quad (1.468)$$

Es wird angenommen, dass die Streckenlast $q(x_1)$ und das verteilte Moment $m(x_1)$ gerade so in das infinitesimale Stabelement eingebracht werden, dass ausgehend vom unbelasteten Ausgangszustand $q(x_1)$ die Arbeit $q(x_1)\bar{u}_3(x_1)dx_1/2$ und $m(x_1)$ die Arbeit $m(x_1)\beta(x_1)dx_1/2$ am Stabelement verrichten. Über das Schnittufer x_1 wird die Arbeit

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} (\sigma_{1i} u_i)|_{x_1} d\mathcal{A} = -\frac{1}{2} (M(x_1)\beta(x_1) + Q(x_1)\bar{u}_3(x_1)) \quad (1.469a)$$

in das Stabelement eingebracht. Am Schnittufer $x_1 + dx_1$ wird die Arbeit

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} (\sigma_{1i} u_i)|_{x_1+dx_1} d\mathcal{A} = \frac{1}{2} (M(x_1 + dx_1)\beta(x_1 + dx_1) + Q(x_1 + dx_1)\bar{u}_3(x_1 + dx_1)) \quad (1.469b)$$

eingebracht. Diese einfachen Zusammenhänge ergeben sich, da

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \sigma_{1i} \tilde{u}_i d\mathcal{A} = 0. \quad (1.470)$$

Damit wird auch klar, dass die Interpretation der gewählten Freiheitsgrade $\beta(x_1)$ und $\bar{u}_3(x_1)$ als (aggregierter) Verdrehwinkel bzw. als (aggregierte) Verschiebung sinnvoll ist.

Auf eine allgemeine Herleitung der Beziehungen (1.469) und (1.470) wird hier verzichtet.

Aufgabe 1.6. Zeigen Sie, dass (1.469) und (1.470) für den in Beispiel 1.16 untersuchten Stab mit kreisringförmigem Querschnitt bei ebener Biegung ohne Torsion ($\alpha' = 0$) erfüllt sind.

Die Anwendung des Arbeitssatzes (1.216) auf das betrachtete infinitesimale Stabelement liefert

$$\begin{aligned} \Pi'_{\text{int}}(x_1) dx_1 &= \frac{1}{2} q(x_1) \bar{u}_3(x_1) dx_1 + \frac{1}{2} m(x_1) \beta(x_1) dx_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} (M(x_1) \beta(x_1) + Q(x_1) \bar{u}_3(x_1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (M(x_1 + dx_1) \beta(x_1 + dx_1) + Q(x_1 + dx_1) \bar{u}_3(x_1 + dx_1)), \end{aligned} \quad (1.471)$$

d. h. die netto eingebrachte Arbeit entspricht der im Stabelement gespeicherten Verzerungsenergie. Nach einem Grenzübergang $dx_1 \rightarrow 0$ und Verwendung von (1.468) vereinfacht sich (1.471) zu

$$\Pi'_{\text{int}}(x_1) = \frac{1}{2} (M(x_1) \beta'(x_1) + Q(x_1) (\beta(x_1) + \bar{u}'_3(x_1))) \quad (1.472)$$

und aus einem Vergleich mit (1.467) folgen die gesuchten Zusammenhänge

$$\frac{M(x_1)}{EI_{22}} = \beta'(x_1) \quad (1.473a)$$

$$\frac{Q(x_1)}{k_S G \mathcal{A}} = \beta(x_1) + \bar{u}'_3(x_1). \quad (1.473b)$$

Letztere Beziehung folgt auch direkt aus (1.465). Mit (1.473) kann nun auch die Verzerungsenergie je Längeneinheit aus (1.467) in der alternativen Form

$$\Pi'_{\text{int}}(x_1) = \frac{1}{2} EI_{22} (\beta'(x_1))^2 + \frac{1}{2} k_S G \mathcal{A} (\beta(x_1) + \bar{u}'_3(x_1))^2 \quad (1.474)$$

geschrieben werden.

Um ein Balkenbiegeproblem zu lösen, reicht es daher die Verläufe von $\bar{u}_3(x_1)$, $\beta(x_1)$, $Q(x_1)$ und $M(x_1)$ durch Integration der Differentialgleichungen (1.468) und (1.473) zu berechnen. Diese seien hier nochmals zusammengefasst:

$$\bar{u}'_3(x_1) = -\beta(x_1) + \frac{Q(x_1)}{k_S G A} \quad (1.475a)$$

$$\beta'(x_1) = \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.475b)$$

$$Q'(x_1) = -q(x_1) \quad (1.475c)$$

$$M'(x_1) = Q(x_1) - m(x_1) . \quad (1.475d)$$

In Abhängigkeit der Lagerungsbedingungen des Balkens können $q(x_1)$ oder $m(x_1)$ von $\bar{u}_3(x_1)$ oder $\beta(x_1)$ abhängen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Differentialgleichung (1.475) *linear* und daher besonders einfach zu lösen.

Um (1.475) tatsächlich lösen zu können, werden noch (vier) Randbedingungen an den Balkenenden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ benötigt. Üblicherweise treten an beiden Rändern jeweils zwei Randbedingungen auf, die sich als algebraische Gleichungen der Form

$$\mathbf{b}_0(\bar{u}_3(0), \beta(0), Q(0), M(0)) = \mathbf{0} , \quad \mathbf{b}_l(\bar{u}_3(l), \beta(l), Q(l), M(l)) = \mathbf{0} \quad (1.476)$$

mit $\dim(\mathbf{b}_0) = \dim(\mathbf{b}_l) = 2$ ausdrücken lassen.

Einige Beispiele für mögliche Randbedingungen an der Stelle $x_1 = 0$ (negatives Schnittufer) sind in Tabelle 1.5 zusammengefasst. Die Konstanten k_1 bis k_6 sind entsprechend zu wählen. Die Konstante $k_3 \geq 0$ stellt eine Längsfedersteifigkeit dar; für $k_3 = 0$ ergibt sich ein in Richtung x_3 frei verschieblicher Rand. Die Konstante $k_5 \geq 0$ stellt eine Drehfedersteifigkeit dar; für $k_5 = 0$ ergibt sich ein frei drehbarer Rand. Analog zu Tabelle 1.5 lassen sich Randbedingungen für ein positives Schnittufer formulieren. Man beachte, dass es nicht möglich ist, an einem Rand gleichzeitig $\bar{u}_3$ und Q oder β und M beliebig vorzugeben.

Wirken auf einen Balken im Bereich $x_1 \in (0, l)$ Einzelkräfte oder Einzelmomente, so ist das Rechengebiet an den Angriffspunkten dieser konzentrierten Lasten aufzutrennen und das Problem durch entsprechende Rand- bzw. Übergangsbedingungen zu ergänzen.

Nachdem die Verläufe von $\bar{u}_3(x_1)$, $\beta(x_1)$, $Q(x_1)$ und $M(x_1)$ berechnet wurden, können mit (1.464) alle lokalen Verschiebungen u_i und mit (1.466) alle von Null verschiedenen lokalen Spannungen σ_{1i} ausgerechnet werden. Mit diesen Gleichungen ist es also möglich, ausgehend von den der Stabachse zugeordneten (aggregierten) kinematischen und dynamischen Größen alle interessierenden Größen im drei-dimensionalen Kontinuum des Stabes zu bestimmen. Aus einem Vergleich der Abschnitte 1.8.5 und 1.9.3 überzeugt man sich leicht, dass die so gefundene Lösung für den mit einer Einzelkraft am Ende belasteten Balken ($Q(x_1) = \text{const.}_{x_1}$) exakt mit jener übereinstimmt, die unter Berücksichtigung der vollen drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Zusammenhänge gefunden wird. Diese exakte Übereinstimmung wird nicht mehr erzielt, wenn die Belastungssituation eines Balkens eine sich über x_1 ändernde Querkraft $Q(x_1)$ hervorruft. Trotzdem stellt die hier beschriebene Theorie des Schubweichen Balkens auch in diesen Fällen, d. h. bei $Q(x_1) \neq \text{const.}_{x_1}$, eine im Ingenieurwesen meist hinreichend genaue Näherungslösung dar.

1.9.4 Balkentheorie nach Timoshenko bei stationären Verhältnissen

Der in der Balkentheorie nach Timoshenko verwendete Ansatz für die Verschiebungen gleicht dem im vorherigen Abschnitt verwendeten Ansatz (1.464) jedoch werden die

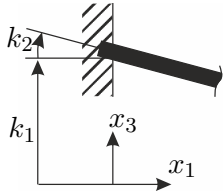
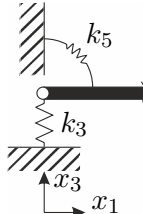
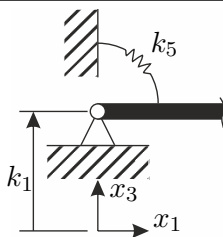
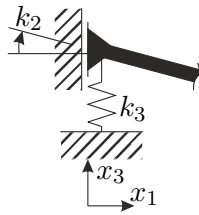
Randbedingung	Bild	Gleichung
Feste Einspannung		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_3(0) - k_1 \\ \beta(0) - k_2 \end{bmatrix}$
Elastisch gebettetes Ende		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} Q(0) - k_3 \bar{u}_3(0) - k_4 \\ M(0) - k_5 \beta(0) - k_6 \end{bmatrix}$
Unverschiebliches, elastisch drehbares Ende		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_3(0) - k_1 \\ M(0) - k_5 \beta(0) - k_6 \end{bmatrix}$
Elastisch verschiebliches, unverdrehbares Ende		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} Q(0) - k_3 \bar{u}_3(0) - k_4 \\ \beta(0) - k_2 \end{bmatrix}$

Tabelle 1.5: Mögliche Randbedingungen am Rand $x_1 = 0$ eines Biegebalkens.

zu Querkontraktion und Verwölbung des Querschnitts führenden zusätzlichen lokalen Verschiebungen $\tilde{u}_i$ vernachlässigt. Damit gilt, wie in Abbildung 1.35a angedeutet: Die Punkte eines Querschnitts, der im unbelasteten Zustand eben und normal zur Balkenachse war, erfahren durch die Belastung eine Verschiebung $\bar{u}_3(x_1)$ in Richtung x_3 und eine Verdrehung um den Winkel $\beta(x_1)$ um die Achse x_2 . Der Querschnitt bleibt also auch im belasteten Zustand eben, es gilt für die Verschiebungen

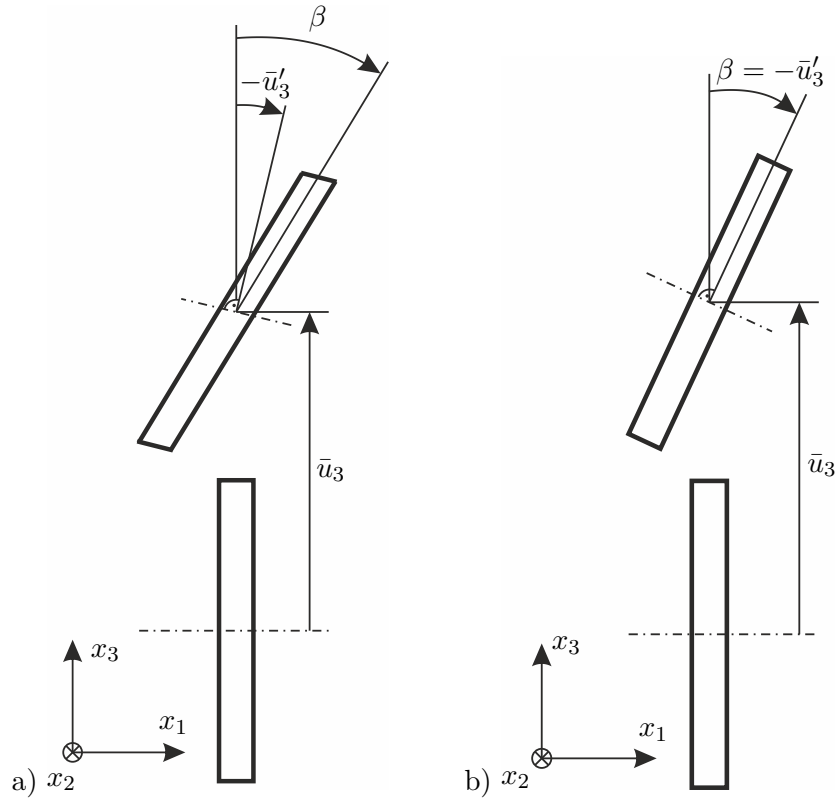


Abbildung 1.35: Verschiebung und Verdrehung von Balkenquerschnitten, a) nach Timoshenko, b) nach Euler-Bernoulli.

$$u_1 = x_3 \beta(x_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \bar{u}_3(x_1) \quad (1.477)$$

und es handelt sich wieder um eine Theorie eines schubweichen Balkens. Aus den Verschiebungen (1.477) würden die Schubverzerrungen

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\beta(x_1) + \bar{u}_3'(x_1)) \quad (1.478)$$

und die Schubspannungen

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{13} = G(\beta(x_1) + \bar{u}_3'(x_1)) \quad (1.479)$$

folgen. Offensichtlich würde damit die Bedingung eines unbelasteten Randes $\partial\mathcal{A}$ verletzt werden. Außerdem wäre die aus (1.479) resultierende Querkraft $G\mathcal{A}(\beta(x_1) + \bar{u}_3'(x_1))$ um

den Faktor $1/k_S$ größer als der in Abschnitt 1.9.3 berechnete Wert

$$Q(x_1) = k_S G A (\beta(x_1) + \bar{u}_3'(x_1)) \quad (1.480)$$

(vgl. (1.473b)). In der Balkentheorie nach Timoshenko wird daher auf eine Beschreibung der tatsächlichen Verteilung der Schubspannungen σ_{12} und σ_{13} verzichtet und der um den Schubfaktor k_S korrigierte Wert (1.480) für die Querkraft verwendet. Dies erklärt warum k_S im Rahmen der Balkentheorie nach Timoshenko auch als *Schubkorrekturfaktor* bezeichnet wird. Man beachte, dass die Balkentheorie nach Timoshenko zunächst keine Vorschrift zur Berechnung von k_S liefert.

Wegen (1.470) und (1.480) liefert die Balkentheorie nach Timoshenko exakt die gleichen Ergebnisse für $\bar{u}_3(x_1)$ und $\beta(x_1)$ wie die Theorie des schubweichen Balkens aus Abschnitt 1.9.3. D.h. die Gleichungen (1.467), (1.468) und (1.471) bis (1.476) sowie die Randbedingungen gemäß Tabelle 1.5 gelten unverändert.

1.9.5 Balkentheorie nach Euler-Bernoulli bei stationären Verhältnissen

Der in der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli verwendete Ansatz für die Verschiebungen gleicht dem im vorherigen Abschnitt verwendeten Ansatz (1.477) jedoch wird von einem schubstarrten Balken ausgegangen, d. h. es gilt $k_S G A \rightarrow \infty$ und aus (1.480) folgt $\beta(x_1) = -\bar{u}_3'(x_1)$. Damit gilt, wie in Abbildung 1.35b angedeutet: Die Punkte eines Querschnitts, der im unbelasteten Zustand eben und normal zur Balkenachse war, erfahren durch die Belastung eine Verschiebung $\bar{u}_3(x_1)$ in Richtung von x_3 und eine Verdrehung um den Winkel $-\bar{u}_3'(x_1)$ um die Achse x_2 . Der Querschnitt bleibt daher auch im belasteten Zustand eben und normal zur Balkenachse und es gilt für die Verschiebungen

$$u_1 = -x_3 \bar{u}_3'(x_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \bar{u}_3(x_1). \quad (1.481)$$

In der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli verschwinden also alle Schubverzerrungen und Schubspannungen (vgl. (1.478) und (1.479)). Um ein Balkenbiegeproblem zu lösen, reicht es wieder die Verläufe von $\bar{u}_3(x_1)$, $\beta(x_1)$, $Q(x_1)$ und $M(x_1)$ durch Integration der Differentialgleichung

$$\bar{u}_3'(x_1) = -\beta(x_1) \quad (1.482a)$$

$$\beta'(x_1) = \frac{M(x_1)}{EI_{22}} \quad (1.482b)$$

$$Q'(x_1) = -q(x_1) \quad (1.482c)$$

$$M'(x_1) = Q(x_1) - m(x_1). \quad (1.482d)$$

(vgl. (1.475)) mit den Randbedingungen gemäß (1.476) und Tabelle 1.5 zu berechnen. Häufig wird (1.482) nach sukzessivem Einsetzen in der Form

$$(EI_{22} \bar{u}_3''(x_1))'' = q(x_1) + m'(x_1) \quad (1.483)$$

geschrieben. Analog können alle Randbedingungen mit den Ausdrücken $\bar{u}_3(x_1)$, $\beta(x_1) = -\bar{u}_3'(x_1)$, $M(x_1) = -EI_{22} \bar{u}_3''(x_1)$ und $Q(x_1) = m(x_1) - (EI_{22} \bar{u}_3''(x_1))'$ formuliert werden. Es ist dann nur noch eine Differentialgleichung für $\bar{u}_3(x_1)$ zu lösen, was in vielen Fällen analytisch möglich ist.

Beispiel 1.17. Einfacher Kragbalken

Anhand von einem einfachen Kragbalken sollen nun die Verformungen gemäß Balkentheorie nach Timoshenko und gemäß Balkentheorie nach Euler-Bernoulli verglichen werden. Der Kragbalken sei entlang der Achse x_1 ausgerichtet, am Ende $x_1 = 0$ fest eingespannt und am Ende $x_1 = l$ im Punkt $(x_2, x_3) = (0, 0)$ mit der Einzelkraft $\mathbf{F} = [0, 0, F_3]^T$ belastet. Der Balkenquerschnitt und die Materialparameter sind unabhängig von x_1 . Die Biegesteifigkeit beträgt EI_{22} , die Schubsteifigkeit $k_S G \mathcal{A}$.

Die Randbedingungen lauten gemäß Tabelle 1.5 für den eingespannten Rand bei $x_1 = 0$

$$\bar{u}_3(0) = 0, \quad \beta(0) = 0 \quad (1.484a)$$

und für den freien Rand bei $x_1 = l$

$$Q(l) = F_3, \quad M(l) = 0. \quad (1.484b)$$

Auf den Balken wirkt keine Streckenlast und kein verteiltes Moment, d. h. $q(x_1) = 0$ und $m(x_1) = 0$. Damit können (1.475) und (1.482) direkt integriert werden und man erhält

$$Q(x_1) = F_3 \quad (1.485a)$$

$$M(x_1) = F_3(x_1 - l) \quad (1.485b)$$

$$\beta(x_1) = \frac{F_3}{EI_{22}} \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 l \right) \quad (1.485c)$$

$$\bar{u}_3^T(x_1) = \frac{F_3}{EI_{22}} \left(\frac{x_1^2}{2} l - \frac{x_1^3}{6} \right) + \frac{F_3}{k_S G \mathcal{A}} x_1 \quad (1.485d)$$

für die schubweiche Balkenformulierung nach Timoshenko und

$$Q(x_1) = F_3 \quad (1.486a)$$

$$M(x_1) = F_3(x_1 - l) \quad (1.486b)$$

$$\beta(x_1) = \frac{F_3}{EI_{22}} \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 l \right) \quad (1.486c)$$

$$\bar{u}_3^{EB}(x_1) = \frac{F_3}{EI_{22}} \left(\frac{x_1^2}{2} l - \frac{x_1^3}{6} \right) \quad (1.486d)$$

für die schubstarre Balkenformulierung nach Euler-Bernoulli. Die Ergebnisse für $Q(x_1)$, $M(x_1)$ und $\beta(x_1)$ stimmen also in diesem Fall bei den beiden Formulierungen exakt überein (dies gilt nicht allgemein). Bei der Verschiebung $\bar{u}_3(x_1)$, welche natürlich auch direkt aus (1.463d) abgelesen werden kann, unterscheiden sich die Formulierungen nur um den Term $x_1 F_3 / (k_S G \mathcal{A})$. Der von diesem Term hervorgerufene relative Unterschied $(\bar{u}_3^{EB}(x_1) - \bar{u}_3^T(x_1)) / \bar{u}_3^T(x_1)$ ist in Abbildung 1.36 für ein kreisrundes Vollprofil mit Durchmesser d , k_S gemäß (1.445) und $\nu = 0.3$ dargestellt. Für diesen Fall lautet der

relative Unterschied

$$\frac{\bar{u}_3^{EB}(x_1) - \bar{u}_3^T(x_1)}{\bar{u}_3^T(x_1)} = - \left(1 + \frac{4k_S}{1+\nu} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \frac{x_1}{l} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x_1}{l} \right) \right)^{-1}. \quad (1.487)$$

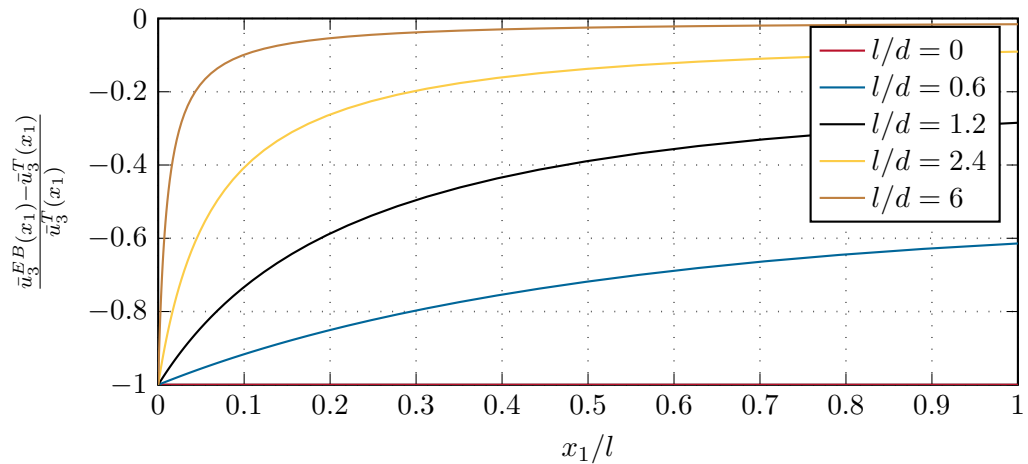


Abbildung 1.36: Relativer Unterschied $(\bar{u}_3^{EB} - \bar{u}_3^T)/\bar{u}_3^T$ der Biegelinien eines einfachen Kragbalkens nach Euler-Bernoulli und Timoshenko.

Die Abbildung bestätigt zunächst, dass die Balkentheorie nach Euler-Bernoulli eine steifere Formulierung liefert als die Balkentheorie nach Timoshenko. Der relative Unterschied zwischen den beiden Formulierungen steigt zur Einspannstelle hin. Für gedrungene Balken, d. h. kleine Werte l/d , ist der relative Unterschied über die ganze Balkenlänge erheblich. Für Balken dieser Art ist also die Verwendung der schubweichen Formulierung ratsam.

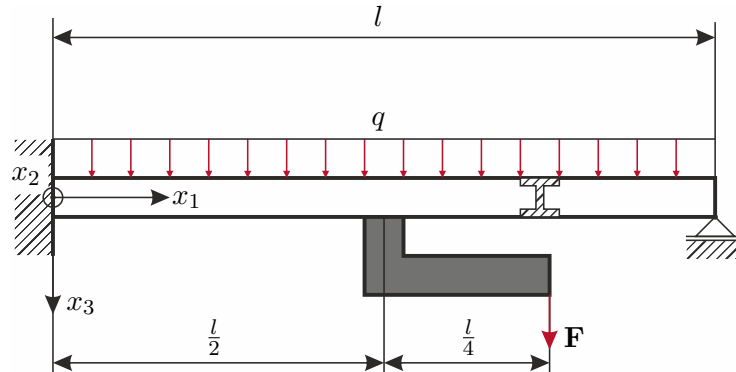
Beispiel 1.18. Statisch unbestimmter Balken

Abbildung 1.37: Statisch unbestimmter Balken mit I-Profil.

Für den in Abbildung 1.37 gezeigten statisch unbestimmten Balken sollen Verformungen gemäß der Balkentheorie nach Timoshenko und gemäß der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli berechnet werden. Der Balken hat die Länge $l = 8 \text{ m}$ und wird mit einer Streckenlast $q = 10\,000 \text{ N/m}$ belastet. Er ist am Rand $x_1 = 0$ fest eingespannt und am Rand $x_1 = l$ drehbar gelagert. In der Mitte des Balkens ist eine starre Konsole mit einer horizontalen Länge $l/4$ befestigt. An deren Ende wirkt die Lastkraft $F = 100\,000 \text{ N}$. Für die Materialkennwerte gelte $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und $\nu = 0.3$. Der Balken ist als Breitflanschträger HE-B 300 nach DIN EN 10034 ausgeführt. Er besitzt das Flächenträgheitsmoment $I_{22} = 2.517 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, die Querschnittsfläche $A = 1.49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ und gemäß [1.20] den Schubfaktor $k_S = 0.19576$.

Da an der Stelle $x_1 = l/2$ sowohl die Querkraft $Q(x_1)$ als auch das Biegemoment $M(x_1)$ unstetig sind, ist das Rechengebiet in die beiden Abschnitte $(0, l/2)$ und $(l/2, l)$ zu teilen. Es ergeben sich daher folgende Randbedingungen:

$$\bar{u}_3(0) = 0 \quad (1.488a)$$

$$\beta(0) = 0 \quad (1.488b)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\bar{u}_3(l/2 + \epsilon) - \bar{u}_3(l/2 - \epsilon)) = 0 \quad (1.488c)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\beta(l/2 + \epsilon) - \beta(l/2 - \epsilon)) = 0 \quad (1.488d)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (Q(l/2 + \epsilon) - Q(l/2 - \epsilon)) + F = 0 \quad (1.488e)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (M(l/2 + \epsilon) - M(l/2 - \epsilon)) - Fl/4 = 0 \quad (1.488f)$$

$$\bar{u}_3(l) = 0 \quad (1.488g)$$

$$M(l) = 0 \quad (1.488h)$$

Für die schubweiche Formulierung nach Timoshenko erhält man durch einfache

Integration sofort die analytische Lösung

$$\begin{aligned} \bar{u}_3(x_1) = & \frac{1}{EI_{22}} \left(q \frac{x_1^4}{24} - Q_0 \frac{x_1^3}{6} - M_0 \frac{x_1^2}{2} \right. \\ & + \sigma \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) \frac{F}{2} \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{3x_1^2 l}{4} + \frac{x_1 l^2}{2} - \frac{5l^3}{48} \right) \\ & \left. + \frac{1}{k_S G \mathcal{A}} \left(-q \frac{x_1^2}{2} + Q_0 x_1 - \sigma \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) F \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.489a)$$

$$\begin{aligned} \beta(x_1) = & \frac{1}{EI_{22}} \left(-q \frac{x_1^3}{6} + Q_0 \frac{x_1^2}{2} + M_0 x_1 \right. \\ & \left. - \sigma \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) F \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{3x_1 l}{4} + \frac{l^2}{4} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.489b)$$

$$Q(x_1) = -q x_1 + Q_0 - \sigma \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) F \quad (1.489c)$$

$$M(x_1) = -q \frac{x_1^2}{2} + Q_0 x_1 + M_0 - \sigma \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) F \left(x_1 - \frac{3l}{4} \right) \quad (1.489d)$$

mit der Einheitssprungfunktion $\sigma(\cdot)$ und den Integrationskonstanten

$$Q_0 = \frac{ql \frac{5}{8} + F \frac{13}{32} + \frac{3(1+\nu)I_{22}}{k_S \mathcal{A} l^2} (ql + F)}{1 + \frac{6(1+\nu)I_{22}}{k_S \mathcal{A} l^2}} \quad (1.489e)$$

$$M_0 = -l \frac{ql \frac{1}{8} + F \frac{5}{32} + \frac{3(1+\nu)I_{22}}{2k_S \mathcal{A} l^2} F}{1 + \frac{6(1+\nu)I_{22}}{k_S \mathcal{A} l^2}}. \quad (1.489f)$$

Für die schubstarre Formulierung nach Euler-Bernoulli erhält man das Ergebnis (1.489) ohne die blau dargestellten Terme. Dieses Resultat folgt natürlich auch, wenn in (1.489) der Grenzübergang $k_S G \mathcal{A} \rightarrow \infty$ bzw. $k_S \rightarrow \infty$ durchgeführt wird. Die Ergebnisse sind für beide Formulierungen in Abbildung 1.38 dargestellt. Mit den hier gewählten Zahlenwerten unterscheiden sich die Integrationskonstanten Q_0 und M_0 und folglich auch $\beta(x_1)$, $Q(x_1)$ und $M(x_1)$ bei den beiden Formulierungen nur marginal.

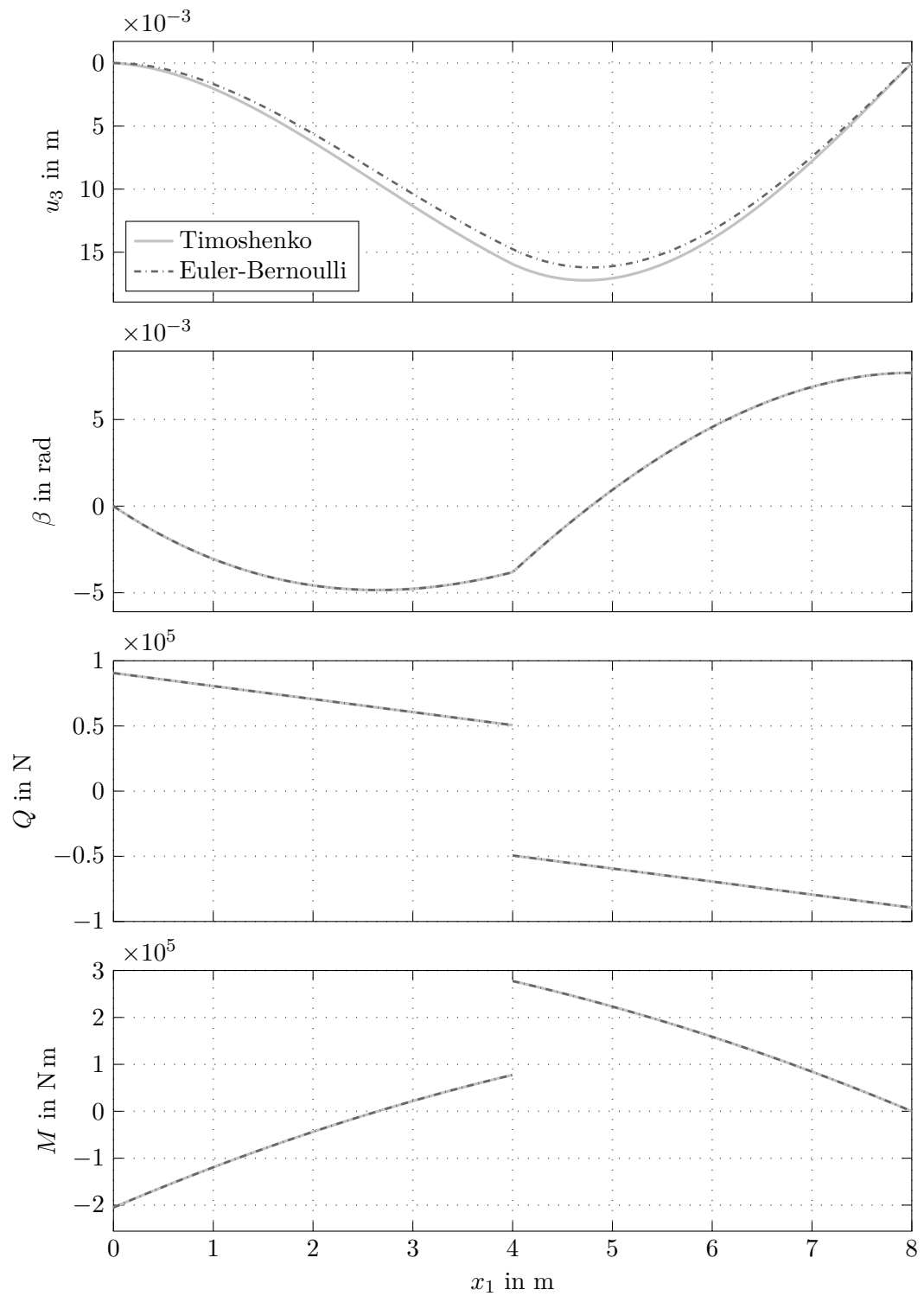


Abbildung 1.38: Verformungen und Schnittgrößen des statisch unbestimmten Balkens.

1.9.6 Dynamisches Verhalten von geraden Stäben bei Biegebelastung

Der Einfachheit halber sollen hier nur die Balkentheorien nach Timoshenko, Euler-Bernoulli und Rayleigh studiert werden. Zur Herleitung der entsprechenden Differentialgleichungen betrachte man wieder das in Abbildung 1.34 dargestellte infinitesimale Stabelement der Länge dx_1 . Auf den Stababschnitt wirken neben den üblichen Schnittgrößen, die nun auch zeitabhängig sind, wieder die in Richtung x_3 wirkende Streckenlast $q(t, x_1)dx_1$ und das um die Achse x_2 wirkende verteilte Moment $m(t, x_1)dx_1$. Auf ein Volumenelement $dV = dA dx_1$ wirkt die Beschleunigungskraft $-dV\rho\ddot{u}_i$, wobei ρ die Massendichte beschreibt und grundsätzlich die Verschiebungen u_i gemäß (1.464) zu verwenden sind. In den Balkentheorien nach Timoshenko, Euler-Bernoulli und Rayleigh treten die Freiheitsgrade $\bar{u}_3$ und β auf, welche nun sowohl von x_1 als auch von t abhängen. In diesen Theorien werden die zusätzlichen lokalen Verschiebungen $\tilde{u}_i$ als verschwindend klein angenommen. Daher erscheint auch die Annahme $\ddot{\tilde{u}}_i = 0$ als gerechtfertigt und man erhält aus der zweifachen Zeitableitung von (1.477) die Beschleunigungen

$$\ddot{u}_1 = x_3\ddot{\beta}(t, x_1), \quad \ddot{u}_2 = 0, \quad \ddot{u}_3 = \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1). \quad (1.490)$$

Sie verursachen am betrachteten Balkenelement die resultierende Kraft

$$-dx_1 \int_{\mathcal{A}} \rho \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) dA = -dx_1 \rho A \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) \quad (1.491a)$$

in Richtung x_3 und das resultierende Moment

$$-dx_1 \int_{\mathcal{A}} \rho \ddot{\beta}(t, x_1) x_3^2 dA = -dx_1 \rho I_{22} \ddot{\beta}(t, x_1) \quad (1.491b)$$

um die Achse x_2 . Hierbei wird vorausgesetzt, dass ρ über den Querschnitt $\mathcal{A}$ konstant ist. Bezüglich der weiteren Achsen treten bei ebener Biegung keine resultierenden Kräfte oder Momente zufolge der Beschleunigungen auf. Die integrale Impulsbilanz für das betrachtete Balkenelement liefert daher (vgl. (1.468))

$$Q'(t, x_1) = -q(t, x_1) + \rho A \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) \quad (1.492a)$$

$$M'(t, x_1) = Q(t, x_1) - m(t, x_1) + \rho I_{22} \ddot{\beta}(t, x_1). \quad (1.492b)$$

Die sich aus der Verzerrungsenergie ergebenden Zusammenhänge (1.473) gelten im dynamischen Fall unverändert. Zusammengefasst lauten die Differentialgleichungen gemäß der Balkentheorie nach *Timoshenko* daher

$$\bar{u}'_3(t, x_1) = -\beta(t, x_1) + \frac{Q(t, x_1)}{k_S G A} \quad (1.493a)$$

$$\beta'(t, x_1) = \frac{M(t, x_1)}{EI_{22}} \quad (1.493b)$$

$$Q'(t, x_1) = -q(t, x_1) + \rho A \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) \quad (1.493c)$$

$$M'(t, x_1) = Q(t, x_1) - m(t, x_1) + \rho I_{22} \ddot{\beta}(t, x_1). \quad (1.493d)$$

Die Randbedingungen gemäß (1.476) und Tabelle 1.5 gelten weiterhin, wobei nun alle auftretenden Terme von der Zeit abhängen können. Die Formulierung ist noch um geeignete Anfangsbedingungen für $\bar{u}_3(t, x_1)$, $\beta(t, x_1)$, $\dot{\bar{u}}_3(t, x_1)$ und $\dot{\beta}(t, x_1)$ zu erweitern. In der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli entfallen die in (1.493) blau dargestellten Terme für die Querschubverzerrung und für das Moment zufolge der rotatorischen Trägheit des Balkenquerschnitts [1.21]. Nach sukzessivem Einsetzen wird (1.493) in der Theorie nach *Euler-Bernoulli* häufig in der Form

$$(EI_{22}\bar{u}_3''(t, x_1))'' = q(t, x_1) + m'(t, x_1) - \rho A \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) \quad (1.494)$$

geschrieben. In der Balkentheorie nach *Rayleigh* wird nur die Querschubverzerrung vernachlässigt [1.21], d. h. (1.493) kann in der Form

$$(EI_{22}\bar{u}_3''(t, x_1))'' = q(t, x_1) + m'(t, x_1) - \rho A \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) + (\rho I_{22}\ddot{\bar{u}}_3'(t, x_1))' \quad (1.495)$$

geschrieben werden.

Abschließend soll anhand von einem Beispiel gezeigt werden, dass (1.493) auch mit Hilfe des Hamilton-Prinzips (vgl. (1.263)) hergeleitet werden kann.

Beispiel 1.19. Ableitung von Balkengleichungen nach Timoshenko mit dem Hamilton-Prinzip

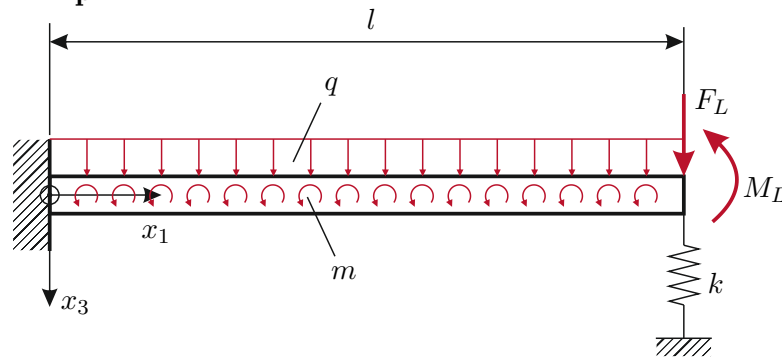


Abbildung 1.39: Abgestützter Kragbalken.

Man betrachte den in Abbildung 1.39 dargestellten an der Stelle $x_1 = 0$ eingespannten Kragbalken. Neben der entlang der Balkenlänge wirkenden Streckenlast $q(t, x_1)$ und dem verteilten Moment $m(t, x_1)$ wird der Balken an der Stelle $x_1 = l$ mit einer Lastkraft $F_L(t)$ und einem Lastmoment $M_L(t)$ belastet und durch eine linear elastische Feder mit der Federkonstante k abgestützt.

