2 Optimale Schätzer

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Frage, wie aus einer Eingangsfolge (u_k) und einer gemessenen Ausgangsfolge (y_k) der Zustand $\mathbf{x}_{k+m}$ eines dynamischen Systems geschätzt werden kann. Je nach Wert von m wird der Vorgang des Schätzens als

(1) Glätten (smoothing) für $m < 0$

(2) Filtern (filtering) für $m = 0$ oder

(3) Vorhersagen (prediction) für $m > 0$

bezeichnet. Abbildung 2.1 gibt eine grafische Veranschaulichung dieser drei Fälle.

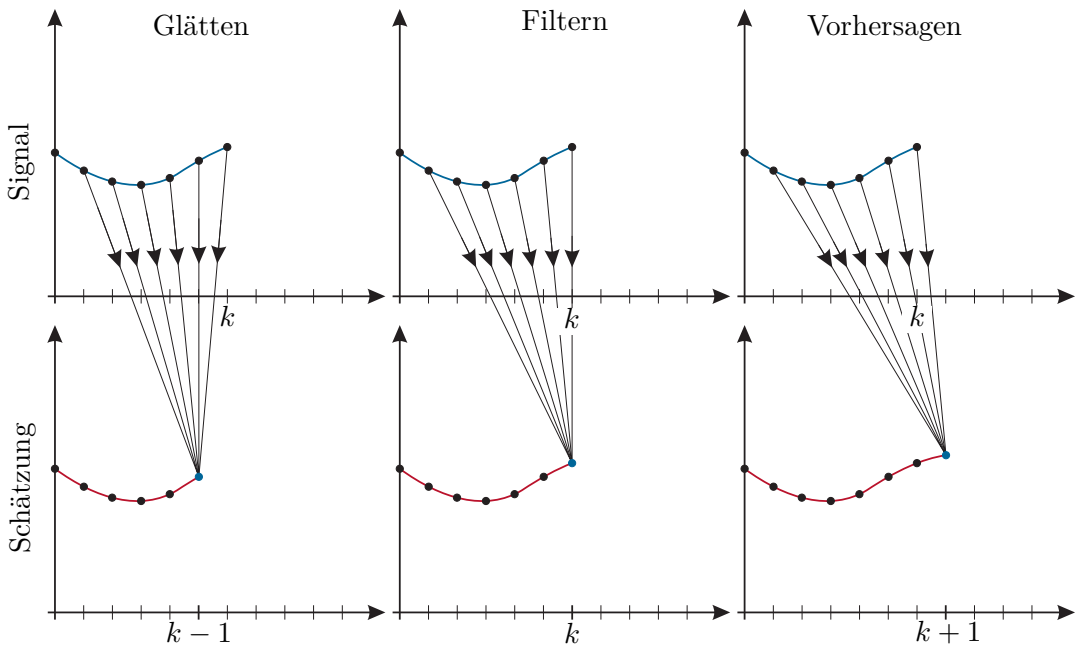


Abbildung 2.1: Zu den Begriffen Glätten, Filtern und Vorhersagen.

Die weiteren Betrachtungen werden sich auf den letzten Fall (3) beschränken, da dieser für regelungstechnische Anwendungen am interessantesten ist. Als Ergebnis der nachfolgenden Betrachtungen wird ein optimaler Zustandsbeobachter, das so genannte *Kalman-Filter*, ermittelt werden, der ein quadratisches Gütekriterium minimiert. Dazu müssen jedoch in einem Zwischenschritt die Ergebnisse der Least-Squares Schätzung des vorigen Kapitels erweitert werden.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Da in diesem Kapitel immer wieder der Erwartungswert und die Kovarianz von Zufallszahlen verwendet werden, sollen diese beiden Begriffe für normalverteilte und gleichverteilte Zufallszahlen erläutert werden.

Bemerkung 2.1 (Normalverteilte Zufallsvariablen). Eine skalare normalverteilte Zufallsvariable x ist durch die Verteilungsdichtefunktion (Gauß'sche Verteilung)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.1}$$

mit dem Mittelwert (Erwartungswert) m und der Varianz σ, definiert. Der Mittelwert (Erwartungswert, erstes Moment) und die Varianz (zweites zentrales Moment) sind, wie im Anhang A erläutert, durch

$$\mathrm{E}(x) = m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{E}\Big((x - \mathrm{E}(x))^2\Big) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2b}$$

definiert. In Abbildung 2.2 ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für unterschiedliche Parametrierungen einer normalverteilten Zufallszahl dargestellt.

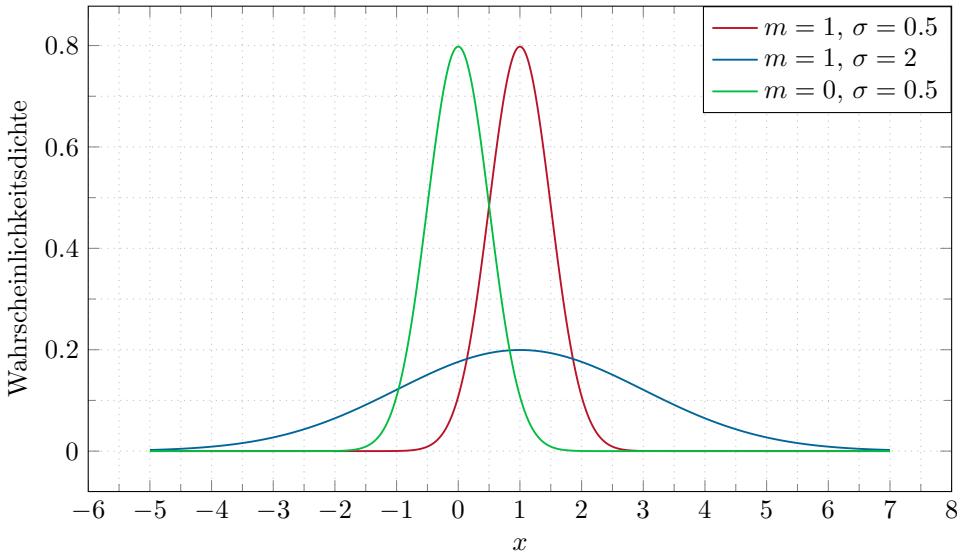


Abbildung 2.2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für unterschiedliche normalverteilte Zufallsvariablen.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallszahl x im Intervall δ um den Erwartungswert $\mathrm{E}(x) = m$ liegt errechnet sich zu

$$\mathrm{P}(m-\delta < x \leq m+\delta) = \int_{m-\delta}^{m+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{erf}\Big(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}\Big), \tag{2.3}$$

vgl. Aufgabe A.1 im Anhang A. Wählt man z.B. $\delta = \sigma$, so liegt eine Zufallszahl x mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.68 in diesem Intervall. Weiterhin liegt eine Zufallszahl x mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 im Intervall $\delta = 2\sigma$. Die Varianz stellt damit ein Maß für die Streuung der Zufallszahlen um den Erwartungswert dar.

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\mathbf{x})$ eines n-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{x}$ errechnet sich in der Form

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{Q})}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}, \tag{2.4}$$

mit dem Erwartungswert $\mathbf{m}$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{m} = \mathrm{E}(\mathbf{x}) \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{Q} = \mathrm{E}\Big((\mathbf{x}-\mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x}-\mathrm{E}(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}\Big)\,. \tag{2.5b}$$

Für den Sonderfall $n = 2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ in einer Ellipse der Form

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = C^2 \tag{2.6}$$

liegt, durch

$$\mathrm{P} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{C^2}{2}} \tag{2.7}$$

gegeben. Der Beweis für diese Aussage kann z.B. in [2.1] gefunden werden.

Damit kann mit Hilfe der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ das Gebiet (d.h. die Ellipsen für $n = 2$) ermittelt werden, in dem ein Zufallsvektor $\mathbf{x}$ mit einer Wahrscheinlichkeit P liegt. In der Abbildung 2.3 ist die Verteilung von 3000 Zufallsvektoren $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$, mit den normalverteilten, nicht korrelierten Zufallsvariablen x_1 ($\mathrm{E}(x_1) = m_1 = 1$, $\sigma_1 = 2$) und x_2 ($\mathrm{E}(x_2) = m_2 = 2$, $\sigma_2 = 1$) dargestellt. Weiterhin sind die Ellipsen für $\mathrm{P} = 0.5$ und $\mathrm{P} = 0.95$, und der Erwartungswert $\mathrm{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$ eingezeichnet.

Diese Betrachtung für $n = 2$ kann für n-dimensionale normalverteilte Zufallsvariablen verallgemeinert werden. In diesem Fall beschreibt das n-dimensionale Ellipsoid $(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = C^2$ ein Maß für die Verteilung des Zufallsvektors. Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass ein Zufallsvektor $\mathbf{x}$ in diesem Ellipsoid liegt, ist durch

$$1 - \mathrm{P} = \frac{n}{2^{n/2}\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)} \int_C^\infty \xi^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.8}$$

mit der Gamma-Funktion Γ, gegeben [2.1].

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

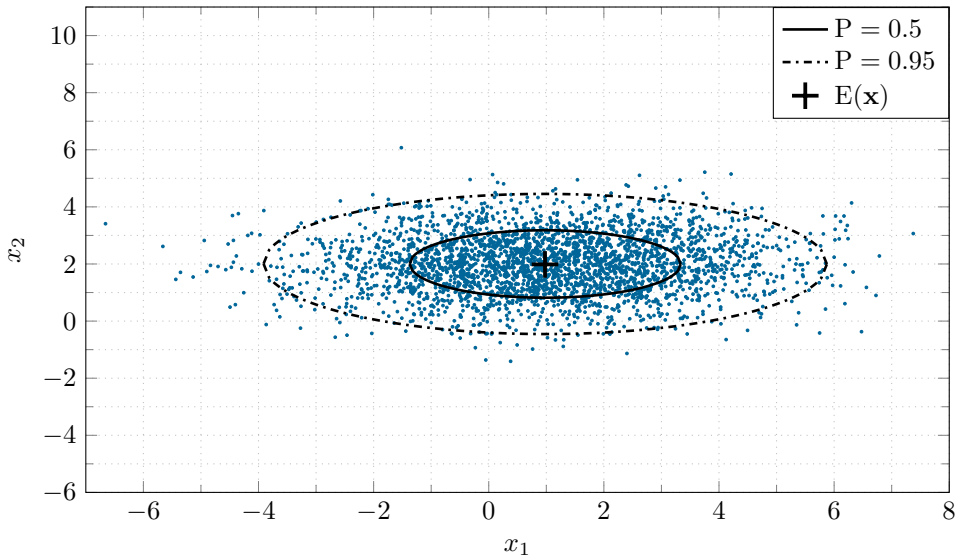


Abbildung 2.3: Grafische Darstellung des Erwartungswertes $\mathrm{E}(\mathbf{x})$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ für normalverteilte Zufallsvektoren $\mathbf{x}$.