Für die kinetische Energie gilt

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l \int_A \rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dA dx_1 \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l \int_A (x_3^2 \dot{\beta}^2 + \dot{\bar{u}}_3^2) dA dx_1 = \frac{\rho}{2} \int_0^l (I_{22} \dot{\beta}^2 + A \dot{\bar{u}}_3^2) dx_1, \end{aligned} \quad (1.496)$$

und für die Verzerrungsenergie (vgl. (1.474))

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int}} &= \int_0^l \Pi'_{\text{int}} dx_1 + \frac{1}{2} k (\bar{u}_3(t, l))^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (EI_{22}(\beta')^2 + k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3)^2) dx_1 + \frac{1}{2} k (\bar{u}_3(t, l))^2 .\end{aligned}\quad (1.497)$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich in der Form

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = F_L \delta \bar{u}_3(t, l) + M_L \delta \beta(t, l) + \int_0^l (q \delta \bar{u}_3 + m \delta \beta) dx_1 . \quad (1.498)$$

Wegen der geometrischen Randbedingungen

$$\bar{u}_3(t, 0) = 0 , \quad \beta(t, 0) = 0 \quad (1.499)$$

gilt

$$\delta \bar{u}_3(t, 0) = 0 , \quad \delta \beta(t, 0) = 0 . \quad (1.500)$$

Das Hamilton-Prinzip (siehe (1.263)) liefert unter Berücksichtigung von (1.500)

$$\begin{aligned}0 &= \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{T} - \delta \Pi_{\text{int}} + \delta \mathcal{W}_{\text{ext}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (M_L - EI_{22} \beta'(t, l)) \delta \beta(t, l) \\ &\quad + (F_L - k \bar{u}_3(t, l) - k_S G \mathcal{A}(\beta(t, l) + \bar{u}'_3(t, l))) \delta \bar{u}_3(t, l) \\ &\quad + \int_0^l \left((-\rho I_{22} \ddot{\beta} + (EI_{22} \beta')' - k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3) + m) \delta \beta \right. \\ &\quad \left. + (-\rho \mathcal{A} \ddot{\bar{u}}_3 + (k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3))' + q) \delta \bar{u}_3 \right) dx_1 dt .\end{aligned}\quad (1.501)$$

Daraus liest man gemäß Fundamentallemma der Variationsrechnung (Lemma 1.2) die Randbedingungen

$$M_L = EI_{22} \beta'(t, l) , \quad F_L = k \bar{u}_3(t, l) + k_S G \mathcal{A}(\beta(t, l) + \bar{u}'_3(t, l)) \quad (1.502)$$

und die Differentialgleichungen

$$0 = (EI_{22} \beta')' - \rho I_{22} \ddot{\beta} - k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3) + m \quad (1.503a)$$

$$0 = (k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3))' + q - \rho \mathcal{A} \ddot{\bar{u}}_3 \quad (1.503b)$$

ab. Wie es sein muss, sind letztere bei Verwendung von $M = EI_{22} \beta'$ und $Q = k_S G \mathcal{A}(\beta + \bar{u}'_3)$ identisch zu (1.493).

Aufgabe 1.7. Ableitung von Balkengleichungen nach Euler-Bernoulli mit dem Hamilton-Prinzip

Wiederholen Sie das Beispiel 1.19 für die Balkengleichungen nach Euler-Bernoulli (Gleichung (1.493) ohne die blau dargestellten Terme).

1.9.7 Dynamisches Verhalten von biegeschlaffen Zugelementen

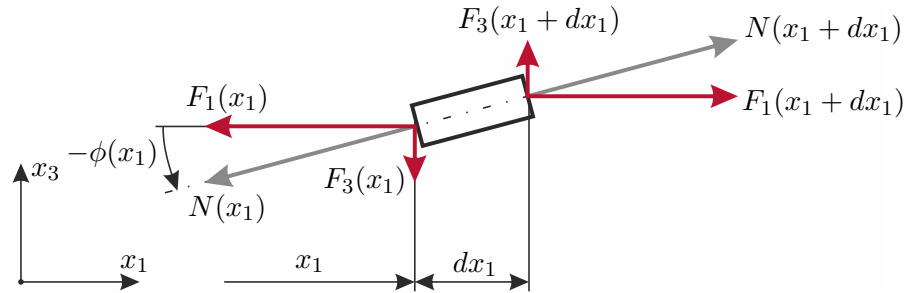


Abbildung 1.40: Kräfte an einem infinitesimalen biegeschlaffen Zugelement.

Seile, Ketten, Schläuche, Riemen, Bänder, etc. können als *biegeschlaffe Zugelemente* angesehen werden, wenn ihre Biegesteifigkeit (vgl. (1.399)) vernachlässigbar klein ist (vgl. [1.21, 1.22]). Für Probleme, bei denen die Verschiebungen auf die Ebene $x_2 = 0$ beschränkt sind, gilt dann $I_{22} \rightarrow 0$. Biegeschlaffe Zugelemente sind also Tragwerke, die keine Momente übertragen können, d. h. im ebenen Fall $M_2 = 0$ (vgl. (1.329)). Die Folgen dieser Eigenschaft können anhand von dem in Abbildung 1.40 dargestellten infinitesimalen Stabelement studiert werden. Es besitze den lokalen Steigungswinkel ϕ gegenüber der Achse x_1 . Das Koordinatensystem bleibt raumfest. Für das infinitesimale Stabelement ergibt die Momentenbilanz bezüglich der Achse x_2 für die Schnittkräfte gemäß (1.328) den Zusammenhang

$$F_3 \cos(\phi) + F_1 \sin(\phi) = 0, \quad (1.504)$$

wobei der rotatorische Trägheitsterm $\rho I_{22} \ddot{\phi}$ wegen $I_{22} \rightarrow 0$ hier keinen Beitrag liefert. Aus (1.504) ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Die Schnittkraft $\mathbf{F} = [F_1, 0, F_3]^T$ steht stets tangential zur lokalen Stabachse.
- Der Stab kann keine Kraftkomponenten übertragen, die normal zur aktuellen Stabachse stehen. D. h. der Stab ist frei von Querkraften.

Für eine kompakte Schreibweise wird die resultierende Normalkraft (Zugkraft) $N = \sqrt{F_1^2 + F_3^2}$ eingeführt. Folglich gilt,

$$F_1 = N \cos(\phi), \quad F_3 = -N \sin(\phi), \quad (1.505)$$

und (1.504) ist automatisch erfüllt.

Zugelemente können dann als biegeschlaff betrachtet werden, wenn die Normalspannungen zufolge einer Verkrümmung der Stabachse gegenüber der mittleren Normalspannung N/A zufolge der Zugkraft N vernachlässigbar klein sind. Diese Bedingung wird von sehr

schlanken Stäben mit entsprechend großer Zugkraft N erfüllt (vgl. (1.334), (1.389) und (1.397)).

Der Einfachheit halber soll die Achse des biegeschlaffen Zugelements im unbelasteten Zustand mit der Achse x_1 zusammenfallen. Als aggregierte Verformungsgrößen treten dann die auf die Stabachse bezogenen Verschiebungen $\bar{u}_1(t, x_1)$ und $\bar{u}_3(t, x_1)$ auf.

Ähnlich zur Verschiebungshypothese in der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli kann auch für biegeschlaffe Zugelemente angenommen werden, dass Querschnitte, die im unbelasteten Zustand eben und normal zur Stabachse waren, im belasteten Zustand stets eben und normal zur Stabachse bleiben. Anders als in der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli fußt diese Annahme aber nicht auf der Schubstarrheit des Stabes sondern auf dem Ausbleiben von Querkraften.

Die Verdrehwinkel ϕ sei so klein, dass die Näherungen

$$-\phi = \arctan(\bar{u}_3') \approx \bar{u}_3' , \quad \tan(\phi) \approx \sin(\phi) , \quad \cos(\phi) \approx 1 \quad (1.506)$$

zulässig sind. Für die Verschiebungen kann daher der Ansatz (vgl. (1.481))

$$u_1 = \bar{u}_1(t, x_1) - x_3 \bar{u}_3'(t, x_1) , \quad u_2 = 0 , \quad u_3 = \bar{u}_3(t, x_1) \quad (1.507)$$

verwendet werden.

Zur Modellierung des dynamischen Verhaltens von biegeschlaffen Zugelementen ist es nötig geometrische Nichtlinearitäten zu berücksichtigen. Konkret muss die Annahme kleiner Verschiebungen $\bar{u}_3(x_1)$ (bei der Berechnung der Verzerrungen) aufgegeben und zumindest die *Theorie zweiter Ordnung* verwendet werden, d. h. die Gleichgewichtsbedingungen sind am verformten Körper zu formulieren.

Gemäß der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung (1.108) erhält man daher bei Berücksichtigung von $|u_1'| \ll 1$ für die Längsverzerrung

$$\varepsilon_{11} = \bar{u}_1'(t, x_1) - x_3 \bar{u}_3''(t, x_1) + \frac{1}{2}(\bar{u}_3'(t, x_1))^2 . \quad (1.508)$$

Mit dem Hookschen Gesetz (1.195) und der Annahme eines einachsigen Spannungszustandes (vgl. Abschnitt 1.8.2) liefert dies

$$\sigma_{ij} = E \varepsilon_{11} \delta_{i1} \delta_{j1} = E \left(\bar{u}_1'(t, x_1) - x_3 \bar{u}_3''(t, x_1) + \frac{1}{2}(\bar{u}_3'(t, x_1))^2 \right) \delta_{i1} \delta_{j1} , \quad (1.509)$$

und für die resultierende Normalkraft gilt

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{11} d\mathcal{A} = E \mathcal{A} \left(\bar{u}_1'(t, x_1) + \frac{1}{2}(\bar{u}_3'(t, x_1))^2 \right) . \quad (1.510)$$

Hierbei kann

$$\varepsilon = \bar{u}_1'(t, x_1) + \frac{1}{2}(\bar{u}_3'(t, x_1))^2 \quad (1.511)$$

als die zu N energetisch konjugierte, mittlere Längsverzerrung interpretiert werden. Dies ist zugleich die Längsverzerrung in der Stabachse, d. h. $\varepsilon = \varepsilon_{11}|_{(x_2, x_3)=(0,0)}$.

Damit die Annahme eines biegeschlaffen Stabes, d. h. $M_2 = 0$, gerechtfertigt ist, muss der Term $-x_3 \bar{u}_3''$ in (1.509) gegenüber den übrigen Summanden vernachlässigbar klein

sein. Der zu vernachlässigende Term wird in der Randfaser mit dem größten Wert $|x_3|$ extremal. Auf eine genauere Prüfung der Bedingung $-x_3 \bar{u}_3'' \approx 0$ basierend auf einer drei-dimensionalen kontinuumsmechanischen Problemformulierung wird hier verzichtet.

Für einen biegeschlaffen Stab mit $-x_3 \bar{u}_3'' \approx 0$ kann also die Verzerrungsenergie je Längeneinheit in der Form

$$\Pi'_{\text{int}}(t, x_1) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\mathcal{A} = \frac{1}{2} E\mathcal{A} \left(\bar{u}'_1(t, x_1) + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3(t, x_1))^2 \right)^2 = \frac{1}{2} N \varepsilon \quad (1.512)$$

geschrieben werden.

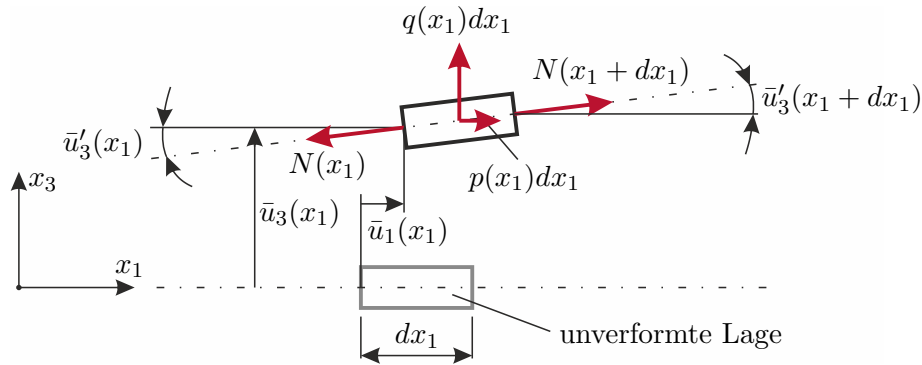


Abbildung 1.41: Infinitesimaler Ausschnitt eines biegeschlaffen Zugelements.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung betrachte man das in Abbildung 1.41 dargestellte infinitesimale Stabelement. Hierbei sei $p(t, x_1)$ eine in Richtung x_1 wirkende Streckenlast und $q(t, x_1)$ eine in Richtung x_3 wirkende Streckenlast. Die Beschleunigung $[\ddot{u}_1(t, x_1), 0, \ddot{u}_3(t, x_1)]^T$ verursacht im betrachteten Stabelement die resultierende Kraft

$$-dx_1 \int_{\mathcal{A}} \rho \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t, x_1) \\ 0 \\ \ddot{u}_3(t, x_1) \end{bmatrix} d\mathcal{A} = -dx_1 \rho \mathcal{A} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t, x_1) \\ 0 \\ \ddot{u}_3(t, x_1) \end{bmatrix}. \quad (1.513)$$

Für das betrachtete Stabelement liefert die integrale Impulsbilanz entlang der Richtungen x_1 und x_3 daher

$$N'(t, x_1) = -p(t, x_1) + \rho \mathcal{A} \ddot{u}_1(t, x_1) \quad (1.514a)$$

$$(N(t, x_1) \bar{u}'_3(t, x_1))' = -q(t, x_1) + \rho \mathcal{A} \ddot{u}_3(t, x_1). \quad (1.514b)$$

Man beachte, dass (1.514a) ident zu (1.453) ist. Mit (1.510) lässt sich (1.514) auch in der Form

$$\left(\left(\bar{u}'_1(t, x_1) + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3(t, x_1))^2 \right) E\mathcal{A} \right)' = -p(t, x_1) + \rho \mathcal{A} \ddot{u}_1(t, x_1) \quad (1.515a)$$

$$\left(\left(\bar{u}'_1(t, x_1) + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3(t, x_1))^2 \right) E\mathcal{A} \bar{u}'_3(t, x_1) \right)' = -q(t, x_1) + \rho \mathcal{A} \ddot{u}_3(t, x_1) \quad (1.515b)$$

schreiben, so dass nur noch $\bar{u}_1(t, x_1)$ und $\bar{u}_3(t, x_1)$ als unbekannte Größen vorkommen. Um diese Gleichungen zu lösen, werden noch geeignete Anfangsbedingungen für $\bar{u}_1(t, x_1)$,

$\bar{u}_3(t, x_1)$, $\dot{\bar{u}}_1(t, x_1)$ und $\dot{\bar{u}}_3(t, x_1)$ sowie (vier) Randbedingungen an den Stabenden $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ benötigt, die sich z. B. in der Form

$$\mathbf{b}_0(\bar{u}_1(t, 0), \bar{u}_3(t, 0), \bar{u}_3'(t, 0), N(t, 0)) = \mathbf{0} \quad (1.516a)$$

$$\mathbf{b}_l(\bar{u}_1(t, l), \bar{u}_3(t, l), \bar{u}_3'(t, l), N(t, l)) = \mathbf{0} \quad (1.516b)$$

mit $\dim(\mathbf{b}_0) = \dim(\mathbf{b}_l) = 2$ ausdrücken lassen. Drei Beispiele für mögliche Randbedingungen an der Stelle $x_1 = 0$ (negatives Schnittufer) sind in Tabelle 1.6 zusammengefasst. Die Konstanten k_1 bis k_6 sind entsprechend zu wählen. Die Konstanten $k_3 \geq 0$ und $k_5 \geq 0$ stellen Längsfedersteifigkeiten dar; für $k_3 = 0$ bzw. $k_5 = 0$ ergibt sich ein in die jeweilige Richtung frei verschieblicher Rand. Analog zu Tabelle 1.6 lassen sich weitere Fälle von Randbedingungen für ein positives Schnittufer formulieren. Man beachte, dass es nicht möglich ist, an einem Rand gleichzeitig $\bar{u}_1$ und N oder $\bar{u}_3$ und $\bar{u}_3'N$ beliebig vorzugeben.

Randbedingung	Bild	Gleichung
Feste Einspannung		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t, 0) - k_1 \\ \bar{u}_3(t, 0) - k_2 \end{bmatrix}$
In Richtung x_1 elastisch verschiebliches Ende		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} N(t, 0) - k_3 \bar{u}_1(t, 0) - k_4 \\ \bar{u}_3(t, 0) - k_2 \end{bmatrix}$
In Richtung x_3 elastisch verschiebliches Ende		$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t, 0) - k_1 \\ \bar{u}_3'(t, 0)N(t, 0) - k_5 \bar{u}_3(t, 0) - k_6 \end{bmatrix}$

Tabelle 1.6: Mögliche Randbedingungen am Rand $x_1 = 0$ eines biegeschlaffen Zugelements.

Anhand von einem Beispiel soll nun gezeigt werden, dass (1.515) auch mit Hilfe des Hamilton-Prinzips (vgl. (1.263)) hergeleitet werden kann.

Beispiel 1.20. Herleitung der Gleichungen eines biegeschlaffen Zugelements mit dem Hamilton-Prinzip

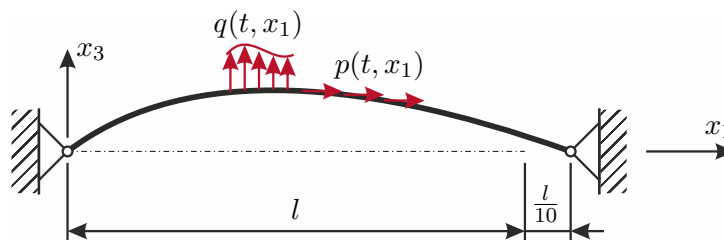


Abbildung 1.42: Biegeschlaffes Zugelement.

Man betrachte das in Abbildung 1.42 dargestellte biegeschlaffe Zugelement, das am Rand $x_1 = 0$ fest eingespannt ist. Am Rand $x_1 = l$ werden die Verschiebungen $\bar{u}_1(l) = l/10$ und $\bar{u}_3(l) = 0$ erzwungen. Neben der in Richtung x_1 wirkenden Streckenlast $p(t, x_1)$ wirkt die Streckenlast $q(t, x_1)$ in Richtung x_3 .

Für die kinetische Energie gilt

$$\mathcal{T} = \int_0^l \int_{\mathcal{A}} \rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dA dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \mathcal{A} (\dot{\bar{u}}_1^2 + \dot{\bar{u}}_3^2) dx_1, \quad (1.517)$$

und für die Verzerrungsenergie

$$\Pi_{\text{int}} = \int_0^l \Pi'_{\text{int}}(t, x_1) dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\bar{u}'_1 + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3)^2 \right)^2 dx_1. \quad (1.518)$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich in der Form

$$\delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_0^l p(t, x_1) \delta \bar{u}_1 + q(t, x_1) \delta \bar{u}_3 dx_1. \quad (1.519)$$

Wegen der geometrischen Randbedingungen

$$\bar{u}_1(t, 0) = \bar{u}_3(t, 0) = \bar{u}_3(t, l) = 0, \quad \bar{u}_1(t, l) = l/10 \quad (1.520)$$

gilt

$$\delta \bar{u}_1(0) = \delta \bar{u}_3(0) = \delta \bar{u}_1(l) = \delta \bar{u}_3(l) = 0. \quad (1.521)$$

Das Hamilton-Prinzip (siehe (1.263)) liefert unter Berücksichtigung von (1.521)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{T} - \delta \Pi_{\text{int}} + \delta \mathcal{W}_{\text{ext}} dt \\ &= \int_0^l \left(\left[\left(\bar{u}'_1 + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3)^2 \right) EA \right]' + p(t, x_1) - \rho \mathcal{A} \ddot{\bar{u}}_1 \right] \delta \bar{u}_1 \\ &\quad + \left[\left(\left(\bar{u}'_1 + \frac{1}{2} (\bar{u}'_3)^2 \right) EA \bar{u}'_3 \right)' + q(t, x_1) - \rho \mathcal{A} \ddot{\bar{u}}_3(t, x_1) \right] \delta \bar{u}_3 dx_1. \end{aligned} \quad (1.522)$$

Daraus liest man gemäß Fundamentallemma der Variationsrechnung (Lemma 1.2) direkt die Differentialgleichung (1.515) ab.

Die Erfahrung lehrt und (1.514b) zeigt, dass die Steifigkeit eines biegeschlaffen Zu-

gelements gegen Auslenkungen in Richtung x_3 direkt von $N(t, x_1)$ abhängt. Für viele biegeschlafe Zugelement gilt, dass ihre Steifigkeit in Richtung x_1 wesentlich größer ist als in Richtung x_3 . In vielen Belastungsfällen gilt daher, dass (dynamische) Bewegungen in Richtung x_3 erheblich größere Amplituden aufweisen als Bewegungen in Richtung x_1 , d. h. $\dot{u}_3$ leistet einen größeren Beitrag zur kinetischen Energie (1.517) als $\dot{u}_1$ (vgl. [1.21]). Wird nun in (1.517) $(\dot{u}_1)^2$ gegenüber $(\dot{u}_3)^2$ vernachlässigt, so vereinfacht sich (1.514) zu

$$N'(t, x_1) = -p(t, x_1) \quad (1.523a)$$

$$(N(t, x_1)\bar{u}_3'(t, x_1))' = -q(t, x_1) + \rho A \ddot{u}_3(t, x_1) . \quad (1.523b)$$

Diese Gleichung lässt sich besonders einfach lösen, da (1.523a) vorab integriert werden kann. Die Unbekannte $\bar{u}_1(t, x_1)$ tritt hier nicht mehr auf, sie kann aber nachträglich durch Integration von (1.510) berechnet werden. Im Spezialfall $p(t, x_1) = 0$ gilt natürlich $N = \text{const.}_{x_1}$ und (1.523b) vereinfacht sich weiter. Da (1.523) einfach zu lösen ist und (1.523b) eine strukturelle Ähnlichkeit zu (1.454) und (1.461) aufweist, wird diese Form der Bewegungsgleichung im Ingenieurwesen häufig der genaueren Form (1.514) vorgezogen.

1.9.8 Struktur der Bewegungsgleichungen von geraden Stäben

Die in diesem Abschnitt auftretenden Bewegungsgleichungen besitzen eine strukturelle Ähnlichkeit und lassen sich daher in der Form

$$\mathbf{m}(\ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{c}(\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f} \quad (1.524)$$

mit den in Tabelle 1.7 zusammengefassten Verschiebungsgrößen $\bar{\mathbf{u}}(t, x_1)$, den auf $\bar{\mathbf{u}}(t, x_1)$ anzuwendenden Differentialoperatoren $\mathbf{m}$ und $\mathbf{c}$ sowie den verteilten äußeren Lasten $\mathbf{f}(t, x_1)$ anschreiben. Der Operator $\mathbf{m}$ beschreibt die Massenträgheit des Systems, der Operator $\mathbf{c}$ die Steifigkeit. Die Parameter und Operatoren zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von geraden Stäben erlauben daher eine Deutung als Abstraktionen jener Parameter und Operatoren die zur Beschreibung diskreter mechanischer Systeme verwendet werden (vgl. [1.7, 1.23]).

Aufgabe 1.8. Überlegen Sie sich, wie (1.524) und Tabelle 1.7 um Dämpfungsterme, die von $\dot{\mathbf{u}}(t, x_1)$ abhängen, erweitert werden können. Wiederholen Sie dazu die Herleitung der Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung viskoser Dämpfungsterme.

Art des Stabes	Verschiebungsgröße $\bar{\mathbf{u}}(t, x_1)$	Operatoren $\mathbf{c}(\cdot)$	$\mathbf{m}(\cdot)$	Äußere Last $\mathbf{f}(t, x_1)$
Zug/Druck-Stab	$\bar{u}_1$	$-(EA(\cdot)')'$	$\rho\mathcal{A}(\cdot)$	p
Torsions-Stab	α	$-(GJ_T(\cdot)')'$	$\rho I_P(\cdot)$	m_T
Balken nach Euler-Bernoulli	$\bar{u}_3$	$(EI_{22}(\cdot)''')''$	$\rho\mathcal{A}(\cdot)$	$q + m'$
Balken nach Rayleigh	$\bar{u}_3$	$(EI_{22}(\cdot)''')''$	$\rho\mathcal{A}(\cdot) - (\rho I_{22}(\cdot)')'$	$q + m'$
Balken nach Timoshenko	$\begin{bmatrix} \bar{u}_3 \\ \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} \end{bmatrix}$ mit $\mathbf{c}_{11} = -(k_S G \mathcal{A}(\cdot)')'$ $\mathbf{c}_{12} = -(k_S G \mathcal{A}(\cdot))'$ $\mathbf{c}_{21} = k_S G \mathcal{A}(\cdot)'$ $\mathbf{c}_{22} = k_S G \mathcal{A}(\cdot) - (EI_{22}(\cdot)')'$	$\rho \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix}(\cdot)$	$\begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix}$
Biegeschlaffes Zuelement mit $N' = -p$	$\bar{u}_3$	$-(N(\cdot)')'$	$\rho\mathcal{A}(\cdot)$	q

Tabelle 1.7: Parameter und Operatoren zur Formulierung der Bewegungsgleichungen von geraden Stäben.

1.10 Literatur

- [1.1] P. Haupt, *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Germany: Springer, 2002.
- [1.2] J. E. Marsden und T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York, USA: Dover Publications, 1994.
- [1.3] R. Greve, *Kontinuumsmechanik - Ein Grundkurs*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2003.
- [1.4] W. Slaughter, *The Linearized Theory of Elasticity*. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [1.5] A. Steinböck, *Skriptum zur VU Optimierung (WS 2019/2020)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/optimierung/>.
- [1.6] J. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2. Aufl. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2007.
- [1.7] A. Kugi und T. Glück, *Skriptum zur VO Fachvertiefung: Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2017/2018)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2017. Adresse: <http://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/fachvertiefung-automatisierungs-und-regelungstechnik/>.
- [1.8] F. Ziegler, *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. Wien, New York: Springer, 1998.
- [1.9] R. Asaro und V. Lubarda, *Mechanics of Solids and Materials*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2006.
- [1.10] H. A. Mang und G. Hofstetter, *Festigkeitslehre*, 3. Aufl. Wien, New York: Springer, 2008.
- [1.11] W. Lai, D. Rubin und E. Krempel, *Introduction to Continuum Mechanics*, 4. Aufl. Amsterdam, Boston: Butterworth-Heinemann, 2010.
- [1.12] K.-H. Grote und J. Feldhusen, Hrsg., *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, 23. Aufl. Berlin: Springer, 2011.
- [1.13] W. Young, R. Budynas und S. A.M., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 8. Aufl. New York, Chicago: McGraw-Hill, 2012.
- [1.14] J. Renton, „A note on the form of the shear coefficient“, *International Journal of Solids and Structures*, Jg. 34, Nr. 14, S. 1681–1685, 1997.
- [1.15] P. Pai und M. Schulz, „Shear correction factors and an energy-consistent beam theory“, *International Journal of Solids and Structures*, Jg. 36, Nr. 10, S. 1523–1540, 1999.
- [1.16] W. Pilkey, *Analysis and Design of Elastic Beams: Computational Methods*. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [1.17] E. Cosserat und F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*. Paris: Librairie Scientific A. Hermann et Fils, 1909.

- [1.18] H. Schaefer, „Das Cosserat Kontinuum“, *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Jg. 47, Nr. 8, S. 485–498, 1967.
- [1.19] H. Altenbach, *Kontinuumsmechanik*, 2. Aufl. Berlin: Springer, 2012.
- [1.20] C. Petersen, *Stahlbau, Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*, 4. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [1.21] W. Bottega, *Engineering Vibrations*. Boca Raton: CRC Press, 2006.
- [1.22] H. Irvine, *Cable Structures*, Ser. The MIT Press Series in Structural Mechanics. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981.
- [1.23] W. Kemmetmüller und A. Steinböck, *Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2017)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2017. Adresse: <http://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/modellbildung/>.

2 Elektromagnetische Energiewandler

Dieser Abschnitt befasst sich mit den Grundlagen zur Berechnung einfacher magnetischer Kreise. Die Grundgleichungen zur Modellierung und Simulation elektromagnetischer Felder bilden die Maxwellschen Gleichungen. Diese lassen sich nur für wenige Spezialfälle analytisch lösen, weshalb im Allgemeinen numerische Methoden (z. B. Finite Elemente) herangezogen werden müssen. Im Fall von stationären bzw. quasi-stationären magnetischen Feldern und einfachen Geometrien, wie sie häufig bei elektromagnetischen Energiewandlern auftreten, lassen sich einfache und für viele Anwendungen ausreichend genaue Berechnungsvorschriften angeben.

2.1 Grundlagen

Die grundlegenden *Maxwellschen Gleichungen der Magnetostatik* sind durch die Beziehungen

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J} \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (2.1b)$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\mathbf{H}$ die *magnetische Feldstärke*, $\mathbf{B}$ die *magnetische Flussdichte* und $\mathbf{J}$ die *Stromdichte*.

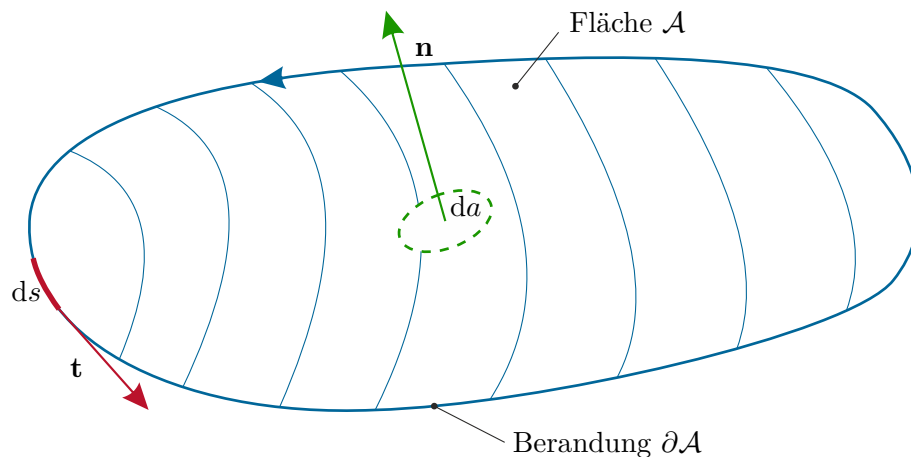


Abbildung 2.1: Zur integralen Darstellung des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes.

Eine zu (2.1a) äquivalente integrale Darstellung erhält man, indem man die Normalkomponente der Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung über eine (einfach zusammenhängende) offene Fläche $\mathcal{A}$ mit der Berandung $\partial\mathcal{A}$ integriert und anschließend den Satz

von Stokes anwendet, siehe Abbildung 2.1. Im Weiteren nutzt man die Tatsache, dass das Oberflächenintegral über die Stromdichte $\mathbf{J}$ gleich dem Gesamtstrom i durch die geschlossene Kurve $\partial\mathcal{A}$ ist. Damit lautet das *Ampèresche Durchflutungsgesetz*

$$\int_{\mathcal{A}} \langle \text{rot}(\mathbf{H}), \mathbf{n} \rangle da = \oint_{\partial\mathcal{A}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{t} \rangle ds = \int_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle da = i . \quad (2.2)$$

Mit $\mathbf{n}$ wird dabei die vom Flächenelement da nach außen zeigende Flächennormale und mit $\mathbf{t}$ der zum Kurvenelement ds zugehörige Tangentialvektor bezeichnet. Werden durch den Integrationsweg $\partial\mathcal{A}$ mehrere Leiter mit den Strömen i_k , $k = 1, \dots, n$, umschlossen, so setzt sich der Gesamtstrom i in (2.2) aus der vorzeichenbehafteten Summe der Ströme zusammen und es gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{t} \rangle ds = \sum_{k=1}^n i_k = \Theta . \quad (2.3)$$

Die Summe der Ströme wird auch als *Durchflutung* Θ bezeichnet. Für eine Spule mit N_c Windungen, die alle vom Strom i_c durchflossen werden, ist die Durchflutung $\Theta = N_c i_c$, siehe dazu Abbildung 2.2. Teilt man die Berandung $\partial\mathcal{A}$ in einzelne Abschnitte

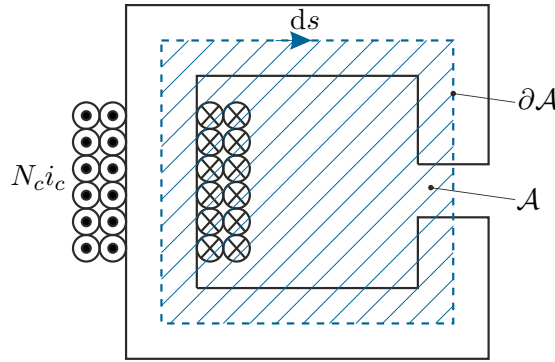


Abbildung 2.2: Zur Durchflutung $\Theta = N_c i_c$.

$\partial\mathcal{A}_i$ auf, so kann in Analogie zur elektrischen Spannung v eine *magnetische Spannung* u_i zwischen den Endpunkten der Linie $\partial\mathcal{A}_i$ in der Form

$$u_i = \int_{\partial\mathcal{A}_i} \langle \mathbf{H}, \mathbf{t} \rangle ds \quad (2.4)$$

definiert werden. Damit lässt sich das Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.3) wie folgt formulieren: *Die Summe der entlang einer geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{A}$ auftretenden magnetischen Spannungsabfälle ist gleich der durch diesen Umlaufweg $\partial\mathcal{A}$ erfassten Durchflutung (vgl. Kirchhoffsche Maschenregel).*

Die integrale Darstellung von (2.1b) erhält man, indem man über ein endliches Volumen $\mathcal{V}$, das von der Fläche $\partial\mathcal{V}$ begrenzt wird, integriert und den Satz von Gauß anwendet,

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{B}) \, dv = \oint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle \, da = 0 . \quad (2.5)$$

Diese Beziehung besagt, dass die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ quellenfrei ist. Unterteilt man die Berandung $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$ in mehrere Teilflächen $\partial\mathcal{V}_i$ und definiert den *magnetischen Fluss* ϕ_i als das Integral der Flussdichte $\mathbf{B}$ über eine Teilfläche $\partial\mathcal{V}_i$,

$$\phi_i = \int_{\partial\mathcal{V}_i} \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle \, da, \quad (2.6)$$

so kann folgende Formulierung gefunden werden: *Die Summe aller in ein abgeschlossenes Volumen $\mathcal{V}$ zu- und abfließenden magnetischen Flüsse ist Null (vgl. Kirchhoffsche Knotenregel).*

2.2 Konstitutivgleichungen

Zur Beschreibung des Materialverhaltens müssen Konstitutivgleichungen, welche den Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}$ und der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$ definieren, formuliert werden. Im Allgemeinen erhält man einen nichtlinearen funktionalen Zusammenhang der Form

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) . \quad (2.7)$$

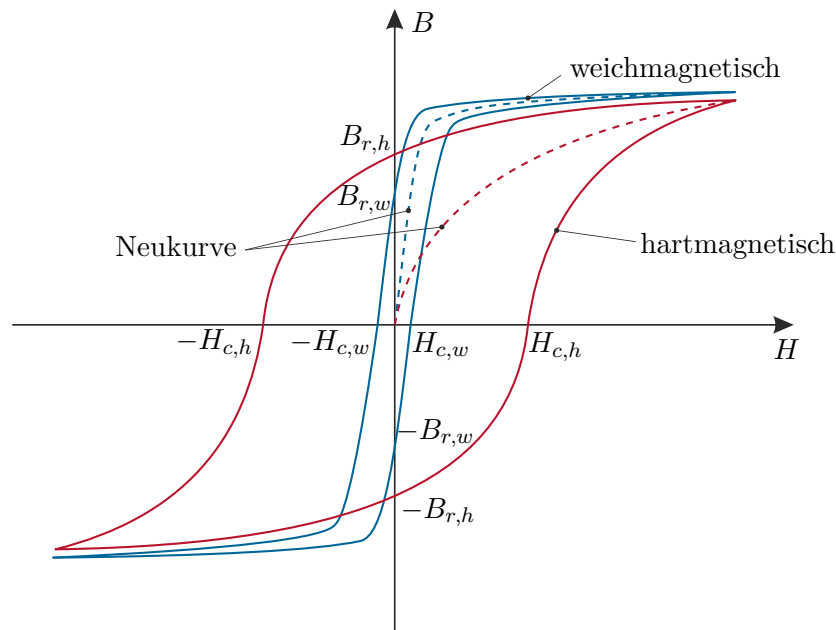


Abbildung 2.3: Magnetisierungskennlinie eines weichmagnetischen Materials (blau) und eines hartmagnetischen Materials (rot).

Zur Charakterisierung der Eigenschaften eines Materials wird meist die Magnetisierungskennlinie (B - H -Kennlinie) verwendet, siehe Abb. 2.3. Die in elektromagnetischen

Energiewandlern eingesetzten Materialien weisen meist ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten (Sättigung) und eine mehr oder weniger ausgeprägte Hysterese auf. Definiert man die Koerzitivfeldstärke H_c als jene Feldstärke, bei der $B = 0$ gilt und die Remanenzflussdichte B_r als jene Flussdichte bei der $H = 0$ gilt, kann folgende Einteilung von magnetischen Werkstoffen erfolgen:

1. Weichmagnetische Werkstoffe zeichnen sich durch eine kleine Koerzitivfeldstärke und Remanenzflussdichte und damit geringe Hysterese aus. Diese Werkstoffe (meist Stähle) werden zum Bau von Kernen bzw. Statoren und Rotoren von elektromagnetischen Energiewandlern eingesetzt.
2. Im Gegensatz dazu weisen hartmagnetische Werkstoffe ein ausgeprägtes Hystereseverhalten und damit hohe Remanenzflussdichten und Koerzitivfeldstärken auf. Nach dem Aufmagnetisieren erzeugen sie ein Magnetfeld, das ohne zusätzlichen Energieaufwand aufrechterhalten wird. Diese Werkstoffe werden daher auch als Permanentmagnete bezeichnet.

Eine allgemeine Beschreibung des Materialverhaltens inklusive der Hysterese ist aufwändig und meist nicht notwendig. Daher werden für die Modellierung die im Folgenden beschriebenen Vereinfachungen angewandt.

Bei weichmagnetischen isotropen Materialien kann die Hysterese vernachlässigt werden und man verwendet zur Beschreibung die sogenannte Neukurve (vgl. Abb. 2.3) des Materials. Für kleine magnetische Feldstärken kann dann ein linearer Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und Flussdichte in der Form

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

mit der Permeabilität des Vakuums $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s/(A m)}$ und der relativen Permeabilität μ_r als materialspezifischen, dimensionslosen Faktor, gefunden werden. Häufig erfolgt eine Unterscheidung von weichmagnetischen Materialien anhand der relativen Permeabilität auf folgende Art: (i) Diamagnetische Werkstoffe weisen eine Permeabilität kleiner als Vakuum auf, d. h. $\mu_r < 1$, (ii) paramagnetische Werkstoffe besitzen ein $\mu_r > 1$ und (iii) ferromagnetische Werkstoffe weisen eine sehr hohe Permeabilität auf, $\mu_r \gg 1$. Für den Bau von elektromagnetischen Energiewandlern sind vor allem ferromagnetische Materialien mit hoher relativer Permeabilität μ_r von Interesse. Es zeigt sich, dass diese Materialien für hohe Feldstärken ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten aufweisen (Sättigung) und die relative Permeabilität μ_r wesentlich absinkt. Um dieses Verhalten im Materialmodell abzubilden wird daher die relative Permeabilität als Funktion der Feldstärke formuliert,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r(\|\mathbf{H}\|) \mathbf{H}. \quad (2.9)$$

Beispiel 2.1. In Abbildung 2.4 ist die Magnetisierungskennlinie und die zugehörige relative Permeabilität μ_r für einen typischen Werkstoff, wie er z. B. zur Fertigung von Rotor- und Statorblechpaketen von Motoren verwendet wird, dargestellt. Man erkennt die annähernd konstante relative Permeabilität für kleine Feldstärken. Für größere Feldstärken ist das Material zunehmend gesättigt, womit die relative Permeabilität absinkt und die B - H -Kennlinie entsprechend abknickt. Für sehr hohe Feldstärken

nähert sich das Verhalten des Materials jenem von Vakuum an, d. h. es gilt $\mu_r \approx 1$.