Ein exakter Zusammenhang zwischen den durch die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ definierten Ellipsoiden und der Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsvektor $\mathbf{x}$ in diesem Gebiet liegt, ist nur für normalverteilte Zufallsvariablen definiert. Für andere Verteilungen stellen diese Ellipsoide nur eine mehr oder weniger genaue Approximation dar. Trotzdem ist die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ auch für diese Verteilungen ein sinnvolles Maß zur Abschätzung der Verteilung der Zufallsvektoren, weswegen auch hier häufig die zugehörigen Ellipsen bzw. Ellipsoide dargestellt werden.

Bemerkung 2.2. Eine im Intervall $[a, b]$ gleichverteilte skalare Zufallsvariable x wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.9}$$

definiert. Der zugehörige Erwartungwert m und die Varianz σ errechnen sich zu

$$\mathrm{E}(x) = m = \frac{a+b}{2} \tag{2.10a}$$

$$\mathrm{E}\Big((x - \mathrm{E}(x))^2\Big) = \sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \ . \tag{2.10b}$$

In der Abbildung 2.4 sind die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für unterschiedliche gleichverteilte Zufallsvariablen dargestellt.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

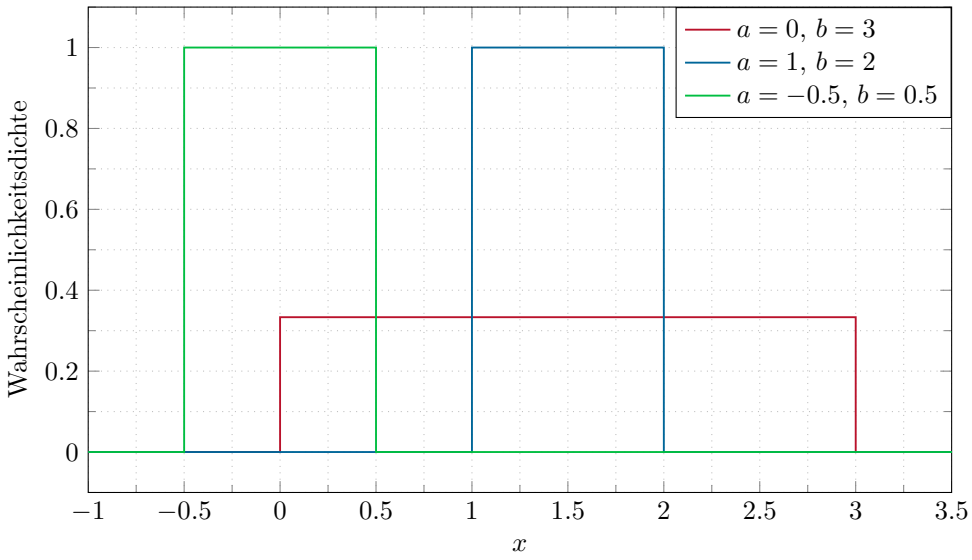


Abbildung 2.4: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für unterschiedliche gleichverteilte Zufallsvariablen.

2.1 Gauß-Markov-Schätzung

Man betrachte das um die stochastische Störung $\mathbf{v}$ erweiterte, überbestimmte lineare Gleichungssystem von (1.60) (vergleiche dazu auch (1.87)-(1.90))

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{2.11}$$

mit der bekannten $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dem n-dimensionalen Vektor der Unbekannten $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ sowie dem m-dimensionalen Messvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Man nimmt nun an, dass die stochastische Störung $\mathbf{v}$ folgende stochastische Eigenschaften besitzt

$$\mathrm{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathrm{cov}(\mathbf{v}) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{Q} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} > 0\ . \tag{2.12}$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass $\mathbf{v}$ auch als Messfehler interpretiert werden kann. Gesucht ist nun ein *linearer Schätzer* der Form

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}\mathbf{y} \tag{2.13}$$

mit einer konstanten $(n \times m)$-Matrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Da $\mathbf{y}$ die Summe eines konstanten Vektors $\mathbf{S}\mathbf{p}$ und eines stochastischen Vektors (Vektor mit stochastischen Einträgen) $\mathbf{v}$ ist, sind $\mathbf{y}$, der geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{p}}$ nach (2.13) und der Parameterfehler $\mathbf{e} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$ stochastische Größen. Es macht deshalb keinen Sinn, die Matrix $\mathbf{K}$ so zu bestimmen, dass $\|\mathbf{e}\|_2^2$ minimiert wird, sondern es muss die Aufgabe

$$\min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big(\|\mathbf{e}\|_2^2\Big) = \min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]\Big) \tag{2.14}$$

gelöst werden.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Setzt man nun für $\mathbf{y}$ die Beziehung (2.11) in (2.14) ein, dann erhält man unter Berücksichtigung von (2.12) und den Ergebnissen von Anhang A (siehe Aufgabe A.3)

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big([\mathbf{p}-\mathbf{KSp}-\mathbf{Kv}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p}-\mathbf{KSp}-\mathbf{Kv}]\Big) = \\
&\min_{\mathbf{K}} \left\{ \mathrm{E}\Big([\mathbf{p}-\mathbf{KSp}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p}-\mathbf{KSp}]\Big) - 2\underbrace{\mathrm{E}\Big([\mathbf{p}-\mathbf{KSp}]^{\mathrm{T}}\mathbf{Kv}\Big)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{Kv}\Big)}_{=\mathrm{spur}(\mathrm{E}(\mathbf{Kvv}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}))} \right\} = \\
&\min_{\mathbf{K}} \Big\{ \|\mathbf{p}-\mathbf{KSp}\|_2^2 + \mathrm{spur}\Big(\mathbf{KQK}^{\mathrm{T}}\Big) \Big\} \,. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{K}$, die den Ausdruck (2.15) minimiert, ist offensichtlich eine Funktion des unbekannten Parametervektors $\mathbf{p}$. Daher ist die Lösung dieser Minimierungsaufgabe auch nicht geeignet, einen Schätzer für $\mathbf{p}$ gemäß (2.13) zu liefern. Um dieses Problem zu umgehen, wird im Folgenden eine Ersatzaufgabe gelöst: Man erkennt, dass mit der Wahl

$$\mathbf{KS} = \mathbf{E} \qquad (2.16)$$

und $\mathbf{E}$ als Einheitsmatrix die Lösung der Minimierungsaufgabe (2.15) unabhängig vom Parameter $\mathbf{p}$ ist. Diese *Nebenbedingung* (2.16) scheint zwar im ersten Augenblick willkürlich zu sein, doch berechnet man den Erwartungswert von $\hat{\mathbf{p}}$ des linearen Schätzers (2.13), dann folgt

$$\mathrm{E}(\hat{\mathbf{p}}) = \mathrm{E}(\mathbf{Ky}) = \mathrm{E}(\mathbf{KSp}+\mathbf{Kv}) = \mathbf{KS}\underbrace{\mathrm{E}(\mathbf{p})}_{=\mathbf{p}} + \mathbf{K}\underbrace{\mathrm{E}(\mathbf{v})}_{=\mathbf{0}} \,. \qquad (2.17)$$

D.h. die Nebenbedingung (2.16) bringt mit sich, dass $\mathrm{E}(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{p}$ ist und somit der Schätzer *erwartungstreu* ist.

Die Aufgabe

$$\min_{\mathbf{K}} \Big\{ \mathrm{spur}\Big(\mathbf{KQK}^{\mathrm{T}}\Big) \Big\} \quad \text{unter der NB} \quad \mathbf{KS} = \mathbf{E} \qquad (2.18)$$

ist nun äquivalent zur Lösung n separater Optimierungsaufgaben der Form

$$\min_{\mathbf{k}_j} \mathbf{k}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{k}_j \quad \text{unter den NBen} \quad \mathbf{k}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{S} = \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \quad \text{für} \quad j = 1,\ldots,n \,. \qquad (2.19)$$

Um dies zu zeigen, schreibe man die Matrix $\mathbf{K}$ und die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ in der Form

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

an und setzt dies in (2.18) ein

$$\min_{\mathbf{K}} \Big\{ \mathrm{spur}\Big(\mathbf{KQK}^{\mathrm{T}}\Big) \Big\} = \min_{\mathbf{K}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{k}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{k}_j \right\} \quad \text{unter den NBen} \quad \mathbf{k}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{S} = \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \qquad (2.21)$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

für $j = 1, \ldots, n$. Da der j-te Summand in (2.21) lediglich von $\mathbf{k}_j$ abhängt, kann die Minimierungsaufgabe von (2.21) durch n Minimierungsprobleme gemäß (2.19) ersetzt werden. Für das Weitere ist also die Lösung einer Aufgabe vom Typ (2.19) für ein festes j von Interesse. Betrachtet man nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$ mit dem inneren Produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{m} x_j z_j$, dann erkennt man, dass die Spaltenvektoren $\mathbf{k}_k$, $k = 1, \ldots, n$, der Matrix $\mathbf{K}$, also $\operatorname{span}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$, die die Nebenbedingungen von (2.19) erfüllen, keinen Unterraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ bilden und damit das Projektionstheorem von Satz 1.1 nicht direkt anwendbar ist.

Aufgabe 2.1. Zeigen Sie, dass die Summe $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k$ die Nebenbedingung von (2.21) nicht erfüllt, selbst wenn $\mathbf{k}_j$ und $\mathbf{k}_k$ jeweils für sich dieser Nebenbedingung genügen.