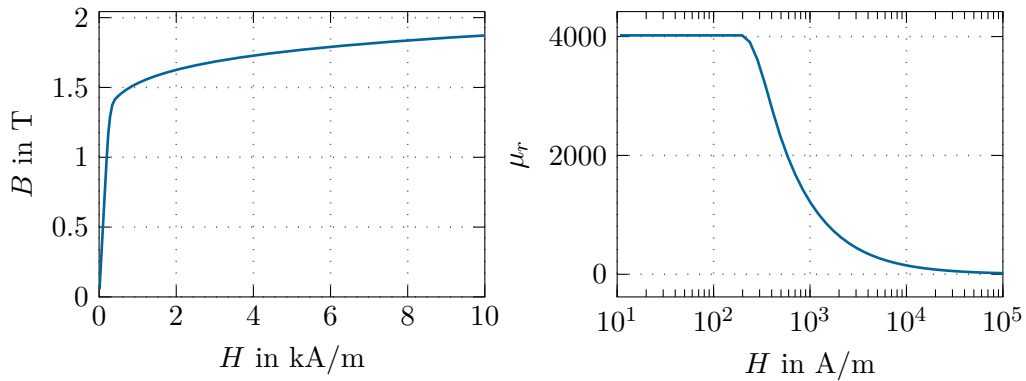


Abbildung 2.4: Magnetisierungskennlinie und relative Permeabilität μ_r für Stahl M800-50A.

Das Verhalten von Permanentmagneten kann mit Hilfe der Entmagnetisierungskennlinie beschrieben werden. In Abb. 2.5 ist die Entmagnetisierungskennlinie für unterschiedliche Magnetwerkstoffe dargestellt. In vielen aktuellen Anwendungen werden bevorzugt Neodym-Eisen-Bor (NdFeB) Magnete eingesetzt, da diese sehr hohe Remanenzflussdichten B_r und Koerzitivfeldstärken H_c aufweisen. Dieser Werkstoff zeichnet sich im Arbeitsbereich durch einen annähernd linearen Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte und der Feldstärke aus, welcher in der Form

$$B = B_r + \mu_0 \mu_r H, \quad (2.10)$$

mit der konstanten relativen Permeabilität μ_r des Magnetmaterials, beschrieben werden kann. Für andere Magnetwerkstoffe ist im Allgemeinen ein nichtlinearer Zusammenhang $B(H)$ anzusetzen. Man beachte, dass das Magnetmaterial nicht isotrop ist, d. h. (2.10) gilt nur in Richtung der Magnetisierung des Materials. Orthogonal zur Magnetisierungsrichtung gilt näherungsweise $B_r = 0$ und somit $B = \mu_0 \mu_r H$.

Bemerkung 2.1 (Verhalten an Grenzflächen). Magnetkreise elektromagnetischer Energiewandler bestehen aus einer geschickten Anordnung von ferromagnetischen Materialien, Luftspalten und eventuell Permanentmagneten. Im Rahmen der Modellierung ist es interessant zu untersuchen, wie sich die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ und die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien unterschiedlicher Permeabilität verhalten. Es wird angenommen, dass sich die beiden Materialien gemäß (2.8) in der Form

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} \mathbf{H}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mu_{r2} \mathbf{H}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 \quad (2.11b)$$

beschreiben lassen, vgl. Abb. 2.6.

Wählt man als Integrationsvolumen $\mathcal{V}$ in (2.5) einen infinitesimal flachen Zylinder an der Grenzfläche so, dass eine Deckfläche im Material 1 und eine im Material 2 zu

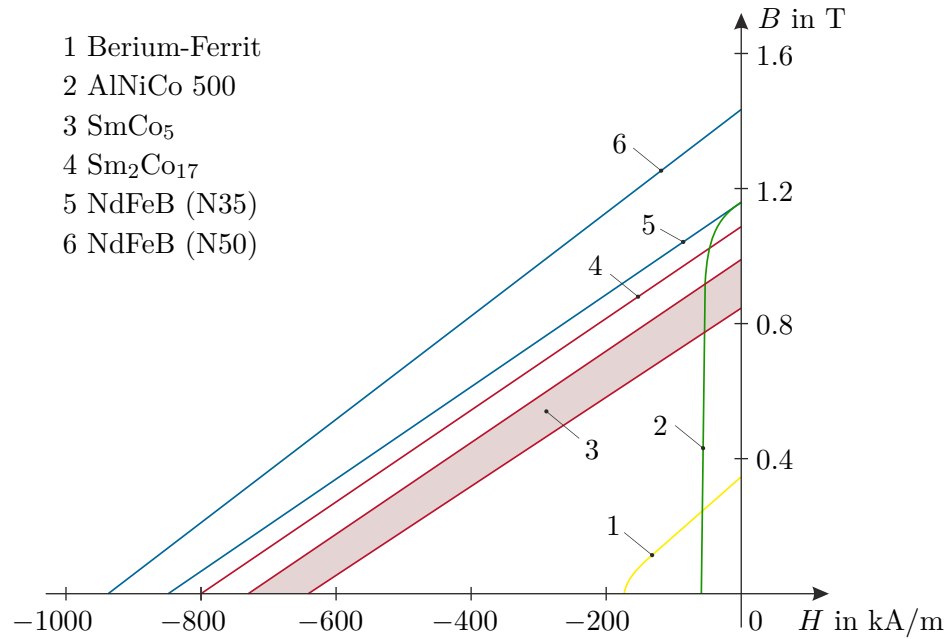


Abbildung 2.5: Entmagnetisierungskennlinien einiger Permanentmagnetwerkstoffe (aus [2.1]).

liegen kommt und die Flächennormalen der Deckflächen (Fläche Δa) senkrecht zur Trennfläche stehen, erhält man (siehe Abb. 2.6)

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{B}) dv = \oint_{\partial V} \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle da = \langle (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \mathbf{n} \rangle \Delta a = 0, \quad (2.12)$$

da die Mantelflächen des Zylinders wegen der infinitesimal kleinen Zylinderhöhe keinen Beitrag leisten. Dies bedeutet, dass die *Normalkomponenten der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}$ stetig sind*.

Im Weiteren nimmt man an, dass die Trennfläche zwischen den Materialien keine von außen eingeprägte Stromdichte enthält. Wählt man nun für das Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.3) einen geschlossenen rechteckigen Integrationsweg $\mathcal{C}$ so, dass die zur Grenzfläche parallel liegenden Seiten einmal im Material 1 und einmal im Material 2 zu liegen kommen und die Länge Δs besitzen sowie die Querseiten infinitesimal klein sind, dann folgt (siehe Abb. 2.6)

$$\oint_{\mathcal{C}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{t} \rangle ds = \langle (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1), \mathbf{t} \rangle \Delta s = 0. \quad (2.13)$$

Man erkennt, dass die *Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$ stetig sein müssen*.

Durch Kombination von (2.12) mit (2.13) erhält man

$$\langle \mathbf{B}_1, \mathbf{n} \rangle = \mu_1 \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{n} \rangle = \mu_2 \langle \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{B}_2, \mathbf{n} \rangle. \quad (2.14)$$

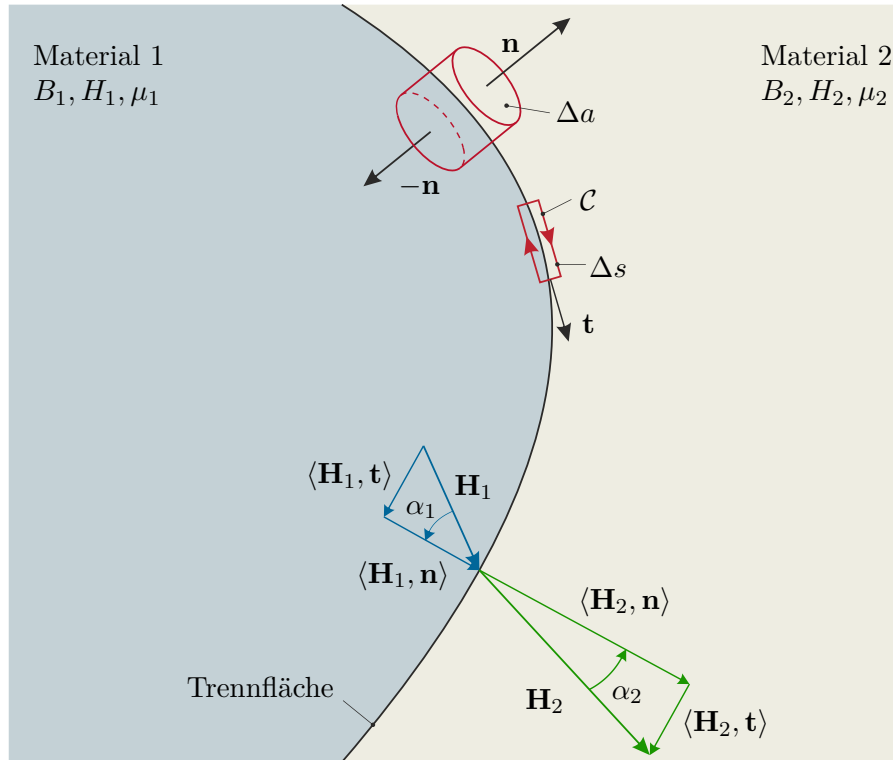


Abbildung 2.6: Stetigkeit von $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ an der Grenzfläche von zwei Materialien unterschiedlicher Permeabilität.

Wird mit α_1 bzw. α_2 der Winkel der Feldlinien von $\mathbf{H}_1$ bzw. $\mathbf{H}_2$ zur Senkrechten auf die Grenzfläche bezeichnet, so gilt

$$\mu_1 \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{n} \rangle = \mu_1 \frac{\langle \mathbf{H}_1, \mathbf{t} \rangle}{\tan(\alpha_1)} = \mu_2 \frac{\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{t} \rangle}{\tan(\alpha_2)} = \mu_2 \langle \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \rangle \quad (2.15)$$

und aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathbf{H}$ folgt das *Brechungsgesetz für die magnetischen Feldlinien*

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{H}_1, \mathbf{n} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{B}_1, \mathbf{t} \rangle}{\langle \mathbf{B}_2, \mathbf{t} \rangle} . \quad (2.16)$$

An der Grenzfläche eines ferromagnetischen Materials mit $\mu_r \gg 1$ zu Luft $\mu_r \approx 1$ folgt damit, dass die Normalkomponente von $\mathbf{H}_2$ sehr viel größer ist als jene von $\mathbf{H}_1$. Deswegen treten die Feldlinien von $\mathbf{H}$ nahezu senkrecht aus dem ferromagnetischen Material aus.

2.3 Reluktanzen und Permeanzen

Die in Abschnitt 2.1 dargestellte Analogie zu den Kirchhoffschen Gleichungen legt es nahe, den *magnetischen Widerstand* oder die *Reluktanz* $\mathcal{R}$ als Quotient der magnetischen Spannung u und des magnetischen Flusses ϕ in der Form

$$\mathcal{R} = \frac{u}{\phi} \quad (2.17)$$

zu definieren. Analog kann der *magnetische Leitwert* oder die *Permeanz* als Kehrwert der Reluktanz definiert werden

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\phi}{u}. \quad (2.18)$$

Die Berechnung der Reluktanz gestaltet sich für komplexere geometrische Strukturen im Allgemeinen sehr aufwendig. Aus diesem Grund wird im Rahmen der Reluktanzmodellierung sehr häufig auf das Konzept der *Flussröhre* zurückgegriffen. Eine Flussröhre beschreibt ein Volumen $\mathcal{V}$ bestehend aus zwei Stirnflächen und einer Mantelfläche. Es wird angenommen, dass der gesamte magnetische Fluss ϕ über eine Stirnfläche in das Volumen ein und durch die andere Stirnfläche aus dem Volumen austritt. Weiterhin nimmt man an, dass die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ und die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ innerhalb der Flussröhre homogen sind und senkrecht zur Querschnittsfläche $\mathcal{A}(s)$ mit dem Kurvenparameter s stehen. Damit hängen die Feldgrößen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ nur von s ab und es gilt

$$\mathbf{B}(s) = B(s)\mathbf{t}(s) \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{H}(s) = H(s)\mathbf{t}(s), \quad (2.19b)$$

vgl. Abbildung 2.7.

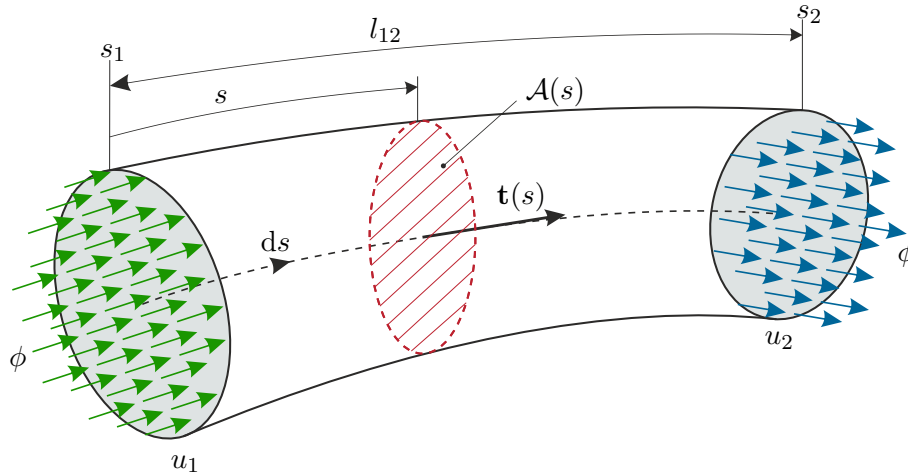


Abbildung 2.7: Zur Definition einer Flussröhre.

Der magnetische Fluss ϕ innerhalb der Flussröhre errechnet sich nach (2.6) zu

$$\phi = \int_{\mathcal{A}(s)} B(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle da = \int_{\mathcal{A}(s)} B(s) da = B(s) \mathcal{A}(s). \quad (2.20)$$

Analog erhält man unter Verwendung von (2.4) die magnetische Spannung $u_{12} = u_1 - u_2$ zwischen den beiden Stirnflächen durch

$$u_{12} = \int_{s_1}^{s_2} H(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle ds = \int_{s_1}^{s_2} H(s) ds . \quad (2.21)$$

Verwendet man das Materialgesetz $B(s) = \mu(H)H(s)$, so erhält man die Reluktanz

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{u_{12}}{\phi} = \frac{1}{\phi} \int_{s_1}^{s_2} H(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\mathcal{A}(s)\mu(H(s))} ds . \quad (2.22)$$

Die Berechnung der Reluktanz anhand dieser Gleichung ist für ein nichtlineares Materialverhalten $\mu(H)$ trotz der getroffenen Vereinfachungen meist nur für besonders einfache Geometrien möglich. Für kleine Feldstärken kann die Permeabilität μ im Allgemeinen konstant gesetzt werden, womit die Berechnung der Reluktanz einer Flussröhre wesentlich vereinfacht wird. Falls das nichtlineare Materialverhalten berücksichtigt werden muss, kann vereinfachend die Beziehung $\mu(H) \approx \bar{\mu}(\bar{H})$ verwendet werden. Dabei bezeichnet $\bar{\mu}$ die mittlere Permeabilität der Flussröhre für die mittlere magnetische Feldstärke $\bar{H} = u_{12}/l_{12}$, mit der effektiven Länge l_{12} der Flussröhre.

Für die Modellierung von geometrisch komplexeren Körpern erfolgt häufig eine Unterteilung in mehrere Teilvolumina so, dass diese die bei einer Flussröhre getroffenen Annahmen gut approximieren. Im Folgenden wird die Reluktanz für einige grundlegende Geometrien von Flussröhren unter Annahme einer konstanten Permeabilität $\mu = \text{konst.}$ hergeleitet.

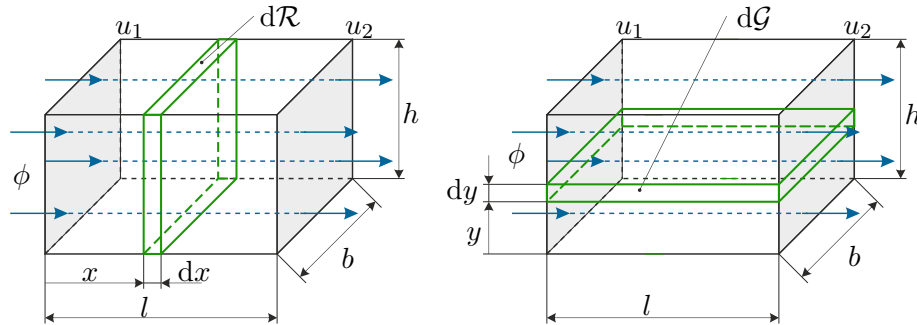


Abbildung 2.8: Zur Berechnung der Reluktanz einer quaderförmigen Flussröhre.

Der in Abbildung 2.8 dargestellte Quader der Länge l , Breite b und Höhe h besitzt eine konstante Querschnittsfläche $\mathcal{A} = bh$, womit sich die Reluktanz nach (2.22) zu

$$\mathcal{R}_{12} = \int_0^l \frac{1}{\mathcal{A}\mu} dx = \frac{l}{\mathcal{A}\mu} \quad (2.23)$$

errechnet. Definiert man die differentielle Reluktanz $d\mathcal{R}$ der Fläche $\mathcal{A}$ und der infinitesimalen Länge dx in der Form

$$d\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{A}\mu} dx, \quad (2.24)$$

so kann (2.23) auch als Serienschaltung von unendlich vielen differentiellen Reluktanzen $d\mathcal{R}$ interpretiert werden,

$$\mathcal{R}_{12} = \int_0^l d\mathcal{R} . \quad (2.25)$$

Alternativ dazu könnte man auch den differentiellen magnetischen Leitwert $d\mathcal{G}$ (Permeanz) mit der Länge l und der infinitesimalen Querschnittsfläche $b dy$ definieren, und den magnetischen Leitwert $\mathcal{G}_{12}$ als Parallelschaltung der differentiellen Leitwerte in der Form

$$\mathcal{G}_{12} = \int_0^h d\mathcal{G} = \int_0^h \frac{\mu b}{l} dy = \frac{\mu b h}{l} \quad (2.26)$$

ermitteln. Natürlich gilt dabei $\mathcal{R}_{12} = 1/\mathcal{G}_{12}$. In den weiteren Beispielen zeigt sich, dass in einigen Fällen eine Berechnung des Leitwerts leichter ist als die Berechnung der Reluktanz.

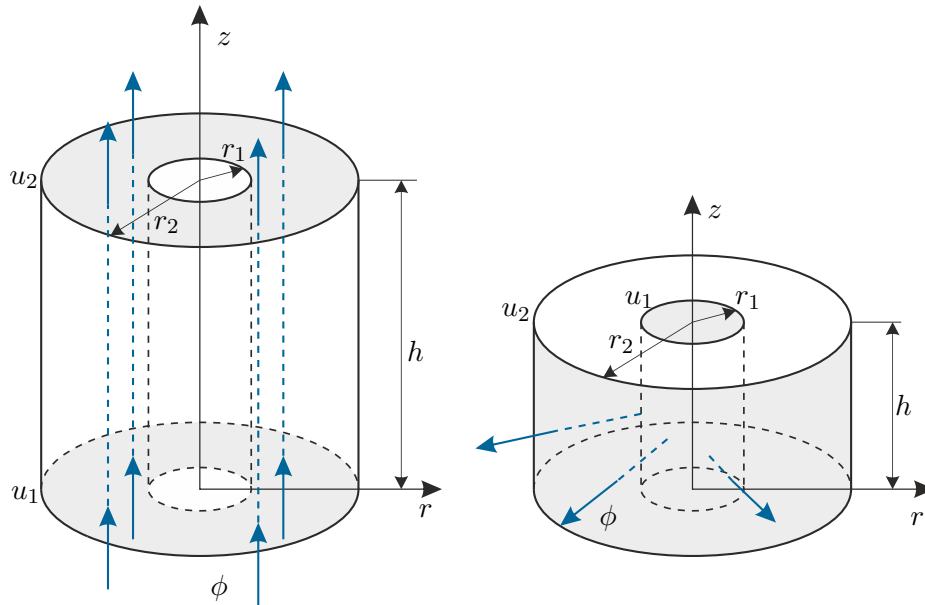


Abbildung 2.9: Zur Berechnung der Reluktanz einer axial bzw. radial durchflossenen zylinderförmigen Flussröhre.

Eine in vielen Anwendungen auftretende geometrische Grundform ist ein radial bzw. axial durchflossener Hohlzylinder, siehe Abbildung 2.9. Für einen axial durchflossenen Hohlzylinder der Höhe h , Innenradius r_1 und Außenradius r_2 ergibt sich die differentielle Reluktanz zu

$$d\mathcal{R} = \frac{1}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu} dz, \quad (2.27)$$

und die Reluktanz errechnet sich damit zu

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{h}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu} . \quad (2.28)$$

Für einen radial durchflossenen Hohlzylinder kann die differentielle Reluktanz zu

$$d\mathcal{R} = \frac{1}{2h\pi r\mu} dr \quad (2.29)$$

definiert werden, womit

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2h\pi\mu} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (2.30)$$

folgt.

Eine exakte Berechnung der Reluktanz von halbzylinderförmigen Flussröhren, wie sie in Abbildung 2.10 dargestellt sind, gestaltet sich wesentlich schwieriger. Für den links dargestellten Fall wird vereinfachend angenommen, dass die Feldlinien im Material vertikal gerichtet sind. Damit kann eine differentielle Permeanz mit der Fläche $d\mathcal{A} = b dx$ und der Länge $l(x) = \sqrt{r^2 - (x - r)^2}$ definiert werden. Die Permeanz errechnet sich somit zu

$$\mathcal{G}_{12} = 2 \int_0^r \frac{\mu b}{\sqrt{r^2 - (x - r)^2}} dx = \mu b \pi . \quad (2.31)$$

Analog dazu wird für den in Abbildung 2.10 rechts dargestellten Fall angenommen, dass die Feldlinien im Material horizontal verlaufen. Die differentielle Permeanz wird dann durch die Länge $l(z) = 2\sqrt{r^2 - (z - r)^2}$ und die differentielle Fläche $d\mathcal{A} = b dz$ definiert. Durch Integration erhält man die gesamte Permeanz in der Form

$$\mathcal{G}_{12} = \mu b \frac{\pi}{4} . \quad (2.32)$$

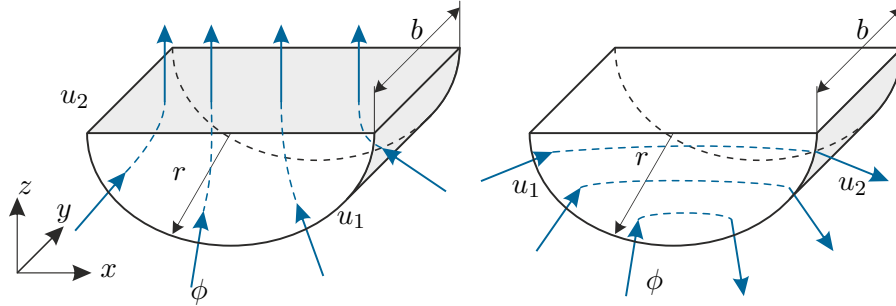


Abbildung 2.10: Zur Berechnung der Reluktanz unterschiedlich durchflossener halbzylinderförmiger Flussröhren.

Schließlich treten im Bereich von Polschuhen von Elektromotoren häufig prismenförmige Flussröhren mit trapezförmiger Grundfläche auf, siehe Abbildung 2.11. Für den links dargestellten horizontal durchflossenen Fall gilt $l(z) = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{h} z$ und $d\mathcal{A} = b dz$, womit die Permeanz zu

$$\mathcal{G}_{12} = \int_0^h \frac{\mu b}{l_1 + \frac{l_2 - l_1}{h} z} dz = \mu b \frac{h}{l_2 - l_1} \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) \quad (2.33)$$

folgt. Mit $\mathcal{A}(x) = b\left(l_1 + \frac{l_2-l_1}{h}x\right)$ errechnet sich die Reluktanz des vertikal durchflossenen Falls zu

$$\mathcal{R}_{12} = \int_0^h \frac{1}{\mu b \left(l_1 + \frac{l_2-l_1}{h}x\right)} dx = \frac{1}{\mu b} \frac{h}{l_2 - l_1} \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right). \quad (2.34)$$

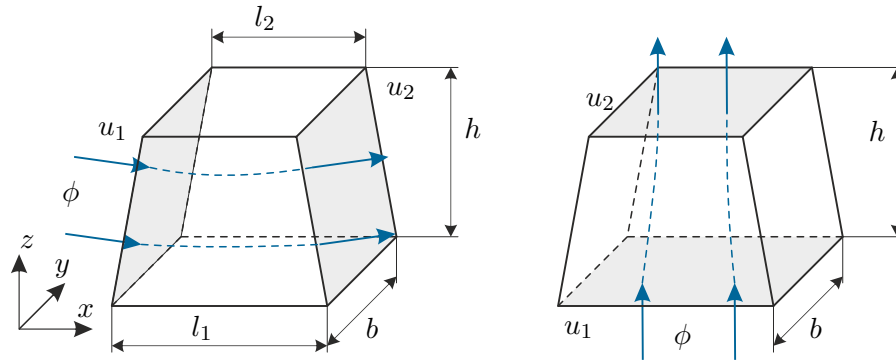


Abbildung 2.11: Zur Berechnung der Reluktanz für Flussröhren mit trapezförmiger Grundfläche.

Bemerkung 2.2 (nichtlineares Materialverhalten). Um in der Reluktanzmodellierung näherungsweise die Sättigung des Materials zu berücksichtigen, wird, wie bereits erwähnt, vereinfachend $\mu(\bar{H})$ in den obigen Reluktanzen bzw. Permeanzen verwendet. Die mittlere Feldstärke $\bar{H}$ wird dabei aus der magnetischen Spannungsdifferenz $u_1 - u_2$ und einer mittleren Länge der Feldlinien abgeschätzt. So ergibt sich z. B. für die quaderförmigen Elemente aus Abbildung 2.8 $\bar{H} = (u_1 - u_2)/l$. Die mittlere Länge $\bar{l}$ für die anderen vorher dargestellten Elemente kann wie folgt abgeschätzt werden:

- axial durchflossener Hohlzylinder: $\bar{l} = h$
- radial durchflossener Hohlzylinder: $\bar{l} = r_2 - r_1$
- vertikal durchflossener Halbzylinder: $\bar{l} = r/2$
- horizontal durchflossener Halbzylinder: $\bar{l} = r$
- horizontal durchflossenes trapezförmiges Prisma: $\bar{l} = (l_2 + l_1)/2$
- vertikal durchflossenes trapezförmiges Prisma: $\bar{l} = h$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Approximation der Sättigung nur sinnvoll ist, wenn in der betrachteten Flussröhre eine annähernd homogene magnetische Feldstärke vorhanden ist.

2.4 Reluktanzmodellierung

Die Grundidee der Reluktanzmodellierung besteht darin, einen komplexen Magnetkreis in eine Anzahl von kleineren, einfachen Abschnitten zu unterteilen, welche mit Hilfe einer Ersatzreluktanz bzw. Ersatzpermeanz beschrieben werden können. Es muss nun geklärt werden, in welcher Form eine Spule bzw. ein Permanentmagnet im Rahmen dieser Reluktanzmodellierung berücksichtigt werden kann.

Betrachtet man (2.3) und (2.4), so erkennt man, dass eine mit dem elektrischen Strom i_c durchflossene Spule mit N_c Windungen durch eine ideale magnetische Spannungsquelle der Form

$$u_{cs} = N_c i_c \quad (2.35)$$

beschrieben werden kann¹.

Um einen quaderförmigen Permanentmagneten, der in Längsrichtung magnetisiert ist, zu beschreiben, betrachte man nochmals Abbildung 2.8. Es wird nun angenommen, dass dieser Quader aus einem permanentmagnetischen Material besteht, welches durch (2.10), d. h. $B = B_r + \mu_r \mu_0 H$, beschrieben werden kann. Formt man dieses Konstitutivgesetz nach H um, so erhält man

$$H = \frac{B}{\mu_r \mu_0} - \frac{B_r}{\mu_r \mu_0} = \frac{\phi}{\mathcal{A} \mu_r \mu_0} - H_c. \quad (2.36)$$

Die magnetische Spannung an diesem quaderförmigen Permanentmagneten kann durch Integration der Feldstärke H entlang der Länge l des Quaders in der Form

$$u_1 - u_2 = \int_0^l H \, dx = \frac{l}{\mathcal{A} \mu_0 \mu_r} \phi - H_c l = \mathcal{R}_m \phi - u_{ms} \quad (2.37)$$

ermittelt werden. Damit kann ein Permanentmagnet äquivalent durch die Serienschaltung einer konstanten Spannungsquelle $u_{ms} = H_c l$ und einer konstanten Reluktanz $\mathcal{R}_m$ modelliert werden, siehe Abbildung 2.12.

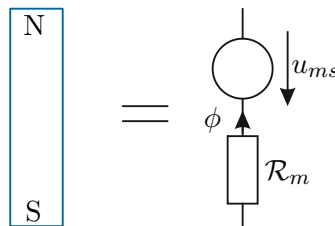


Abbildung 2.12: Ersatzschaltbild eines Permanentmagneten.

¹Die Wahl des Vorzeichens der magnetischen Spannungen der magnetischen Spannungsquellen ist vom gewählten Zähl Pfeilsystem im magnetischen Ersatzschaltbild abhängig. Die in diesem Skriptum verwendeten Vorzeichen implizieren die Verwendung eines Verbraucherzähl Pfeilsystems.

Beispiel 2.2 (Einfacher Aktor). In diesem Beispiel wird die Vorgehensweise bei der Reluktanzmodellierung anhand eines einfachen elektromagnetischen Aktors mit zwei Spulen (Ströme i_{c1} , i_{c2} , Spannungen v_{c1} , v_{c2} , Windungszahlen N_{c1} , N_{c2}), einem Permanentmagneten (Länge l_m , Koerzitivfeldstärke H_c , relative Permeabilität μ_m) und einem Objekt der Masse m_1 , welches beweglich in einem Luftspalt des Aktors aufgehängt ist, dargestellt, siehe Abbildung 2.13. Die Lagerung des Objektes erfolgt dabei durch eine Feder der Steifigkeit c_1 und einen viskosen Dämpfer mit dem Dämpfungskoeffizienten d_1 .

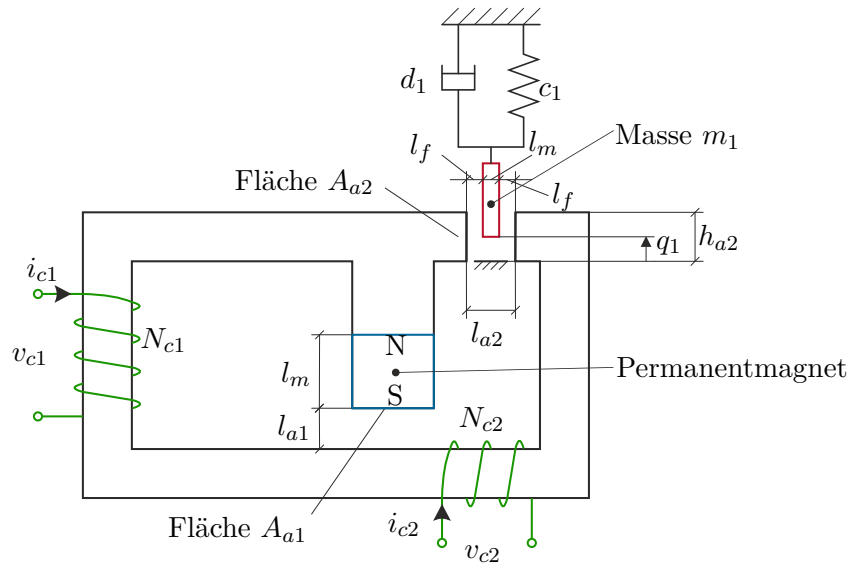


Abbildung 2.13: Einfacher elektromagnetischer Aktor.

Für die weitere Herleitung wird angenommen, dass die relative Permeabilität μ_k des Kerns sehr groß ist und damit die Näherung $\mu_k \rightarrow \infty$ gerechtfertigt ist. Damit kann ein vereinfachtes magnetisches Ersatzschaltbild nach Abb. 2.14 abgeleitet werden. Die Reluktanz $\mathcal{R}_{a1}$ fasst die magnetischen Widerstände des Luftspalts 1 und des Permanentmagneten zusammen

$$\mathcal{R}_{a1} = \frac{l_{a1}}{\mu_0 A_{a1}} + \frac{l_m}{\mu_0 \mu_m A_{a1}}. \quad (2.38)$$

Dabei beschreiben l_{a1} und l_m die Längen des Luftspalts bzw. des Magneten und A_{a1} die Querschnittsfläche. Die magnetische Spannung des Permanentmagneten errechnet sich zu $u_{ms1} = H_c l_m$.

Im Weiteren sind die Luftspaltreluktanzen zwischen dem Objekt und dem Kern zu berücksichtigen. Die Luftspaltreluktanzen $\mathcal{R}_{a21}$ und $\mathcal{R}_{a22}$ errechnen sich als Funktion

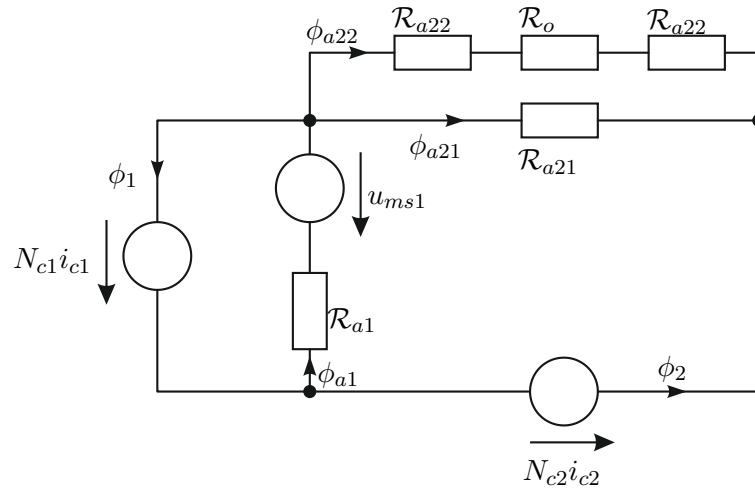


Abbildung 2.14: Magnetisches Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Aktors.

des mechanischen Freiheitsgrades q_1 zu

$$\mathcal{R}_{a21} = \frac{l_{a2}}{\mu_0 q_1 b_{a2}} \quad (2.39a)$$

$$\mathcal{R}_{a22} = \frac{l_f}{\mu_0 (h_{a2} - q_1) b_{a2}}, \quad (2.39b)$$

wobei l_f und l_{a2} die Längen, $b_{a2} = A_{a2}/h_{a2}$ die Breite und h_{a2} die Höhe der entsprechenden Teile des Luftspalts beschreiben. Wird im Weiteren angenommen, dass die relative Permeabilität des Objektes wiederum sehr groß ist, dann kann vereinfachend $\mathcal{R}_o = 0$ gesetzt werden. Damit ergeben sich die folgenden Maschengleichungen

$$N_{c1}i_{c1} + \mathcal{R}_{a1}\phi_{a1} - u_{ms1} = 0 \quad (2.40a)$$

$$N_{c2}i_{c2} - \mathcal{R}_{a1}\phi_{a1} - \mathcal{R}_{a21}\phi_{a21} + u_{ms1} = 0 \quad (2.40b)$$

$$\mathcal{R}_{a21}\phi_{a21} - 2\mathcal{R}_{a22}\phi_{a22} = 0 \quad (2.40c)$$

und Knotengleichungen

$$\phi_1 + \phi_{a22} + \phi_{a21} - \phi_{a1} = 0 \quad (2.41a)$$

$$\phi_2 + \phi_{a21} + \phi_{a22} = 0. \quad (2.41b)$$

Die Lösung dieser Gleichungen liefert

$$\phi_1 = -\left(\frac{1}{2\mathcal{R}_{a22}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{a21}}\right)(N_{c1}i_{c1} + N_{c2}i_{c2}) + \frac{1}{\mathcal{R}_{a1}}(u_{ms1} - N_{c1}i_{c1}) \quad (2.42a)$$

$$\phi_2 = -\left(\frac{1}{2\mathcal{R}_{a22}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{a21}}\right)(N_{c1}i_{c1} + N_{c2}i_{c2}) \quad (2.42b)$$

$$\phi_{a1} = -\frac{1}{\mathcal{R}_{a1}}(N_{c1}i_{c1} - u_{ms1}) \quad (2.42c)$$

$$\phi_{a21} = \frac{1}{\mathcal{R}_{a21}}(N_{c1}i_{c1} + N_{c2}i_{c2}) \quad (2.42d)$$

$$\phi_{a22} = \frac{1}{2\mathcal{R}_{a22}}(N_{c1}i_{c1} + N_{c2}i_{c2}) \quad (2.42e)$$

Beispiel 2.3 (Axiales Magnetlager). In Abbildung 2.15 ist ein Schnitt durch das betrachtete Axiallager dargestellt. Dieses besteht im Wesentlichen aus zwei Elektromagneten und einem Rotor, auf dem zwei Permanentmagneten aufgebracht sind. Durch gezielte Ansteuerung der beiden Spulen (Ströme i_{c1} und i_{c2}) kann der Rotor in axialer Richtung stabilisiert werden. Die Abbildung 2.16 zeigt nochmals eine dreidimensionale Ansicht der Komponenten des Lagers. Ein Elektromagnet besteht aus einem Kern, in dem die Spule mit N_c Windungen (in rot dargestellt) eingelagert ist. Der Rotor wiederum ist aus einer ferromagnetischen Scheibe und zwei Permanentmagneten (NdFeB) aufgebaut. Es wird angenommen, dass sowohl der Kern als auch der Rotor aus einem hochpermeablen Material mit der relativen Permeabilität μ_r aufgebaut sind. In Abbildung 2.17 ist ein mögliches Reluktanznetzwerk zur Beschreibung des Axiallagers dargestellt. Die beiden Spulen werden dabei in Form von idealen magnetischen Spannungsquellen mit den magnetischen Spannungen

$$u_{cs1} = N_c i_{c1} \quad (2.43a)$$

$$u_{cs2} = N_c i_{c2}, \quad (2.43b)$$

mit der Windungszahl N_c und den (elektrischen) Strömen i_{c1} bzw. i_{c2} , beschrieben. Die Permanentmagneten werden, wie im vorigen Abschnitt erläutert, durch die Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle u_{ms} und einer konstanten Reluktanz $\mathcal{R}_m$ beschrieben. Die magnetischen Spannungen errechnen sich dabei zu

$$u_{ms1} = u_{ms2} = H_c h_5, \quad (2.44)$$

mit der Koerzitivfeldstärke H_c und der Höhe h_5 der Magneten. Die zugehörigen Reluktanzen ergeben sich unter Annahme eines axial durchflossenen Hohlzylinders in der Form

$$\mathcal{R}_{m1} = \mathcal{R}_{m2} = \frac{h_5}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu_0\mu_m}, \quad (2.45)$$

wobei angenommen wird, dass $\mu_m = \text{konst.}$ gilt.