2.1.1 Quadratische Minimierung mit affinen Nebenbedingungen

Zur Lösung der obigen Aufgabe wird eine Erweiterung des Projektionstheorems von Satz 1.1 benötigt:

Satz 2.1 (Erweiterung des Projektionstheorems)**.** *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Die translatorische Verschiebung von $\mathcal{U}$ in der Form $\mathcal{A} = \mathbf{x} + \mathcal{U}$ für ein festes $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ wird als* lineare Varietät *oder* affiner Unterraum *bezeichnet. Dann existiert ein eindeutiger Vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$ minimaler Norm und dieser ist orthogonal auf $\mathcal{U}$ (siehe Abbildung 2.5).*

Beweis von Satz 2.1. Man verschiebt den affinen Unterraum $\mathcal{A}$ durch $-\mathbf{x}$ so, dass er ein abgeschlossener Unterraum wird und wendet dann das Projektionstheorem von Satz 1.1 an. Man beachte, dass die optimale Lösung $\mathbf{x}_0$ *nicht* orthogonal auf den affinen Unterraum $\mathcal{A}$ sondern orthogonal auf $\mathcal{U}$ ist. □

Bevor nun die Aufgabe von (2.19) gelöst werden kann, sollen noch einige theoretische Grundlagen erläutert werden:

Definition 2.1 (Orthogonales Komplement)**.** Ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann bezeichnet man die Menge aller Vektoren, die orthogonal zu $\mathcal{U}$ sind, als das *orthogonale Komplement von $\mathcal{U}$* und schreibt dafür $\mathcal{U}^{\perp}$.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

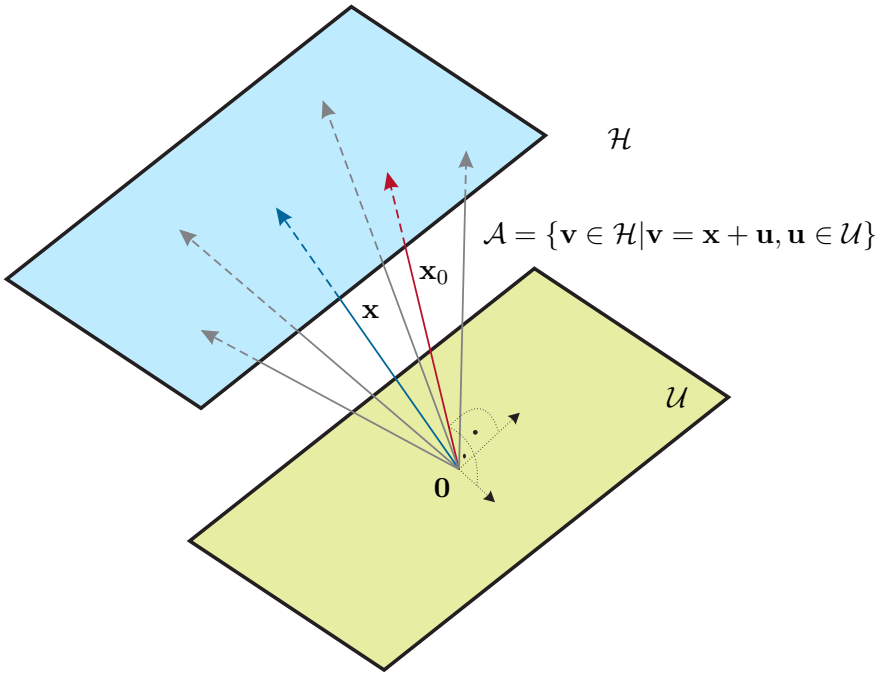


Abbildung 2.5: Zum Projektionstheorem für affine Unterräume.

Für die Unterräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ eines Hilbertraums gelten nun folgende Eigenschaften:

(1) Das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum,

(2) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\perp\perp}$,

(3) wenn $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ist, dann folgt $\mathcal{V}^\perp \subset \mathcal{U}^\perp$,

(4) $\mathcal{U}^{\perp\perp\perp} = \mathcal{U}^\perp$ und

(5) $\mathcal{U}^{\perp\perp}$ ist der kleinste geschlossene Unterraum der $\mathcal{U}$ beinhaltet.

Beweis zu (1). Da die Linearkombination orthogonaler Vektoren wieder orthogonal ist, folgt unmittelbar, dass $\mathcal{U}^\perp$ ein Unterraum ist. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}^\perp$ folgt aus der Tatsache, dass wegen der Stetigkeit des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für den Grenzwert $\mathbf{x}$ einer konvergenten Folge $(\mathbf{x}_k)$ in $\mathcal{U}^\perp$ gilt

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \tag{2.22}$$

für alle $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$ und damit auch $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp$. □

Aufgabe 2.2. Beweisen Sie die obigen Eigenschaften (2) bis (4).

Definition 2.2 (Direkte Summe)**.** Man bezeichnet einen Vektorraum $\mathcal{X}$ als direkte Summe zweier Unterräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ und schreibt dann $\mathcal{X} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, wenn sich jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ *eindeutig* als Summe $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ mit $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ und $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ darstellen lässt.

Ohne Beweis gilt nun als Folgerung des Projektionstheorems von Satz 1.1 nachfolgender Satz:

Satz 2.2. *Wenn $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist, dann gilt $\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ und $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\perp\perp}$.*

Damit lässt sich nachfolgender Satz zur Lösung der Minimierungsaufgabe mit affinen Nebenbedingungen von (2.19) angeben:

Satz 2.3 (Minimierung mit affinen Nebenbedingung)**.** *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit den linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$. Unter allen möglichen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, die das affine Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_1 \rangle &= c_1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_2 \rangle &= c_2 \\ \vdots\!\vdots\!\vdots &\quad \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_n \rangle &= c_n \end{aligned} \tag{2.23}$$

mit den konstanten Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ erfüllen, habe der Vektor $\mathbf{x}_0$ die minimale Norm. Dann lässt sich $\mathbf{x}_0$ in der Form

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} p_{0,j} \mathbf{s}_j = \mathbf{S}\mathbf{p}_0 \tag{2.24}$$

anschreiben, wobei sich $\mathbf{p}_0^T = \begin{bmatrix} p_{0,1} & p_{0,2} & \ldots & p_{0,n} \end{bmatrix}$ aus der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{s}_n, \mathbf{s}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_n \rangle & \cdots & \langle \mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n \rangle \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}=\mathbf{S}^\mathrm{T}\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{0,1} \\ \vdots \\ p_{0,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \tag{2.25}$$

mit der Gramschen Matrix $\mathbf{G}$ errechnet.

Beweis zu Satz 2.3. Es sei $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Die Menge aller möglichen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, die das affine Gleichungssystem (2.23) erfüllen, bilden einen affinen Unterraum von $\mathcal{H}$, nämlich die translatorische Verschiebung von $\mathcal{U}^\perp$ um einen Vektor $\boldsymbol{\gamma}$. Da das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum ist, kann man Satz 2.1 anwenden und weiß damit, dass die optimale Lösung $\mathbf{x}_0$ existiert und eindeutig ist sowie orthogonal auf $\mathcal{U}^\perp$ steht. Damit folgt aber $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}^{\perp\perp}$ und wegen der Abgeschlossenheit von

$\mathcal{U}$ und Satz 2.2 erhält man $\mathcal{U}^{\perp\perp} = \mathcal{U}$. Da nun aber $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ gilt, muss sich $\mathbf{x}_0$ als Linearkombination der $\mathbf{s}_j$, $j = 1, \ldots, n$, gemäß (2.24) darstellen lassen. Setzt man nun noch (2.24) in die affine Nebenbedingung (2.23) ein, erhält man das Ergebnis (2.25). □

Wendet man Satz 2.3 auf die Minimierungsaufgabe (2.19) mit $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \ldots & \mathbf{s}_n \end{bmatrix}$ und dem inneren Produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \mathbf{z}$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$ an, also

$$\min_{\mathbf{k}_j} \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_j \rangle_Q \quad \text{unter den NBen} \quad \left\langle \mathbf{k}_j, \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}_l \right\rangle_Q = \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.26}$$

für $j = 1, \ldots, n$, dann erhält man für $\mathbf{s}_l$ ersetzt durch $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{s}_l$ in (2.24) und (2.25) das Ergebnis

$$\mathbf{k}_{j,0} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{p}_0 \quad \text{und} \quad \left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_j \tag{2.27}$$

bzw.

$$\mathbf{k}_{j,0} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{e}_j \ . \tag{2.28}$$

Nach (2.20) errechnet sich die optimale Lösung $\mathbf{K}_0$ für die Matrix $\mathbf{K}$ zu

$$\mathbf{K}_0^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1} \tag{2.29}$$

und damit lautet der gesuchte lineare *Gauß-Markov-Schätzer* nach (2.13)

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y} \ . \tag{2.30}$$

Vergleicht man nun (2.30) mit (1.128), dann erkennt man, dass das Ergebnis identisch zum Ergebnis der Least-Squares Identifikation mit gewichteten kleinsten Quadraten mit der Gewichtungsmatrix $\mathbf{Q}^{-1}$ ist, wobei gilt $\mathbf{Q} = \mathrm{cov}(\mathbf{v})$.

Für den Erwartungswert des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$ erhält man gemäß (2.17) $\mathrm{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers lautet mit (2.16)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\right) &= \mathrm{E}\left([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}][\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{E}\left([\mathbf{p} - \mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v})][\mathbf{p} - \mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v})]^{\mathrm{T}}\right) = \\ &= \mathrm{E}\left([\mathbf{K}\mathbf{v}][\mathbf{K}\mathbf{v}]^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{2.31}$$

bzw. mit (2.29)

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\right) = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1} = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\right)^{-1} \ . \tag{2.32}$$

In der Literatur wird der lineare Schätzer (2.30) oft auch als *BLUE (best linear unbiased estimate)* bezeichnet.

Ist die Kovarianzmatrix $\mathrm{cov}(\mathbf{v}) = \mathrm{E}\left(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{Q}$ eine Diagonalmatrix der Form $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(q_0, q_1, \ldots)$ mit $q_j > 0$ für alle $j \geq 0$, dann kann für den Gauß-Markov-Schätzer (2.30) gemäß der rekursiven Methode der gewichteten kleinsten Quadrate (1.121) unmittelbar mit $\alpha_j = 1/q_j$ eine rekursive Version angegeben werden. Dies klärt auch die Frage, wie die optimale Wahl der Folge positiver Gewichtungskoeffizienten α_j ($\alpha_j > 0$ für alle j) in (1.121) aussieht.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

2.2 Minimum-Varianz-Schätzung

Bisher wurde angenommen, dass über den n-dimensionalen Vektor der Unbekannten $\mathbf{p}$ in (2.11) keine Information vorhanden ist. Nun ist aber in manchen Fällen sehr wohl a priori Information über $\mathbf{p}$ in Form von stochastischen Kenngrößen (Erwartungswert, Kovarianzmatrix) bekannt. Daher wird angenommen, dass für das Gleichungssystem (vergleiche dazu auch (2.11))

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{2.33}$$

mit der stochastischen Störung $\mathbf{v}$, der bekannten $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dem n-dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ sowie dem m-dimensionalen Messvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathbf{v}) &= \mathbf{0}, \qquad \mathrm{cov}(\mathbf{v}) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{Q} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{Q} \geq 0 \\ \mathrm{E}(\mathbf{p}) &= \mathbf{0}, \qquad \mathrm{cov}(\mathbf{p}) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{R} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{R} \geq 0 \\ & \qquad\qquad\quad \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{N} \; . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Im Weiteren sei vorausgesetzt, dass die Matrix $\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)$ regulär ist. Gesucht ist nun wiederum ein linearer Schätzer

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}\mathbf{y} \tag{2.35}$$

mit einer konstanten $(n \times m)$-Matrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so, dass nachfolgende Minimierungsaufgabe

$$\min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big(\|\mathbf{e}\|_2^2\Big) = \min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]\Big) \tag{2.36}$$

gelöst wird. Durch Ausmultiplizieren von (2.36) und mit Hilfe der Beziehung $\mathrm{spur}(\mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{R}) = \mathrm{spur}\Big(\mathbf{R}(\mathbf{K}\mathbf{S})^{\mathrm{T}}\Big)$ erhält man