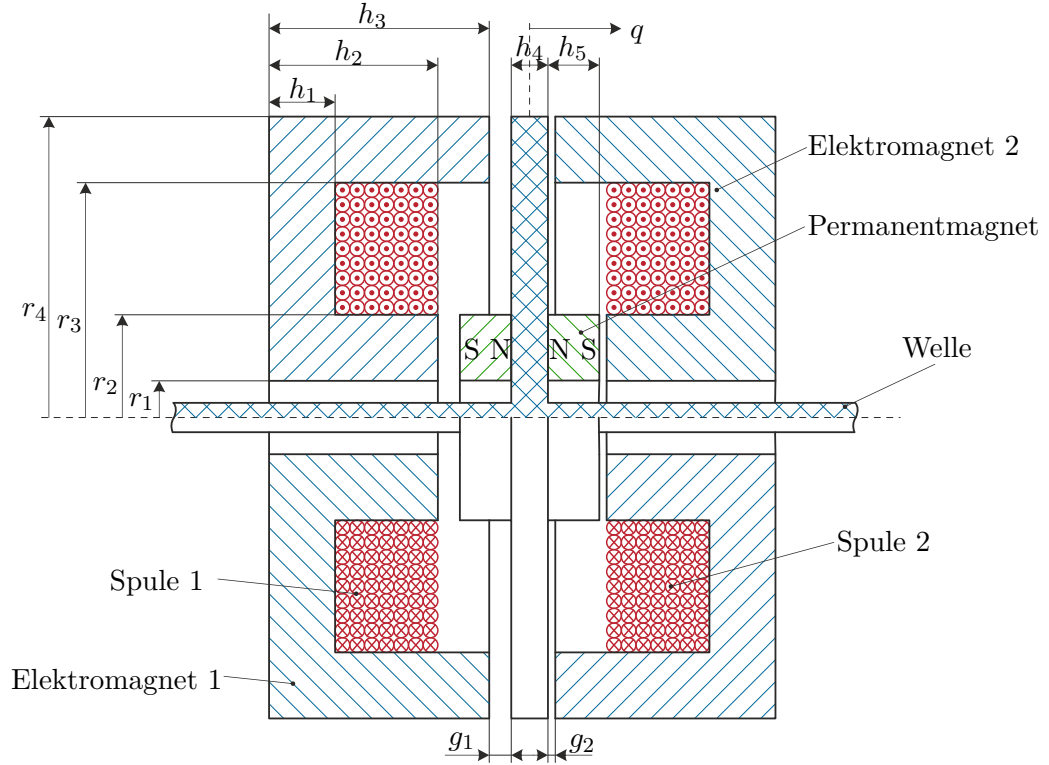


Abbildung 2.15: Schnitt durch ein Axiallager mit zwei Elektromagneten und einem Rotor.

Die Reluktanzen der Kerne und des Rotors werden durch axial bzw. radial durchflossene Hohlzylinder in der Form

$$\mathcal{R}_{ka1} = \frac{h_3 - \frac{h_1}{2}}{(r_4^2 - r_3^2)\pi\mu_0\mu_r(H_{ka1})} \quad (2.46a)$$

$$\mathcal{R}_{ka2} = \frac{h_3 - \frac{h_1}{2}}{(r_4^2 - r_3^2)\pi\mu_0\mu_r(H_{ka2})} \quad (2.46b)$$

$$\mathcal{R}_{ki1} = \frac{h_2 - \frac{h_1}{2}}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu_0\mu_r(H_{ki1})} \quad (2.46c)$$

$$\mathcal{R}_{ki2} = \frac{h_2 - \frac{h_1}{2}}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu_0\mu_r(H_{ki2})} \quad (2.46d)$$

$$\mathcal{R}_{kd1} = \frac{1}{2h_1\pi\mu_0\mu_r(H_{kd1})} \ln\left(\frac{r_4 + r_3}{r_2 + r_1}\right) \quad (2.46e)$$

$$\mathcal{R}_{kd2} = \frac{1}{2h_1\pi\mu_0\mu_r(H_{kd2})} \ln\left(\frac{r_4 + r_3}{r_2 + r_1}\right) \quad (2.46f)$$

$$\mathcal{R}_r = \frac{1}{2h_4\pi\mu_0\mu_r(H_r)} \ln\left(\frac{r_4 + r_3}{r_2 + r_1}\right) \quad (2.46g)$$

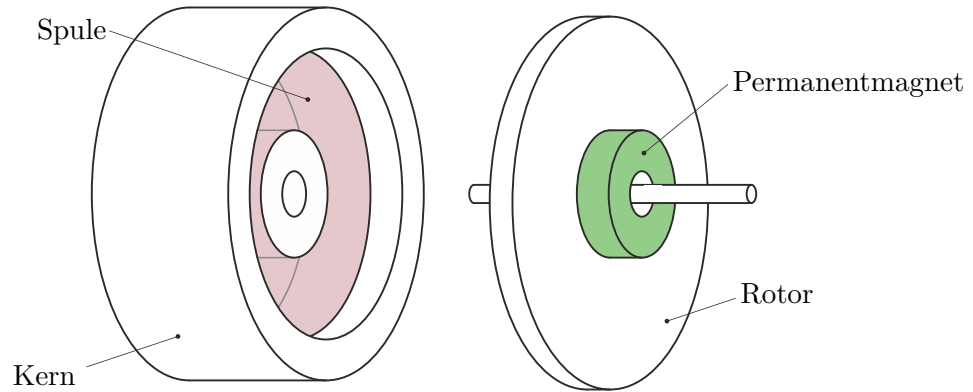


Abbildung 2.16: Darstellung der Form des Elektromagneten und des Rotors mit Permanentmagnet.

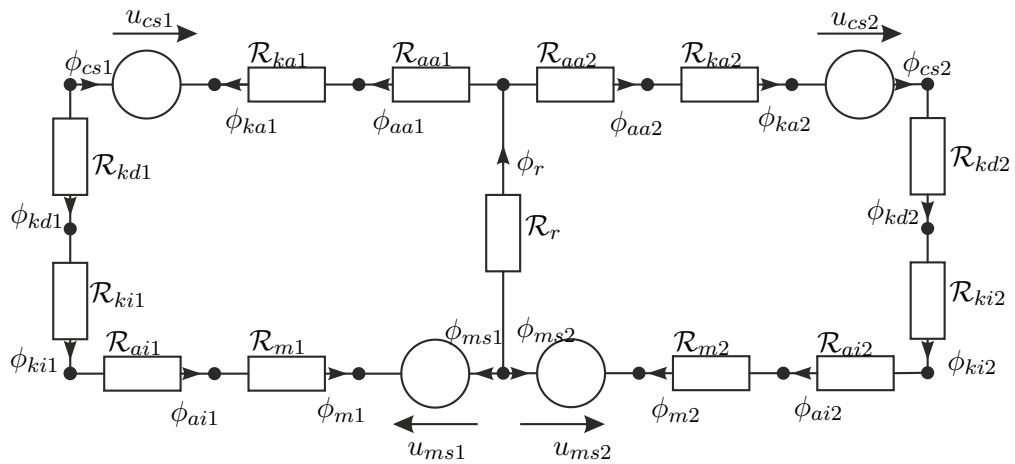


Abbildung 2.17: Reluktanznetzwerk zum Axiallager aus Abbildung 2.15.

beschrieben, wobei die Sättigung des Materials durch die nichtlineare relative Permeabilität $\mu_r(H)$ berücksichtigt wird. Die Länge der Luftspalte g_1 bzw. g_2 zwischen dem Rotor und den Kernen ist abhängig von der Lage q des Rotors. Es wird angenommen, dass der Rotor für $q = 0$ in der Mitte zwischen den beiden Elektromagneten liegt und dann die Luftspalte eine Länge g_0 aufweisen. Dann folgt für die Luftspaltreluktanzen mit $g_1 = g_0 + q$ und $g_2 = g_0 - q$

$$\mathcal{R}_{ai1} = \frac{g_0 + q}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu_0} \quad (2.47a)$$

$$\mathcal{R}_{ai2} = \frac{g_0 - q}{(r_2^2 - r_1^2)\pi\mu_0} \quad (2.47b)$$

$$\mathcal{R}_{aa1} = \frac{g_0 + q}{(r_4^2 - r_3^2)\pi\mu_0} \quad (2.47c)$$

$$\mathcal{R}_{aa2} = \frac{g_0 - q}{(r_4^2 - r_3^2)\pi\mu_0} . \quad (2.47d)$$

Zur Beschreibung des Magnetkreises des Axiallagers werden die Gleichungen (2.4) und (2.6) verwendet. Vereinfachend wird in diesem Beispiel vorerst angenommen, dass die relative Permeabilität μ_r der Kerne und des Rotors konstant ist, womit $\mathcal{R}_{ka1} = \mathcal{R}_{ka2} = \mathcal{R}_{ka}$, $\mathcal{R}_{ki1} = \mathcal{R}_{ki2} = \mathcal{R}_{ki}$, $\mathcal{R}_{kd1} = \mathcal{R}_{kd2} = \mathcal{R}_{kd}$ gilt. Führt man weiterhin die Abkürzungen $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_{ka} + \mathcal{R}_{ki} + \mathcal{R}_{kd} + \mathcal{R}_m$, $\mathcal{R}_{a1} = \mathcal{R}_{aa1} + \mathcal{R}_{ai1}$ und $\mathcal{R}_{a2} = \mathcal{R}_{aa2} + \mathcal{R}_{ai2}$ ein, so können folgende Maschengleichungen formuliert werden:

$$-u_{cs1} - u_{ms1} + \phi_1(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_{a1}) + \phi_r \mathcal{R}_r = 0 \quad (2.48a)$$

$$u_{cs2} - u_{ms2} + \phi_2(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_{a2}) + \phi_r \mathcal{R}_r = 0 . \quad (2.48b)$$

Darin beschreibt ϕ_1 den Fluss durch den Kern des linken Elektromagneten, ϕ_2 jenen durch den Kern des rechten Elektromagneten und ϕ_r den Fluss durch den Rotor. Die Flüsse müssen die Knotengleichung

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi_r \quad (2.49)$$

erfüllen. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Flüsse ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_r als Funktion der magnetischen Spannungen der Spulen $u_{cs1} = N_c i_{c1}$ bzw. $u_{cs2} = N_c i_{c2}$ und der Position q des Rotors.

$$\phi_1 = \frac{(\mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r)(u_{cs1} + u_{ms1}) + \mathcal{R}_r(u_{cs2} - u_{ms2})}{\mathcal{R}_{a1}\mathcal{R}_{a2} + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r) + \mathcal{R}_r\mathcal{R}_k} \quad (2.50a)$$

$$\phi_2 = -\frac{\mathcal{R}_r(u_{cs1} + u_{ms1}) + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r)(u_{cs2} - u_{ms2})}{\mathcal{R}_{a1}\mathcal{R}_{a2} + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r) + \mathcal{R}_r\mathcal{R}_k} \quad (2.50b)$$

$$\phi_r = \frac{(\mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(u_{cs1} + u_{ms1}) + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_k)(-u_{cs2} + u_{ms2})}{\mathcal{R}_{a1}\mathcal{R}_{a2} + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r) + \mathcal{R}_r\mathcal{R}_k} \quad (2.50c)$$

2.5 Faradaysches Induktionsgesetz

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich stromdurchflossene Leiter in sich zeitlich ändernden Magnetfeldern verhalten. Michael Faraday (1791-1867) hat in seinen Untersuchungen festgestellt, dass in einer Leiterschleife kurzfristig ein Strom induziert wird, wenn (i) in einer benachbarten Leiterschleife der stationäre Strom ein- und abgeschaltet wird, (ii) die benachbarte stromdurchflossene Leiterschleife gegenüber der ersten bewegt wird und (iii) ein Permanentmagnet ruckartig in die Schleife gebracht oder aus ihr herausgezogen wird.

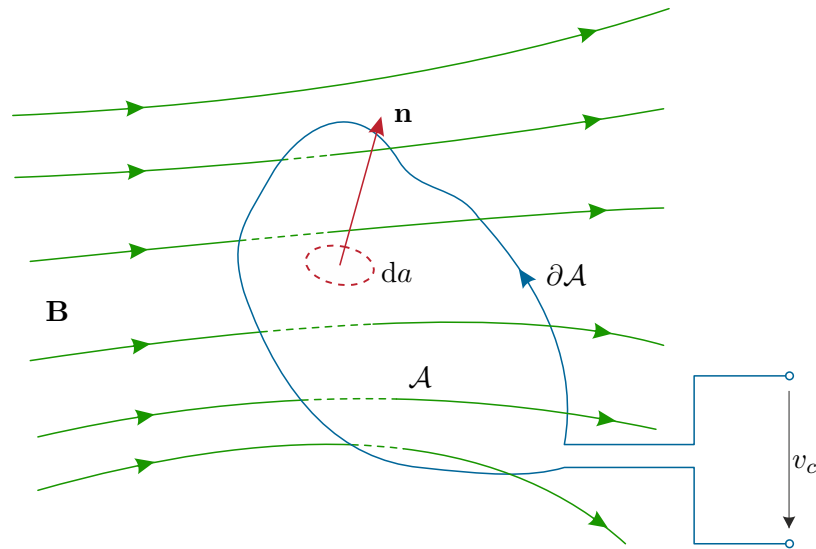


Abbildung 2.18: Zum Faradayschen Induktionsgesetz.

Diese Beobachtungen lassen sich wie folgt mathematisch formulieren: Es sei $\partial\mathcal{A}$ eine Leiterschleife, die eine Fläche $\mathcal{A}$ mit der Flächennormalen $\mathbf{n}$ umrandet. Weiterhin ist mit $\mathbf{B}$ die magnetische Flussdichte im Bereich der Leiterschleife gegeben, siehe Abbildung 2.18. Gemäß (2.6) beschreibt $\phi = \int_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle da$ den von der Leiterschleife umschlossenen magnetischen Fluss. Die Integralform des *Faradayschen Induktionsgesetzes* besagt, dass die in einer bewegten Leiterschleife induzierte Umlaufspannung v in einem (sich zeitlich ändernden) Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}$ gleich der negativen totalen zeitlichen Ableitung des von der Leiterschleife umschlossenen magnetischen Flusses ϕ_c ist, d. h.

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \langle \mathbf{E}', \mathbf{t} \rangle ds = v = \frac{d}{dt} \phi_c = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle da . \quad (2.51)$$

Die Spannung v setzt sich dabei aus einem Spannungsabfall in der Leiterschleife $R_c i_c$ und der Klemmenspannung v_c in der Form $v = R_c i_c - v_c$ zusammen. Zur Berechnung der induzierten Spannung in einer Spule mit N_c Windungen definiert man den verketteten Fluss $\psi_c = -N_c \phi_c$. Dann erhält man aus (2.51) direkt

$$\frac{d}{dt} \psi_c = -v = -R_c i_c + v_c . \quad (2.52)$$

Wird ein magnetischer Kreis ohne Permanentmagnete und mit ungesättigtem Material betrachtet, so kann auf Basis der Reluktanzmodellierung aus Abschnitt 2.4 ein linearer Zusammenhang zwischen dem Vektor der Ströme $\mathbf{i}_c^T = [i_{c1} \ \dots \ i_{cs}]$ der Spulen und dem zugehörigen Vektor des verketteten Flusses $\boldsymbol{\psi}_c^T = [\psi_{c1} \ \dots \ \psi_{cs}]$ in der Form

$$\boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{i}_c, \quad (2.53)$$

mit der Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$, gefunden werden. Darin beschreibt s die Anzahl der Spulen. Die Induktivitätsmatrix ist im Allgemeinen eine Funktion der mechanischen Freiheitsgrade $\mathbf{q}$ des Systems, d. h. $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_c(\mathbf{q})$. Für einen magnetisch linearen Magnetkreis mit Permanentmagneten erweitert sich $\boldsymbol{\psi}_c$ in der Form $\boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{i}_c + \boldsymbol{\psi}_{cm}$, wobei $\boldsymbol{\psi}_{cm}$ den verketteten Fluss der Spulen zufolge der Permanentmagnete beschreibt.

Berücksichtigt man den elektrischen Widerstand der Spulen mit Hilfe der Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_c$ und den Vektor $\mathbf{v}_c^T = [v_{c1} \ \dots \ v_{cs}]$ der an die Spulen angelegten Spannungen, so ergibt sich das Faradaysche Induktionsgesetz zu

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_c = -\mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c. \quad (2.54)$$

Durch Anwendung der Kettenregel kann

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_c}{\partial \mathbf{i}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_c + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_c}{\partial \mathbf{q}} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = -\mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c \quad (2.55)$$

gefunden werden. Dabei beschreibt der zweite Term auf der linken Seite die durch eine mechanische Änderung des Magnetkreises induzierte Spannung. Für den magnetisch linearen Fall gilt $\boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{L}_c(\mathbf{q}) \mathbf{i}_c + \boldsymbol{\psi}_{cm}(\mathbf{q})$, womit (2.54) in der Form

$$\mathbf{L}_c \frac{d}{dt} \mathbf{i}_c + \left(\frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{i}_c + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_{cm}}{\partial \mathbf{q}} \right) \frac{d}{dt} \mathbf{q} = -\mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c \quad (2.56)$$

geschrieben werden kann.

Beispiel 2.4 (Fortsetzung einfacher Aktor). Für den einfachen Aktor aus Beispiel 2.2 errechnen sich die verketteten Flüsse ψ_{c1} und ψ_{c2} in der Form $\psi_{c1} = -N_{c1}\phi_1$ und $\psi_{c2} = -N_{c2}\phi_2$. Die Einträge der positiv definiten Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ ergeben sich damit aus

$$\mathbf{L}_c = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_c}{\partial \mathbf{i}_c} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

mit dem Vektor der verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c^T = [\psi_{c1} \ \psi_{c2}]$ und dem Vektor der Spulenströme $\mathbf{i}_c^T = [i_{c1} \ i_{c2}]$, zu

$$L_{11} = N_{c1}^2 \left(\frac{\mu_0(h_{a2} - q_1)b_{a2}}{2l_f} + \frac{\mu_0 q_1 b_{a2}}{l_{a2}} + \frac{1}{R_{a1}} \right) \quad (2.58a)$$

$$L_{12} = L_{21} = N_{c1}N_{c2} \left(\frac{\mu_0(h_{a2} - q_1)b_{a2}}{2l_f} + \frac{\mu_0 q_1 b_{a2}}{l_{a2}} \right) \quad (2.58b)$$

$$L_{22} = N_{c2}^2 \left(\frac{\mu_0(h_{a2} - q_1)b_{a2}}{2l_f} + \frac{\mu_0 q_1 b_{a2}}{l_{a2}} \right). \quad (2.58c)$$

Der Vektor der verketteten Flüsse zufolge des Permanentmagneten ergibt sich weiterhin zu

$$\boldsymbol{\psi}_{cm} = \begin{bmatrix} -\frac{N_{c1}}{\mathcal{R}_{a1}} u_{ms1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Man sieht, dass $\boldsymbol{\psi}_{cm}$ unabhängig von q_1 ist, womit

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{L}_c(q_1) \frac{d}{dt} \mathbf{i}_c + \frac{\partial \mathbf{L}_c(q_1)}{\partial q_1} \mathbf{i}_c \frac{d}{dt} q_1 \quad (2.60)$$

gilt. Die partielle Ableitung der Induktivitätsmatrix kann dabei in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{L}_c(q_1)}{\partial q_1} = \left(\frac{\mu_0 b_{a2}}{l_{a2}} - \frac{\mu_0 b_{a2}}{2l_f} \right) \begin{bmatrix} N_{c1}^2 & N_{c1}N_{c2} \\ N_{c1}N_{c2} & N_{c2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

dargestellt werden. Das System der Differentialgleichungen für die Spulenströme ist schließlich durch

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_c = \mathbf{L}_c^{-1} \left(-\mathbf{R}_c \mathbf{i}_c - \frac{\partial \mathbf{L}_c(q_1)}{\partial q_1} \mathbf{i}_c \frac{d}{dt} q_1 + \mathbf{v}_c \right), \quad (2.62)$$

mit der positiv definiten Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_c = \text{diag}[R_{c1}, R_{c2}]$ und dem Vektor der Spannungen $\mathbf{v}_c^T = [v_{c1} \ v_{c2}]$, gegeben.

Beispiel 2.5 (Fortsetzung Axiales Magnetlager). Für das in Beispiel 2.3 betrachtete Axiallager wird ebenfalls die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ berechnet. Dazu werden die verketteten Flüsse $\psi_{c1} = N_c \phi_1$ und $\psi_{c2} = -N_c \phi_2$ der Spulen partiell nach den Strömen abgeleitet. Die Induktivitätsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{L}_c = \frac{N_c^2}{\mathcal{R}_{a1}\mathcal{R}_{a2} + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r) + \mathcal{R}_r\mathcal{R}_k} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r & \mathcal{R}_r \\ \mathcal{R}_r & \mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Der Vektor ψ_{cm} errechnet sich zu

$$\psi_{cm} = \frac{N_c u_{ms}}{\mathcal{R}_{a1}\mathcal{R}_{a2} + (\mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k)(\mathcal{R}_k + \mathcal{R}_r) + \mathcal{R}_r\mathcal{R}_k} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{a2} + \mathcal{R}_k \\ -\mathcal{R}_{a1} - \mathcal{R}_k \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

wobei $u_{ms1} = u_{ms2} = u_{ms}$ gesetzt wurde. Die partiellen Ableitungen von $\mathbf{L}_c$ und ψ_{cm} nach der Position q des Rotors können damit einfach ermittelt werden.

Wie man aus diesen Beispielen sieht ist die Induktivitätsmatrix eine symmetrische positiv (semi-)definite Matrix. Die Symmetrie der Matrix folgt unmittelbar, da die Wirkung des Stroms i_{c1} auf den verketteten Fluss ψ_{c2} der Wirkung des Stroms i_{c2} auf den verketteten Fluss ψ_{c1} entsprechen muss. Die positiv Semi-Definitheit der Matrix hängt, wie noch gezeigt wird, direkt mit der magnetischen Energie zusammen.

2.6 Energie und Koenergie

Zur Berechnung der Kräfte und Momente in elektromagnetischen Energiewandlern zufolge des Magnetfelds gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: (i) Integration des Maxwell'schen Spannungstensors über die Oberfläche des zu untersuchenden Teils und (ii) die Verwendung des sogenannten Koenergie-Prinzips. Während der Maxwell'sche Spannungstensor vor allem in Finite-Elemente Programmen verwendet wird, erweist sich die Nutzung des Koenergie-Prinzips in der makroskopischen Reluktanzmodellierung als besser geeignet.

Um das Koenergie-Prinzip zur Berechnung der Kräfte und Momente zu erläutern, müssen im ersten Schritt die Begriffe *Energie* und *Koenergie* definiert werden. Abbildung 2.19 zeigt zwei physikalische Teilsysteme, die über ein sogenanntes *Energietor* miteinander verbunden sind.

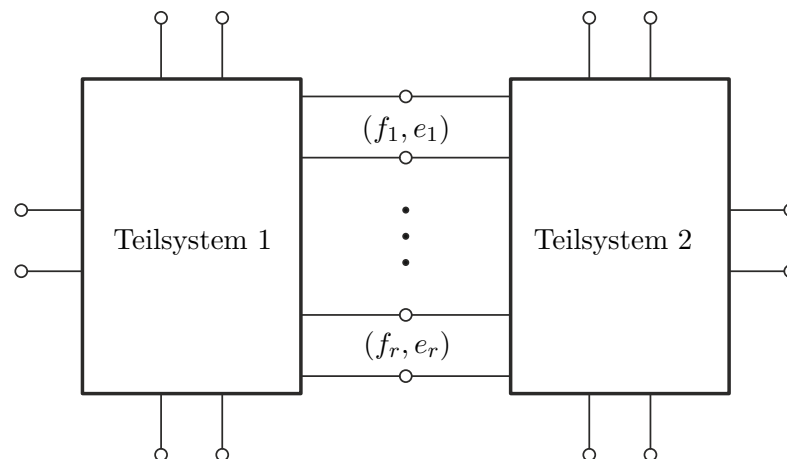


Abbildung 2.19: Zusammenschaltung von Teilsystemen über Energietore.

Ein Energietor ist ein Paar von *Leistungsvariablen* $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$, mit den *effort*-Variablen

$\mathbf{e}^T = [e_1 \ \dots \ e_r]$ und den *flow*-Variablen $\mathbf{f}^T = [f_1 \ \dots \ f_r]$, deren duales Produkt

$$\mathcal{P} = \mathbf{e}^T \mathbf{f} = \sum_{k=1}^r e_k f_k \quad (2.65)$$

die momentane Leistung $\mathcal{P}$ beschreibt, die dem Energiefluss über das Energietor vom Teilsystem 1 ins Teilsystem 2 zugeordnet ist. In der Tabelle 2.1 sind die Leistungsvariablen für unterschiedliche physikalische Domänen zusammengefasst.

Domäne	effort-Variable	flow-Variable
elektrisch	Spannung	Strom
mechanisch (translatorisch)	Kraft	Geschwindigkeit
mechanisch (rotatorisch)	Moment	Drehwinkelgeschwindigkeit
hydraulisch (inkompressibel)	Druck	Volumenstrom
hydraulisch (isentrop, kompres.)	Enthalpie	Massenstrom
pneumatisch (isentrop, kompres.)	Enthalpie	Massenstrom

Tabelle 2.1: Flow- und Effort-Variablen für unterschiedliche physikalische Domänen.

Man betrachte nun das in Abbildung 2.20 dargestellte System von s gekoppelten Spulen mit den Strömen $\mathbf{i}_c^T = [i_{c1} \ \dots \ i_{cs}]$ und den Spannungen $\mathbf{v}_c^T = [v_{c1} \ \dots \ v_{cs}]$ als Leistungsvariablen.

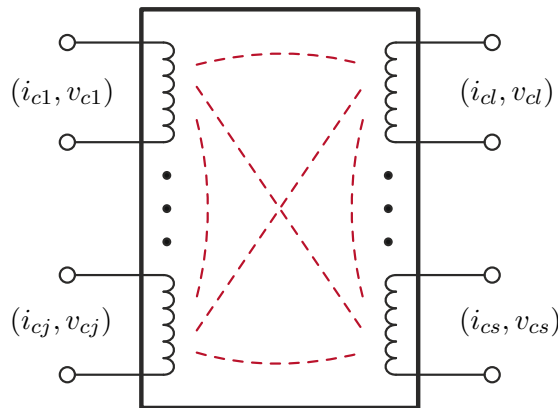


Abbildung 2.20: System von s gekoppelten Spulen.

Es wird im Weiteren angenommen, dass die Wicklungswiderstände der Spulen identisch Null sind und dass die verketteten Flüsse $\psi_{c1}, \dots, \psi_{cs}$ unabhängig sind. Zusätzlich werden vorerst nur Magnetkreise ohne Permanentmagneten betrachtet. Die zum Zeitpunkt t im

System gespeicherte *magnetische Energie* $\mathcal{W}_m(t)$ lässt sich damit in der Form

$$\mathcal{W}_m(t) = \mathcal{W}_m(0) + \int_0^t \mathcal{P}(\tau) d\tau = \mathcal{W}_m(0) + \int_{\gamma} \mathbf{v}_c^T \mathbf{i}_c d\tau = \mathcal{W}_m(0) + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^s i_{cj} v_{cj} d\tau, \quad (2.66)$$

mit der momentanen Leistung $\mathcal{P}(\tau)$ zum Zeitpunkt τ , berechnen. Darin bezeichnet γ eine Lösungskurve des Systems im Intervall $[0, t]$ und mit dem Ausdruck $\int_{\gamma} \mathbf{v}_c^T \mathbf{i}_c d\tau$ wird gekennzeichnet, dass nur jene $\mathbf{v}_c(\tau)$ und $\mathbf{i}_c(\tau)$ zulässig sind, die einer Lösungskurve des Systems entsprechen. Verwendet man nun (2.54) für $\mathbf{R}_c = \mathbf{0}$, d. h. $d\psi_c = \mathbf{v}_c dt$, in (2.66), so errechnet sich die im System gespeicherte magnetische Energie $\mathcal{W}_m$ zu

$$\mathcal{W}_m(t) = \mathcal{W}_m(0) + \int_{\psi_{c0}}^{\psi_c} \mathbf{i}_c^T \mathbf{v}_c d\tau = \mathcal{W}_m(0) + \int_{\psi_{c0}}^{\psi_c} \mathbf{i}_c^T(\tilde{\psi}_c) d\tilde{\psi}_c, \quad (2.67)$$

bzw. mit der geeigneten Definition von $\mathcal{W}_m(0)$

$$\mathcal{W}_m = \int_{\psi_{c0}}^{\psi_c} \mathbf{i}_c^T(\tilde{\psi}_c) d\tilde{\psi}_c = \int_{\psi_{c0}}^{\psi_c} \sum_{j=1}^s i_{cj}(\tilde{\psi}_c) d\tilde{\psi}_{cj}. \quad (2.68)$$

Man beachte, dass die verketteten Flüsse ψ_c die unabhängigen Größen für die Berechnung der magnetischen Energie $\mathcal{W}_m(\psi_c)$ darstellen, während die Spulenströme $\mathbf{i}_c$ in Abhängigkeit der verketteten Flüsse definiert sein müssen. D.h. die *Konstitutivgleichungen* müssen in der Form $i_{cj}(\psi_c)$, $j = 1, \dots, s$, vorliegen. Eine einfache Rechnung zeigt weiterhin, dass ganz allgemein

$$\mathcal{W}_m = \int_{\psi_{c0}}^{\psi_c} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{W}_m(\tilde{\psi}_c)}{\partial \tilde{\psi}_{cj}} d\tilde{\psi}_{cj} \quad (2.69)$$

gilt. Vergleicht man (2.68) mit (2.69), so folgen aus der Unabhängigkeit der verketteten Flüsse $\psi_{c1}, \dots, \psi_{cs}$ die Beziehungen

$$i_{cj} = \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \psi_{cj}}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.70)$$

Aus dieser Beziehung kann abgeleitet werden, dass die Konstitutivgleichungen $i_{cj}(\psi_c)$, $j = 1, \dots, s$, die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\frac{\partial i_{cj}}{\partial \psi_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial \psi_k \partial \psi_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial \psi_j \partial \psi_k} = \frac{\partial i_{ck}}{\partial \psi_j}, \quad j \neq k = 1, \dots, s \quad (2.71)$$

erfüllen müssen. Damit beschreibt der Vektor $\mathbf{i}_c$ den Gradienten $\left(\frac{\partial}{\partial \psi_c} \mathcal{W}_m\right)^T$ der skalaren Energiefunktion $\mathcal{W}_m$, weswegen das Integral (2.68) *wegunabhängig* sein muss. Liegen die Konstitutivgleichungen in der Form $i_{cj}(\psi_c)$, $j = 1, \dots, s$, vor, dann kann man zur Auswertung von (2.68) einen sehr einfachen Integrationsweg der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m(\psi_c) &= \int_0^{\psi_{c1}} i_{c1}(\tilde{\psi}_{c1}, 0, \dots, 0) d\tilde{\psi}_{c1} + \int_0^{\psi_{c2}} i_{c2}(\psi_{c1}, \tilde{\psi}_{c2}, 0, \dots, 0) d\tilde{\psi}_{c2} \\ &+ \dots + \int_0^{\psi_{cs}} i_{cs}(\psi_{c1}, \psi_{c2}, \dots, \tilde{\psi}_{cs}) d\tilde{\psi}_{cs} \end{aligned} \quad (2.72)$$

wählen.

Häufig sollen die Spulenströme $\mathbf{i}_c$ anstelle der verketteten Flüsse ψ_c als unabhängige Variablen verwendet werden. Das Vertauschen von abhängigen und unabhängigen Variablen erfolgt im Allgemeinen mit Hilfe der sogenannten *Legendre Transformation*. Im Folgenden wird jedoch ein mathematisch einfacherer Zugang durch Anwenden der Produktregel in der Form

$$\sum_{j=1}^s i_j d\psi_j = \sum_{j=1}^s (d(i_j \psi_j) - \psi_j di_j) \quad (2.73)$$

gewählt. Durch Einsetzen in (2.68) erhält man mittels Integration entlang der Lösungskurve γ das Ergebnis

$$\mathcal{W}_m(\mathbf{i}_c) = \sum_{j=1}^s i_{cj} \psi_{cj}(\mathbf{i}_c) - \int^{\mathbf{i}_c} \sum_{j=1}^s \psi_{cj}(\tilde{\mathbf{i}}_c) d\tilde{i}_{cj} . \quad (2.74)$$

Der Ausdruck

$$\mathcal{W}_m^* = \int^{\mathbf{i}_c} \sum_{j=1}^s \psi_{cj}(\tilde{\mathbf{i}}_c) d\tilde{i}_{cj} \quad (2.75)$$

wird als *magnetische Koenergie* bezeichnet. In Analogie zu den vorherigen Betrachtungen kann man zeigen, dass die Konstitutivgleichungen $\psi_{cj}(\mathbf{i}_c)$, $j = 1, \dots, s$, die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \psi_{cj}}{\partial i_{ck}} = \frac{\partial \psi_{ck}}{\partial i_{cj}}, \quad j \neq k = 1, \dots, s \quad (2.76)$$

erfüllen müssen. Diese Bedingungen entsprechen unmittelbar der Forderung der Symmetrie der (differentiellen) Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c = \partial \psi_c / \partial \mathbf{i}_c$.

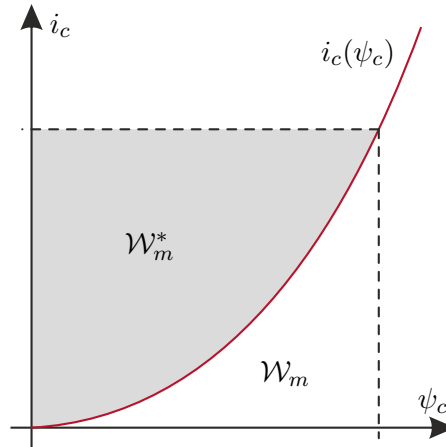


Abbildung 2.21: Magnetische Energie $\mathcal{W}_m$ und magnetische Koenergie $\mathcal{W}_m^*$.

Abbildung 2.21 zeigt die grafische Interpretation der magnetischen Energie $\mathcal{W}_m$ und der magnetischen Koenergie $\mathcal{W}_m^*$ für den Fall einer abhängigen Variable. Wenn der

Magnetkreis linear im Feld ist (magnetisch linear), so folgt mit einer positiv definiten Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ und $\boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{i}_c$ die magnetische Energie gemäß (2.68) zu

$$\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c) = \int^{\boldsymbol{\psi}_c} (\mathbf{L}_c^{-1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_c) d\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_c^T \mathbf{L}_c^{-1} \boldsymbol{\psi}_c \quad (2.77)$$

und die magnetische Koenergie gemäß (2.75) lautet

$$\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c) = \int^{\mathbf{i}_c} (\mathbf{L}_c \tilde{\mathbf{i}}_c) d\tilde{\mathbf{i}}_c = \frac{1}{2} \mathbf{i}_c^T \mathbf{L}_c \mathbf{i}_c . \quad (2.78)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die beiden Ausdrücke (2.77) und (2.78) identisch sind. Weiterhin erkennt man, dass die verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c$ und die Ströme $\mathbf{i}_c$ genau dann eindeutig umrechenbar sind, wenn die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ invertierbar und damit positiv definit ist. Man beachte, dass die Regularität der Induktivitätsmatrix direkt mit der magnetischen Verschaltung der Spulen zusammenhängt.

2.7 Magnetische Kräfte und Momente

In elektromagnetischen Energiewandlern kann die im System gespeicherte Energie zusätzlich über mechanische Energietore beeinflusst werden. Allen weiteren Betrachtungen liegt ein verlustloser elektromagnetischer Energiewandler mit s Energietoren mit den Leistungsvariablen (v_{ck}, i_{ck}) , $k = 1, \dots, s$ und n Energietoren mit den Leistungsvariablen $(\tau_l, \dot{q}_l)$, $l = 1, \dots, n$ zugrunde, siehe Abbildung 2.22. Dabei bezeichnet τ eine verallgemeinerte Kraft (Kraft oder Moment), q den verallgemeinerten Freiheitsgrad und $\dot{q}$ die zugehörige verallgemeinerte Geschwindigkeit.

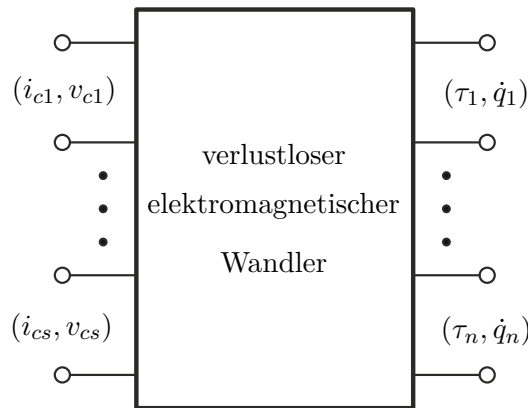


Abbildung 2.22: Torkonzept eines verlustlosen elektromagnetischen Energiewandlers.

Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass die Ströme $i_{c1}, \dots, i_{cs}$ und die mechanischen Freiheitsgrade $q_1, \dots, q_n$ unabhängig voneinander sind. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Verluste des Energiewandlers in einem späteren Schritt in Form von elektrischen Verlusten (Wicklungswiderstand) und mechanischen Reibungsverlusten berücksichtigt

werden können. Zusätzlich wird weiterhin davon ausgegangen, dass der betrachtete Magnetkreis keine Permanentmagneten enthält. Analog zu (2.66) lässt sich die im System gespeicherte magnetische Energie zum Zeitpunkt t in der Form

$$\mathcal{W}_m(t) = \mathcal{W}_m(0) + \int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^s v_{ck} i_{ck} - \sum_{l=1}^n \tau_l \dot{q}_l \right) d\tau, \quad (2.79)$$

mit einer im Intervall $[0, t]$ zulässigen Lösungskurve γ , angeben. Unter Berücksichtigung der Beziehungen $v_{ck} dt = d\psi_{ck}$ und $\dot{q}_l dt = d\tilde{q}_l$ folgt (2.79) zu

$$\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q}) = \int^{(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})} \left(\sum_{k=1}^s i_{ck}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{\psi}_{ck} - \sum_{l=1}^n \tau_l(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{q}_l \right), \quad (2.80)$$

mit den verketteten Flüssen $\boldsymbol{\psi}_c$ und den verallgemeinerten Freiheitsgraden $\mathbf{q}$ als unabhängige Variablen. Formal benötigt man zur Auswertung von (2.80) die Konstitutivgleichungen $i_{ck}(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})$, $k = 1, \dots, s$, und $\tau_l(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})$, $l = 1, \dots, n$. Aufgrund der Darstellung von $\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})$ in der Form

$$\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q}) = \int^{(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \tilde{\psi}_{ck}} d\tilde{\psi}_{ck} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \tilde{q}_l} d\tilde{q}_l \right) \quad (2.81)$$

und der Unabhängigkeit der verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c$ und der Freiheitsgrade $\mathbf{q}$ folgen durch Vergleich von (2.80) mit (2.81) die Beziehungen

$$i_{ck} = \frac{\partial \mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})}{\partial \psi_{ck}}, \quad k = 1, \dots, s \quad (2.82a)$$

$$\tau_l = -\frac{\partial \mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, n. \quad (2.82b)$$

Dies impliziert wiederum die folgenden Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial i_{cj}}{\partial \psi_{ck}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial \psi_{ck} \partial \psi_{cj}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial \psi_{cj} \partial \psi_{ck}} = \frac{\partial i_{ck}}{\partial \psi_{cj}}, \quad j, k = 1, \dots, s \quad (2.83a)$$

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial q_k \partial q_j} = -\frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial \tau_k}{\partial q_j}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (2.83b)$$

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial \psi_{ck}} = -\frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial \psi_{ck} \partial q_j} = -\frac{\partial^2 \mathcal{W}_m}{\partial q_j \partial \psi_{ck}} = -\frac{\partial i_{ck}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, s. \quad (2.83c)$$

Da das Integral von (2.79) wegunabhängig ist, kann man unter Berücksichtigung der Eigenschaft $\tau_k(\mathbf{0}, \mathbf{q}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, die *gespeicherte Energie* $\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q})$ eines *elektromagnetischen Energiewandlers* wie folgt anschreiben

$$\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\psi}_c, \mathbf{q}) = \int^{\boldsymbol{\psi}_c} \sum_{k=1}^s i_{ck}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c, \mathbf{q}) d\tilde{\psi}_{ck}. \quad (2.84)$$

Man beachte, dass bezüglich ψ_c der identische Integrationsweg wie in (2.72) gewählt werden kann. Zur Berechnung der Koenergie $\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})$ setzt man wiederum die Beziehung (2.73), d. h.

$$\sum_{j=1}^s i_j d\psi_j = \sum_{j=1}^s (d(i_j \psi_j) - \psi_j di_j) \quad (2.85)$$

in (2.84) ein und erhält

$$\mathcal{W}_m(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^s i_{cj} \psi_{cj}(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) - \underbrace{\int^{(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})} \left(\sum_{k=1}^s \psi_{ck}(\tilde{\mathbf{i}}_c, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{i}_{ck} + \sum_{l=1}^n \tau_l(\tilde{\mathbf{i}}_c, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{q}_l \right)}_{\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})} . \quad (2.86)$$

Analoge Überlegungen zu oben zeigen, dass

$$\psi_{ck} = \frac{\partial \mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})}{\partial i_{ck}}, \quad k = 1, \dots, s \quad (2.87a)$$

$$\tau_l = \frac{\partial \mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, n \quad (2.87b)$$

gilt und die Koenergie $\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})$ eines elektromagnetischen Energiewandlers im Allgemeinen die folgende Form

$$\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) = \int^{\mathbf{i}_c} \sum_{k=1}^s \psi_{ck}(\tilde{\mathbf{i}}_c, \mathbf{q}) d\tilde{i}_{ck} \quad (2.88)$$

annimmt.

Zusammenfassend kann mittels (2.84) und (2.88) sehr einfach die magnetische Energie bzw. die magnetische Koenergie eines elektromagnetischen Wandlers ohne Permanentmagnete berechnet werden. Die *verallgemeinerten magnetischen Kräfte* (Kräfte und Momente) errechnen sich folglich mit (2.87b) in der Form

$$\tau_l = \frac{\partial \mathcal{W}_m^*}{\partial q_l} = -\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, n . \quad (2.89)$$

Damit ist es auch sehr einfach möglich, die magnetischen Kräfte und Momente τ_l in die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = \tau_e, \quad l = 1, \dots, n \quad (2.90)$$

zu integrieren. Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ wird dazu wie folgt erweitert

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} - \mathcal{W}_m = \mathcal{T} - \mathcal{V} + \mathcal{W}_m^*, \quad (2.91)$$

wobei $\mathcal{T}$ die kinetische Energie und $\mathcal{V}$ die potentielle Energie bezeichnet.

2.7.1 Berücksichtigung von Permanentmagneten

Die bisherigen Herleitungen der magnetischen Kräfte und Momente erfolgten für einen elektromagnetischen Wandler, bei dem das Magnetfeld allein durch s Spulen erzeugt wird. Insbesondere wurde bei der Integration in (2.84) bzw. (2.88) die Eigenschaft verwendet, dass für $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$ auch die verketteten Flüsse ψ_c und die verallgemeinerten Kräfte τ verschwinden. Für einen Magnetkreis mit Permanentmagneten ist diese Eigenschaft offensichtlich nicht mehr erfüllt.

Um nun Permanentmagnete in der Berechnung der verallgemeinerten Kräfte zu berücksichtigen, kann folgende Vorgehensweise angewandt werden: Für jeden der m Permanentmagnete fügt man eine fiktive Spule mit $N_m = 1$ Windungen und dem fiktiven Strom i_{mj} , $j = 1, \dots, m$ hinzu. Im normalen Betrieb verschwinden diese Ströme $\mathbf{i}_m = \mathbf{0}$, sie dienen lediglich als mathematisches Konstrukt zur Herleitung der Gleichungen. Die Ströme $\mathbf{i}_m$ können nun so vorgegeben werden, dass die von den Permanentmagneten erzeugten Flüsse kompensiert werden, d. h. $\psi_m = -\phi_m = \mathbf{0}$ für $\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_{m0}$. Damit gilt auch $\tau = \mathbf{0}$ für $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$ und $\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_{m0}$.

Der Ausdruck (2.86) für die magnetische Koenergie kann nun wie folgt erweitert werden

$$\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) = \int^{(\mathbf{i}_c, \mathbf{q})} \left(\sum_{k=1}^s \psi_{ck}(\tilde{\mathbf{i}}_c, \tilde{\mathbf{i}}_m, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{i}_{ck} + \sum_{j=1}^m \psi_{mj}(\tilde{\mathbf{i}}_c, \tilde{\mathbf{i}}_m, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{i}_{mj} + \sum_{l=1}^n \tau_l(\tilde{\mathbf{i}}_c, \tilde{\mathbf{i}}_m, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{q}_l \right). \quad (2.92)$$

Durch geeignete Wahl des Integrationswegs kann dieser Ausdruck weiter vereinfacht werden

$$\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) = \int_0^{\mathbf{q}} \tau(\mathbf{0}, \mathbf{i}_{m0}, \tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{\mathbf{q}} + \int_{\mathbf{i}_{m0}}^{\mathbf{0}} \psi_m(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{i}}_m, \mathbf{q}) d\tilde{\mathbf{i}}_m + \int_0^{\mathbf{i}_c} \psi_c(\tilde{\mathbf{i}}_c, \mathbf{0}, \mathbf{q}) d\tilde{\mathbf{i}}_c. \quad (2.93)$$

Mit der obigen Wahl von $\mathbf{i}_{m0}$ verschwindet das erste Integral in (2.93) und man erhält

$$\mathcal{W}_m^*(\mathbf{i}_c, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{i}_{m0}}^{\mathbf{0}} \psi_m(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{i}}_m, \mathbf{q}) d\tilde{\mathbf{i}}_m + \int_0^{\mathbf{i}_c} \psi_c(\tilde{\mathbf{i}}_c, \mathbf{0}, \mathbf{q}) d\tilde{\mathbf{i}}_c. \quad (2.94)$$

Der Vektor der verallgemeinerten Kräfte kann aus der Koenergie weiterhin mit Hilfe von (2.89) berechnet werden.

Beispiel 2.6 (Fortsetzung einfacher Aktor). Für den in Beispiel 2.2 betrachteten einfachen Aktor errechnen sich der Vektor der verketteten Flüsse $\psi_c = [\psi_{c1} \ \psi_{c2}]$ der Spulen und des Permanentmagneten ψ_m nach (2.42) in der Form

$$\psi_{c1} = \left(\frac{1}{2\mathcal{R}_{a22}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{a21}} \right) (N_{c1}^2 i_{c1} + N_{c1} N_{c2} i_{c2}) + \frac{1}{\mathcal{R}_{a1}} (N_{c1}^2 i_{c1} + u_{ms1} N_{c1}) \quad (2.95a)$$

$$\psi_{c2} = \left(\frac{1}{2\mathcal{R}_{a22}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{a21}} \right) (N_{c1} N_{c2} i_{c1} + N_{c2}^2 i_{c2}) \quad (2.95b)$$

$$\psi_m = -\frac{1}{\mathcal{R}_{a1}} (N_{c1} i_{c1} - u_{ms1}). \quad (2.95c)$$

Die magnetische Koenergie kann in der Form (2.94) angegeben werden, indem u_{ms1} durch $u_{ms1} - i_{m1}$ ersetzt wird und $i_{m1,0} = u_{ms1}$ in (2.95) verwendet wird. Man erhält die magnetische Kraft τ_1 auf das Objekt zu

$$\tau_1 = \frac{\partial \mathcal{W}_m^*}{\partial q_1}, \quad (2.96)$$

bzw. mit (2.95)

$$\tau_1 = -\frac{1}{4} \frac{(l_{a2} - 2l_f)\mu_0 b_{a2}}{l_f l_{a2}} (N_{c1} i_{c1} + N_{c2} i_{c2})^2. \quad (2.97)$$

Die Bewegungsgleichung des Objektes ergibt sich damit in der Form

$$\frac{d}{dt} q_1 = \omega_1 \quad (2.98a)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_1 = \frac{1}{m_1} (-c_1(q_1 - q_{10}) - d_1 \omega_1 + \tau_1), \quad (2.98b)$$

wobei q_{10} die entspannte Lage der Feder bezeichnet.

Aufgabe 2.1. Berechnen Sie die Magnetkraft und die Bewegungsgleichung für das Axiallager aus Beispiel 2.2.

2.8 Netzwerkanalyse

Die Modellierung von elektromagnetischen Energiewandlern mit Hilfe von Reluktanzmodellen kann zu komplexen Ersatznetzwerken führen, wofür die Herleitung unabhängiger Knoten- und Maschengleichungen schwierig ist. Weiterhin sind elektromagnetische Wandler im Allgemeinen mit einem elektrischen Netzwerk verbunden, welches z.B. die elektrische Verschaltung der Spulen definiert.

Zur effizienten Bestimmung von unabhängigen Knoten- und Spannungsgleichungen von Netzwerken erweist sich die Netzwerkanalyse auf Basis der Graphentheorie als besonders geeignet. Dazu wird das elektrische Netzwerk in Form eines gerichteten Graphen mit den k Knoten $\mathcal{K}$ und den z Zweigen $\mathcal{Z}$ beschreiben, wobei die Zweige den Bauelementen des Netzwerkes entsprechen. Zur weiteren Analyse wird ein Baum (Teilgraph bestehend aus $k - 1$ Zweigen, der alle Knoten verbindet ohne eine Masche zu bilden) definiert. Durch das Hinzufügen eines Zweiges des Kobaums (Teilgraph bestehend aus $z - (k - 1)$ Zweigen) zum Baum entsteht genau eine Masche. Basierend auf dieser Aufteilung des Graphen kann die Topologie des Netzwerkes z.B. über die Maschen-Baumzweig-Inzidenzmatrix beschrieben werden. Für eine detaillierte Darstellung der Ideen und der Anwendung der Graphentheorie zur Analyse von elektrischen Netzwerken siehe, z.B. [2.2, 2.3].

In diesem Abschnitt wird in Analogie zur Netzwerkanalyse von elektrischen Netzwerken eine systematische Berechnung der Gleichungen eines elektromagnetischen Systems auf Basis eines elektrischen und magnetischen Ersatznetzwerkes vorgestellt.

2.8.1 Magnetische Verschaltung

Im Weiteren wird ein elektromagnetischer Wandler bestehend aus s Spulen und m Permanentmagneten mit den mechanischen Freiheitsgraden q_i betrachtet. Die Spulen werden durch die Vektoren der Ströme $\mathbf{i}_c$ und der Spannungen $\mathbf{v}_c$, der positiv definiten Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_c > 0$ sowie der positiv definiten Wicklungsmatrix $\mathbf{N}_c > 0$ beschrieben. Für die Permanentmagnete wird angenommen, dass sie durch die Serienschaltung einer konstanten magnetischen Spannungsquelle und einer konstanten Permeanz beschrieben werden können.

Ein elektromagnetischer Wandler kann durch ein magnetisches Ersatzschaltbild beschrieben werden. Im ersten Schritt der Analyse der magnetischen Verschaltung wird ein Baum gewählt. Die Wahl des Baums ist dabei frei, es muss jedoch gewährleistet werden, dass alle magnetischen Spannungsquellen Teil des Baums sind. Dies ist immer möglich, solange das Netzwerk nicht degeneriert ist, d.h. eine Masche, die nur aus idealen Spannungsquellen besteht, enthält.

Für die weitere Berechnung werden die Flüsse ϕ_t des Baums in Flüsse $\phi_{tc} \in \mathbb{R}^s$ der Spulen, Flüsse $\phi_{tm} \in \mathbb{R}^m$ der Permanentmagnete und Flüsse $\phi_{tg} \in \mathbb{R}^g$ der Permeanzen unterteilt, d.h. $\phi_t^T = [\phi_{tc}^T \ \phi_{tm}^T \ \phi_{tg}^T]$. Die Flüsse $\phi_c \in \mathbb{R}^c$ des Kobaums bestehen bei geeigneter Wahl des Baums nur aus Flüssen von Permeanzen, womit keine weitere Unterteilung notwendig ist. Die Vektoren der magnetischen Spannungen des Baums $\mathbf{u}_t$ und des Kobaums $\mathbf{u}_c$ können auf analoge Art definiert werden.

Zur mathematischen Beschreibung der Topologie des Netzwerkes, d. h. der Verschaltung der Komponenten des Netzwerkes, wird wie bereits beschrieben die Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$ verwendet. Diese definiert den Zusammenhang zwischen den Baumflüssen ϕ_t und den Kobaumflüssen ϕ_c in der Form

$$\phi_t = \mathbf{D}\phi_c, \quad (2.99)$$

bzw. zwischen den Kobaumspannungen $\mathbf{u}_c$ und den Baumspannungen $\mathbf{u}_t$

$$\mathbf{u}_c = -\mathbf{D}^T \mathbf{u}_t. \quad (2.100)$$

Hinweis: Zur einfachen Bestimmung der Inzidenzmatrix schreibt man das Gleichungssystem (2.99) an. Durch das Hinzufügen eines Kobaumelements zum Baum entsteht genau eine Masche (Spalten von $\mathbf{D}$). In den Spalten der Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$ wird demnach +1 eingetragen, wenn das entsprechende Bauelement Teil dieser Masche ist und der zugehörige Fluss gleich gerichtet ist wie der Fluss des Kobaumelements. Entsprechend wird -1 eingetragen, falls die Flüsse gegeneinander gerichtet sind und 0 falls das Bauelement nicht Teil dieser Masche ist.

Die Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$ kann für magnetische Netzwerke in drei Teile aufgeteilt werden

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_c \\ \mathbf{D}_m \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

wobei der Anteil $\mathbf{D}_c$ aus der Verschaltung der Spulen, $\mathbf{D}_m$ aus der Verschaltung der Permanentmagnete und $\mathbf{D}_g$ aus der Verschaltung der Leitwerte des Baums resultiert.

Mit (2.99) und (2.100) wird nur die Topologie des Netzwerkes beschrieben. Zur vollständigen Beschreibung des Netzwerkes sind zusätzlich die Bauteilgleichungen notwendig. Im Rahmen der Modellierung nichtlinearer magnetischer Netzwerke erweist sich eine Formulierung in der Form

$$\phi_{tg} = \mathcal{G}_t \mathbf{u}_{tg} \quad (2.102a)$$

$$\phi_c = \mathcal{G}_c \mathbf{u}_c \quad (2.102b)$$

als sinnvoll. Im Allgemeinen sind die Einträge der Permeanzmatrizen $\mathcal{G}_t$ bzw. $\mathcal{G}_c$ nichtlineare Funktionen der magnetischen Spannungen (Sättigung) und der mechanischen Freiheitsgrade $\mathbf{q}$ (veränderliche Luftspalte), d. h. $\mathcal{G}_t(\mathbf{u}_{tg}, \mathbf{q})$, $\mathcal{G}_c(\mathbf{u}_c, \mathbf{q})$. Setzt man die Bauteilgleichungen in (2.99) ein, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \phi_{tc} \\ \phi_{tm} \\ \mathcal{G}_t \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \phi_c = \mathbf{D} \mathcal{G}_c \mathbf{u}_c = -\mathbf{D} \mathcal{G}_c \mathbf{D}^T \mathbf{u}_t \quad (2.103)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \phi_{tc} \\ \phi_{tm} \\ \mathcal{G}_t \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = -\mathbf{D} \mathcal{G}_c \begin{bmatrix} \mathbf{D}_c^T & \mathbf{D}_m^T & \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{tc} \\ \mathbf{u}_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Nimmt man vorerst an, dass die Spulenströme $\mathbf{i}_c$ und damit $\mathbf{u}_{tc} = \mathbf{N}_c \mathbf{i}_c$ vorgegeben werden, kann (2.104) in ein nichtlineares Gleichungssystem mit den Unbekannten ϕ_{tc} , ϕ_{tm} und $\mathbf{u}_{tg}$ umgeformt werden,

$$\begin{bmatrix} \delta & 0 & \mathbf{D}_c \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ 0 & \delta & \mathbf{D}_m \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{tc} \\ \phi_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = -\mathbf{D} \mathcal{G}_c (\mathbf{D}_c^T \mathbf{u}_{tc} + \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}). \quad (2.105)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist eine Formulierung dieses Gleichungssystems in den Spulenströmen $\mathbf{i}_c$ und den verketteten Flüssen $\psi_c = -\mathbf{N}_c \phi_{tc}$ sinnvoll. Dazu wird die erste Zeile von (2.105) mit der Wicklungsmatrix $\mathbf{N}_c$ multipliziert und $\mathbf{u}_{tc} = \mathbf{N}_c \mathbf{i}_c$ verwendet. Man erhält damit

$$\begin{bmatrix} -\delta & 0 & \bar{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ 0 & \delta & \mathbf{D}_m \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_c \\ \phi_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_m \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathcal{G}_c (\bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}), \quad (2.106)$$

mit der Abkürzung $\bar{\mathbf{D}}_c = \mathbf{N}_c \mathbf{D}_c$.

Dieses Gleichungssystem (2.106) besitzt für den magnetisch linearen Fall, d. h. für $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t(\mathbf{q})$, $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_c(\mathbf{q})$, eine eindeutige Lösung. Für den magnetisch nichtlinearen Fall

muss das Materialmodell zusätzlich einen streng monoton steigenden Zusammenhang zwischen B und H aufweisen.

Um die magnetischen Kräfte und Momente zu berechnen, verwendet man die in Abschnitt 2.7 hergeleitete Energieerhaltung. Die Koenergie des gesamten Netzwerkes kann als Summe der Koenergien der einzelnen Bauelemente des Netzwerkes in der Form

$$\mathcal{W}_m^* = \sum_{j=1}^{g+c} \int_0^{u_j} \phi_j(\tilde{u}_j) d\tilde{u}_j + \sum_{j=1}^{s+m} \int_0^{u_j} \phi_j(\tilde{u}_j) d\tilde{u}_j \quad (2.107)$$

angeschrieben werden. Der erste Teil von (2.107) beschreibt die in den Permeanzen des Netzwerkes gespeicherte Koenergie und der zweite Teil umfasst den in den Spulen und den Permanentmagneten gespeicherten Anteil. Teilt man die Permeanzen in g_q Permeanzen auf, die von den Freiheitsgraden $\mathbf{q}$ abhängig sind und $g + c - g_q$ Permeanzen, die unabhängig von den Freiheitsgraden sind, kann (2.107) wie folgt dargestellt werden

$$\mathcal{W}_m^* = \sum_{j=1}^{g_q} \int_0^{u_j} \mathcal{G}_j(\tilde{u}_j, \mathbf{q}) \tilde{u}_j d\tilde{u}_j + \sum_{j=1}^{g+c-g_q} \int_0^{u_j} \mathcal{G}_j(\tilde{u}_j) \tilde{u}_j d\tilde{u}_j + \sum_{j=1}^{s+m} \int_0^{u_j} \phi_j(\tilde{u}_j) d\tilde{u}_j . \quad (2.108)$$

Die verallgemeinerte Kraft τ_k erhält man nach (2.89) indem man die Koenergie nach dem Freiheitsgrad q_k ableitet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \tau_k = \sum_{j=1}^{g_q} \left(\int_0^{u_j(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathcal{G}_j(\tilde{u}_j, \mathbf{q})}{\partial q_k} \tilde{u}_j d\tilde{u}_j + \frac{\partial u_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} \mathcal{G}_j(u_j(\mathbf{q}), \mathbf{q}) u_j(\mathbf{q}) \right) \\ + \sum_{j=1}^{g+c-g_q} \frac{\partial u_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} \mathcal{G}_j(u_j(\mathbf{q})) u_j(\mathbf{q}) + \sum_{j=1}^{s+m} \phi_j(u_j(\mathbf{q})) \frac{\partial u_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} . \end{aligned} \quad (2.109)$$

Die letzten drei Terme in (2.109) können zu der Summe

$$\sum_{j=1}^{s+m+g+c} \phi_j \frac{\partial u_j}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \phi_t^T & \phi_c^T \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

zusammengefasst werden. Verwendet man die Topologie des Netzwerkes in der Form (2.99) und (2.100), so erhält man für (2.110)

$$\begin{bmatrix} \phi_t^T & \phi_c^T \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_c^T \mathbf{D}^T & \phi_c^T \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ -\mathbf{D}^T \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = 0 . \quad (2.111)$$

Die verallgemeinerte Kraft kann damit in der Form

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{g_q} \int_0^{u_j(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathcal{G}_j(\tilde{u}_j, \mathbf{q})}{\partial q_k} \tilde{u}_j d\tilde{u}_j \quad (2.112)$$

angegeben werden. Für den Fall, dass alle von den Freiheitsgraden abhängigen Permeanzen magnetisch linear sind, d.h. $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j(\mathbf{q})$, kann das Integral in (2.112) analytisch berechnet werden und man erhält

$$\tau_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{g_q} \frac{\partial \mathcal{G}_j(\mathbf{q})}{\partial q_k} u_j^2 . \quad (2.113)$$

Eine elegantere Formulierung erhält man unter Verwendung der Tatsache, dass die partielle Ableitung nach q_k aller nicht von den Freiheitsgraden abhängigen Permeanzen verschwindet

$$\tau_k = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{tg}^T \frac{\partial \mathcal{G}_t}{\partial q_k} \mathbf{u}_{tg} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial q_k} \mathbf{D}^T \mathbf{u}_t. \quad (2.114)$$

Das gesamte Modell des Systems wird durch das Faradaysche Induktionsgesetz (2.54) vervollständigt. Das Modell ist dabei in der Form eines differential-algebraischen Systems (DAE) gegeben. Im Hinblick auf die Implementierung in einer Simulationsumgebung bzw. für einen späteren Regler- oder Steuerungsentwurf stellt sich die Frage einer geeigneten Wahl der Zustandsgrößen. Insbesondere muss festgelegt werden, ob der Vektor der Ströme $\mathbf{i}_c$ als Funktion des Vektors der verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c$ oder umgekehrt ausgedrückt werden soll. Für die Simulation und Regelung von magnetisch nichtlinearen Magnetkreisen erweist es sich als vorteilhaft, den Vektor der Ströme $\mathbf{i}_c$ als Funktion der verketteten Flüsse auszudrücken und die verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c$ als mögliche Zustandsgrößen zu verwenden. Damit erhält man das folgende DAE-System zur Beschreibung eines (magnetisch nichtlinearen) elektromagnetischen Energiewandlers

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_c = -\mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c \quad (2.115)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_m \mathcal{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \boldsymbol{\delta} & \mathbf{D}_m \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{0} & \mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \boldsymbol{\phi}_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_c \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_m \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathcal{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} = \mathbf{0}, \quad (2.116)$$

wobei (2.116) durch einfaches Umformen von (2.106) resultiert.

2.8.2 Elektrische Verschaltung

In den bisherigen Überlegungen wurde die elektrische Verschaltung der Spulen des elektromagnetischen Wandlers nicht berücksichtigt. In realen Anwendungen sind diese Spulen mit anderen elektrischen Bauteilen in einem elektrischen Netzwerk verbunden. Es wird nun angenommen, dass dieses Netzwerk aus idealen Strom- bzw. Spannungsquellen, (nichtlinearen) elektrischen Widerständen, (nichtlinearen) Kapazitäten, (nichtlinearen) ungekoppelten Induktivitäten sowie den (nichtlinearen) gekoppelten Induktivitäten (Spulen) des elektromagnetischen Energiewandlers besteht. Bei geeigneter Wahl eines Baums und des zugehörigen Kobaums wird die Topologie des elektrischen Netzwerkes durch die Inzidenzmatrix $\mathbf{E}$ vollständig beschrieben, d.h. es gilt

$$\mathbf{i}_t = \mathbf{E} \mathbf{i}_c \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_c = -\mathbf{E}^T \mathbf{v}_t. \quad (2.117)$$

Hinweis: Im Vergleich zu den vorigen Abschnitten ist es in diesem Abschnitt notwendig, die Nomenklatur leicht anzupassen. Im Weiteren werden die Ströme der Bauelemente im Vektor $\mathbf{i}_t$ und jene des Kobaums im Vektor $\mathbf{i}_c$ zusammengefasst. Die Ströme der gekoppelten Spulen des elektromagnetischen Wandlers werden nun als

$\mathbf{i}_{ic}$ bezeichnet. Weiterhin wird mit $\mathbf{v}_{ic}$ die Spannung an den gekoppelten Spulen *ohne* den Ohm'schen Spannungsabfall bezeichnet, d.h. die Spulen werden in eine ideale Spule und einen elektrischen Widerstand aufgeteilt. Die Bedeutung der verwendeten Nomenklatur ist in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Strom	Spannung	Bauteil
$\mathbf{i}_{tc}$	$\mathbf{v}_{tc}$	Kapazitäten des Baums
$\mathbf{i}_{tvs}$	$\mathbf{v}_{tvs}$	Spannungsquellen des Baums
$\mathbf{i}_{tr}$	$\mathbf{v}_{tr}$	Widerstände des Baums
$\mathbf{i}_{tiu}$	$\mathbf{v}_{tiu}$	ungekoppelte Spulen des Baums
$\mathbf{i}_{tic}$	$\mathbf{v}_{tic}$	gekoppelte Spulen des Baums
$\mathbf{i}_{cc}$	$\mathbf{v}_{cc}$	Kapazitäten des Kobaums
$\mathbf{i}_{cr}$	$\mathbf{v}_{cr}$	Widerstände des Kobaums
$\mathbf{i}_{ccs}$	$\mathbf{v}_{ccs}$	Stromquellen des Kobaums
$\mathbf{i}_{ciu}$	$\mathbf{v}_{ciu}$	ungekoppelte Spulen des Kobaums
$\mathbf{i}_{cic}$	$\mathbf{v}_{cim}$	gekoppelte Spulen des Kobaums

Tabelle 2.2: Beschreibung der Nomenklatur.

Die Wahl des Baums ist wieder frei, es müssen jedoch alle Spannungsquellen im Baum und alle Stromquellen im Kobaum platziert werden. Um eine vorteilhafte Struktur der Inzidenzmatrix $\mathbf{E}$ des elektrischen Netzwerkes zu erhalten, müssen zusätzlich folgende Regeln beachtet werden:

- Die maximal mögliche Anzahl von Kapazitäten muss im Baum platziert werden.
- Die maximal mögliche Anzahl von Induktivitäten (gekoppelt, ungekoppelt) muss im Kobaum platziert werden.

Unter Verwendung dieser Regeln können die Baum- und Kobaumströme wie folgt partitioniert werden:

$$\mathbf{i}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{tc} \\ \mathbf{i}_{tvs} \\ \mathbf{i}_{tr} \\ \mathbf{i}_{tiu} \\ \mathbf{i}_{tic} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{i}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{cc} \\ \mathbf{i}_{cr} \\ \mathbf{i}_{ccs} \\ \mathbf{i}_{ciu} \\ \mathbf{i}_{cic} \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

Für die elektrischen Spannungen wird eine äquivalente Aufteilung verwendet. Die Inzi-

denzmatrix $\mathbf{E}$ des elektrischen Netzwerkes ergibt sich somit in der Form

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{cc} & \mathbf{E}_{cr} & \mathbf{E}_{ccs} & \mathbf{E}_{ciu} & \mathbf{E}_{cic} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{vsr} & \mathbf{E}_{vscs} & \mathbf{E}_{vsiu} & \mathbf{E}_{vsic} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{rr} & \mathbf{E}_{rcs} & \mathbf{E}_{riu} & \mathbf{E}_{ric} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{iuuu} & \mathbf{E}_{iuic} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{iciu} & \mathbf{E}_{icic} \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

Wie beim magnetischen Ersatznetzwerk muss nun zusätzlich das Verhalten der Bauteile des Netzwerkes beschrieben werden. Der im Allgemeinen nichtlineare Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung Q und der elektrischen Spannung v einer Kapazität kann mit Hilfe der (nichtlinearen) Kapazität C in der Form $Q = C(v)v$ formuliert werden. Wendet man diese Formulierung für das betrachtete Netzwerk an, so erhält man unter Verwendung von (2.117)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tc} \\ \mathbf{Q}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tc}(\mathbf{v}_{tc}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cc}(-\mathbf{E}_{cc}^T \mathbf{v}_{tc}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{tc} \\ -\mathbf{E}_{cc}^T \mathbf{v}_{tc} \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Die zeitlichen Ableitungen der Ladungen ergeben sich wiederum unter Berücksichtigung der elektrischen Verschaltung (2.117) zu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{tc} = \mathbf{E}_{cc} \mathbf{i}_{cc} + \mathbf{E}_{cr} \mathbf{i}_{cr} + \mathbf{E}_{ccs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{ciu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{cic} \mathbf{i}_{cic} = \mathbf{i}_{tc} \quad (2.121a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{cc} = \mathbf{i}_{cc}. \quad (2.121b)$$

Die Gleichung (2.120) impliziert, dass die elektrischen Ladungen $\mathbf{Q}_{cc}$ der Kapazitäten im Kobaum keine unabhängigen Zustandsgrößen bilden, da sie bei Kenntnis von $\mathbf{v}_{tc}$ bzw. $\mathbf{Q}_{tc}$ direkt mittels (2.120) berechnet werden können. Um nun ein System von Differentialgleichungen minimaler Dimension zu erhalten, wählt man den neuen Zustand $\mathbf{Q}_c^I$ der Form

$$\mathbf{Q}_c^I = \mathbf{Q}_{tc} - \mathbf{E}_{cc} \mathbf{Q}_{cc} = (\mathbf{C}_{tc} + \mathbf{E}_{cc} \mathbf{C}_{cc} \mathbf{E}_{cc}^T) \mathbf{v}_{tc}. \quad (2.122)$$

Unter der Annahme, dass sowohl $\mathbf{C}_{tc}(\mathbf{v}_{tc}) \mathbf{v}_{tc}$ als auch $\mathbf{C}_{cc}(\mathbf{v}_{cc}) \mathbf{v}_{cc}$ streng monoton steigende Funktionen in ihren Argumenten sind, kann bei Kenntnis von $\mathbf{Q}_c^I$ eine eindeutige Lösung für $\mathbf{v}_{tc}$ bestimmt werden. Der Vorteil dieser Wahl des neuen Zustands liegt darin, dass die resultierende Zustandsdifferentialgleichung für $\mathbf{Q}_c^I$ unabhängig vom (unbekannten Strom) $\mathbf{i}_{cc}$ ist:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_c^I = \mathbf{E}_{cr} \mathbf{i}_{cr} + \mathbf{E}_{ccs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{ciu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{cic} \mathbf{i}_{cic}. \quad (2.123)$$

Wie bereits erwähnt, erfolgt eine Unterteilung der induktiven Elemente des Netzwerkes in magnetisch ungekoppelte Spulen sowie in magnetisch gekoppelte Spulen, wobei beide

Elemente magnetisch nichtlinear sein können. Der verkettete Fluss ψ der ungekoppelten Induktivitäten lässt sich mit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{tiu} \\ \psi_{ciu} \end{bmatrix}}_{\psi_{iu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{tiu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{ciu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{iu}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{iuii}\mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{iuii}\mathbf{i}_{cic} \\ \mathbf{i}_{ciu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{i}_{iu}} \quad (2.124)$$

beschreiben, wobei die (positiv definite) Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_{iu}$ im Allgemeinen von den Strömen $\mathbf{i}_{ciu}$ und $\mathbf{i}_{tiu} = \mathbf{E}_{iuii}\mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{iuii}\mathbf{i}_{cic}$ abhängt. Die zugehörige Differentialgleichung der verketteten Flüsse ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt}\psi_{tiu} = \mathbf{v}_{tiu} \quad (2.125a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{ciu} = -\mathbf{E}_{ciu}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsui}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{riu}^T \mathbf{v}_{tr} - \mathbf{E}_{iuii}^T \mathbf{v}_{tiu} - \mathbf{E}_{iciu}^T \mathbf{v}_{tic} = \mathbf{v}_{ciu}. \quad (2.125b)$$

Ein nichtlineares magnetisches Reluktanznetzwerk von gekoppelten Induktivitäten (z.B. die Spulen einer elektrischen Maschine) wird entsprechend (2.116) durch das algebraische Gleichungssystem²

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{g}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ic} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{ic} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{g}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \quad (2.126)$$

beschrieben. Darin sind die Vektoren $\mathbf{i}_{ic}$ und ψ_{ic} (durch geeignete Wahl der Reihenfolge der Spulen im magnetischen Netzwerk) in der Form

$$\mathbf{i}_{ic} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{tic} \\ \mathbf{i}_{cic} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_{ic} = \begin{bmatrix} \psi_{tic} \\ \psi_{cic} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

gegeben. Die Differentialgleichungen des verketteten Flusses ψ_{ic} ergeben sich in der Form

$$\frac{d}{dt}\psi_{tic} = \mathbf{v}_{tic} \quad (2.128a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{cic} = -\mathbf{E}_{cic}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsic}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{ric}^T \mathbf{v}_{tr} - \mathbf{E}_{iuii}^T \mathbf{v}_{tiu} - \mathbf{E}_{icic}^T \mathbf{v}_{tic} = \mathbf{v}_{cic}. \quad (2.128b)$$

Wie bereits bei den kapazitiven Elementen folgt aus (2.125) und (2.128), dass nicht der gesamte verkettete Fluss ψ_{iu} und ψ_{ic} als unabhängiger Zustand gewählt werden kann. Weiterhin treten in den Differentialgleichungen (2.125) und (2.128) die (unbekannten) Spulenspannungen $\mathbf{v}_{tiu}$ und $\mathbf{v}_{tic}$ auf. Um nun einen neuen unabhängigen Zustand zu finden, fasst man (2.124) und (2.126) in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{iu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{g}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{iu} \\ \mathbf{i}_{ic} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{iu} \\ \psi_{ic} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{g}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \quad (2.129)$$

²Man beachte die geänderte Nomenklatur. Da der Fluss ϕ_{tm} für die weiteren Betrachtungen irrelevant ist, kann die zweite Zeile von (2.116) vernachlässigt werden.

zusammen. Die elektrische Verschaltung der Induktivitäten wird durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{iu} \\ \mathbf{i}_{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{iuuu} & \mathbf{E}_{iuic} \\ \delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{icui} & \mathbf{E}_{icic} \\ \mathbf{0} & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ciu} \\ \mathbf{i}_{cic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{iu}^I \\ \mathbf{V}_{ic}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ciu} \\ \mathbf{i}_{cic} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_i^I \mathbf{i}_{ci} \quad (2.130)$$

beschrieben, wobei δ wiederum die Einheitsmatrix geeigneter Dimension bezeichnet. Setzt man diesen Zusammenhang in (2.129) ein, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{iu} \mathbf{V}_{iu}^I & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{V}_{ic}^I & \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{V}_{ic}^I & \mathbf{g}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ci} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{iu} \\ \psi_{ic} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{g}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}. \quad (2.131)$$

Man erkennt unmittelbar, dass mit (2.131) mehr unabhängige Gleichungen als unbekannte Ströme $\mathbf{i}_{ci}$ und magnetische Spannungen $\mathbf{u}_{tg}$ definiert sind. Die Auftrennung von ψ_{iu} und ψ_{ic} in einen unabhängigen Anteil (Zustand) ψ_i^I sowie einen abhängigen Anteil $\psi_c^\perp$ kann mit Hilfe der regulären Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_i^\perp)^T & \mathbf{0} \\ (\mathbf{V}_i^I)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_{iu}^\perp)^T & (\mathbf{V}_{ic}^\perp)^T & \mathbf{0} \\ (\mathbf{V}_{iu}^I)^T & (\mathbf{V}_{ic}^I)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

erfolgen, wobei $\mathbf{V}_i^\perp$ den orthogonalen Raum von $\mathbf{V}_i^I$ beschreibt

$$\mathbf{V}_i^\perp = \begin{bmatrix} \delta & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_{iuuu}^T & -\mathbf{E}_{icui}^T \\ \mathbf{0} & \delta \\ -\mathbf{E}_{iuic}^T & -\mathbf{E}_{icic}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{iu}^\perp \\ \mathbf{V}_{ic}^\perp \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Die Anwendung dieser Transformationsmatrix auf (2.131) ergibt das reduzierte algebraische Gleichungssystem für $\mathbf{i}_{ci}$ und $\mathbf{u}_{tg}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{iu} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \hat{\mathbf{D}}_c^T & \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \hat{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{g}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ci} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_i^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{g}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}, \quad (2.134)$$

mit $\hat{\mathbf{L}}_{iu} = (\mathbf{V}_{iu}^I)^T \mathbf{L}_{iu} \mathbf{V}_{iu}^I$, $\hat{\mathbf{D}}_c = (\mathbf{V}_{ic}^I)^T \bar{\mathbf{D}}_c$ und dem unabhängigen verketteten Fluss $\psi_i^I = (\mathbf{V}_{iu}^I)^T \psi_{iu} + (\mathbf{V}_{ic}^I)^T \psi_{ic}$. Zusätzlich folgt die Gleichung für den abhängigen verketteten Fluss $\psi_i^\perp = (\mathbf{V}_{iu}^\perp)^T \psi_{iu} + (\mathbf{V}_{ic}^\perp)^T \psi_{ic}$ in der Form

$$\begin{aligned} \psi_i^\perp &= \left((\mathbf{V}_{iu}^\perp)^T \mathbf{L}_{iu} \mathbf{V}_{iu}^I + (\mathbf{V}_{ic}^\perp)^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \hat{\mathbf{D}}_c^T \right) \mathbf{i}_{ci} \\ &\quad + (\mathbf{V}_{ic}^\perp)^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \mathbf{u}_{tg} + (\mathbf{V}_{ic}^\perp)^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{g}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Wendet man die Transformation (2.132) entsprechend auf die Differentialgleichungen (2.125) und (2.128) an, so erhält man nach kurzer Rechnung die Differentialgleichung für ψ_i^I

$$\frac{d}{dt}\psi_i^I = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_{ciu}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsiu}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{riu}^T \mathbf{v}_{tr} \\ -\mathbf{E}_{cic}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsic}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{ric}^T \mathbf{v}_{tr} \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

Insgesamt ergibt sich somit ein differential-algebraisches System bestehend aus (2.134) und (2.136) zur Beschreibung der Induktivitäten im elektrischen Netzwerk.

Bemerkung 2.3. Durch eine geeignete Wahl des Baums kann sichergestellt werden, dass $\mathbf{E}_{iivc} = \mathbf{0}$ gilt. Es kann nun gezeigt werden, dass das algebraische Gleichungssystem (2.134) genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn die Matrix $\tilde{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{cic}^T & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c$ zeilenregulär ist. Die Regularität von $\tilde{\mathbf{D}}_c$ hängt direkt mit der Verschaltung der verkoppelten Induktivitäten im magnetischen und elektrischen Netzwerk zusammen. Ist $\tilde{\mathbf{D}}_c$ nicht zeilenregulär, so kann wiederum ein Teil des Zustands ψ_i^I als Lösung einer algebraischen Gleichung bestimmt und der unabhängige Zustand weiter reduziert werden. Die Schritte zur Bestimmung des endgültigen unabhängigen Zustands sind im Wesentlichen analog zu den obigen Betrachtungen. Auf eine detaillierte Darstellung wird daher verzichtet.

Die im Allgemeinen nichtlinearen elektrischen Widerstände des Netzwerks werden durch ein Konstitutivgesetz der Form $i = R(v)^{-1}v$ mit dem elektrischen Widerstand R beschrieben. Für das betrachtete elektrische Netzwerk ergibt sich damit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{tr} \\ \mathbf{i}_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{tr}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{cr}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{tr} \\ \mathbf{v}_{cr} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

Weiterhin folgen aus der Topologie des Netzwerks unmittelbar die Zusammenhänge

$$\mathbf{i}_{tr} = \mathbf{E}_{rr} \mathbf{i}_{cr} + \mathbf{E}_{rcs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{riu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{ric} \mathbf{i}_{cic} \quad (2.138a)$$

$$\mathbf{v}_{cr} = -\mathbf{E}_{cr}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsr}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{rr}^T \mathbf{v}_{tr}. \quad (2.138b)$$

Substituiert man (2.138) in die Konstitutivgleichungen (2.137), so ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{tr}^{-1} & -\mathbf{E}_{rr} \mathbf{R}_{cr}^{-1} \\ \mathbf{E}_{rr}^T & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{tr} \\ \mathbf{v}_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{rcs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{riu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{ric} \mathbf{i}_{cic} \\ -\mathbf{E}_{cr}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsr}^T \mathbf{v}_{tvs} \end{bmatrix}, \quad (2.139)$$

das nach den Unbekannten $\mathbf{v}_{tr}$ und $\mathbf{v}_{cr}$ gelöst werden muss.