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{K}} \mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{y}]\Big) = \\ &\min_{\mathbf{K}} \left\{ \underbrace{\mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{p}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{p}]\Big)}_{\mathrm{spur}\left(\mathrm{E}\left([\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S}]\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}[\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S}]^{\mathrm{T}}\right)\right)} - 2 \underbrace{\mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{p}]^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{v}\Big)}_{\mathrm{spur}(\mathrm{E}([\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S}]\mathbf{p}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}))} + \underbrace{\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{v}\Big)}_{\mathrm{spur}(\mathrm{E}(\mathbf{K}\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}))} \right\} = \\ &\min_{\mathbf{K}} \Big\{ \mathrm{spur}\Big([\mathbf{E} - \mathbf{K}\mathbf{S}]\mathbf{R}[\mathbf{E} - \mathbf{K}\mathbf{S}]^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{K}\mathbf{N}^{\mathrm{T}} - \mathbf{K}\Big[\mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big]\mathbf{K}^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Big) \Big\} = \\ &\min_{\mathbf{K}} \Big\{ \mathrm{spur}\Big(\mathbf{K}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)\mathbf{K}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{K}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big)\Big) \Big\} \; . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Schreibt man die Matrix $\mathbf{K}$ und die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ wie in (2.20)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{k}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

an, dann folgt (2.37) zu

$$\min_{\mathbf{K}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{k}_j^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \right) \mathbf{k}_j - 2\mathbf{k}_j^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{S}\mathbf{R} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \right) \mathbf{e}_j \right) \right\} . \tag{2.39}$$

Vergleicht man die Minimierungsaufgabe (2.39) mit der von (1.61), also

$$\min_{\mathbf{p}} (\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{p})^{\mathrm{T}} (\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{p} \right), \tag{2.40}$$

dann erkennt man, dass die beiden Aufgaben äquivalent sind. Es lässt sich also die Lösung von (2.39) direkt durch die Lösung von (2.40) (vergleiche dazu (1.63))

$$\mathbf{p}_0 = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \tag{2.41}$$

angeben, indem man in (2.41) $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \left(\mathbf{S}\mathbf{R} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \right) \mathbf{e}_j$ setzt. Damit ergibt sich die optimale Lösung $\mathbf{K}_0$ für die Matrix $\mathbf{K}$ von (2.35) zu

$$\mathbf{K}_0^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \left(\mathbf{S}\mathbf{R} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \right) \tag{2.42}$$

und der gesuchte lineare *Minimum-Varianz-Schätzer* nach (2.35) lautet

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{N} \right) \left(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \mathbf{y} \, . \tag{2.43}$$

Man beachte, dass am Beginn dieses Abschnittes vorausgesetzt wurde, dass die Matrix $\left(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \right)$ regulär ist. Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers errechnet

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

sich zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\mathbf{e}) &= \mathrm{E}\Big([\mathbf{p}-\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{p}+\mathbf{v})][\mathbf{p}-\mathbf{K}(\mathbf{S}\mathbf{p}+\mathbf{v})]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S}]\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}[\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S}]^{\mathrm{T}}\Big) - \\
&\quad \mathrm{E}\Big(\mathbf{K}\mathbf{v}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{E}-\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Big) + (\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S})\mathbf{p}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Big) + \mathrm{E}\Big(\mathbf{K}\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Big) \\
&= (\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S})\mathbf{R}(\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S})^{\mathrm{T}} - \mathbf{K}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{E}-\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Big) - (\mathbf{E}-\mathbf{K}\mathbf{S})\mathbf{N}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{R} - \mathbf{K}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big) - \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big)\mathbf{K}^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{R} - \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big) - \\
&\quad \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big) + \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big) \\
&\quad \Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big) \\
&\quad \Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big) \\
&= \mathbf{R} - \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big)\ .
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Aufgabe 2.3. Wenn Sie einmal Zeit und Muße haben, rechnen Sie (2.44) nach.

Im Gegensatz zum Gauß-Markov-Schätzer (2.30) liefert der Minimum-Varianz-Schätzer (2.43) auch dann bereits sinnvolle Ergebnisse, wenn weniger Messungen m als Unbekannte n zur Verfügung stehen, sofern die Matrix $\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ regulär ist. Der Grund dieser Eigenschaft liegt offensichtlich darin, dass beim Minimum-Varianz-Schätzer stochastische Informationen über den Parametervektor $\mathbf{p}$ vorliegen und somit eine sinnvolle Schätzung auch mit weniger Messungen, ja sogar mit keiner Messung für $\mathbf{Q} > 0$, möglich ist.

Wendet man nun das Matrizeninversionslemma Satz 1.3

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\Big(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\Big)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \tag{2.45}$$

auf die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\operatorname{cov}(\mathbf{e})$ von (2.44) mit $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}$, $\mathbf{C} = \Big(\mathbf{Q}-\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\Big)^{-1}$ und $\mathbf{D} = \mathbf{S}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}$ an, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\mathbf{e}) &= \mathbf{R} - \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\mathbf{N}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big) \\
&= \Big(\mathbf{R}^{-1} + \Big(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{Q}-\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\Big)\Big)^{-1}\ .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Im Weiteren kann man sich einfach davon überzeugen, dass sich der Minimum-Varianz-Schätzer (2.43) in der Form

$$\hat{\mathbf{p}} = \operatorname{cov}(\mathbf{e})\Big(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\Big)\Big(\mathbf{Q}-\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\Big)^{-1}\mathbf{y} \tag{2.47}$$

schreiben lässt.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie die Gültigkeit von (2.47).

Beziehung (2.47) zeigt nun, dass für $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{0}$, d. h. unendlich hohe Varianz des Parametervektors $\mathbf{p}$ – es ist also keine sinnvolle a priori Information für $\mathbf{p}$ vorhanden – und $\mathbf{Q} > 0$ der Minimum-Varianz-Schätzer (2.43) bzw. (2.47) in den Gauß-Markov-Schätzer (2.30) übergeht.

Das bisher Gesagte, insbesondere die Ergebnisse (2.43) und (2.44), in Kombination mit den Beziehungen

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{p}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\Big) = \Big(\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}\Big) \tag{2.48}$$

und

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v}][\mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v}]^{\mathrm{T}}\Big) = \Big(\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\Big) \tag{2.49}$$

lässt sich im nachfolgenden Satz zusammenfassen:

Satz 2.4 (Minimum-Varianz-Schätzer)**.** *Für das Gleichungssystem* (2.33)

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{2.50}$$

mit den stochastischen Größen $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{y}$ *wird angenommen, dass* $\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big)$ *invertierbar ist. Die optimale lineare Schätzung* $\hat{\mathbf{p}}$ *von* $\mathbf{p}$*, die den Erwartungswert des quadratischen Fehlers* $\mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}]\Big)$ *minimiert, ist durch*

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}\mathbf{y} \tag{2.51}$$

mit der zugehörigen Fehlerkovarianzmatrix

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\mathbf{e}) &= \mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}][\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Big) - \mathrm{E}\Big(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Big) - \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\Big)\end{aligned} \tag{2.52}$$

gegeben.

Man beachte die Ähnlichkeit von (2.51) mit der optimalen Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate von (1.63).

Aufgabe 2.5. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (2.52). Zeigen Sie weiters, dass gilt

$$\mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}][\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}[\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}]^{\mathrm{T}}\Big) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{E}\Big(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\hat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\Big)\ . \tag{2.53}$$

Hinweis: (zu Aufgabe 2.5) Setzen Sie einfach für $\hat{\mathbf{p}}$ den Ausdruck von (2.51) ein.

Aufgabe 2.6. Zeigen Sie, dass sich die Beziehungen (2.43) und (2.44) direkt mit Hilfe von Satz 2.4 herleiten lassen.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Aufgabe 2.7. Angenommen, die Erwartungswerte $\mathrm{E}(\mathbf{y})$ und $\mathrm{E}(\mathbf{p})$ sind nicht wie in (2.34) Null, sondern $\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$ und $\mathrm{E}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_0 \neq \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass die Minimum-Varianz-Schätzung der Form

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{b}$ durch

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + \mathrm{E}\Big([\mathbf{p} - \mathbf{p}_0][\mathbf{y} - \mathbf{y}_0]^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big([\mathbf{y} - \mathbf{y}_0][\mathbf{y} - \mathbf{y}_0]^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$$

gegeben ist.

Unter der *Minimum-Varianz-Schätzung einer linearen Funktion*

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{p} \tag{2.54}$$

mit dem optimalen Schätzer

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_{\mathbf{z}}\mathbf{y} \tag{2.55}$$

basierend auf den Messungen

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{2.56}$$

versteht man die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\min_{\mathbf{K}_{\mathbf{z}}} \mathrm{E}\Big([\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}]\Big) \ . \tag{2.57}$$

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 2.5 (Minimum-Varianz-Schätzer einer linearen Funktion)**.** *Die lineare Minimum-Varianz-Schätzung* (2.55) *einer linearen Funktion* $\mathbf{C}\mathbf{p}$ *basierend auf den Messungen* (2.56) *ist äquivalent der linearen Funktion der Minimum-Varianz-Schätzung* $\hat{\mathbf{p}}$ *selbst, d. h. es gilt, die beste Schätzung von* $\mathbf{C}\mathbf{p}$ *ist* $\mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}$*.*

Aufgabe 2.8. Beweisen Sie Satz 2.5.

2.2.1 Rekursive Minimum-Varianz-Schätzung

Im nächsten Schritt soll untersucht werden, wie sich der optimale Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ von (2.47) durch Hinzunahme neuer Messungen verbessert. Dies ist insbesondere für On-line-Anwendungen von essentieller Bedeutung. Das Verfahren beruht nun wiederum auf den Eigenschaften des Projektionstheorems in einem Hilbertraum. Wenn $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ zwei Unterräume eines Hilbertraums bezeichnen, dann ist die Projektion eines Vektors $\mathbf{p}$ auf den Unterraum $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ identisch der Projektion von $\mathbf{p}$ auf $\mathcal{U}_1$ plus der Projektion auf $\mathcal{U}_2^*$, wobei $\mathcal{U}_2^*$ orthogonal zu $\mathcal{U}_1$ ist und die Beziehung $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2^* = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ erfüllt. Wenn $\mathcal{U}_2$ durch eine endliche Anzahl von Vektoren aufgebaut ist, dann spannen die Differenzen dieser Vektoren mit ihren Projektionen auf $\mathcal{U}_1$ den Unterraum $\mathcal{U}_2^*$ auf. Die Abbildung 2.6 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Damit kann man folgenden Satz angeben:

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

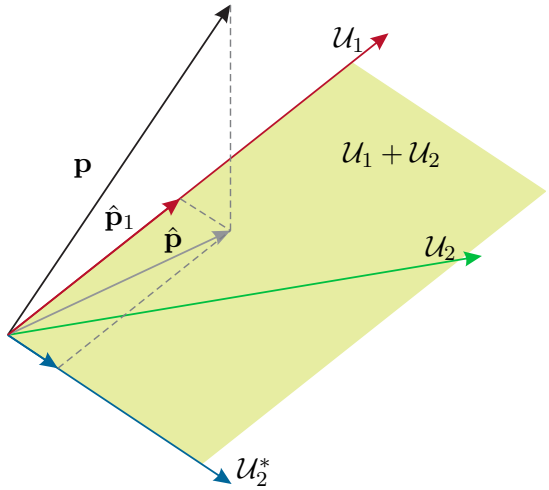


Abbildung 2.6: Zur Projektion auf die Summe orthogonale Unterräume.