Die gesamte mathematische Beschreibung des elektrischen und magnetischen Netzwerks folgt nun aus der Kombination der Teilergebnisse dieses Abschnitts. Das resultierende (nichtlineare) differential-algebraische System besteht aus den Differentialgleichungen der unabhängigen Zustände der Kapazitäten und Induktivitäten

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_c^I = \mathbf{E}_{cr} \mathbf{R}_{cr}^{-1} \mathbf{v}_{cr} + \mathbf{E}_{ccs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{ciu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{cic} \mathbf{i}_{cic} \quad (2.140a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_i^I = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_{ciu}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsu}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{riu}^T \mathbf{v}_{tr} \\ -\mathbf{E}_{cic}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsi}^T \mathbf{v}_{tvs} - \mathbf{E}_{ric}^T \mathbf{v}_{tr} \end{bmatrix} \quad (2.140b)$$

und den algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{Q}_c^I = (\mathbf{C}_{tc} + \mathbf{E}_{cc} \mathbf{C}_{cc} \mathbf{E}_{cc}^T) \mathbf{v}_{tc} \quad (2.141a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{iu} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^T & \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{G}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ci} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_i^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \quad (2.141b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{tr}^{-1} & -\mathbf{E}_{rr} \mathbf{R}_{cr}^{-1} \\ \mathbf{E}_{rr}^T & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{tr} \\ \mathbf{v}_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{rcs} \mathbf{i}_{ccs} + \mathbf{E}_{riu} \mathbf{i}_{ciu} + \mathbf{E}_{ric} \mathbf{i}_{cic} \\ -\mathbf{E}_{cr}^T \mathbf{v}_{tc} - \mathbf{E}_{vsr}^T \mathbf{v}_{tvs} \end{bmatrix}. \quad (2.141c)$$

Für die Lösung des Systems (2.140), (2.141) werden die Spannungen $\mathbf{v}_{tvs}$ und die Ströme $\mathbf{i}_{ccs}$ als bekannte Eingangsgrößen aufgefasst. Es sei darauf hingewiesen, dass natürlich alle Ströme und Spannungen des Netzwerks, die nicht in diesem System vorkommen, bei Bedarf einfach entsprechend den Gleichungen dieses Abschnitts ermittelt werden können.

Bemerkung 2.4. Die Kopplung zum mechanischen Teilsystem des elektromagnetischen Wandlers wird über die elektromagnetischen Momente bzw. die elektromagnetischen Kräfte beschrieben. Für einen elektromagnetischen Wandler mit einem mechanischen Freiheitsgrad q ergibt sich entsprechend (2.114) das Moment bzw. die Kraft τ in der Form

$$\tau = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{tg}^T \frac{\partial \mathbf{G}_t}{\partial q} \mathbf{u}_{tg} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ci}^T \hat{\mathbf{D}}_c & \mathbf{u}_{tm}^T \mathbf{D}_m & \mathbf{u}_{tg}^T \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial q} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_{ci} \\ \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \\ \mathbf{D}_g^T \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Beispiel 2.7 (Elektromagnetischer Wandler mit 5 Spulen). Um die Anwendung der in diesem Abschnitt beschriebenen Netzwerkanalyse zu zeigen, wird der in Abb. 2.23 dargestellte elektromagnetische Wandler betrachtet. Der Wandler besteht aus $s = 5$ Spulen, einem Permanentmagnet und einer in einem Luftspalt beweglichen Masse (Freiheitsgrad q_1). Die Spulen werden durch die Vektoren der Ströme $\mathbf{i}_{ic}^T$ und der Spannungen $\mathbf{v}_{ic}^T$, der positiv definiten Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_c$ sowie der positiv definiten Wicklungsmatrix $\mathbf{N}_c$ beschrieben. Für den Permanentmagnet wird angenommen, dass er durch die Serienschaltung einer konstanten magnetischen Spannungsquelle u_{ms1} und einer konstanten Permeanz $\mathcal{G}_{m1}$ beschrieben werden kann.

Der elektromagnetische Wandler wird durch das in Abbildung 2.24 dargestellte magnetische Ersatzschaltbild beschrieben. In Abbildung 2.24 ist eine mögliche Wahl des Baums durch die schwarz dargestellten Bauteile gegeben, während die Elemente des Kobaums rot markiert sind. Die in diesem Beispiel gewählte elektrische Verschaltung der Spulen ist in Abb. 2.25 dargestellt. Wiederum sind die gewählten Komponenten des Baums schwarz markiert und die Elemente des Kobaums sind rot dargestellt.

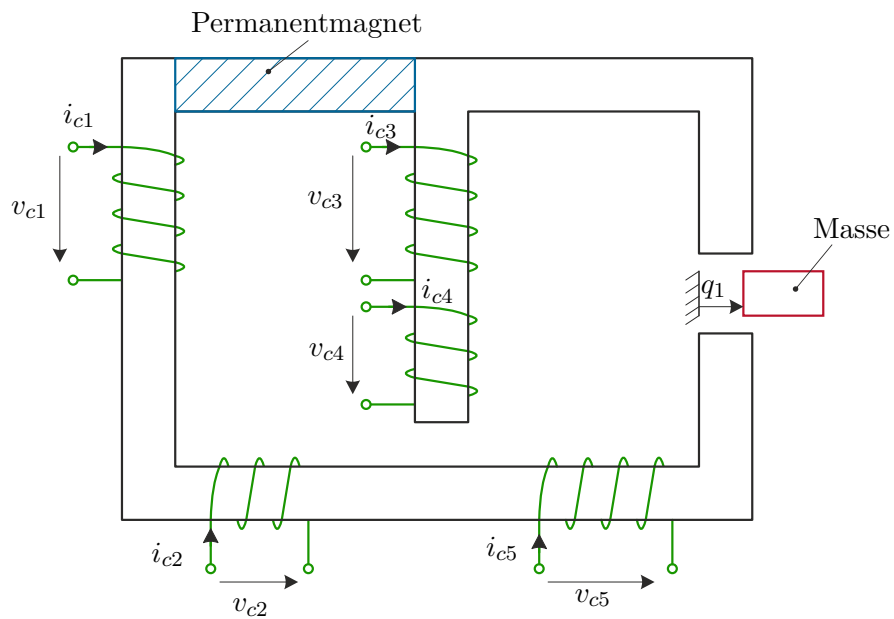


Abbildung 2.23: Elektromagnetischer Wandler zur Netzwerkanalyse.

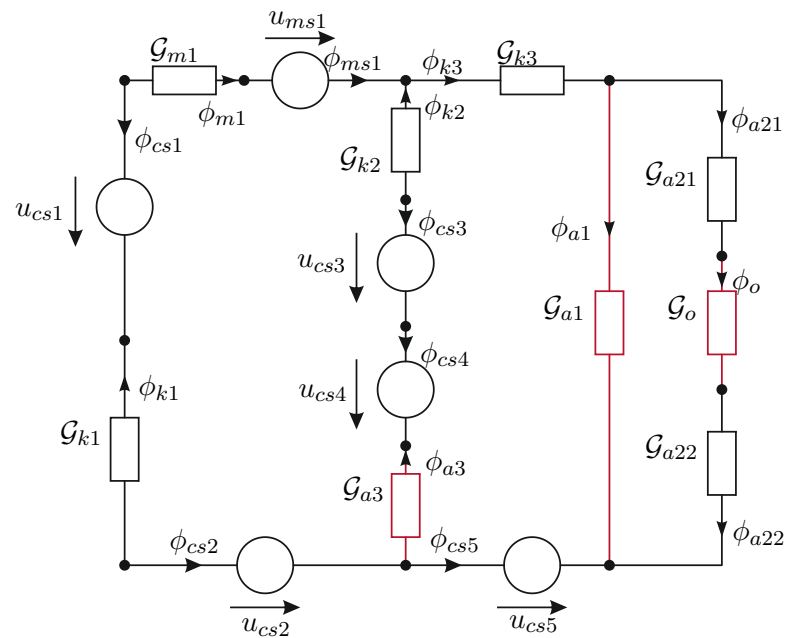


Abbildung 2.24: Magnetisches Ersatzschaltbild zum elektromagnetischen Wandler aus Abb. 2.23.

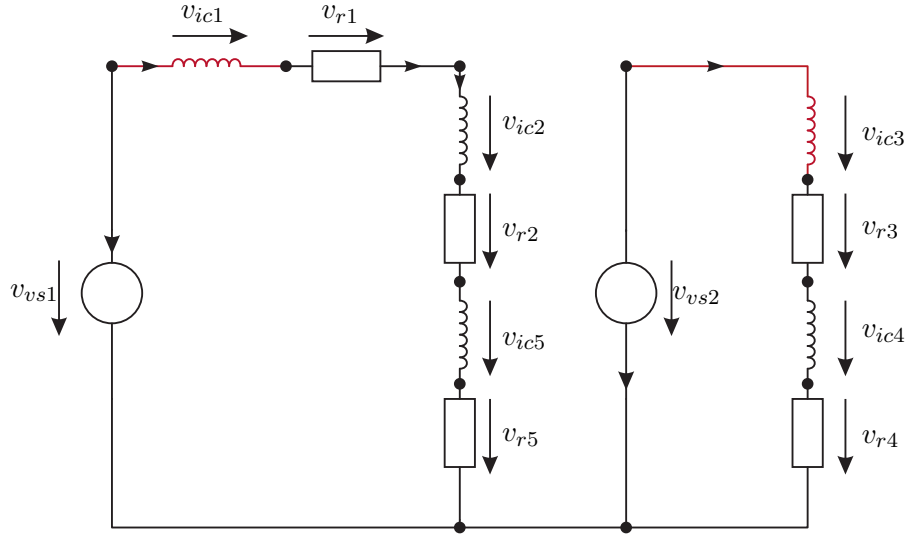


Abbildung 2.25: Elektrische Verschaltung der Spulen 1.

Im ersten Schritt ist es sinnvoll, die Ströme $\mathbf{i}_{ic}$ der Spulen in den Anteil der Baum- und Kobaumströme des elektrischen Netzwerkes zu unterteilen, d.h.

$$\mathbf{i}_{tic} = \begin{bmatrix} i_{ic2} \\ i_{ic4} \\ i_{ic5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{cic} = \begin{bmatrix} i_{ic1} \\ i_{ic3} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

und damit gilt $\mathbf{i}_{ic}^T = [\mathbf{i}_{tic}^T \quad \mathbf{i}_{cic}^T]$. Die elektrischen Spannungen $\mathbf{v}_{ic}$ sowie die Windungsmatrix $\mathbf{N}_c$ wird analog dazu definiert.

Ausgehend von der nun festgelegten Reihenfolge der Spulenströme können die magnetischen Flüsse wie folgt definiert werden:

$$\boldsymbol{\phi}_{tc} = \begin{bmatrix} \phi_{ic2} \\ \phi_{ic4} \\ \phi_{ic5} \\ \phi_{ic1} \\ \phi_{ic3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_{tg} = \begin{bmatrix} \phi_{m1} \\ \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \phi_{a21} \\ \phi_{a22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_c = \begin{bmatrix} \phi_{a1} \\ \phi_{a3} \\ \phi_o \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

sowie $\phi_{tm} = \phi_{ms1}$. Die magnetischen Spannungen werden analog dazu definiert. Die

Einträge der Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$ des magnetischen Netzwerkes ergeben sich zu

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.145a)$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.145b)$$

$$\mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.145c)$$

und die Leitwertmatrizen errechnen sich zu $\mathbf{G}_t = \text{diag}[\mathcal{G}_{m1}, \mathcal{G}_{k1}, \mathcal{G}_{k2}, \mathcal{G}_{k3}, \mathcal{G}_{a21}, \mathcal{G}_{a22}]$ und $\mathbf{G}_c = \text{diag}[\mathcal{G}_{a1}, \mathcal{G}_{a3}, \mathcal{G}_o]$. Die in den weiteren Berechnungen verwendete Matrix $\bar{\mathbf{D}}_c$ errechnet sich durch Multiplikation von $\mathbf{D}_c$ mit der Windungsmatrix $\mathbf{N}_c$.

Um die elektrische Verschaltung der Spulen zu berücksichtigen, definiert man die weiteren Spannungen des Baums und Kobaums des elektrischen Netzwerkes. Im betrachteten Beispiel treten nur Spannungsquellen, verkoppelte Spulen und Widerstände auf. Daher ergibt sich

$$\mathbf{i}_{tvs} = \begin{bmatrix} i_{vs1} \\ i_{vs2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{tr} = \begin{bmatrix} i_{r2} \\ i_{r4} \\ i_{r5} \\ i_{r1} \\ i_{r3} \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

und die Aufteilung der Ströme der verkoppelten Spulen ist in (2.143) beschrieben. Die Bezeichnung der elektrischen Spannungen erfolgt wiederum analog zur Definition der Ströme. Ausgehend von dieser Aufteilung ergeben sich die Einträge der Inzidenzmatrix $\mathbf{E}$ in der Form

$$\mathbf{E}_{vsic} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{ric} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{icic} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.147)$$

Alle anderen Einträge von $\mathbf{E}$ verschwinden für das betrachtete Beispiel.

Um im nächsten Schritt den Vektor $\boldsymbol{\psi}_i^I$ der unabhängigen verketteten Flüsse zu ermitteln, wird $\mathbf{V}_i^I$ entsprechend (2.130) ermittelt. Da im betrachteten Beispiel keine ungekoppelten Spulen auftreten gilt

$$\mathbf{V}_i^I = \mathbf{V}_{ic}^I = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{icic} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

und

$$\mathbf{V}_i^\perp = \mathbf{V}_{ic}^\perp = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ -\mathbf{E}_{icic}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.149)$$

Die Anwendung von $\mathbf{V}_{ic}^I$ auf $\bar{\mathbf{D}}_c$ ergibt

$$\hat{\mathbf{D}}_c = \left(\mathbf{V}_{ic}^I\right)^\top \bar{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} -N_{c1} - N_{c2} - N_{c5} & N_{c1} + N_{c2} & -N_{c1} - N_{c2} - N_{c5} \\ 0 & -N_{c3} - N_{c4} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

und es gilt

$$\boldsymbol{\psi}_i^I = \boldsymbol{\psi}_{ic}^I = \left(\mathbf{V}_{ic}^I\right)^\top \boldsymbol{\psi}_{ic} = \begin{bmatrix} \psi_{ic1} + \psi_{ic2} + \psi_{ic5} \\ \psi_{ic3} + \psi_{ic4} \end{bmatrix} \quad (2.151a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^\perp = \boldsymbol{\psi}_{ic}^\perp = \left(\mathbf{V}_{ic}^\perp\right)^\top \boldsymbol{\psi}_{ic} = \begin{bmatrix} \psi_{ic2} - \psi_{ic1} \\ \psi_{ic4} - \psi_{ic3} \\ \psi_{ic5} - \psi_{ic1} \end{bmatrix} \quad (2.151b)$$

Wendet man diese Transformation auch auf das algebraische Gleichungssystem (2.131) an, so erhält man (2.141). Um nun die eindeutige Lösbarkeit von (2.141) für das betrachtete Beispiel zu überprüfen, muss der Eintrag $\hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^\top$ regulär (bzw. positiv definit) sein. Diese Forderung ist aufgrund der positiven Definitheit von $\mathbf{G}_c$ gleichbedeutend damit, dass $\hat{\mathbf{D}}_c$ eine zeilenreguläre Matrix ist. Eine einfacher Test zeigt, dass dies für das betrachtete Beispiel der Fall ist.

Wird angenommen, dass die elektrischen Widerstände linear sind, ergeben sich die

entsprechenden Gleichungen direkt zu

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{R}_{tr} \mathbf{E}_{ric} \mathbf{i}_{cic} = \begin{bmatrix} R_2 i_{ic1} \\ R_4 i_{ic3} \\ R_5 i_{ic1} \\ R_1 i_{ic1} \\ R_3 i_{ic3} \end{bmatrix}. \quad (2.152)$$

Die restlichen (relativ umfangreichen) Teile des DAE-Systems (2.140), (2.141) können mit diesen Ergebnissen einfach ermittelt werden.

Beispiel 2.8 (Elektromagnetischer Wandler mit 5 Spulen, zweite Verschaltung). Um zu zeigen, dass die Lösungseigenschaften des resultierenden DAE-Systems (2.140), (2.141) natürlich von der gewählten elektrischen Verschaltung der Spulen abhängt, wird nun eine Verschaltung nach Abb. 2.26 betrachtet.

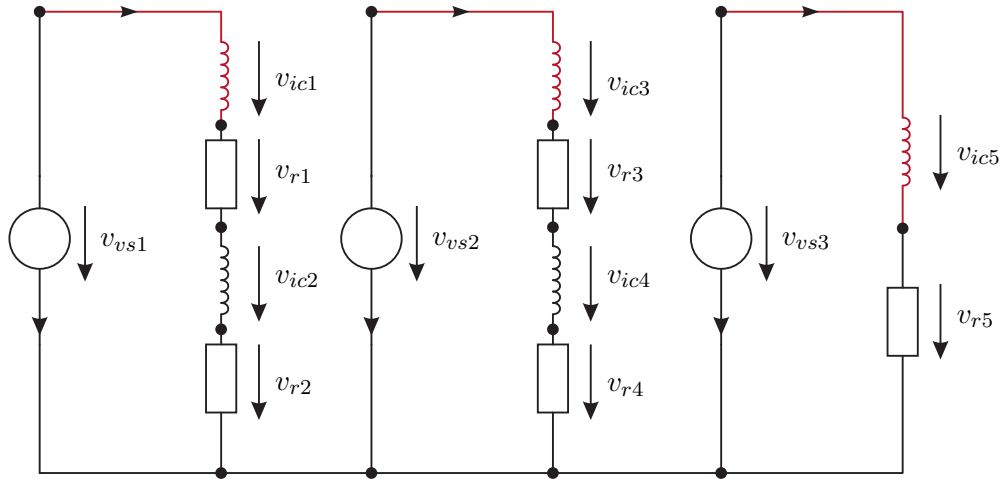


Abbildung 2.26: Elektrische Verschaltung der Spulen 2.

Entsprechend den vorigen Diskussionen ergeben sich

$$\mathbf{i}_{tic} = \begin{bmatrix} i_{ic2} \\ i_{ic4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{cic} = \begin{bmatrix} i_{ic1} \\ i_{ic3} \\ i_{ic5} \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

sowie

$$\phi_{tc} = \begin{bmatrix} \phi_{ic2} \\ \phi_{ic4} \\ \phi_{ic1} \\ \phi_{ic3} \\ \phi_{ic5} \end{bmatrix}, \quad \phi_{tg} = \begin{bmatrix} \phi_{m1} \\ \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \phi_{a21} \\ \phi_{a22} \end{bmatrix}, \quad \phi_c = \begin{bmatrix} \phi_{a1} \\ \phi_{a3} \\ \phi_o \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

sowie $\phi_{tm} = \phi_{ms1}$. Die Einträge der Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$ lauten nun

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.155)$$

Entsprechend des in Abb. 2.26 definierten Baum ergeben sich

$$\mathbf{i}_{tvs} = \begin{bmatrix} i_{vs1} \\ i_{vs2} \\ i_{vs3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{tr} = \begin{bmatrix} i_{r2} \\ i_{r4} \\ i_{r1} \\ i_{r3} \\ i_{r5} \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

und die Einträge der Inzidenzmatrix $\mathbf{E}$ errechnen sich zu

$$\mathbf{E}_{vsic} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{ric} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{icic} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.157)$$

Die zur Transformation verwendeten Matrizen ergeben sich für das betrachtete

Beispiel zu

$$\mathbf{V}_i^I = \mathbf{V}_{ic}^I = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{icic} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

und

$$\mathbf{V}_i^\perp = \mathbf{V}_{ic}^\perp = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ -\mathbf{E}_{icic}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.159)$$

Die Anwendung von $\mathbf{V}_{ic}^I$ auf $\bar{\mathbf{D}}_c$ ergibt

$$\hat{\mathbf{D}}_c = \left(\mathbf{V}_{ic}^I\right)^T \bar{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} -N_{c1} - N_{c2} & N_{c1} + N_{c2} & -N_{c1} - N_{c2} \\ 0 & -N_{c3} - N_{c4} & 0 \\ -N_{c5} & 0 & -N_{c5} \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

und es gilt

$$\boldsymbol{\psi}_i^I = \boldsymbol{\psi}_{ic}^I = \left(\mathbf{V}_{ic}^I\right)^T \boldsymbol{\psi}_{ic} = \begin{bmatrix} \psi_{ic1} + \psi_{ic2} \\ \psi_{ic3} + \psi_{ic4} \\ \psi_{ic5} \end{bmatrix} \quad (2.161a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^\perp = \boldsymbol{\psi}_{ic}^\perp = \left(\mathbf{V}_{ic}^\perp\right)^T \boldsymbol{\psi}_{ic} = \begin{bmatrix} \psi_{ic2} - \psi_{ic1} \\ \psi_{ic4} - \psi_{ic3} \end{bmatrix} \quad (2.161b)$$

Wie bereit im letzten Beispiel beschrieben, hängt die eindeutige Lösbarkeit des resultierenden algebraischen Gleichungssystems direkt mit der Zeilenregularität von $\hat{\mathbf{D}}_c$ zusammen. Nach kurzer Rechnung erkennt man, dass der Zeilenrang von $\hat{\mathbf{D}}_c$ gleich 2 und damit kleiner als die Anzahl der Zeilen von $\hat{\mathbf{D}}_c$ ist. Dies hat zur Folge, dass bei gegebenen $\boldsymbol{\psi}_{ic}^I$ nicht eindeutig auf die Ströme $\mathbf{i}_{ic}$ geschlossen werden kann. Um dieses Problem zu lösen, definiert man $\hat{\mathbf{D}}_c^I$ als den Spaltenraum von $\hat{\mathbf{D}}_c$ und $\hat{\mathbf{D}}_c^\perp$ als den Nullraum von $\hat{\mathbf{D}}_c^T$. Eine mögliche Darstellung ist für das betrachtete System durch

$$\hat{\mathbf{D}}_c^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{N_{c5}}{N_{c1}+N_{c2}} & \frac{N_{c5}}{N_{c3}+N_{c4}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_c^\perp = \begin{bmatrix} -\frac{N_{c5}}{N_{c1}+N_{c2}} \\ -\frac{N_{c5}}{N_{c3}+N_{c4}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

gegeben. Offensichtlich gilt nun $(\hat{\mathbf{D}}_c^\perp)^\top \hat{\mathbf{D}}_c = \mathbf{0}$. Definiert man die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_1$ in der Form

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

mit

$$\mathbf{T}_{1c} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{D}}_c^\perp)^\top \\ (\hat{\mathbf{D}}_c^I)^\top \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

und wendet diese Transformation auf das algebraische Gleichungssystem an, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^\top & \hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^\top \\ \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^\top & \mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^\top \end{bmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{cic} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\hat{\mathbf{D}}_c^I)^\top \hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^\top \hat{\mathbf{H}}_c^I & \hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^\top \hat{\mathbf{H}}_c^I \\ \mathbf{0} & (\hat{\mathbf{D}}_c^I)^\top \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \hat{\mathbf{D}}_c^\top & \mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{cic}^\perp \\ \mathbf{i}_{cic}^I \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.165)$$

für die linke Seite und für die rechte Seite der Gleichung folgt

$$\mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \psi_{ic}^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathcal{G}_c \mathbf{D}_m^\top \mathbf{u}_{tm} = \begin{bmatrix} \psi_{ic}^{I\perp} \\ \psi_{ic}^{II} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\hat{\mathbf{D}}_c^I)^\top \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathcal{G}_c \mathbf{D}_m^\top \mathbf{u}_{tm}. \quad (2.166)$$

Offensichtlich gilt damit $\psi_{ic}^{I\perp} = \mathbf{0}$ und der Strom $\mathbf{i}_{cic}^\perp$ ist nicht durch die algebraischen Gleichungen definiert. Eine Gleichung für diesen Strom erhält man, indem man die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_1$ auf die Differentialgleichung (2.140) anwendet und $\psi_{ic}^{I\perp} = \mathbf{0}$ einsetzt. Damit ist wieder ein DAE-System minimaler Ordnung mit eindeutig bestimmten algebraischen Teil definiert.

2.9 Netzwerkanalyse für den magnetisch linearen Fall

Für den magnetisch linearen Fall sind die Permeanzmatrizen $\mathcal{G}_c$ und $\mathcal{G}_t$ unabhängig von den magnetischen Spannungen des Baums $\mathbf{u}_t$ und des Kobaums $\mathbf{u}_c$, d.h. $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t(\mathbf{q})$ und $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_c(\mathbf{q})$. Damit vereinfacht sich die Betrachtung wesentlich, da nun das Gleichungssystem (2.106) analytisch nach den Unbekannten ψ_c , ϕ_{tm} und $\mathbf{u}_{tg}$ gelöst werden kann. Man erhält

$$\mathbf{u}_{tg} = -(\mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^\top)^{-1} \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c (\bar{\mathbf{D}}_c^\top \mathbf{i}_c + \mathbf{D}_m^\top \mathbf{u}_{tm}), \quad (2.167)$$

und der verkettete Fluss ψ_c der Spulen ergibt sich zu

$$\psi_c = \bar{\mathbf{D}}_c \left[\mathcal{G}_c - \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \left(\mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \right)^{-1} \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \right] \left(\bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \right). \quad (2.168)$$

Man erkennt, dass ψ_c linear vom Strom $\mathbf{i}_c$ abhängt, womit sich die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ in der folgenden Form errechnet

$$\mathbf{L}_c = \frac{\partial \psi_c}{\partial \mathbf{i}_c} = \bar{\mathbf{D}}_c \left[\mathcal{G}_c - \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \left(\mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \right)^{-1} \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \right] \bar{\mathbf{D}}_c^T. \quad (2.169)$$

Satz 2.1 (Positiv (Semi-)Definitheit der Induktivitätsmatrix). Die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ aus (2.169) ist eine symmetrische, positiv (semi-)definite Matrix.

Beweis. Die Symmetrie der Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ folgt unmittelbar, da die Permeanzmatrizen $\mathcal{G}_c$ und $\mathcal{G}_t$ symmetrische, positiv definite Matrizen (Diagonalmatrizen) sind. Um die positiv Semi-Definitheit von $\mathbf{L}_c$ zu zeigen, verwendet man den folgenden Hilfssatz zur Matrizeninversion: Wenn $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ und $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})$ reguläre quadratische Matrizen sind, dann gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \left(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.170)$$

Wendet man diesen Hilfssatz auf den Ausdruck

$$\mathbf{T}_L = \mathcal{G}_c - \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \left(\mathcal{G}_t + \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \right)^{-1} \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c \quad (2.171)$$

an, indem man $\mathbf{A}^{-1} = \mathcal{G}_c$, $\mathbf{B} = \mathbf{D}_g^T$, $\mathbf{C}^{-1} = \mathcal{G}_t$ und $\mathbf{D} = \mathbf{D}_g$ setzt, dann erhält man

$$\mathbf{T}_L = \left(\mathcal{G}_c^{-1} + \mathbf{D}_g^T \mathcal{G}_t^{-1} \mathbf{D}_g \right)^{-1}. \quad (2.172)$$

Da die Inversen der positiv definiten Permeanzmatrizen wiederum positiv definit sind, folgt unmittelbar, dass der Ausdruck $\mathbf{T}_L$ positiv definit ist.

Weiterhin kann die Multiplikation von $\mathbf{T}_L$ mit der nicht regulären Matrix $\bar{\mathbf{D}}_c$ in der Form

$$\mathbf{L}_c = \bar{\mathbf{D}}_c \left(\mathcal{G}_c^{-1} + \mathbf{D}_g^T \mathcal{G}_t^{-1} \mathbf{D}_g \right)^{-1} \bar{\mathbf{D}}_c^T \quad (2.173)$$

nur dazu führen, dass die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ positiv semi-definit wird. $\square$

Im Faraday'schen Induktionsgesetz nach (2.55) wird die partielle Ableitung des verketteten Flusses ψ_c nach den verallgemeinerten Freiheitsgraden $\mathbf{q}$ benötigt. Leitet man den Ausdruck $\mathbf{T}_L$ nach dem Freiheitsgrad q_k ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_L}{\partial q_k} &= \mathbf{T}_{L,k} = \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial q_k} \mathbf{D}_g^T \mathbf{H}_L \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c - \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \mathbf{H}_L \mathbf{D}_g \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial q_k} \\ &\quad + \mathcal{G}_c \mathbf{D}_g^T \mathbf{H}_L \left(\frac{\partial \mathcal{G}_t}{\partial q_k} + \mathbf{D}_g \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial q_k} \mathbf{D}_g^T \right) \mathbf{H}_L \mathbf{D}_g \mathcal{G}_c, \end{aligned} \quad (2.174)$$

wobei die Abkürzung

$$\mathbf{H}_L = \left(\mathbf{g}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{g}_c \mathbf{D}_g^T \right)^{-1} \quad (2.175)$$

eingeführt wurde.

Hinweis: Man beachte, dass die in der Herleitung verwendete Ableitung von $\mathbf{H}_L$ sehr einfach über

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\mathbf{H}_L \mathbf{H}_L^{-1} \right) = \frac{\partial \mathbf{H}_L}{\partial q_k} \mathbf{H}_L^{-1} + \mathbf{H}_L \frac{\partial \mathbf{H}_L^{-1}}{\partial q_k} = \frac{\partial \delta}{\partial q_k} = \mathbf{0} \quad (2.176)$$

ermittelt werden kann.

Mit diesen Zwischenrechnungen kann der Term der induzierten Spannung in (2.55) in der Form

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial \mathbf{q}} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \bar{\mathbf{D}}_c \sum_{k=1}^n \mathbf{T}_{L,k} \frac{d}{dt} q_k \left(\bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c + \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \right) \quad (2.177)$$

angegeben werden und man erhält entsprechend (2.55) die Gleichung

$$\mathbf{L}_c \frac{d}{dt} \mathbf{i}_c = - \frac{\partial \psi_c}{\partial \mathbf{q}} \frac{d}{dt} \mathbf{q} - \mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c, \quad (2.178)$$

mit $\mathbf{L}_c$ aus (2.173).

Den Ausgangspunkt für die Berechnung der verallgemeinerten Kräfte für den magnetisch linearen Fall stellt (2.114) in der Form

$$\tau_k = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{tg}^T \frac{\partial \mathbf{g}_t}{\partial q_k} \mathbf{u}_{tg} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c^T & \mathbf{u}_{tm}^T & \mathbf{u}_{tg}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_m \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_c}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{D}_m^T & \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{u}_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

dar. Verwendet man die Lösung (2.167) für die magnetische Spannung $\mathbf{u}_{tg}$, erhält man

$$\tau_k = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{i}_c^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{T}_{L,k} \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c}_{\tau_{c,k}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{u}_{tm}^T \mathbf{D}_m \mathbf{T}_{L,k} \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm}}_{\tau_{m,k}} + \underbrace{\mathbf{u}_{tm}^T \mathbf{D}_m \mathbf{T}_{L,k} \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c}_{\tau_{cm,k}}. \quad (2.180)$$

Man erkennt, dass sich die verallgemeinerte Kraft aus drei Termen zusammensetzt: (i) Der Term $\tau_{m,k}$ beschreibt die Kraft für unbestromte Spulen, d.h. $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$. Dieser Term ist natürlich auch der einzige, der in einem Magnetkreis ohne Spulen auftritt. (ii) Der Term $\tau_{c,k}$ ist die Kraft zufolge der Bestromung der Spulen für einen Magnetkreis ohne Permanentmagneten. Diese Kraft ist proportional zum Quadrat der Spulenströme. (iii) Der letzte Term $\tau_{cm,k}$ resultiert aus der Wechselwirkung der Permanentmagnete mit den Spulen des Magnetkreises und ist linear im Strom $\mathbf{i}_c$. Wie in den weiteren Abschnitten noch gezeigt wird, ist dies der dominierende Teil in permanenterregten Synchronmaschinen.

Da die Berücksichtigung der elektrischen Verschaltung und die Eliminierung von abhängigen Zustandsgrößen völlig analog zum magnetisch nichtlinearen Fall erfolgen kann, wird dies für den magnetisch linearen Fall nicht weiter betrachtet.

2.10 Permanentmagnet-Synchronmotoren

Die in den letzten Abschnitten vorgestellte Systematik zur Herleitung der Gleichungen für elektromagnetische Energiewandler soll in diesem Abschnitt zur Modellierung von Permanentmagnet-Synchronmotoren eingesetzt werden. Permanentmagnet-Synchronmotoren (PSM) werden in vielen Anwendungen wie z.B. in der Automatisierung, in Fahrzeugantrieben etc. eingesetzt. Dies liegt daran, dass diese Motorbauform sehr hohe Momente bei kompakter Bauweise erlauben. Weiterhin ist, bei geeigneter Bauform, eine hochgenaue, hochdynamische Drehmomenten- und Drehzahlregelung möglich.

Es gibt eine Vielzahl von Bauformen von PSM, die entsprechend ihrer Rotor- bzw. Statorstrukturen klassifiziert werden können. In Abb. 2.27 sind unterschiedliche Bauformen des Rotors mit den Permanentmagneten dargestellt. Darin stellen die Konfigurationen (a)-(d) Bauformen mit Oberflächenmagneten dar, d.h. die Magnete sind auf der Oberfläche des Rotors befestigt. Die klassische Bauform ist in (a) dargestellt. Im Vergleich dazu, zeichnen sich die Bauformen (b) und (c) durch eine einfachere Bauweise aus. Die Bauweise (d) verwendet einen Hohlzylinder aus Magnetmaterial, welcher nach dem Aufbringen auf den Rotor magnetisiert wird. In den Bauformen (e) und (f) sind die Magnete im Rotor eingelagert. Die wesentlichen Vor- und Nachteile der Bauweisen mit Oberflächenmagneten bzw. innenliegenden Magneten können wie folgt zusammengefasst werden:

- Rotoren mit Oberflächenmagneten zeichnen sich meist durch einen homogenen Luftspalt aus, wodurch Reluktanzmomente nur sehr wenig ausgeprägt sind. Im Vergleich dazu führt die Konstruktion mit innenliegenden Magneten meist zu ausgeprägteren Reluktanz- und Rastmomenten.
- Die Fertigung von Rotoren mit Oberflächenmagneten ist aufgrund der Befestigung der Magnete wesentlich aufwändiger. Aufgrund dieser Befestigung eignen sich solche Rotoren nur beschränkt für sehr hohe Drehzahlen. Im Gegensatz dazu können in Rotoren mit innenliegenden Magneten einfache quaderförmige Magneten verwendet werden. Aufgrund der Anordnung im Rotor können diese auch sehr einfach fixiert werden, weswegen diese Bauform sehr gut für sehr hohe Drehzahlen geeignet ist.
- Da die Magnete bei Rotoren mit Oberflächenmagneten direkt im Luftspalt angeordnet sind, können hohe Luftspaltfelder im Betrieb zu einer (lokalen) Demagnetisierung führen. Diese Gefahr besteht bei Rotoren mit innenliegenden Magneten aufgrund der Flusspfade im Rotor kaum.

Der Stator einer PSM kann entweder genutzt oder nicht genutzt ausgeführt werden, siehe Abbildung 2.28. Letztere Bauform wird in der Literatur auch häufig als eisenlos bezeichnet. Die Vor- und Nachteile der beiden Bauformen sind wie folgt gegeben:

- Die Fertigung der Spulen in genutzten Statoren ist aufwändiger als bei ungenutzten Statoren, insbesondere wenn keine Zahnspulenwicklungen (jede Spule liegt genau über einem Zahn des Stators) verwendet werden.

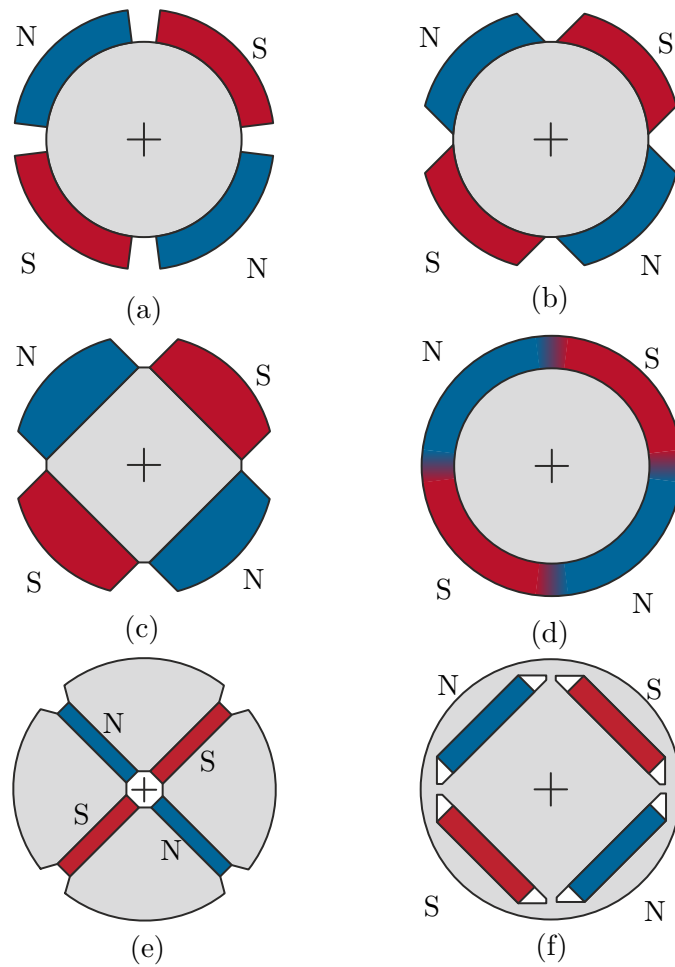


Abbildung 2.27: Mögliche Bauformen des Rotors einer PSM [2.4].

- Aufgrund des wesentlich größeren Luftspalts von ungenutzten Statorn können bei gleicher Baugröße wesentlich geringer Leistungen erzeugt werden. Weiterhin ist die Wärmeabfuhr schlechter als bei genutzten Statorn.
- Mit ungenutzten Statorn ist es möglich, PSM ohne Rast- und Reluktanzmomente zu konstruieren. Genutzte Statorn weisen immer ein mehr oder weniger ausgeprägtes Rastmoment auf, das insbesondere bei geringen Drehzahlen und hochgenauer Positionierung problematisch sein kann.

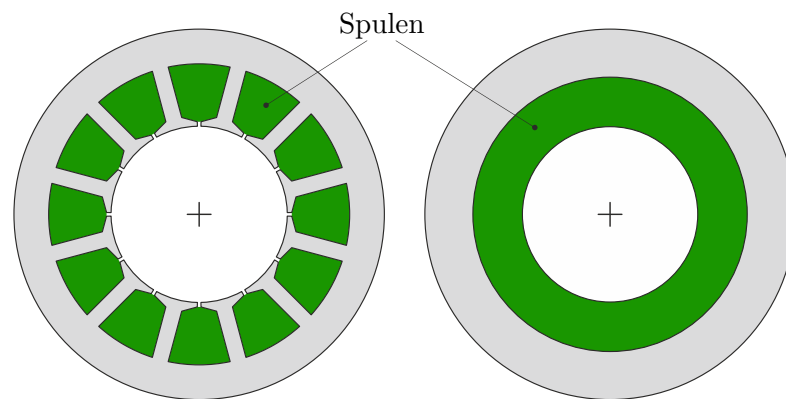


Abbildung 2.28: Mögliche Bauformen des Stators einer PSM [2.4].

Die hier vorgestellten Bauformen von Statorn und Rotoren stellen nur einen kleinen Ausschnitt der in der Literatur vorgestellten Bauformen dar. Weiterhin liegt ein wesentlicher Freiheitsgrad bei der Konstruktion des Stators auch im Wicklungsschema der Spulen. Für eine detaillierte Zusammenfassung wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, siehe z.B. [2.4–2.7]. Im Rahmen dieser Vorlesung wird exemplarisch die Modellierung eines Motors mit innenliegenden Magneten beschrieben, wobei diese Bauform einen Stator mit Nuten aufweist.

2.10.1 PSM mit innenliegenden Magneten

Der in diesem Abschnitt betrachtete Motor wird im KFZ-Bereich für die Aktuierung einer aktiven Hinterachslenkung eingesetzt. Er besteht aus einem Stator mit 12 Wicklungen und einem Rotor mit 8 innenliegenden Permanentmagneten, siehe Abb. 2.29.

In Abbildung 2.30 ist ein Schnitt des Motors dargestellt. Man erkennt, dass über jeden Zahn des Stators genau eine Wicklung angebracht ist (Zahnspulenwicklung). Die Wicklungen einer Phase sind dabei jeweils um einen Winkel von 90° am Stator verdreht positioniert und elektrisch parallel verschaltet. Weiterhin sieht man, dass ein Nord- und ein Südmagnet des Rotors 90° überdecken. Damit besitzt dieser Motor eine Symmetrie von 90° und es genügt im Weiteren nur $1/4$ des Motors zu beschreiben (Polpaarzahl $p = 4$). Die relative Verdrehung des Rotors zum Stator wird durch den Winkel φ bezeichnet, während mit φ_r bzw. φ_s Positionen am Rotor bzw. Stator gekennzeichnet werden. Betrachtet man den Luftspalt des Motors genauer, so erkennt man, dass dieser eine nichtkonstante Höhe

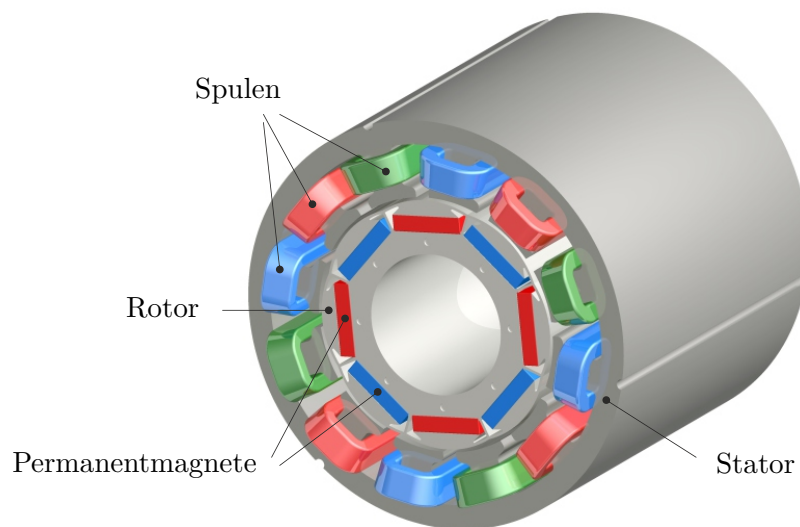


Abbildung 2.29: PSM mit innenliegenden Permanentmagneten.

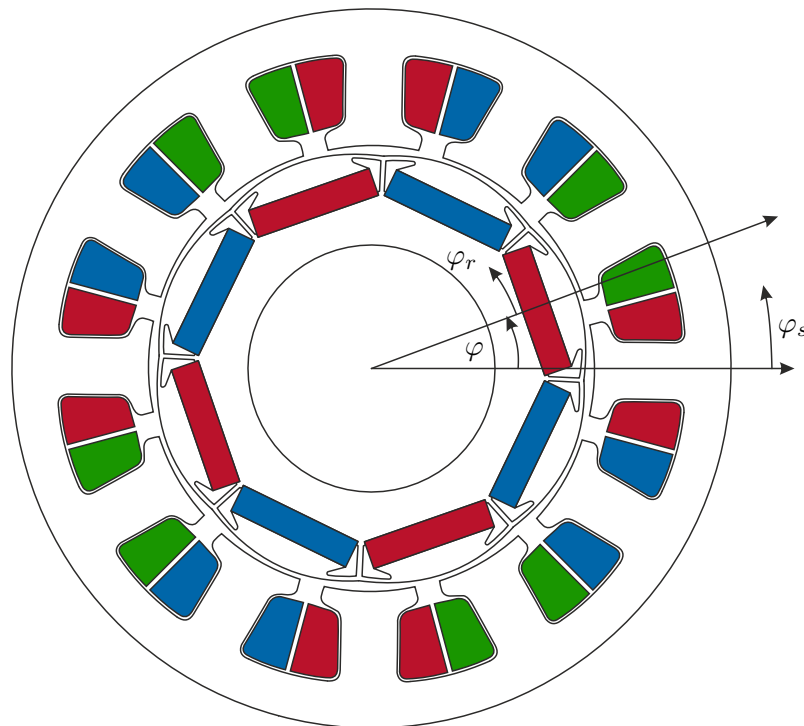


Abbildung 2.30: Schnittdarstellung der PSM aus Abbildung 2.29.

als Funktion des Rotorwinkels φ_r aufweist. Diese Konstruktion führt, wie noch gezeigt wird, zu einem ausgeprägten Rastmoment. Dieses Rastmoment ist in der betrachteten Anwendung erwünscht, da damit bei unbestromtem Motor ein Verdrehen des Rotors weitgehend vermieden wird.

Zur Beschreibung des Motors wird ein Reluktanznetzwerk, wie es in Abb. 2.31 im Schnitt des Viertelmotors dargestellt ist, verwendet. Darin wurde für eine bessere Übersicht auf eine Darstellung der Luftspaltleitwerte verzichtet.

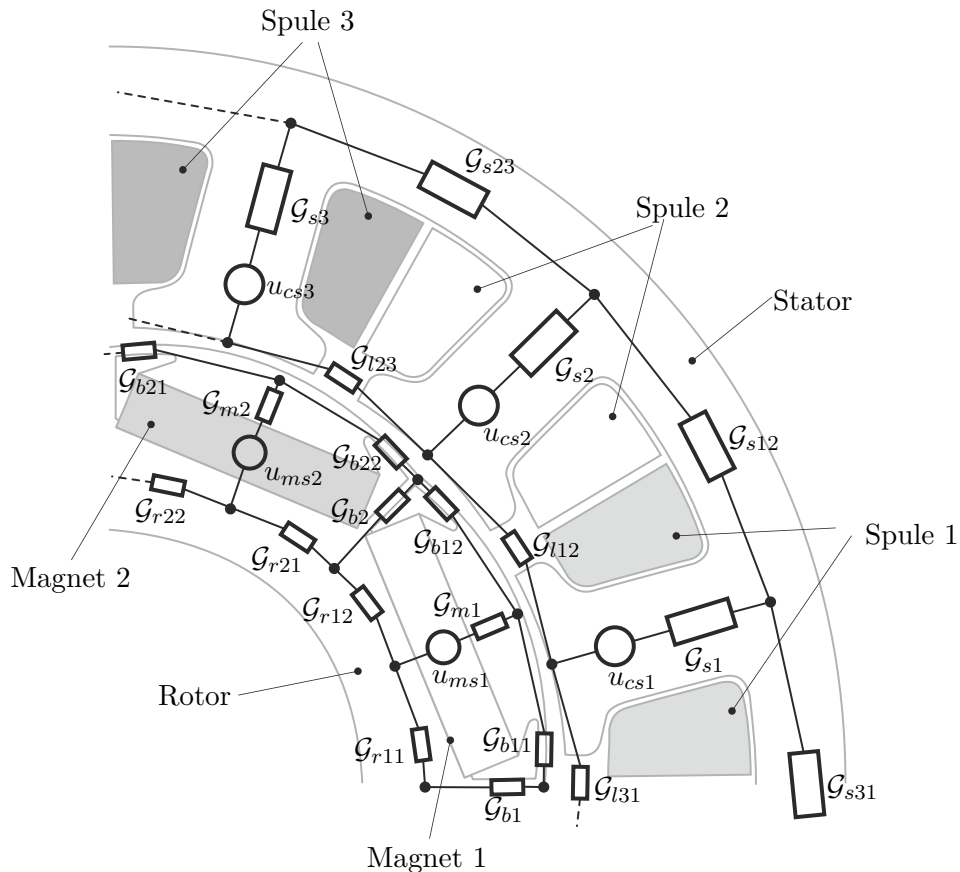


Abbildung 2.31: Schnitt der PSM aus Abbildung 2.29 mit möglichem Reluktanznetzwerk.

In Abbildung 2.32 ist schließlich das gesamte Reluktanznetzwerk der PSM dargestellt. Da im betrachteten Motor die Sättigung des Stators und des Rotors maßgeblich ist, wird die relative Permeabilität μ_r als Funktion der mittleren magnetischen Feldstärke $\bar{H}$ der entsprechenden Reluktanzen definiert, vgl. Abschnitt 2.3. Als Material des Kernes wird Stahl der Sorte M800-50A verwendet, dessen Magnetisierungskennlinie in Abbildung 2.4 dargestellt ist.

Die Permeanzen des Rotors und des Stators können als Quader der Länge l und der Querschnittsfläche A modelliert werden. Die Permeanzen G_{sj} , $j = 1, \dots, 3$, der Statorzähne

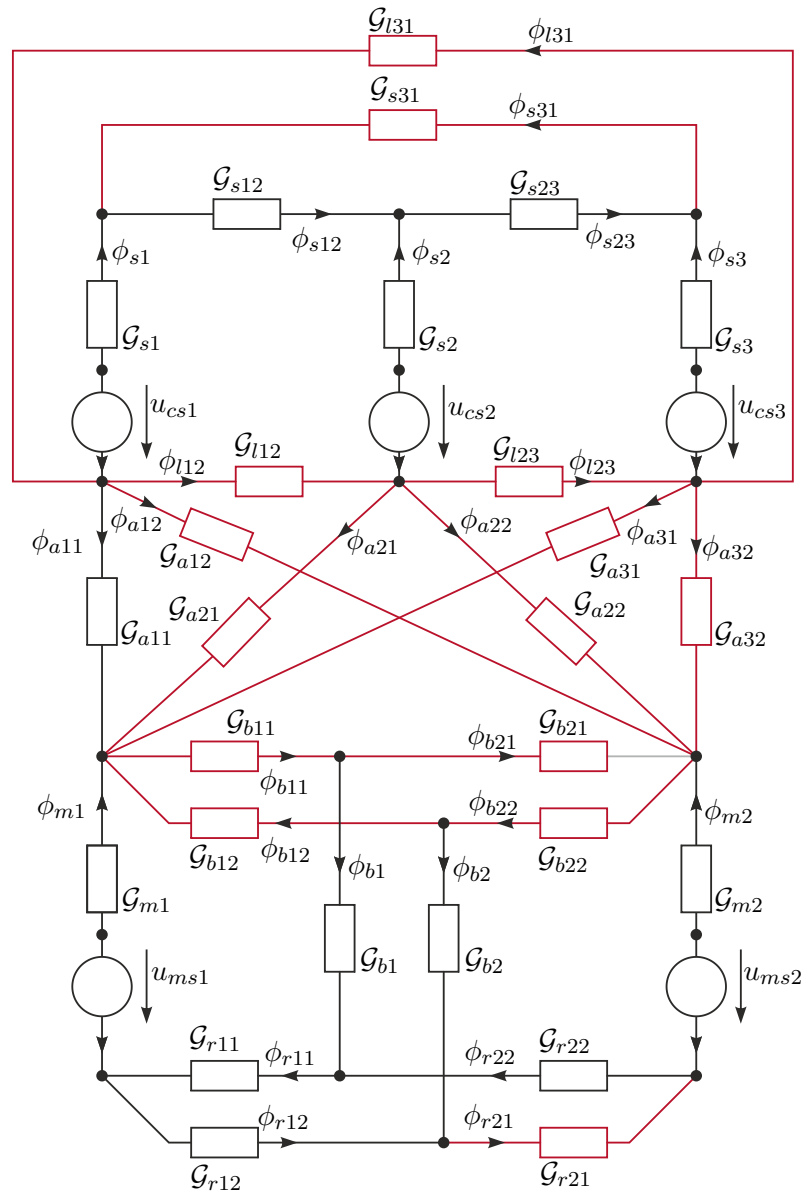


Abbildung 2.32: Vollständiges Reluktanznetzwerk der PSM aus Abbildung 2.29.

ergeben sich daher zu

$$\mathcal{G}_{sj}(u_{sj}) = \frac{A_{st}\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_{sj}|}{l_{st}}\right)}{l_{st}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.181)$$

mit der Fläche A_{st} , der Länge l_{st} und der magnetischen Spannung u_{sj} eines Statorzahns, sowie der Permeabilität von Vakuum μ_0 . Die Permeanzen $\mathcal{G}_{sjk}$, $jk \in \{12, 23, 31\}$ des Statorjochs können auf analoge Weise in der Form

$$\mathcal{G}_{sjk}(u_{sjk}) = \frac{A_{sy}\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_{sjk}|}{l_{sy}}\right)}{l_{sy}}, \quad jk \in \{12, 23, 31\}, \quad (2.182)$$

definiert werden, wobei A_{sy} die Fläche, l_{sy} die Länge und u_{sjk} die zugehörige magnetische Spannung beschreibt.

Der innere Teil des Rotors wird in 4 Abschnitte mit den Permeanzen

$$\mathcal{G}_{rjk}(u_{rjk}) = \frac{A_r\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_{rjk}|}{l_r}\right)}{l_r}, \quad jk \in \{11, 12, 21, 22\}, \quad (2.183)$$

aufgeteilt. Hier ist A_r die effektive Fläche, l_r die effektive Länge und u_{rjk} die magnetische Spannung eines Rotorelements. Die Permanentmagnete sind im Rotor eingebracht und werden durch eine Reihe von Stegen fixiert, vgl. die Abbildungen 2.30 und 2.31. Die Stege in Umfangsrichtung werden durch die Permeanzen

$$\mathcal{G}_{bjk}(u_{bjk}) = \frac{A_{bc}\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_{bjk}|}{l_{bc}}\right)}{l_{bc}}, \quad jk \in \{11, 12, 21, 22\}, \quad (2.184)$$

beschrieben, wobei wiederum A_{bc} die Fläche, l_{bc} die Länge und u_{bjk} die magnetische Spannung bezeichnet. Die Permeanzen der radialen Stege können analog in der Form

$$\mathcal{G}_{bj}(u_{bj}) = \frac{A_{br}\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_{bj}|}{l_{br}}\right)}{l_{br}}, \quad j = 1, 2, \quad (2.185)$$

definiert werden. A_{br} bezeichnet darin die Fläche, l_{br} die Länge und u_{brj} die magnetische Spannung des entsprechenden radialen Steges.

Im betrachteten Motor treten zwei Arten von Luftspaltleitwerten auf: (i) Streuleitwerte $\mathcal{G}_{ljk}$, $jk \in \{12, 23, 31\}$, zwischen benachbarten Statorzähnen und (ii) Leitwerte zwischen Rotor und Stator. Die Streuleitwerte werden in der Form

$$\mathcal{G}_{ljk} = \frac{A_l\mu_0}{l_l}, \quad jk \in \{12, 23, 31\}, \quad (2.186)$$

mit der effektiven Fläche A_l und Länge l_l , beschrieben.

Die Leitwerte zwischen Rotor und Stator beschreiben die magnetische Kopplung dieser Bauteile und sind damit maßgeblich für das erzeugte Moment des Motors verantwortlich. Zur Beschreibung dieser Kopplung im Rahmen der Reluktanzmodellierung existieren im

Wesentlichen zwei Vorgehensweisen: (i) Im ersten Fall wird zwischen jedem Statorzahn und jedem Permanentmagneten des Rotors eine winkelabhängige Permeanz angesetzt. Dies ergibt für den betrachteten Motor mit 3 Zähnen und 2 Permanentmagneten 6 Luftspaltleitwerte. Bei Motoren ohne Symmetrie und mit vielen Statorzähnen bzw. Permanentmagneten führt diese Vorgehensweise jedoch zu einer sehr großen Anzahl von Luftspaltleitwerten. Zum Beispiel müssten für einen Motor mit 9 Statorzähnen und 10 Permanentmagneten 90 Luftspaltleitwerte angesetzt werden. (ii) Daher wird für solche Motoren ein Ansatz verwendet, bei dem der Rotor gedanklich aufgeteilt wird und unter jedem Statorzahn jeweils ein Nord- und Südmagnet angebracht wird. Die Kopplung dieser beiden Magnete mit dem Statorzahn ist natürlich wiederum vom Winkel φ abhängig. Man erhält für den obigen Fall von 9 Statorzähnen und 10 Permanentmagneten nur 18 Luftspaltleitwerte. Der Nachteil dieser Modellierung ist jedoch, dass Inhomogenitäten im Rotor und im Luftspalt wesentlich schwieriger berücksichtigt werden können. Daher ist dieser Ansatz vor allem für Motoren mit homogenem Luftspalt und Oberflächenmagneten interessant.

Für den betrachteten PSM mit 3 Statorzähnen und 2 Permanentmagneten wird die erste Vorgehensweise verwendet. Damit muss der magnetische Leitwert von jedem Permanentmagnet zu jedem Statorzahn ermittelt werden. Im ersten Schritt wird der Luftspaltleitwert zwischen dem Permanentmagnet 1 und dem Statorzahn 1 berechnet. Es wird dazu angenommen, dass sich der Permanentmagnet 1 für $\varphi = 0$ mittig unter dem Statorzahn 1 befindet. In Abbildung 2.33 ist die resultierende Geometrie des Luftspaltes im Detail dargestellt.

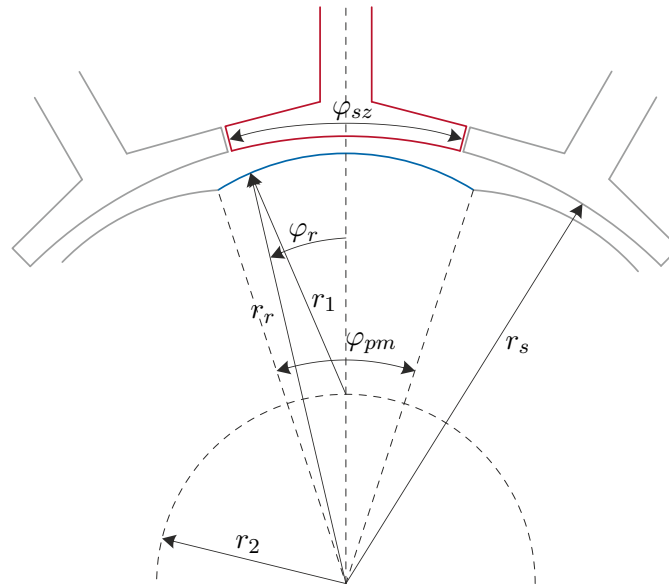


Abbildung 2.33: Geometrie des Luftspaltes der PSM aus Abbildung 2.29.

Die Statorzähne weisen einen konstanten Radius r_s auf, während der Radius r_r des Rotors abhängig vom Rotorwinkel φ_r definiert werden muss. Aus der Abbildung 2.33

errechnet sich der Außenradius r_r des Rotors zu

$$r_r = r_2 \cos(\varphi_r) + \sqrt{r_2^2 (\cos(\varphi_r))^2 + r_1^2 - r_2^2}, \quad (2.187)$$

wobei $\varphi_r \in [-\pi/4, \pi/4]$ gelten muss. Die Radien r_1 und r_2 bezeichnen konstante Konstruktionsparameter. Führt man den differentiellen magnetischen Widerstand

$$d\mathcal{R}_a = \frac{1}{\mu_0} \int_{r_r}^{r_s} \frac{1}{br} dr = \frac{1}{\mu_0 b} \ln\left(\frac{r_s}{r_r}\right), \quad (2.188)$$

mit der Länge des Rotors b ein, so erhält man den magnetischen Leitwert $\mathcal{G}_a$ des Luftspalts in der Form

$$\mathcal{G}_a = \int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \frac{\mu_0 b}{\ln(r_s) - \ln(r_r(\varphi_r))} d\varphi_r. \quad (2.189)$$

Die Integrationsgrenzen φ_a und φ_e sind dabei von der aktuellen Rotorlage φ abhängig. Führt man die Hilfsvariable

$$\tilde{\varphi} = \text{mod}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \quad (2.190)$$

ein, so erhält man die Luftspaltleitwertfunktion in der Form

$$\mathcal{G}_a = \begin{cases} \int_{-\varphi_{sz}/2 - |\tilde{\varphi}|}^{\varphi_{sz}/2 - |\tilde{\varphi}|} \frac{\mu_0 b}{\ln(r_s) - \ln(r_r)} d\varphi_r & \text{für } |\tilde{\varphi}| \leq \frac{\varphi_{pm} - \varphi_{sz}}{2} \\ \int_{-\varphi_{pm}/2}^{\varphi_{sz}/2 - |\tilde{\varphi}|} \frac{\mu_0 b}{\ln(r_s) - \ln(r_r)} d\varphi_r & \text{für } \frac{\varphi_{pm} - \varphi_{sz}}{2} < |\tilde{\varphi}| \leq \frac{\varphi_{pm} + \varphi_{sz}}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.191)$$

mit den Winkeln φ_{pm} und φ_{sz} gemäß Abb. 2.33. Das Maximum $\mathcal{G}_{a,max}$ des Luftspaltleitwerts tritt offensichtlich bei $\varphi = 0$ auf. Da die in (2.191) auftretenden Integrale nur numerisch lösbar sind, wird häufig eine Approximation der Form

$$\mathcal{G}_a(\varphi) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{4} \leq \tilde{\varphi} \leq -\delta \\ \frac{\mathcal{G}_{a,max}}{2} (1 + \cos(\frac{\pi}{\delta} \tilde{\varphi})) & -\delta < \tilde{\varphi} \leq \delta \\ 0 & \delta < \tilde{\varphi} \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (2.192)$$

vorgeschlagen. Darin bezeichnet δ den Winkel, bei dem der Leitwert zu 0 wird. Dieser Winkel wird häufig etwas größer als der geometrische Winkel gesetzt, da durch Streuflüsse auch dann noch ein Fluss vom Rotor zum Stator auftreten kann, wenn die geometrische Überdeckung verschwindet, siehe dazu auch [2.5]. Die Abbildung 2.34 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der geometrischen Berechnung des Luftspaltleitwertes nach (2.191) mit der Näherung nach (2.192). Es muss an der Stelle darauf hingewiesen werden, dass sowohl die geometrische Berechnung als auch die Approximation nur eine Näherung des realen Luftspaltleitwerts darstellen, da in der Realität immer zusätzliche Streuflüsse und lokale Sättigungen z.B. in den Zähnen des Stators auftreten. Daher muss für ein genaues Modell dieser Luftspaltleitwert immer mit Messungen oder FE-Daten abgeglichen werden.

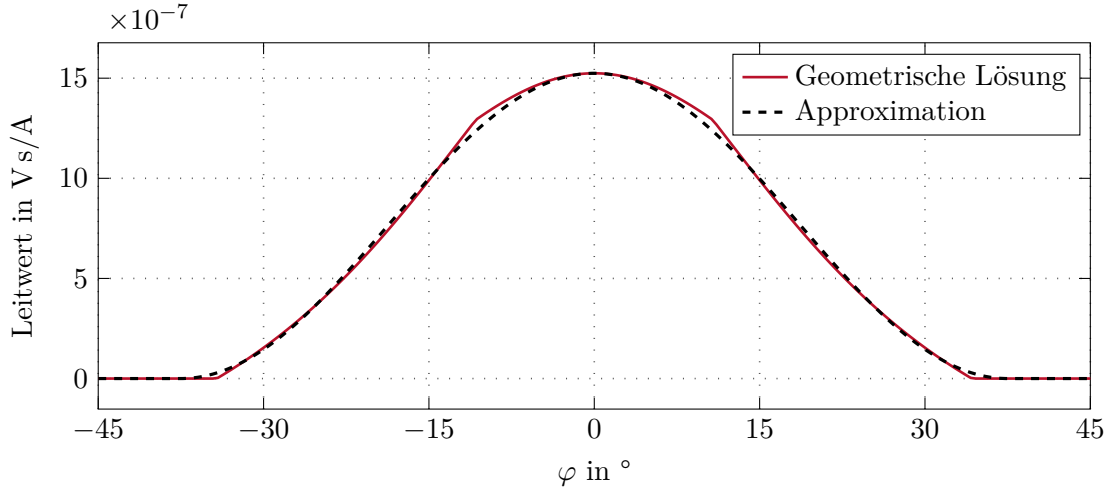


Abbildung 2.34: Vergleich der geometrischen Lösung mit der Approximation der Luftspaltleitwertfunktion von Statorzahn 1 zu Permanentmagnet 1.

Die Luftspaltleitwerte der anderen Kombinationen aus Statorzahn und Permanentmagnet können direkt aus (2.192) durch Verschiebung des Winkels in der folgenden Form beschrieben werden

$$\mathcal{G}_{ajk} = \mathcal{G}_a \left(\varphi - \frac{(j-1)\pi}{6} - \frac{(k-1)\pi}{4} \right), \quad (2.193)$$

mit $j = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2$.

Wie bereits mehrfach erwähnt, zeigen NdFeB-Magnete ein beinahe lineares Verhalten im Arbeitsbereich, weswegen sie als Serienschaltung einer konstanten Spannung u_{msj} , $j = 1, 2$ und eines konstanten magnetischen Leitwerts

$$\mathcal{G}_{mj}(u_{mj}) = \frac{A_m \mu_0 \mu_{rm}}{l_m}, \quad j = 1, 2, \quad (2.194)$$

mit der konstanten relativen Permeabilität $\mu_{rm} \approx 1$, der effektiven Fläche A_m und der Länge l_m , beschrieben werden können. Die magnetische Spannung errechnet sich bei bekannter Koerzitivfeldstärke H_c der Magneten zu

$$u_{ms1} = -u_{ms2} = H_c l_m. \quad (2.195)$$

Die Statorspulen mit N_c Windungen werden durch die magnetischen Spannungsquellen

$$u_{csj} = N_c i_{cj}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.196)$$

mit dem Strom i_{cj} durch die Spule j , beschrieben.

Die Gleichungen des Systems können mit Hilfe der Netzwerktheorie mit (2.106) angegeben werden. Führt man eine Simulation des vollständigen Reluktanznetzwerkes nach Abb. 2.32 durch, so können folgende Eigenschaften beobachtet werden: (i) Die magnetischen Spannungen im Statorjoch sind im Vergleich zu den magnetischen Spannungen in den

Statorzähnen sehr klein. Deswegen kann vereinfachend $\mathcal{G}_{s12} = \mathcal{G}_{s23} = \mathcal{G}_{s31} = \infty$ gesetzt werden. (ii) Die Flüsse in den radialen Stegen des Rotors sind sehr gering, weswegen die entsprechenden Leitwerte $\mathcal{G}_{b1}$ und $\mathcal{G}_{b2}$ vernachlässigt werden können, d.h. zu 0 gesetzt werden können. (iii) Mit dieser zweiten Vereinfachung können die Permeanzen $\mathcal{G}_{rjk}$ und $\mathcal{G}_{bjk}$ zu jeweils einer effektiven Permeanz in der Form

$$\mathcal{G}_b = \frac{A_{bc}\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_b|}{2l_{bc}}\right)}{l_{bc}} \quad (2.197a)$$

$$\mathcal{G}_r = \frac{A_r\mu_0\mu_r\left(\frac{|u_r|}{2l_r}\right)}{l_r}, \quad (2.197b)$$

zusammengefasst werden. Wendet man diese Vereinfachungen auf das vollständige Reluktanznetzwerk nach Abb. 2.32 an, so erhält man das in Abb. 2.35 dargestellte reduzierte Reluktanznetzwerk der PSM.

Verwendet man den in Schwarz dargestellten Baum des Reluktanznetzwerkes aus Abb. 2.35, erhält man den Vektor ϕ_{tg} der Flüsse der Baumpermeanzen in der Form

$$\phi_{tg} = \begin{bmatrix} \phi_{s1} & \phi_{s2} & \phi_{s3} & \phi_b & \phi_{m1} & \phi_{m2} & \phi_{a11} \end{bmatrix}^T, \quad (2.198)$$

und der Vektor ϕ_c der Flüsse des Kobaums (in Rot dargestellt) ergibt sich zu

$$\phi_c = \begin{bmatrix} \phi_r & \phi_{l12} & \phi_{l23} & \phi_{l31} & \phi_{a12} & \phi_{a21} & \phi_{a22} & \phi_{a31} & \phi_{a32} \end{bmatrix}^T. \quad (2.199)$$

Der Vektor ϕ_{tc} der Flüsse der Spulen ist durch $\phi_{tc} = [\phi_{cs1} \ \phi_{cs2} \ \phi_{cs3}]^T$ gegeben und der Vektor der Flüsse der Permanentmagneten wird in der Form $\phi_{tm} = [\phi_{ms1} \ \phi_{ms2}]^T$ beschrieben. Die magnetischen Spannungen des Baums und des Kobaums werden analog definiert.

Die Permeanzmatrizen des Baums und des Kobaums sind durch

$$\mathcal{G}_t = \text{diag} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{s1} & \mathcal{G}_{s2} & \mathcal{G}_{s3} & \mathcal{G}_b & \mathcal{G}_{m1} & \mathcal{G}_{m2} & \mathcal{G}_{a11} \end{bmatrix} \quad (2.200a)$$

$$\mathcal{G}_c = \text{diag} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_r & \mathcal{G}_{l12} & \mathcal{G}_{l23} & \mathcal{G}_{l31} & \mathcal{G}_{a12} & \mathcal{G}_{a21} & \mathcal{G}_{a22} & \mathcal{G}_{a31} & \mathcal{G}_{a32} \end{bmatrix}. \quad (2.200b)$$

definiert. Die Komponenten der Inzidenzmatrix ergeben sich aus dem Reluktanznetzwerk

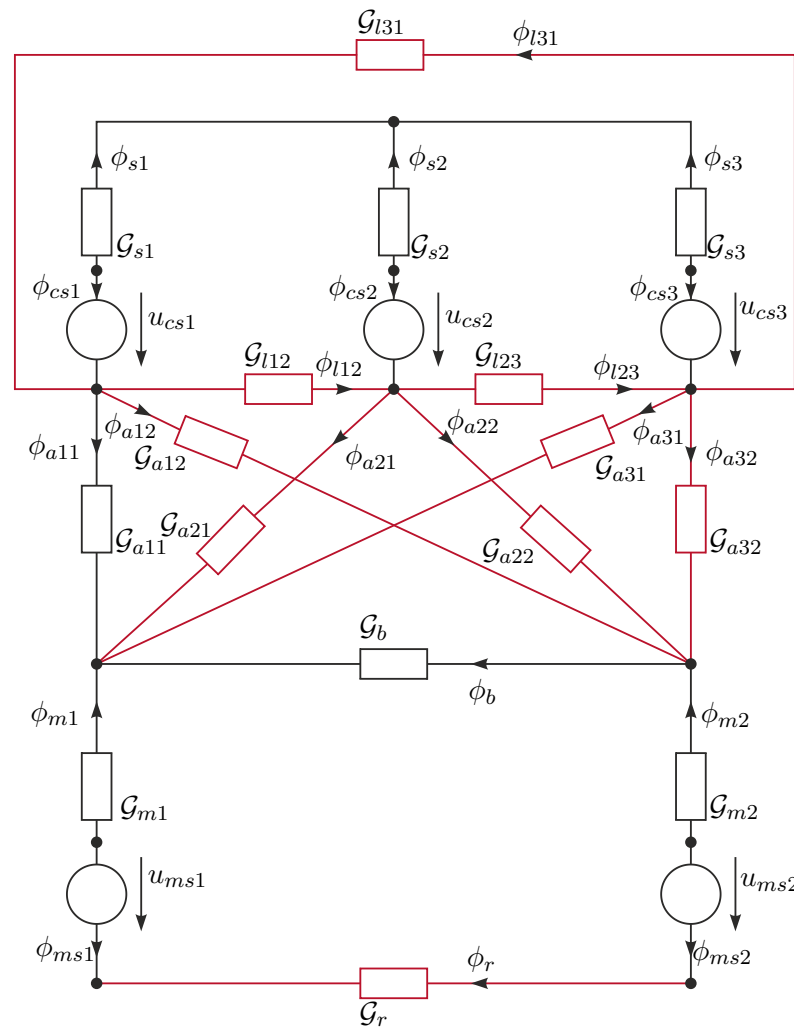


Abbildung 2.35: Reduziertes Reluktanznetzwerk der PSM aus Abbildung 2.29.

nach Abb. 2.35 zu

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.201a)$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.201b)$$

$$\mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.201c)$$

Verwendet man schließlich noch die Wicklungsmatrix $\mathbf{N}_c = \text{diag}[N_c \ N_c \ N_c]$, so erhält man

$$\bar{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} 0 & N_c & 0 & -N_c & 0 & -N_c & -N_c & -N_c & -N_c \\ 0 & -N_c & N_c & 0 & 0 & N_c & N_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_c & N_c & 0 & 0 & 0 & N_c & N_c \end{bmatrix}. \quad (2.202)$$

Um nun einen minimalen Satz von Differential- und algebraischen Gleichungen zur Beschreibung des Motors nach Abschnitt 2.8 zu erhalten, betrachtet man die Matrix $\bar{\mathbf{D}}_c$. Es kann einfach gezeigt werden, dass der Spaltenraum von $\bar{\mathbf{D}}_c$ in der Form

$$\bar{\mathbf{D}}_c^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

gegeben ist und sich die Matrix $\bar{\mathbf{D}}_c^\perp$ zu

$$\bar{\mathbf{D}}_c^\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

ergibt. Damit kann die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_1$, mit

$$\mathbf{T}_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

definiert werden. Wendet man diese Transformation auf den Vektor der verketteten Flüsse an, so erhält man die Zwangsbedingung

$$\psi_c^\perp = (\bar{\mathbf{D}}_c^\perp)^\top \psi_c = \psi_{cs1} + \psi_{cs2} + \psi_{cs3} = 0, \quad (2.206)$$

sowie den Vektor der unabhängigen verketteten Flüsse

$$\psi_c^I = (\bar{\mathbf{D}}_c^I)^\top \psi_c = \begin{bmatrix} \psi_{cs1} - \psi_{cs3} \\ \psi_{cs2} - \psi_{cs3} \end{bmatrix}. \quad (2.207)$$

Weiterhin ergibt sich der nicht aus dem Magnetkreis bestimmbare Anteil der Ströme $\mathbf{i}_c^\perp$ zu $\mathbf{i}_c^\perp = i_{c1} + i_{c2} + i_{c3}$ und die durch den Magnetkreis festgelegten Ströme errechnen sich zu

$$\mathbf{i}_c^I = (\bar{\mathbf{D}}_c^I)^\top \mathbf{i}_c = \begin{bmatrix} i_{c1} - i_{c3} \\ i_{c2} - i_{c3} \end{bmatrix}. \quad (2.208)$$

Führt man noch den Vektor der elektrischen Spannungen $\mathbf{v}_c = [v_{c1} \ v_{c2} \ v_{c3}]^\top$ ein, so erhält man

$$(\bar{\mathbf{D}}_c^\perp)^\top \mathbf{v}_c = v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} \quad (2.209a)$$

$$(\bar{\mathbf{D}}_c^I)^\top \mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} v_{c1} - v_{c3} \\ v_{c2} - v_{c3} \end{bmatrix}. \quad (2.209b)$$

Da angenommen wird, dass die drei Spulen des Stators die gleiche Wicklungsanzahl N_c aufweisen, sind auch die Wicklungswiderstände der drei Spulen gleich. Damit ist die elektrische Widerstandsmatrix durch $\mathbf{R}_c = \text{diag}[R_c \ R_c \ R_c]$ gegeben. Mit diesen Ergebnissen errechnet sich die algebraische Gleichung aus der Differentialgleichung für $\psi_c^\perp$ zu

$$-R_c(i_{c1} + i_{c2} + i_{c3}) + (v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}) = 0 \quad (2.210)$$

und die Differentialgleichung für ψ_c^I ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt} \psi_c^I = - \begin{bmatrix} R_c & 0 \\ 0 & R_c \end{bmatrix} \mathbf{i}_c^I + \begin{bmatrix} v_{c1} - v_{c3} \\ v_{c2} - v_{c3} \end{bmatrix}. \quad (2.211)$$

Auf eine Angabe der (nichtlinearen) reduzierten algebraischen Gleichungen wird aufgrund von Platzgründen verzichtet.

Die Spulen des betrachteten Motors sind in Dreieck verschaltet, siehe Abb. 2.36. Man beachte, dass die Verschaltung der Spulen in Dreieck keine Zwangsbedingung an die Spulenströme $\mathbf{i}_c$ jedoch an die Spulenspannungen $\mathbf{v}_c$ mit sich bringt. Für diese Verschaltung gilt $v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$, womit auch $\mathbf{i}_c^\perp = 0$ resultiert.

Die Ansteuerung des Motors erfolgt mit Hilfe dreier Halbbrücken, welche pulsweitenmoduliert betrieben werden. Damit können die Leiterspannungen $\mathbf{v}_l$ im Wesentlichen

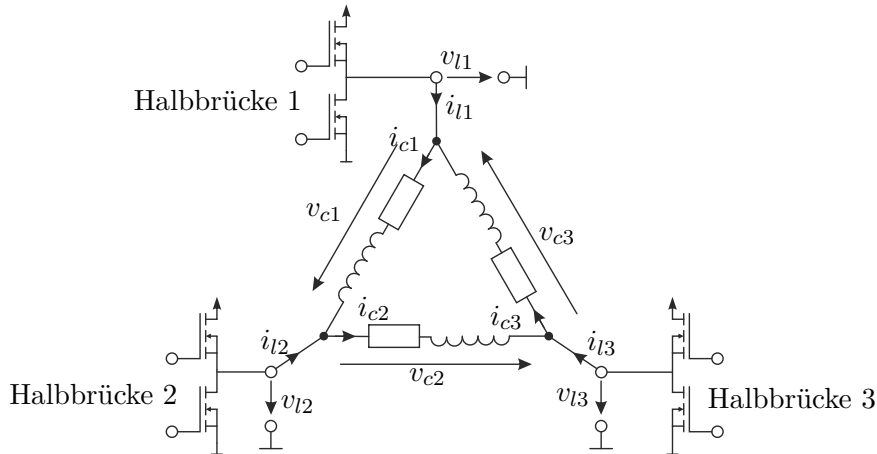


Abbildung 2.36: Elektrische Verschaltung der Spulen der PSM aus Abbildung 2.29.

frei vorgegeben werden. Der Zusammenhang zwischen den Leiterspannungen und den Spulenspannungen kann dabei in der Form

$$\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{l1} \\ v_{l2} \\ v_{l3} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_l \mathbf{v}_l \quad (2.212)$$

formuliert werden.