Satz 2.6 (Rekursive Minimum-Varianz-Schätzung)**.** *Es sei* $\mathbf{p}$ *ein Zufallsvektor eines Hilbertraumes* $\mathcal{H}$ *von Zufallsvariablen und* $\hat{\mathbf{p}}_1$ *bezeichne die orthogonale Projektion von* $\mathbf{p}$ *auf einen geschlossenen Unterraum* $\mathcal{U}_1$ *von* $\mathcal{H}$*. Nach dem Projektionstheorem ist* $\hat{\mathbf{p}}_1$ *also die beste Schätzung von* $\mathbf{p}$ *in* $\mathcal{U}_1$*. Weiters beschreibe* $\mathbf{y}_2$ *alle jene Zufallsvektoren, die den Unterraum* $\mathcal{U}_2$ *von* $\mathcal{H}$ *aufspannen, und* $\hat{\mathbf{y}}_2$ *sei die orthogonale Projektion von* $\mathbf{y}_2$ *auf* $\mathcal{U}_1$*. Nach dem Projektionstheorem ist* $\hat{\mathbf{y}}_2$ *damit die beste Schätzung von* $\mathbf{y}_2$ *in* $\mathcal{U}_1$*. Mit* $\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2 - \hat{\mathbf{y}}_2$ *lautet die Projektion* $\hat{\mathbf{p}}$ *von* $\mathbf{p}$ *auf* $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \mathrm{E}\left(\mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\right)\left[\mathrm{E}\left(\tilde{\mathbf{y}}_2\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\right)\right]^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_2 \ . \tag{2.58}$$

Damit setzt sich also die beste Schätzung $\hat{\mathbf{p}}$ *auf* $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ *aus der Summe der besten Schätzung von* $\mathbf{p}$ *auf* $\mathcal{U}_1$ *(*$\hat{\mathbf{p}}_1$*) und der besten Schätzung von* $\mathbf{p}$ *auf* $\mathcal{U}_2^*$ *(jener Unterraum, der durch* $\tilde{\mathbf{y}}_2$ *generiert wird) zusammen.*

Beweis zu Satz 2.6. Man überzeugt sich leicht, dass gilt $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2^*$ und dass $\mathcal{U}_2^*$ orthogonal auf $\mathcal{U}_1$ ist. Die Beziehung (2.58) folgt dann aus der Tatsache, dass die Projektion auf eine Summe von Unterräumen gleich der Summe der Projektionen auf die einzelnen Unterräume ist, sofern diese orthogonal sind. □

Das Ergebnis von Satz 2.6 kann nun auch in folgender Form gedeutet werden: Wenn $\hat{\mathbf{p}}_1$ die optimale Schätzung auf Basis von Messungen, die den Unterraum $\mathcal{U}_1$ aufspannen, angibt, dann braucht man beim Erhalt neuer Messungen, die den Unterraum $\mathcal{U}_2$ aufspannen, nur jenen Teil zu berücksichtigen, der durch die Messungen in $\mathcal{U}_1$ noch nicht beschrieben wird, also jenen Teil der neuen Daten, der orthogonal auf die alten Daten steht und damit im Unterraum $\mathcal{U}_2^*$ liegt.

Als Anwendungsbeispiel betrachte man ein Gleichungssystem der Form von (2.33)

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{S}_1\mathbf{p} + \mathbf{v}_1 \ . \tag{2.59}$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Im Weiteren bezeichnet $\hat{\mathbf{p}}_1 = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big(\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}\mathbf{y}_1$ die optimale Minimum-Varianz-Schätzung von $\mathbf{p}$ gemäß (2.47) bzw. (2.51) auf Basis von $\dim(\mathbf{y}_1)$ Messungen mit der Fehlerkovarianzmatrix

$$\mathrm{cov}(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1][\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{P}_1 \ . \tag{2.60}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man die Schätzung von $\mathbf{p}$ durch Hinzunahme von neuen Messungen

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{S}_2\mathbf{p} + \mathbf{v}_2 \tag{2.61}$$

verbessern kann. Für die stochastische Störung $\mathbf{v}_2$ und den Zufallsparametervektor $\mathbf{p}$ gelte

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{cov}(\mathbf{v}_2) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{Q}_2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_2 \geq 0 \\ \mathrm{E}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \qquad\qquad \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{N}_2 \ . \end{aligned} \tag{2.62}$$

Weiters ist es natürlich sinnvoll, anzunehmen, dass die Störung $\mathbf{v}_2$ nicht mit vergangenen Messgrößen $\mathbf{y}_1$ korreliert ist und damit gilt

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_2\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_2\hat{\mathbf{p}}_1^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \ . \tag{2.63}$$

Die beste Schätzung $\hat{\mathbf{y}}_2$ von $\mathbf{y}_2$ auf Basis der vergangenen Messwerte $\mathbf{y}_1$ lautet

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{S}_2\hat{\mathbf{p}}_1 \ . \tag{2.64}$$

Damit erhält man nach Satz 2.6 mit $\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2 - \hat{\mathbf{y}}_2$ den verbesserten Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}_2$ zu

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \hat{\mathbf{p}}_1 + \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big(\tilde{\mathbf{y}}_2\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_2 \tag{2.65}$$

mit

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{p}(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1)^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{p}\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\Big) \overset{(2.53)}{=} \mathbf{P}_1\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_2 \tag{2.66}$$

und

$$\mathrm{E}\Big(\tilde{\mathbf{y}}_2\tilde{\mathbf{y}}_2^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{S}_2(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1)+\mathbf{v}_2][\mathbf{S}_2(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_1)+\mathbf{v}_2]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{S}_2\mathbf{P}_1\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} \ . \tag{2.67}$$

Aufgabe 2.9. Zeigen Sie, dass sich die Fehlerkovarianzmatrix analog zu (2.44) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \mathrm{cov}(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}_2) \\ &= \mathbf{P}_1 - \Big(\mathbf{P}_1\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_2\Big)\Big(\mathbf{S}_2\mathbf{P}_1\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}_2\mathbf{P}_1 + \mathbf{N}_2^{\mathrm{T}}\Big) \end{aligned} \tag{2.68}$$

errechnet.

Damit ergibt sich der *rekursive Minimum-Varianz-Schätzer* zu

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \Big(\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_k\Big)\Big(\mathbf{S}_k\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{N}_k + \mathbf{N}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\hat{\mathbf{p}}_{k-1}) \tag{2.69}$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

mit

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \Big(\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_k\Big)\Big(\mathbf{S}_k\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{N}_k + \mathbf{N}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}\Big(\mathbf{S}_k\mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{N}_k^{\mathrm{T}}\Big) \tag{2.70}$$

und den Anfangswerten $\mathbf{P}_{-1}$ sowie $\hat{\mathbf{p}}_{-1}$.

Nimmt man nun an, dass in jedem Iterationsschritt genau eine neue Messung hinzukommt, d. h. die Größen y_k und v_k sind Skalare, dann folgt durch Einsetzen von $\mathbf{S}_k = \mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Q}_k = \mathrm{E}(v_k^2) = q_k$ und $\mathbf{N}_k = \mathrm{E}(\mathbf{p}v_k) = \mathbf{n}_k$ in (2.69), (2.70) der rekursive Minimum-Varianz-Schätzer zu

$$\mathbf{k}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k}{(q_k + 2\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_k + \mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{s}_k)} \tag{2.71a}$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{k}_k\Big(\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{n}_k^{\mathrm{T}}\Big) \tag{2.71b}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \mathbf{k}_k\Big(y_k - \mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{p}}_{k-1}\Big)\ . \tag{2.71c}$$

Man beachte auch in diesem Zusammenhang die Analogie zur rekursiven Methode der gewichteten kleinsten Quadrate (1.121) für $q_k = 1/\alpha_k$ und $\mathbf{n}_k = \mathbf{0}$.

2.3 Das Kalman-Filter

Aufbauend auf den bisherigen Überlegungen, insbesondere der rekursiven Minimum-Varianz-Schätzung, soll im nächsten Schritt das Kalman-Filter, ein im Sinne der Regelungstheorie *optimaler Beobachter*, hergeleitet werden. Bezüglich der Grundlagen der Zustandsbeobachtertheorie sei auf Kapitel 8 des Skriptums Automatisierung verwiesen. In der Literatur existieren unzählige Versionen des Kalman-Filters. Im Rahmen dieser Vorlesung wird vorerst ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.72a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \tag{2.72b}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p-dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q-dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, der r-dimensionalen Störung $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$, dem Messrauschen $\mathbf{v}$ sowie den Matrizen $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ betrachtet. Es sei an dieser Stelle aber bereits angemerkt, dass das Kalman-Filter auch für lineare, zeitvariante und für zeitkontinuierliche Systeme entworfen werden kann. Es gelten nun folgende Annahmen:

(1) Von der Störung $\mathbf{w}$ und vom Messrauschen $\mathbf{v}$ wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{R}\delta_{kj} \tag{2.73a}$$

$$\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{Q}\delta_{kj} \tag{2.73b}$$

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \tag{2.73c}$$

mit $\mathbf{Q} \geq 0$ sowie $\mathbf{R} > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

(2) Der Erwartungswert des Anfangswertes und die Kovarianzmatrix des Anfangsfehlers sind durch

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0 \qquad \mathrm{E}\Big([\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0]^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{P}_0 \geq 0 \tag{2.74}$$

mit dem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_0$ des Anfangswertes $\mathbf{x}_0$ gegeben.

(3) Die Störung $\mathbf{w}_k$, $k \geq 0$, und das Messrauschen $\mathbf{v}_l$, $l \geq 0$, sind mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0$ nicht korreliert, d. h. es gilt

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \tag{2.75a}$$

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_l \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0}\ . \tag{2.75b}$$

Damit folgt aber wegen

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{\Phi}^j \mathbf{x}_0 + \sum_{l=0}^{j-1} \mathbf{\Phi}^l (\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_{j-1-l} + \mathbf{G}\mathbf{w}_{j-1-l}) \tag{2.76}$$

und (2.73) auch die Beziehung

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \quad \text{für } k \geq j \tag{2.77a}$$

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_l \mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } l, j\ . \tag{2.77b}$$

Für die weiteren Betrachtungen wird nachfolgende Notation eingeführt:

Definition 2.3. Die optimale Schätzung von $\mathbf{x}_k$ unter Berücksichtigung von $0, \ldots, j$ Messungen wird mit $\hat{\mathbf{x}}(k|j)$ abgekürzt.

Satz 2.7 (Kalman-Filter). *Die optimale Schätzung $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ des Zustandes $\mathbf{x}_{k+1}$ des Systems (2.72) unter Berücksichtigung von $l = 0, \ldots, k$ Messungen errechnet sich nach der Iterationsvorschrift*

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \\ &\mathbf{\Phi}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}_k) \end{aligned} \tag{2.78}$$

mit der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \\ &- \mathbf{\Phi}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{2.79}$$

und den Anfangswerten $\hat{\mathbf{x}}(0|-1) = \mathbf{m}_0$ und $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}_0$.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Beweis zu Satz 2.7. Angenommen, es wurden die Messungen $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$ für die optimale Schätzung $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ mit der Fehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]^{\mathrm{T}}\Big) \tag{2.80}$$

herangezogen. Zum Zeitpunkt k wird nun die Messung $\mathbf{y}_k$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \tag{2.81}$$

zur Verbesserung des Schätzwertes von $\mathbf{x}_k$ verwendet. Gemäß Satz 2.6 lautet der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ von $\mathbf{x}_k$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathrm{E}\Big(\mathbf{x}_k\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{T}}\Big)\Big[\mathrm{E}\Big(\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{T}}\Big)\Big]^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_k \tag{2.82a}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}_k \tag{2.82b}$$

bzw. mit (2.53) in

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{x}_k\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{T}}\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathbf{x}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \tag{2.83}$$

und

$$\mathrm{E}\Big(\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} \tag{2.84}$$

folgt

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \\ &\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}_k)\ .\end{aligned} \tag{2.85}$$

Damit lässt sich die Fehlerkovarianzmatrix in der Form (vergleiche dazu (2.44), (2.70))

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(k|k) = \mathrm{E}\Big([\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k)][\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]^{\mathrm{T}}\Big) = \\ &\mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\end{aligned} \tag{2.86}$$

anschreiben. Nach Satz 2.5 ist die optimale Schätzung von $\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k$ gleich die optimale Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_k$ von $\mathbf{x}_k$ multipliziert mit $\mathbf{\Phi}$, es gilt also

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k\ . \tag{2.87}$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1|k) &= \mathrm{E}\Big([\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)][\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)]^{\mathrm{T}}\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big([\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \mathbf{G}\mathbf{w}_k][\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \mathbf{G}\mathbf{w}_k]^{\mathrm{T}}\Big) \\ &= \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}(k|k)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{2.88}$$

Durch Kombination von (2.85)–(2.88) ergibt sich unmittelbar das Ergebnis von Satz 2.7. □

Es sei an dieser Stelle noch die Zusammensetzung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers (2.79) interpretiert: Der Term $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}(k|k-1)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$ beschreibt die Änderung der Kovarianzmatrix zufolge der Systemdynamik, $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ gibt die Erhöhung der Fehlervarianz zufolge der Störung $\mathbf{w}$ an und der verbleibende Ausdruck mit negativem Vorzeichen beschreibt, wie sich die Fehlervarianz durch Hinzunahme der Information neuer Messungen verringert.

2.3.1 Das Kalman-Filter als optimaler Beobachter

Führt man die Abkürzungen $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$, $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$, $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}(k+1|k)$ und $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}(k|k-1)$ ein, dann kann man (2.78) und (2.79) auch in der kompakten Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}\mathbf{u}_k) \tag{2.89}$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1} \tag{2.90}$$

und

$$\mathbf{P}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}_k\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_k\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \tag{2.91}$$

darstellen. Gleichung (2.91) wird auch als *diskrete Riccati-Gleichung* bezeichnet. Vergleicht man (2.89) mit einem vollständigen Luenberger-Beobachter, dann erkennt man, dass das Kalman-Filter ein vollständiger Beobachter mit einer *zeitvarianten Beobachterverstärkungsmatrix* $\hat{\mathbf{K}}_k$ ist. Der Erwartungswert des Beobachtungsfehlers $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ genügt der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbf{e}_{k+1}) &= \mathrm{E}\Big(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k - \boldsymbol{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{K}}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k)\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big(\Big(\boldsymbol{\Phi} - \hat{\mathbf{K}}_k\mathbf{C}\Big)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{G}\mathbf{w}_k - \hat{\mathbf{K}}_k\mathbf{v}_k\Big) \\ &= \Big(\boldsymbol{\Phi} - \hat{\mathbf{K}}_k\mathbf{C}\Big)\,\mathrm{E}(\mathbf{e}_k)\ .\end{aligned} \tag{2.92}$$

Falls also $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0$ gesetzt wird, gilt $\mathrm{E}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$ für alle $k \geq 0$. Weiters sieht man aus (2.90) und (2.91), dass ausgehend vom Startwert $\mathbf{P}_0$ die Fehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_k$ und damit auch $\hat{\mathbf{K}}_k$ ohne Kenntnis der Messgrößen $\mathbf{y}_k$ für alle $k \geq 0$ vorwegberechnet und im Rechner zwischengespeichert werden können.

Wenn keine vorherigen Messwerte über den Prozess vorliegen, setzt man typischerweise $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}_0 = \alpha\mathbf{E}$ für $\alpha \gg 1$. Wenn der Beobachter eine sehr lange Zeit läuft, dann

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

kann das Problem mathematisch so behandelt werden, als würde er unendlich lange im Einsatz sein. Es zeigt sich nun, dass für unendlich lange Zeit die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers auf einen stationären Wert $\mathbf{P}_\infty$ einläuft. In diesem Falle ist auch die Beobachterverstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_\infty$ konstant und errechnet sich zu

$$\hat{\mathbf{K}}_\infty = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}_\infty\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}_\infty\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1} \tag{2.93}$$

mit $\mathbf{P}_\infty$ als Lösung der so genannten *diskreten algebraischen Riccati-Gleichung*

$$\mathbf{P}_\infty = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}_\infty\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} - \mathbf{\Phi}\mathbf{P}_\infty\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}_\infty\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\Big)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_\infty\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\ . \tag{2.94}$$

Gleichung (2.94) hat eine eindeutige symmetrische Lösung $\mathbf{P}_\infty$ mit der Eigenschaft, dass sämtliche Eigenwerte von $\Big(\mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{K}}_\infty\mathbf{C}\Big)$ im offenen Inneren des Einheitskreises liegen, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Das Paar $(\mathbf{C}, \mathbf{\Phi})$ ist *detektierbar*, d. h. sämtliche Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises sind beobachtbar.

(2) Das Paar $\Big(\mathbf{\Phi}, \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\Big)$ ist *stabilisierbar*, d. h. sämtliche Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises sind über den Eingang $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ steuerbar.

(3) Die Matrix $\mathbf{R}$ ist positiv definit.

Eine derartige Lösung der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung (2.94) wird auch als *stabilisierende Lösung* bezeichnet. Da für diese stabilisierende Lösung alle Eigenwerte von $\Big(\mathbf{\Phi} - \hat{\mathbf{K}}_\infty\mathbf{C}\Big)$ im offenen Inneren des Einheitskreises liegen, nimmt gemäß (2.92) der Erwartungswert des Beobachtungsfehlers ab und es gilt $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$. Die Lösung $\mathbf{P}_\infty$ der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung (2.94) kann man einfach dadurch erhalten, dass man die diskrete Riccati-Gleichung (2.91) vom Anfangswert $\mathbf{P}_0$ beginnend so lange iteriert, bis sich $\mathbf{P}_k$ nur noch hinreichend wenig im Sinne einer Norm ändert. Obwohl die Iterationsvorschrift im Allgemeinen sehr schnell gegen einen stationären Wert konvergiert, wird in der Praxis, so auch in MATLAB, die algebraische Riccati-Gleichung (2.94) numerisch effizienter über eine Eigenvektordekomposition gelöst, siehe die MATLAB–Befehle `care` bzw. `dare`.

Aufgabe 2.10. Die Bewegung eines Satelliten um eine Achse wird in der Form

$$I\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi = M_c - M_d$$

mit dem Trägheitsmoment I, dem Moment M_c als Stellgröße, dem Moment M_d als Störung und dem Winkel φ modelliert. Bestimmen Sie für die Abtastzeit $T_a = 1\mathrm{s}$ das zugehörige Abtastsystem der Form (2.72) für $I = 1$ und der Ausgangsgröße φ. Nehmen Sie dabei an, dass die Messung des Winkels φ mit dem Messrauschen v überlagert ist und das Störmoment M_d der auf den Prozess wirkenden Störung w

entspricht. Es gelte dabei

$$\mathrm{E}(w) = 0 \qquad \mathrm{E}\left(w^2\right) = q$$
$$\mathrm{E}(v) = 0 \qquad \mathrm{E}\left(v^2\right) = 0.1 \ .$$

Stellen Sie die Elemente von $\mathbf{P}_k$ des Kalman-Filters gemäß der Iterationsvorschrift (2.91) für den Anfangswert $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}$ und $q = \{0.1, 0.01, 0.001\}$ dar. Implementieren Sie das Kalman-Filter in MATLAB/SIMULINK.

Hinweis: Die Beziehung (2.93) mit der konstanten Beobachterverstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_\infty$ gibt einen *optimalen vollständigen Beobachter* an, der *sowohl für Ein- als auch für Mehrgrößensysteme* verwendbar ist. Im Gegensatz zum Beobachterentwurf nach der Methode der Polvorgabe (man beachte dazu die Formel von Ackermann gemäß Kapitel 8 des Skriptums Automatisierung) müssen beim Kalman-Filter keine Pole des Fehlersystems gewählt werden, was insbesondere im Mehrgrößenfall sehr schwierig sein kann. Man beeinflusst das Verhalten des Fehlersystems hingegen durch die Festlegung der Kovarianzmatrizen $\mathbf{Q}$ der Störung $\mathbf{w}$ und $\mathbf{R}$ des Messrauschens $\mathbf{v}$.

Für die Wahl der Kovarianzmatrix $\mathbf{R}$ des Messrauschens $\mathbf{v}$ kann sehr oft ein interpretierbarer Ansatz, der auf den (Rausch-)Eigenschaften des Sensors beruht, gefunden werden. Im Weiteren kann über die Gewichtung der Einträge der Kovarianzmatrix $\mathbf{R}$ zwischen zuverlässigen und weniger zuverlässigen Messungen unterschieden werden. Ist eine *Messung weniger zuverlässig*, so wird der *zugehörige Eintrag* in der Hauptdiagonale *der Kovarianzmatrix sehr groß gewählt.* Diese angenommene große Varianz der Messung bedingt, dass der Beobachter diese Messung im Vergleich zu den anderen Messungen bei der Zustandsschätzung weniger gewichtet. In der praktischen Anwendung des Kalman-Filters ist es sogar üblich, während des laufenden Betriebs die Kovarianzmatrix umzuschalten, wenn einer oder mehrere Sensoren unplausible Messungen liefern oder wenn man in einen Betriebsbereich kommt, wo man bereits von vornherein weiß, dass gewisse Sensoren keine zuverlässige Information mehr zur Verfügung stellen.