Um die Eigenschaften des Motors und die Güte des Modells zu analysieren, erfolgt in Abb. 2.37 ein Vergleich des Moments τ des Modells mit Messungen. Man beachte, dass sich das vom Motor erzeugte Moment aus (2.114) multipliziert mit der Polpaarzahl $p = 4$ des Motors errechnet. In Abb. 2.37(a) ist der Fall eines unbestromten Motors, d.h. $\mathbf{i}_c = \mathbf{0}$, dargestellt. Man erkennt das ausgeprägte Rastmoment in den Messungen, welches im Wesentlichen (wenngleich mit maßgeblichen Abweichungen) auch vom Modell abgebildet wird. Man beachte, dass die Periodizität von 15° des Rastmoments direkt mit der Kombination aus 3 Statorzähnen und 2 Permanentmagneten zusammenhängt. In den Teilen (b) und (c) der Abb. 2.37 ist das Moment für den bestromten Fall dargestellt, wobei der Strom in (b) in etwa dem Nennstrom und der Strom in (c) nahezu dem Maximalstrom entspricht. Der Verlauf des Moments als Funktion des Winkels weicht maßgeblich von einem sinusförmigen Verlauf, wie für eine ideale PSM zu erwarten wäre, ab. Weiterhin erkennt man, dass sich nicht nur die Amplitude sondern auch die Form des Momentenverlaufs mit geänderten Strömen ändert. Dies resultiert aus den nichtlinearen Eigenschaften des Magnetkreises (Sättigung). Zusammenfassend ist mit dem Modell eine relativ gute Approximation der Realität gegeben, vor allem unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Modell nur anhand von Konstruktions- und Materialdaten parametrisiert wurde.

Um die Modellgenauigkeit weiter zu erhöhen, kann eine Kalibration des Modells anhand von Messdaten erfolgen. Wie in der vorigen Herleitung der Gleichungen des Systems erwähnt, ist die genaue Beschreibung der Luftspaltleitwerte $\mathcal{G}_{ajk}$ sehr schwierig. Daher ist

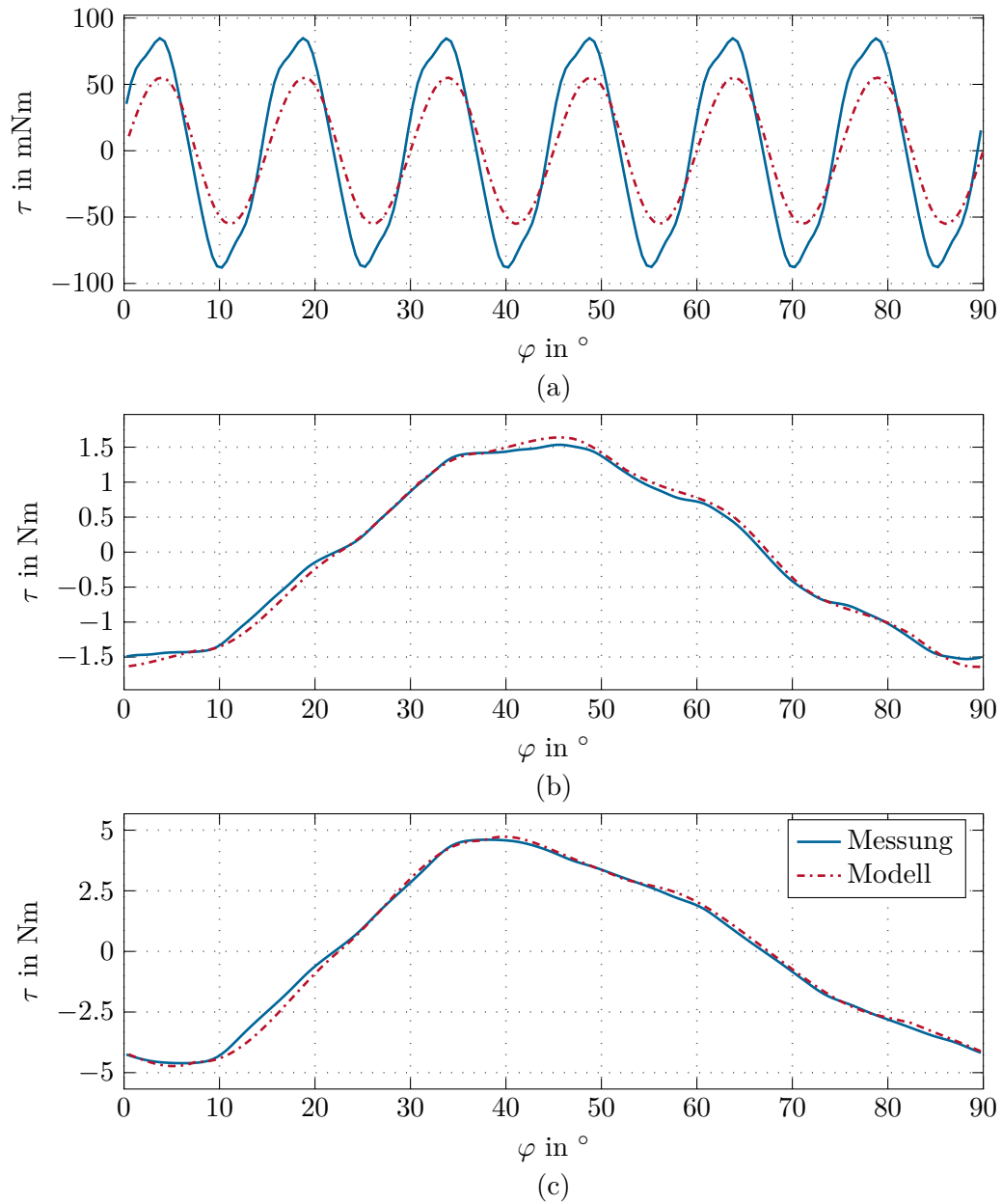


Abbildung 2.37: Vergleich des Moments der Messungen und des Modells für (a) $i_{c1} = i_{c2} = i_{c3} = 0$ A, (b) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 2.5$ A und (c) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 7.5$ A.

anzunehmen, dass die größten Unsicherheiten in der Parametrierung dieser Luftspaltleitwerte liegt. Um eine Verbesserung der Modellgüte zu erreichen, wird der Luftspaltleitwert in der Form $\mathcal{G}_{ajk} = \mathcal{G}_{ajk,n} + \Delta\mathcal{G}_{ajk}$, mit dem nominellen Luftspaltleitwert $\mathcal{G}_{ajk,n}$ und dem zu bestimmenden Korrekturterm $\Delta\mathcal{G}_{ajk}$, angesetzt. Die Bestimmung des Korrekturterms kann z.B. mit Hilfe eines statischen Optimierungsproblems gelöst werden.

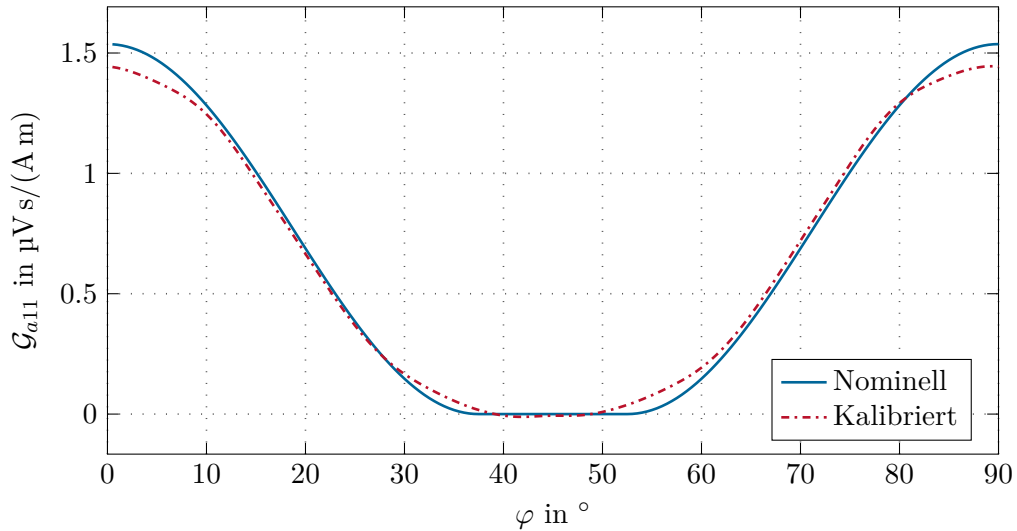


Abbildung 2.38: Vergleich der nominellen Luftspaltleitwertfunktion nach (2.192) und der kalibrierten Luftspaltleitwertfunktion.

Das Ergebnis einer solchen Optimierung ist in Abb. 2.38 dargestellt. Man erkennt, dass nur relativ geringe Änderungen der Luftspaltleitwertfunktion notwendig sind. In Abb. 2.39 ist nun der Vergleich der Momente des kalibrierten Modells mit Messungen dargestellt. Man sieht eine wesentlich verbesserte Modellgüte insbesondere im bestromten Fall. Man beachte, dass die Kalibration des Modells mit Messungen bei Nennstrom durchgeführt wurde, weswegen hier eine nahezu perfekte Übereinstimmung zwischen Modell und Messungen gefunden werden kann. Durch Kalibration des Modells bei Strom 0 könnte natürlich auch eine wesentlich bessere Modellgüte in diesem Betriebsfall gefunden werden. Daher muss bei der Modellkalibration vorab entschieden werden, in welchem Bereich die beste Modellgüte erreicht werden soll.

Die induzierten Spannungen in Abb. 2.40 vervollständigen den Vergleich des kalibrierten Modells mit Messungen. Man erkennt, dass die induzierten Spannungen der drei Spulen jeweils um 30° zueinander verschoben sind, die Form jedoch für alle drei Spannungen gleich ist. Dies ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass die magnetischen Verhältnisse der Spule 2 jenen der Spule 1 entspricht, wenn der Rotor um $\varphi = 30^\circ$ verdreht ist. Das kalibrierte Modell weist wiederum eine sehr hohe Modellgüte auf.

Um den Einfluss der Sättigung in der Modellierung zu analysieren, wird im nächsten Schritt ein Modell für den magnetisch linearen Fall betrachtet. Die Herleitungen erfolgen analog zu Abschnitt 2.9, weswegen auf eine Wiederholung der Gleichungen verzichtet wird. Nimmt man wie in Abschnitt 2.9 an, dass die magnetischen Leitwerte unabhängig von den magnetischen Spannungen sind, kann die symmetrische, positiv semi-definite

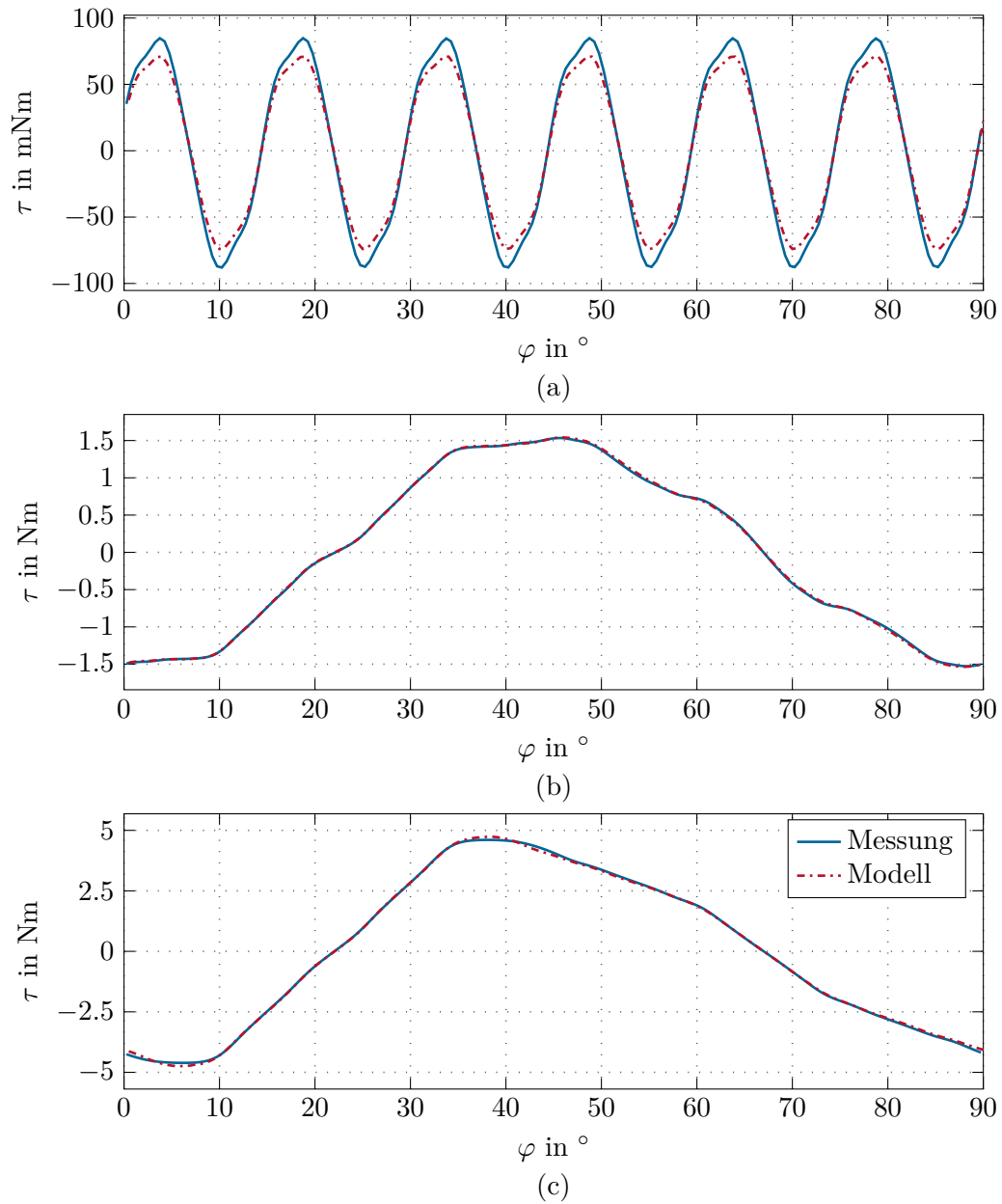


Abbildung 2.39: Vergleich des Momentes der Messungen und des kalibriertem Modells für (a) $i_{c1} = i_{c2} = i_{c3} = 0$ A, (b) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 2.5$ A und (c) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 7.5$ A.

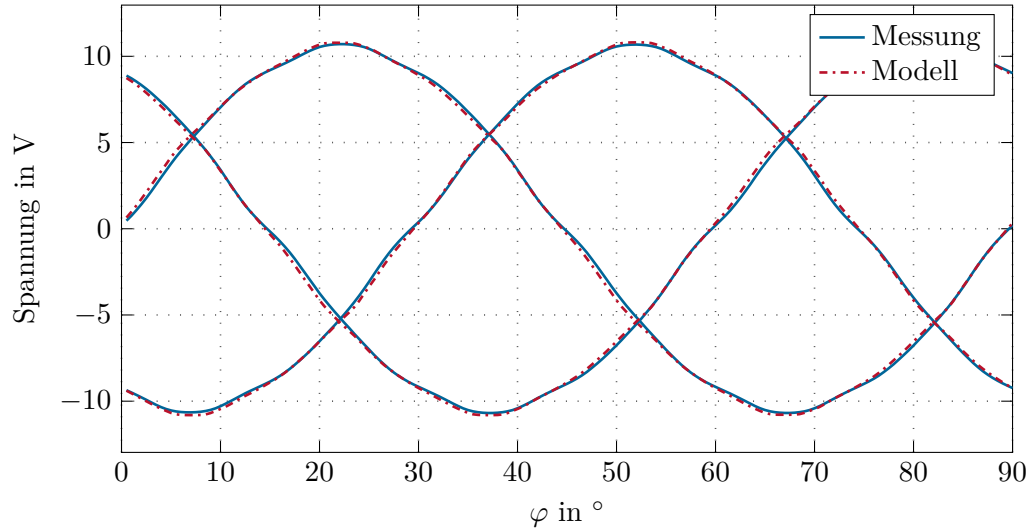


Abbildung 2.40: Vergleich der induzierten Spannung der Messung und des kalibrierten Modells für $\omega = 120 \text{ rad/s}$.

Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c$ nach (2.169) definiert werden³. Weiterhin kann der Vektor $\partial\psi_c/\partial\mathbf{q}$ nach (2.177) und das Moment nach (2.180) ermittelt werden.

Bemerkung 2.5 (dq0-Modell). In der Literatur wird zur Beschreibung von elektrischen Motoren häufig eine Transformation der Größen des Motors auf ein mit dem Stator rotierendes Koordinatensystem dq-System (Blondel-Park-Transformation) verwendet. Dazu werden die transformierten Ströme und Spannungen in der Form

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}(\varphi) \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ i_{c3} \end{bmatrix} \quad (2.213a)$$

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}(\varphi) \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} \quad (2.213b)$$

eingeführt. Dabei bezeichnet $\mathbf{K}(\varphi)$ die Transformationsmatrix, die durch

$$\mathbf{K}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) & \cos\left(p\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(p\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin(p\varphi) & \sin\left(p\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(p\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

gegeben ist. Diese Transformation wird nun auf das magnetisch lineare Motormodell aus (2.178) angewandt. Für den magnetisch linearen Fall kann der verkettete Fluss

³Auf eine Reduktion der magnetischen Redundanzen wird an dieser Stelle vorerst verzichtet.

der Spulen ψ_c in der Form

$$\psi_c = \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{T}_L \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{i}_c + \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{T}_L \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} = \mathbf{L}_c \mathbf{i}_c + \psi_{pm} \quad (2.215)$$

aufgeteilt werden. Verwendet man diese Aufteilung in (2.178) und (2.180), so erhält man

$$\mathbf{L}_c \frac{d}{dt} \mathbf{i}_c = -\frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{i}_c \omega - \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi} \omega - \mathbf{R}_c \mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c \quad (2.216)$$

sowie

$$\tau = \frac{1}{2} p \left(\mathbf{i}_c^T \frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{i}_c + 2 \left(\frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi} \right)^T \mathbf{i}_c + \mathbf{u}_{tm}^T \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{T}_L}{\partial \varphi} \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \right). \quad (2.217)$$

Die Spulenströme und -spannungen können mit $\mathbf{i}_{dq} = \mathbf{K} \mathbf{i}_c$ und $\mathbf{v}_{dq} = \mathbf{K} \mathbf{v}_c$ durch die entsprechenden transformierten Größe ersetzt werden. Multipliziert man die Differentialgleichung (2.216) weiterhin mit $\mathbf{K}$ von links, so erhält man

$$\mathbf{K} \mathbf{L}_c \frac{d}{dt} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{dq}) = -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{dq} \omega - \mathbf{K} \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi} \omega - \mathbf{K} \mathbf{R}_c \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{dq} + \mathbf{v}_{dq}. \quad (2.218)$$

Anwendung der Kettenregel auf der linken Seite ergibt

$$\mathbf{K} \mathbf{L}_c \frac{d}{dt} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{dq}) = \mathbf{K} \mathbf{L}_c \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_{dq} \omega + \underbrace{\mathbf{K} \mathbf{L}_c \mathbf{K}^{-1}}_{\mathbf{L}_{dq}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq}, \quad (2.219)$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \varphi} = p \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}, \quad (2.220)$$

mit

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.221)$$

gilt. Die transformierte Differentialgleichung lässt sich damit in der Form

$$\mathbf{L}_{dq} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq} = -\left(\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{L}_{dq} \mathbf{S} p \right) \mathbf{i}_{dq} \omega - \mathbf{K} \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi} \omega - \mathbf{R}_c \mathbf{i}_{dq} + \mathbf{v}_{dq} \quad (2.222)$$

anschreiben. Auf äquivalente Art kann eine Darstellung des Moments τ unter Verwendung transformierte Ströme und Spannungen in der Form

$$\tau = \frac{1}{2} p \left(\mathbf{i}_{dq}^T \mathbf{H}_\tau \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{dq} + 2 \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi}^T \mathbf{K}^T \mathbf{H}_\tau \mathbf{i}_{dq} + \mathbf{u}_{tm}^T \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{T}_L}{\partial \varphi} \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \right) \quad (2.223)$$

gefunden werden, wobei

$$\mathbf{H}_\tau = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

bezeichnet.

Der Vorteil der transformierten Darstellung der Gleichungen des Motors besteht darin, dass für einen idealen Motor mit Grundwelleneigenschaften (d.h. alle wesentlichen Größen des Motors lassen sich durch sinusförmige Verläufe mit der Periodizität $2\pi/p$ darstellen) alle Größen wie $\mathbf{L}_{dq}$ etc. konstant sind. Weiterhin müssen zum Erzeugen von konstanten Momenten konstante Werte der Ströme $\mathbf{i}_{dq}$ eingestellt werden, was den Entwurf einer Regelungsstrategie wesentlich vereinfacht. Im Allgemeinen sind die Annahmen eines idealen Grundwellenmotors nicht erfüllt. Für den betrachteten Motor führt die Anwendung der dq-Transformation für das magnetisch lineare Modell daher nicht zu konstanten Werten von $\mathbf{L}_{dq}$ usw. Um ein vereinfachtes Modell in dq-Darstellung zu erhalten, können diese zeitvarianten Größen näherungsweise durch deren Mittelwerte approximiert werden. Für den betrachteten Motor erhält man damit

$$\mathbf{L}_{dq} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

sowie

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{L}_c}{\partial \varphi} \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & L_\varphi & 0 \\ L_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.226a)$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.226b)$$

mit konstanten Werten L_φ und ψ_φ . Setzt man diese Ergebnisse ein, so erhält man schließlich

$$L_d \frac{d}{dt} i_d = -(L_\varphi + L_d p) i_q \omega - R_c i_d + v_d \quad (2.227a)$$

$$L_q \frac{d}{dt} i_q = -(L_\varphi - L_q p) i_d \omega - \psi_\varphi \omega - R_c i_q + v_q \quad (2.227b)$$

sowie

$$0 = -R_c i_0 + v_0. \quad (2.228)$$

Das zugehörige Moment lässt sich in der Form

$$\tau = \frac{1}{2}p \left(\frac{4}{3}L_{\varphi}i_d i_q + \frac{2}{3}\psi_{\varphi}i_q \right) \quad (2.229)$$

angeben.

In Abbildung 2.41 ist nun ein Vergleich zwischen den drei in diesem Abschnitt hergeleiteten Modellen (nichtlineares Modell, magnetisch lineares Modell und dq0-Grundwellenmodell) dargestellt. Wie erwartet, liefert das Grundwellenmodell die schlechteste Modellgüte. Insbesondere kann mit diesem Modell prinzipbedingt kein Rastmoment abgebildet werden. Das magnetisch lineare Modell bietet jedoch eine relativ gute Modellgenauigkeit, was insbesondere im Hinblick auf die wesentlich geringere Modellkomplexität z.B. für einen Reglerentwurf interessant sein kann. Wie erwartet ergibt das magnetisch nichtlineare Modell die beste Genauigkeit.

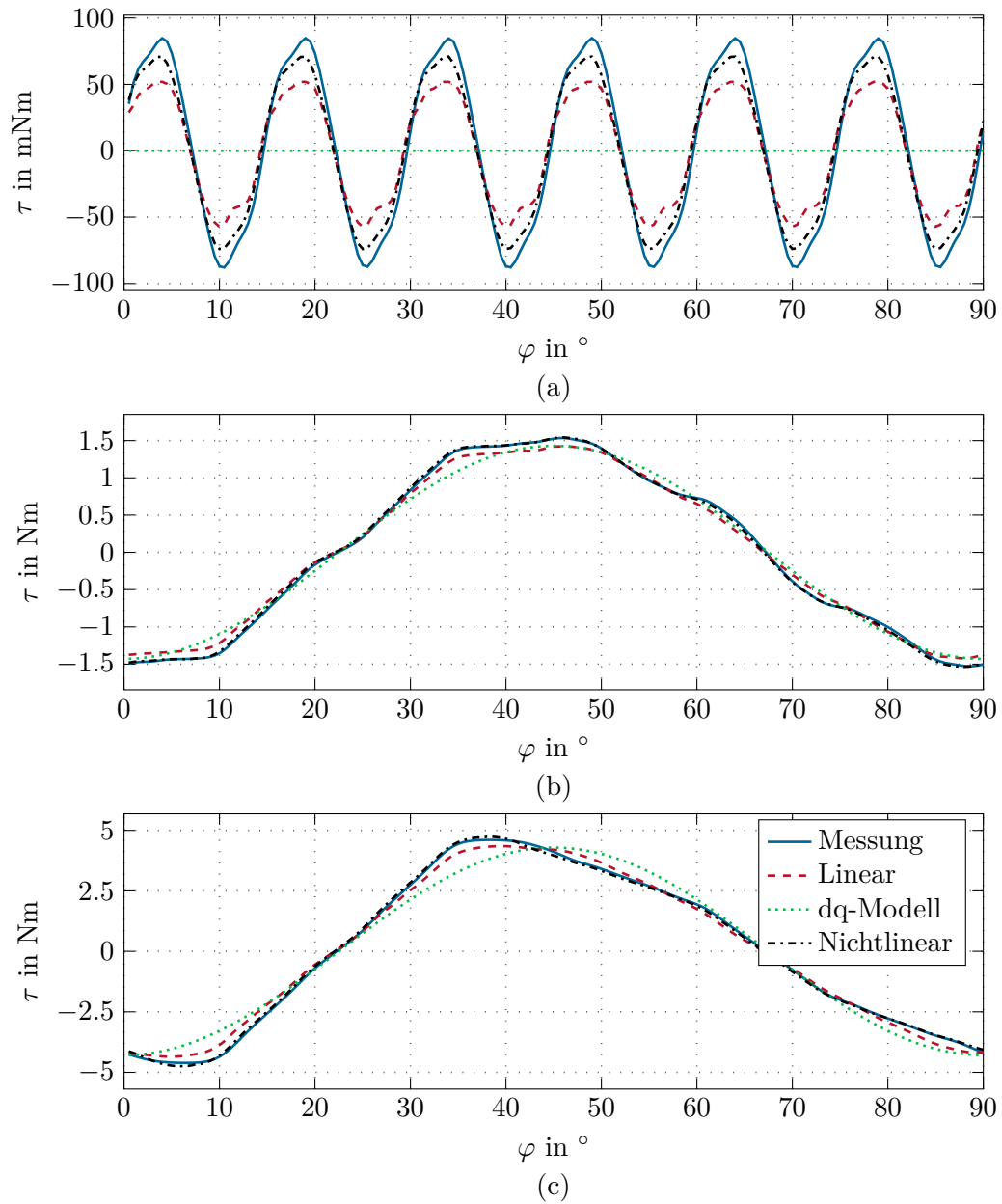


Abbildung 2.41: Vergleich des Moments zwischen Messungen, magnetisch linearem Modell, dq-Modell und nichtlinearem Modell für (a) $i_{c1} = i_{c2} = i_{c3} = 0$ A, (b) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 2.5$ A und (c) $i_{c1} = 0$ A, $-i_{c2} = i_{c3} = 7.5$ A.

2.11 Literatur

- [2.1] E. Kallenbach, R. Eick, P. Quendt, K. Feindt, T. Ströhla und M. Kallenbach, *Elektromagnete: Grundlagen, Berechnung, Entwurf und Anwendung*. Vieweg und Teubner, 2008.
- [2.2] A. Prechtel, *Elektrotechnik 2, Ergänzende Unterlagen zu den Lehrveranstaltungen*. Skriptum zur Lehrveranstaltung, Institute of Electrodynamics, Microwave und Circuit Engineering, 2010.
- [2.3] L. Chua, C. Desoer und E. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [2.4] D. Hanselman, *Brushless Permanent Magnet Motor Design*. Magna Physics Publishing, 2003.
- [2.5] V. Ostovic, *Dynamic of Saturated Electric Machines*. Springer, 1989.
- [2.6] P. Krause, O. Wasynczuk und S. Sudhoff, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. IEEE Press, 2002.
- [2.7] A. Fitzgerald, C. Kingsley und S. Umans, *Electric Machinery*. Mc Graw Hill, 2003.

Prüfungsfragen

In diesem Abschnitt sind Fragen aufgelistet, an denen sich die Fragen bei der mündlichen Prüfung orientieren werden. Die Fragen decken den relevanten Stoffumfang ab, werden aber nicht genau in der hier gegebenen Form gestellt.

Kapitel 1: Grundlagen der Kontinuumsmechanik

- **Grundlagen:** Was sind die Kernaufgaben der Kontinuumsmechanik? Wie ist die mechanische Spannung definiert? Was ist der Unterschied zwischen einer Normal- und einer Schubspannung? Wie ist die Verzerrung (Dehnung und Scherung) definiert? Was ist eine Konstitutivgleichung? Wozu wird diese benötigt? Was besagt das Hooksche Gesetz? Was versteht man unter einem ebenen Spannungszustand?
- **Kinematik:** Erklären Sie den Unterschied zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration? Erklären Sie den Unterschied zwischen der materiellen und räumlichen Darstellung? Was wird unter der Bewegung verstanden? Wie ist das Verschiebungsfeld definiert? Was ist eine lokale und eine materielle Zeitableitung? Wie hängen diese Zeitableitungen mit der partiellen und der totalen Zeitableitung zusammen? Wie ist der Deformationsgradient definiert? Wozu wird er benötigt? Wie transformieren sich vektorielle Linienelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration? Wie transformieren sich materielle Volumenelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration? Welche Verzerrungstensoren wurden in der Vorlesung vorgestellt und wie unterscheiden sie sich? Was wird unter der geometrischen Linearisierung verstanden? Wie ist der infinitesimale Verzerrungstensor definiert? Wofür werden die Kompatibilitätsbedingungen benötigt?
- **Kinetik:** Welche Spannungsvektoren und Spannungstensoren wurden in der Vorlesung vorgestellt? Wie unterscheiden sich diese? Wie werden Spannungstensoren transformiert?
- **Bilanzgleichungen:** Was ist der Unterschied zwischen der Eulerschen und Lagrangen Beschreibung? Wann wird vorwiegend welche verwendet? Was leistet das Transporttheorem? Wie lautet die generalisierte Bilanzgleichung? Welche Bilanzgleichungen sind im Rahmen der Kontinuumsmechanik von Interesse? Was besagt die Massenerhaltung in Lagranger Darstellung? Was besagt die Massenerhaltung in Eulerscher Darstellung? Zwischen welchen Klassen von Kräften wird unterschieden? Was besagt die Impulserhaltung in der Lagrangen Darstellung? Welche Konsequenz ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung? Was besagt die Energieerhaltung für mechanische Systeme?

- **Materialmodelle:** Was versteht man unter einem elastischen Material? Was versteht man unter einem einfachen Material? Was versteht man unter einem heterogen bzw. homogenen Material? Was versteht man unter einem hyperelastischen Material? Wie lautet das generalisierte Hooksche Gesetz? Wie lautet die Verzerrungsenergiedichte für eine linear-elastische Deformation? Wie lautet die zugehörige Verzerrungsenergie? Was versteht man unter einem anisotropen, einem orthotropen und einem isotropen Material? Durch welche Konstanten lässt sich der Steifigkeitstensor für ein isotropes Material beschreiben? Was versteht man unter Materialversagen? Was ist eine Fließbedingung? Was versteht man unter einer Anstrengungshypothese? Wie lassen sich die Fließbedingungen nach von Mises und nach Tresca im Raum der Hauptnormalspannungen darstellen? Was versteht man unter einer Vergleichsspannung?
- **Energieprinzipien:** Was besagt der Arbeitssatz? Was besagen die Betti-Rayleigh Beziehungen? Was ist eine virtuelle Verschiebung? Wozu wird die Gateaux Ableitung benötigt? Was versteht man unter der Anfangs-Randwertaufgabe der Kontinuumsmechanik? Zwischen welchen Randbedingungen wird unterschieden? Wie ist die virtuelle Lagrange Funktion definiert? Was besagt das Hamilton-Prinzip? Was besagt das Fundamentallemma der Variationsrechnung? Wofür wird es benötigt?
- **Eigenwertproblem:** Was versteht man unter einer freien Schwingung? Was versteht man unter einem Separationsansatz? Was versteht man unter dem Eigenwertproblem. Was ist eine Eigenfrequenz bzw. eine Eigenmode?
- **Finit-dimensionale Approximation elastischer Strukturen:** Was ist die Grundidee der Ritz-Methode? Welcher Ansatz wird gemacht? Was müssen die Ansatzfunktionen jeweils erfüllen?

Stabtheorie:

- Definition von Schnittgrößen eines Stabes
- Spannungsrandbedingungen an der Mantelfläche eines Stabes
- Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes in einem geraden Stab bei statischer reiner Zug/Druckbelastung, Diskussion der im Verzerrungs- und Spannungstensor verschwindenden Komponenten
- Grundidee der Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes in einem geraden Stab bei statischer reiner Torsionsbelastung, Ansatz für Verschiebungen, Erklärung der Begriffe Verwindung, Wölbfunktion, Torsionsfunktion, Drillsteifigkeit, Diskussion der im Verzerrungs- und Spannungstensor verschwindenden Komponenten
- Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes in einem geraden Stab bei statischer reiner ebener Biegung, Ansatz für Verschiebungen, Berechnung von Verzerrungen und Spannungen, Berechnung von Momenten, Erklärung der Begriffe Krümmung, Flächenträgheitsmoment, neutrale Faser, Diskussion der im Verzerrungs- und Spannungstensor verschwindenden Komponenten

- Grundidee der Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes in einem geraden Stab bei Biegung durch eine statische Einzelkraft am Stabende, Berechnung der lokalen Schnittgrößen, Berechnung der Normalspannungen, Rolle von Schubspannungen, Diskussion der im Verzerrungs- und Spannungstensor verschwindenden Komponenten, Bedeutung von Spannungsfunktionen und Wölbfunktionen, Erklärung der Begriffe Schubmittelpunkt und Schubfaktor, grundsätzliche Vorgangsweise bei der Berechnung der Verschiebungen, Unterschiede zum Fall reiner Biegung
- Grundidee der Modellierung eines geraden Stabes als eindimensionales Kontinuum, Auftrennung des Verschiebungsfeldes in aggregierte Verschiebungen und lokale Relativverschiebungen
- Berechnung der Verzerrungsenergie in geraden Stäben, Definitionsgleichung, Auswertung des Integrals und Ausdruck der Verzerrungsenergie durch aggregierte Verformungs- und Kraftgrößen, Erklärung des Begriffs Steifigkeit
- Berechnung der kinetischen Energie in geraden Stäben, Definitionsgleichung, Auswertung des Integrals und Ausdruck der kinetischen Energie durch die Zeitableitung von aggregierten Verschiebungsgrößen, Erklärung des Begriffs Trägheit
- Herleitung der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von geraden Zug/Druck-Stäben, Herleitung aus Impulsbilanz am infinitesimalen Stabelement und Herleitung mit dem Hamilton-Prinzip, Diskussion möglicher Randbedingungen
- Herleitung der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von geraden Torsions-Stäben, Herleitung aus Impulsbilanz am infinitesimalen Stabelement und Herleitung mit dem Hamilton-Prinzip, Diskussion möglicher Randbedingungen
- Balkentheorie nach Timoshenko im dynamischen Fall, Ansatz für Verschiebungen (Verformungshypothese), Bedeutung der aggregierten Verschiebungsgrößen, Berechnung von Querkraft und Biegemoment, Diskussion möglicher Randbedingungen, Herleitung der Differentialgleichungen aus Impulsbilanz am infinitesimalen Stabelement und Herleitung mit dem Hamilton-Prinzip, Erklärung von Unterschieden (Vereinfachungen) gegenüber einer exakten Formulierung von Verformungen und Spannungen in schubweichen Balken
- Balkentheorie nach Euler-Bernoulli im dynamischen Fall, Ansatz für Verschiebungen (Verformungshypothese), Bedeutung der aggregierten Verschiebungsgröße, Berechnung von Querkraft und Biegemoment, Diskussion möglicher Randbedingungen, Herleitung der Differentialgleichungen aus Impulsbilanz am infinitesimalen Stabelement und Herleitung mit dem Hamilton-Prinzip, Erklärung von Unterschieden gegenüber der Balkentheorie nach Timoshenko, Voraussetzungen zur Verwendung der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli
- Herleitung der Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von biegeschlaffen Zuelementen, Voraussetzungen zur Modellierung des Stabes als biegeschlaff, Diskussion von Schnittgrößen, Erklärung der aggregierten Verschiebungsgrößen,

Herleitung der Differentialgleichungen aus Impulsbilanz am verformten infinitesimalen Stabelement und Herleitung mit dem Hamilton-Prinzip, Diskussion möglicher Randbedingungen, Diskussion des Einflusses der Zugkraft auf die Steifigkeit

- Diskussion der strukturellen Ähnlichkeiten der Bewegungsgleichungen von geraden Stäben, allgemeine Gleichung, Erklärung der auftretenden Differentialoperatoren und des Lastvektors

Kapitel 2: Elektromagnetische Energiewandler

- **Grundlagen:** Maxwellsche Gleichungen der Magnetostatik, Amperesches Durchflutungsgesetz, magnetischer Fluss, magnetische Knotengleichung
- **Konstitutivgleichungen:** Welche Eigenschaften weisen weichmagnetische und hartmagnetische Werkstoffe auf? Wie sieht die Konstitutivgleichung von linearen magnetischen Werkstoffen aus, wie erfolgt die Beschreibung von permanentmagnetischen Werkstoffen? Wie kann die Sättigung des Materials modelliert werden? Welche Eigenschaften besitzen die Flussdichte und die Feldstärke an Grenzflächen zwischen zwei Materialien unterschiedlicher Permeabilität?
- **Permeanzen:** Wie sind Permeanz und Reluktanz definiert? Wie sehen die Annahmen im Rahmen der Flussröhrentheorie zur Berechnung von Reluktanzen aus? Wie kann die Berechnung von Reluktanzen für einfache geometrische Strukturen basierend auf der Flussröhrentheorie erfolgen?
- **Reluktanzmodellierung:** Wie werden die Quellen des Magnetkreises (Spulen, Permanentmagnete) mathematisch beschrieben? Wie ist die magnetische Spannung definiert? Wie erfolgt die Berücksichtigung von Sättigung im Material?
- **Faradaysches Induktionsgesetz:** Wie ist der verkettete Fluss definiert? Wie sieht das allgemeine Induktionsgesetz für elektromagnetische Energiewandler aus? Wie vereinfachen sich die Gleichungen für den magnetisch linearen Fall? Wie errechnet sich die Induktivitätsmatrix und welche wesentlichen Eigenschaften weist sie auf?
- **Energie und Koenergie:** Wie sind Leitungsvariablen definiert? Welche Beispiele gibt es in der Mechanik und Thermodynamik? Wie können die Energie und Koenergie für elektromagnetische Energiewandler beschrieben werden?
- **Magnetische Kräfte und Momente:** Wie sieht das Energie- und Koenergieprinzip für Wandler ohne Permanentmagneten aus? Wie kann die Kraft bzw. das Moment aus der Energie bzw. Koenergie ermittelt werden? Wie ist eine systematische Berücksichtigung von Permanentmagneten möglich?
- **Netzwerksanalyse:** Welche Eigenschaften muss ein zulässiger Baum und Kobaum aufweisen? Wie errechnet sich die Inzidenzmatrix eines elektromagnetischen Netzwerkes zu einem gegebenen Baum? Welche Fundamentalgleichungen werden im Rahmen der Netzwerksanalyse verwendet? Wie sieht das resultierende Gleichungssystem für

elektromagnetische Wandler aus? Wie errechnen sich die verallgemeinerten Kräfte und Momente? Welches Gleichungssystem muss für den magnetisch nichtlinearen, dynamischen Fall gelöst werden (Faradaysches Induktionsgesetz mit algebraischen Gleichung)? Wie kann die elektrische Verschaltung des elektromagnetischen Wandlers systematisch beschrieben werden? Hinweis: Der Abschnitt 2.8.2 wird nicht geprüft!

- **Netzwerkanalyse für den magnetisch linearen Fall:** Wie kann Induktivitätsmatrix für den magnetisch linearen Fall ermittelt werden? Wie sehen das Induktionsgesetz bzw. die verallgemeinerten Kräfte und Momente aus?
- **Permanentmagnet-Synchronmotoren:** Welche Bauformen von Rotor und Stator von PMSM können unterschieden werden und welche allgemeinen Vor- und Nachteile ergeben sich aus diesen Bauformen? Wie ist eine PSM mit innenliegenden Magneten aufgebaut? Wie kann die Beschreibung des Luftspaltleitwertes (Grundidee) erfolgen?