Für die Prozessstörung $\mathbf{w}$ und damit die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ gelten diese Annahmen im Allgemeinen nicht. Die Annahme, dass es sich bei $\mathbf{w}$ um weißes Rauschen handelt, ist meist nicht zutreffend. Man könnte nun auf die Idee kommen, die im Allgemeinen unbekannte Matrix $\mathbf{Q}$ sehr klein oder sogar Null zu wählen. Die Wahl $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ entspricht aber dem Szenario einer Strecke ohne Störung $\mathbf{w}$. Wie man aus der Bedingung (2) für die Lösung der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung entnehmen kann, führt die Wahl $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (bzw. im Allgemeinen auch für $\mathbf{Q} \ll 1$) nicht zu einer stabilisierenden Lösung.

Die Wahl von $\mathbf{Q}$ (und auch $\mathbf{R}$) erfolgt in der praktischen Anwendung meist nach der Methode „Versuch und Irrtum".

Hinweis: In der MATLAB CONTROL SYSTEMS TOOLBOX wird ein etwas allgemeineres

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.95a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k, \tag{2.95b}$$

mit dem zusätzlichen Term $\mathbf{H}\mathbf{w}_k$ im gemessenen Ausgang, betrachtet. Weiterhin wird anstatt $\mathrm{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{0}$ zugelassen, dass

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{N}\delta_{kj} \neq \mathbf{0} \tag{2.96}$$

gilt. Für diesen Fall errechnet sich die optimale Zustandsschätzung in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}\mathbf{u}_k) \tag{2.97}$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{N}\right)\left(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{N} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{2.98}$$

und

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}_k\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{K}}_k\left(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right). \tag{2.99}$$

Der Beweis ist in der Literatur, insbesondere [2.2], zu finden.

2.3.2 Frequenzbereichseigenschaften des stationären Kalman-Filters

Es sei angenommen, dass das Messrauschen $\mathbf{v}_k$ von (2.72), d. h.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.100a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \tag{2.100b}$$

durch ein dynamisches System der Form

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}\mathbf{z}_k + \mathbf{n}_k \tag{2.101a}$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{z}_k + \mathbf{m}_k \tag{2.101b}$$

mit den stochastischen Störungen $\mathbf{n}_k$ und $\mathbf{m}_k$ erzeugt wird. Setzt man $\mathbf{v}_k$ von (2.101) in (2.100) ein, so folgt das erweiterte System in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1}\\ \mathbf{z}_{k+1}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{z}_k\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{\Gamma}}}\mathbf{u}_k + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{G}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{w}_k\\ \mathbf{n}_k\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{w}}_k} \qquad \begin{matrix}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0\end{matrix} \tag{2.102a}$$

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{z}_k\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_k} + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{m}_k\,. \tag{2.102b}$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Das stationäre Kalman-Filter gemäß (2.89) und (2.93) für das erweiterte System (2.102) lautet dann

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}\\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_k\\ \hat{\mathbf{z}}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{u}_k + \underbrace{\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_\infty}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{C}_\mathbf{z}\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{D}\mathbf{u}_k) \tag{2.103}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}\\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi} - \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C} & -\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C}_\mathbf{z}\\ -\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C} & \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{z} - \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C}_\mathbf{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_k\\ \hat{\mathbf{z}}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\end{bmatrix}\mathbf{y}_k + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma} - \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{D}\\ -\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{D}\end{bmatrix}\mathbf{u}_k\ . \tag{2.104}$$

Da das System linear ist und damit das Superpositionsgesetz gilt, wird im Weiteren der Stelleingang $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ gesetzt. Die z-Übertragungsmatrix vom Eingang $\mathbf{y}_k$ zum Ausgang $\hat{\mathbf{x}}_k$ lautet

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\hat{\mathbf{x}}_z(z)}{\mathbf{y}_z(z)} = \begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\mathbf{E} - \boldsymbol{\Phi} + \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C} & \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C}_\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C} & z\mathbf{E} - \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{z} + \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C}_\mathbf{z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\end{bmatrix}\ . \tag{2.105}$$

Es gilt nun nachfolgender Satz:

Satz 2.8 (Übertragungsnullstellen des stationären Kalman-Filters)**.** *Die Übertragungsnullstellen von* (2.105) *sind durch die Beziehung*

$$\det(z\mathbf{E} - \boldsymbol{\Phi}_\mathbf{z}) = 0 \tag{2.106}$$

gegeben.

Beweis. Bevor Satz 2.8 bewiesen wird, muss kurz auf den Begriff einer Übertragungsnullstelle eingegangen werden. Die Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$ eines Eingrößensystems werden meist als Wurzeln des Zählerpolynoms von $G(z)$ charakterisiert. Im Fall eines Mehrgrößensystems mit einer Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ ist dies nicht mehr so einfach möglich. Eine strikte Definition ist in folgender Form gegeben: Die Nullstellen der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ sind die Wurzeln der Zählerpolynome der Smith-McMillan Form von $\mathbf{G}(z)$. Zur Definition der Smith-McMillan Form sei auf die am Ende angeführte Literatur verwiesen. Im Weiteren wird eine physikalische Interpretation einer Übertragungsnullstelle gegeben. Dazu betrachte man das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}_k \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.107a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{2.107b}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p-dimensionalen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q-dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, sowie den Matrizen $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$. Eine komplexe Zahl z_j ist eine Übertragungsnullstelle, wenn zu einem Eingang der Form $(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_0\left(z_j^k\right)$, $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$, ein Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ so existiert, dass der Ausgang $(\mathbf{y}_k)$ für alle Zeiten $k \geq 0$ identisch verschwindet. Diese Eigenschaft

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

ist in der Literatur auch unter dem Namen *transmission-blocking* bekannt.

Im z-Bereich errechnet sich die Ausgangsgröße $\mathbf{y}_z(z) = \mathcal{Z}\{(\mathbf{y}_k)\}$ von (2.107) als Antwort auf die Eingangsgröße

$$\mathbf{u}_z(z) = \mathcal{Z}\{(\mathbf{u}_k)\} = \mathcal{Z}\Big\{\mathbf{u}_0\Big(z_j^k\Big)\Big\} = \mathbf{u}_0\frac{z}{z-z_j} \tag{2.108}$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ zu

$$\mathbf{y}_z(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\left(z\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0\frac{z}{z-z_j}\right). \tag{2.109}$$

Unter Zuhilfenahme der Resolventen-Identität

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1} - (z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1} = (z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}(z_j-z)(z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1} \tag{2.110}$$

lässt sich (2.109) in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_z(z) = \mathbf{C}\Big((z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1} + (z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}(z_j-z)(z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\Big)\frac{\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0 z}{z-z_j} + \\ \mathbf{C}(z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}z\mathbf{x}_0 \\ = \mathbf{C}(z\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}z\Big(\mathbf{x}_0 - (z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0\Big) + \mathbf{C}(z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0\frac{z}{z-z_j}\end{aligned} \tag{2.111}$$

umschreiben.

Aufgabe 2.11. Beweisen Sie die Identität von (2.110).

Man erkennt aus (2.111), dass $\mathbf{y}_z(z)$ nur dann identisch verschwindet, wenn die Gleichungen

$$\mathbf{x}_0 - (z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \tag{2.112a}$$

$$\mathbf{C}(z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \tag{2.112b}$$

erfüllt sind. Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass für eine Übertragungsnullstelle z_j nichttriviale Vektoren $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{x}_0$ existieren, die dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix}(z_j\mathbf{E}-\mathbf{\Phi}) & -\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{2.113}$$

genügen und die Eigenschaft besitzen, dass der Ausgang $(\mathbf{y}_k)$ von (2.107) für die Eingangsgröße $(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_0\Big(z_j^k\Big)$ und den Anfangswert $\mathbf{x}_0$ für alle Zeiten $k \geq 0$ identisch verschwindet.

Wendet man nun dieses Ergebnis auf die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ von (2.105) mit dem Eingang $\mathbf{y}_k$ und dem Ausgang $\hat{\mathbf{x}}_k$ an, so lauten in diesem Fall die Bedingungen

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

(2.113)

$$\begin{bmatrix} z_j\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C} & \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}\mathbf{C}_\mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C} & z_j\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_\mathbf{z} + \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C}_\mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{z}}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z} \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.114a}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{z}}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \; . \tag{2.114b}$$

Aufgabe 2.12. Leiten Sie die Beziehungen (2.114) her.

Aus (2.114b) erhält man $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}(\mathbf{C}_\mathbf{z}\hat{\mathbf{z}}_0 - \mathbf{y}_0) &= \mathbf{0} \\ \left(z_j\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_\mathbf{z} + \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{C}_\mathbf{z}\right)\hat{\mathbf{z}}_0 - \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{z}\mathbf{y}_0 &= \mathbf{0} \; . \end{aligned} \tag{2.115}$$

Unter Voraussetzung der Spaltenregularität von $\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{x}$ folgt $\mathbf{C}_\mathbf{z}\hat{\mathbf{z}}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ und damit $(z_j\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_\mathbf{z})\hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{0}$. Man erkennt nun, dass (2.115) genau dann nichttriviale Lösungen für $\mathbf{y}_0$ und $\hat{\mathbf{z}}_0$ besitzt, wenn gilt $\det(z_j\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_\mathbf{z}) = 0$, womit Satz 2.8 gezeigt ist. □

Hinweis: Dieses Ergebnis zeigt, dass das stationäre Kalman-Filter (2.103) Nullstellen an den Polen des Störmodells (2.101) aufweist. Um nun ein Kalman-Filter zu entwerfen, das bestimmte Frequenzen abblockt, wählt man einfach ein Störmodell mit Polen an diesen Frequenzen. Generell lässt sich sagen, dass je größer die Energie der Störung bei den jeweiligen Frequenzen ist, desto mehr unterdrückt das Kalman-Filter diese Frequenzen.

Aufgabe 2.13. Entwerfen Sie ein Kalman-Filter zur Schätzung der Drehwinkelgeschwindigkeit ω eines permanenterregten Gleichstrommotors auf Basis einer Messung des Drehwinkels φ. Für eine gewisse Wahl der Parameter und unter Vernachlässigung der Dynamik des elektrischen Teilsystems erhält man das Modell des Gleichstrommotors in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \varphi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} \; . \end{aligned}$$

Es ist nun gewünscht, dass Resonanzfrequenzen mit einer Kreisfrequenz ω_0, welche durch die mechanische Last resultieren, vom Kalman-Filter unterdrückt werden. Das

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

zugehörige Störmodell kann in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix} n$$
$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

mit weißem Rauschen n als Eingangssignal modelliert werden. Entwerfen Sie für diese Spezifikationen ein Kalman-Filter für eine Abtastzeit $T_a = 0.05$ s und untersuchen Sie den Einfluss verschiedener Werte für ξ im Bereich $0.01 < \xi < 0.7$. Wählen Sie dazu $\omega_0 = 3$, $\mathbf{G} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ sowie $\mathbf{R} = 1$. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm des Kalman-Filters und testen Sie ihr Kalman-Filter durch Simulation.

2.4 Das Extended Kalman-Filter

Bevor das Extended Kalman-Filter als Beobachter für nichtlineare Systeme besprochen wird, soll im Folgenden das Kalman-Filter von Abschnitt 2.3 für lineare zeitvariante Abtastsysteme der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.116a}$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \tag{2.116b}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p-dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q-dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, der r-dimensionalen Störung $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$, dem Messrauschen $\mathbf{v}$ sowie den zeitvarianten Matrizen $\mathbf{\Phi}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{\Gamma}_k \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{q\times n}$ und $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{q\times p}$ angeschrieben werden. Analog zu Abschnitt 2.3 werden folgende Annahmen getroffen:

(1) Für die Störung $\mathbf{w}$ und das Messrauschen $\mathbf{v}$ wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\left(\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{R}_k\delta_{kj} \tag{2.117a}$$
$$\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{Q}_k\delta_{kj} \tag{2.117b}$$
$$\mathrm{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{0} \tag{2.117c}$$

mit $\mathbf{Q}_k \geq 0$ sowie $\mathbf{R}_k > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

(2) Der Erwartungswert des Anfangswertes und die Kovarianzmatrix des Anfangsfehlers sind durch

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0 \qquad \mathrm{E}\left([\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0]^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{P}_0 \geq 0 \tag{2.118}$$

mit dem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_0$ des Anfangswertes $\mathbf{x}_0$ gegeben.

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

(3) Die Störung $\mathbf{w}_k$, $k \geq 0$, und das Messrauschen $\mathbf{v}_l$, $l \geq 0$, sind mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0$ nicht korreliert, d. h. es gilt

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \tag{2.119a}$$

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{v}_l \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0}\ . \tag{2.119b}$$

Die Herleitung des Kalman-Filters für das System (2.116) erfolgt auf vollkommen analoge Art und Weise wie im Abschnitt 2.3 und lautet für $k \geq 0$, vergleiche dazu (2.89)–(2.91),

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} \Big(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\Big)^{-1} \tag{2.120a}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k) \tag{2.120b}$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} \Big(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\Big)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\ . \tag{2.120c}$$

Wenn der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ bekannt ist, dann setzt man $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$ und für den Fall, dass über den Anfangswert keine Information vorliegt, wird typischerweise $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{P}_0 = \alpha \mathbf{E}$ mit $\alpha \gg 1$ gewählt. Es sei darauf hingewiesen, dass sich auch diese Darstellung für $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ und $\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\Big) \neq \mathbf{0}$ analog zu den Diskussionen im letzten Abschnitt verallgemeinern lassen.

In der Literatur ist es oft üblich, das Kalman-Filter in einer etwas anderen Form darzustellen. Dabei wird die optimale Schätzung des Zustandes $\mathbf{x}_k$ und der Fehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_k$ unter Berücksichtigung von $0, \ldots, k-1$ Messungen, vergleiche Definition 2.3,

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \tag{2.121a}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}(k|k-1) = \mathrm{E}\Bigg(\Big[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\Big]\Big[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\Big]^{\mathrm{T}}\Bigg) \tag{2.121b}$$

als *a priori Schätzung* und die optimale Schätzung von $\mathbf{x}_k$ und $\mathbf{P}_k$ unter Berücksichtigung von $0, \ldots, k$ Messungen

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}(k|k) \tag{2.122a}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}(k|k) = \mathrm{E}\Bigg(\Big[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+\Big]\Big[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+\Big]^{\mathrm{T}}\Bigg) \tag{2.122b}$$

als *a posteriori Schätzung* bezeichnet. (2.120) kann damit in der äquivalenten Form

Kalman Verstärkungsmatrix:	$\hat{\mathbf{L}}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} \Big(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\Big)^{-1}$	(2.123a)
Zustandsschätzung Update:	$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\mathbf{L}}_k \Big(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k\Big)$	(2.123b)
Fehlerkovarianz Update:	$\mathbf{P}_k^+ = \Big(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k\Big) \mathbf{P}_k^-$	(2.123c)
Zustandsextrapolation (2.87):	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{u}_k$	(2.123d)
Fehlerkovarianzextrapolation (2.88):	$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^{\mathrm{T}}$	(2.123e)

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

für $k \geq 0$ und die Anfangswerte $\hat{\mathbf{x}}_0^- = \hat{\mathbf{x}}_0$ und $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}_0$, angeschrieben werden.

Aufgabe 2.14. Zeigen Sie die Äquivalenz der Beziehungen (2.120) und (2.123). Führen Sie dazu in (2.123) folgende Substitutionen durch $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}$, $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_k$, $\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{P}_{k+1}$, $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_k$ und $\mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{L}}_k = \hat{\mathbf{K}}_k$.

Dem Extended Kalman-Filter (EKF) Entwurf liegt im Allgemeinen ein nichtlineares, zeitvariantes, zeitkontinuierliches Mehrgrößensystem der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.124a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \tag{2.124b}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p-dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q-dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, der r-dimensionalen Störung $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ und dem Messrauschen $\mathbf{v}$ zugrunde. Da das Kalman-Filter im Normalfall in einem Digitalrechner implementiert wird, die Stellgrößen über ein Halteglied nullter Ordnung (D/A-Wandler) mit der Abtastzeit T_a auf den Prozess aufgeschaltet und die Messgrößen mit der Abtastzeit T_a über einen A/D-Wandler abgetastet werden, muss das zu (2.124) zugehörige Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.125a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \tag{2.125b}$$

berechnet werden. Aus der Vorlesung Automatisierung (Abschnitt 6.2.1) ist bekannt, dass zur Bestimmung des Abtastsystems die exakte Lösung von (2.124) notwendig ist.

Hinweis: Die Lösung eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems der Form (2.124) ist bekanntermaßen nur in Spezialfällen möglich ist. Daher wird im Folgenden eine Näherungslösung mit Hilfe eines Integrationsverfahrens gesucht. Dazu nimmt man an, dass die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ und die Störung $\mathbf{w}(t)$ für das Abtastintervall $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ konstant sind, d. h. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT_a) = \mathbf{u}_k$ und $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(kT_a) = \mathbf{w}_k$, und integriert die Differenzialgleichung (2.124a) im Abtastintervall

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, t)\,\mathrm{d}t \tag{2.126}$$

mit $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}((k+1)T_a)$ und $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_a)$. Die Approximation des Integrals in (2.126) kann auf unterschiedliche Arten erfolgen. Im Weiteren sollen lediglich zwei mögliche Lösungen angegeben werden:

(1) *Euler-Verfahren*

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, kT_a)T_a \tag{2.127}$$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

(2) *Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung*

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta\mathbf{x}_1 + 2\Delta\mathbf{x}_2 + 2\Delta\mathbf{x}_3 + \Delta\mathbf{x}_4}{6} \tag{2.128}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{x}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, kT_a)T_a \\
\Delta\mathbf{x}_2 &= \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}_k + \frac{\Delta\mathbf{x}_1}{2}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, kT_a + \frac{T_a}{2}\Big)T_a \\
\Delta\mathbf{x}_3 &= \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}_k + \frac{\Delta\mathbf{x}_2}{2}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, kT_a + \frac{T_a}{2}\Big)T_a \\
\Delta\mathbf{x}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_3, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, (k+1)T_a)T_a\ .
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Dabei wurde für $\Delta\mathbf{x}_4$ in (2.129) der linksseitige Grenzwert $\lim_{t\to(k+1)T_a} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ und $\lim_{t\to(k+1)T_a} \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k$ eingesetzt.

Die Ausgangsgleichung (2.125b) des Abtastsystems erhält man für beide Fälle sehr einfach, indem man die Ausgangsgleichung (2.124b) des zeitkontinuierlichen Mehrgrößensystems für $t = kT_a$ auswertet

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, kT_a) = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)\ . \tag{2.130}$$

Nimmt man nun an, dass durch die Beziehungen (2.126)–(2.130) ein Abtastsystem der Form (2.125) gegeben ist, dann beruht die *Idee des Extended Kalman-Filters* darauf, dass für die rechte Seite von (2.125a) eine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^+$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$ und $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ durchgeführt und nach dem linearen Term abgebrochen wird, d. h.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\Big(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+\Big) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{w}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\mathbf{w}_k\ . \tag{2.131}$$

Analog dazu wird die rechte Seite der Ausgangsgleichung (2.125b) in eine Taylor-Reihe um den Punkt $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$ und $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ entwickelt und nach dem linearen Term abgebrochen

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_k}\mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\Big(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\Big) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_k}\mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\mathbf{v}_k\ . \tag{2.132}$$

Man beachte, dass hierbei durchgehend folgende vereinfachte Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)\Big|_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k=\mathbf{0}} \tag{2.133}$$

verwendet wurde. Die Beziehungen (2.131) und (2.132) können für die weiteren Betrachtungen kompakter in der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \tag{2.134a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \breve{\mathbf{u}}_k + \breve{\mathbf{v}}_k \tag{2.134b}$$

mit

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) & \bar{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) - \mathbf{\Phi}_k\hat{\mathbf{x}}_k^+ \\
\mathbf{G}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) & \mathbf{C}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) \\
\breve{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) - \mathbf{C}_k\hat{\mathbf{x}}_k^- & \breve{\mathbf{v}}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_k}\mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\mathbf{v}_k
\end{aligned} \tag{2.135}$$

geschrieben werden. Es ist nun offensichtlich, dass die Struktur des Systems (2.134) unmittelbar die Anwendung des Kalman-Filters gemäß (2.123) ermöglicht. Die für die Implementierung erforderlichen Rechenschritte werden im Folgenden nochmals zusammengefasst.

(1) Für das nichtlineare, zeitvariante, zeitkontinuierliche Mehrgrößensystem (2.124) berechne man ein Abtastsystem der Form (2.125).

(2) Der geschätzte Zustand und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers müssen für den Anfangszeitpunkt mit $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ und $\mathbf{P}_0^-$ initialisiert werden.

(3) Von der Störung $\mathbf{w}_k$ und vom Messrauschen $\breve{\mathbf{v}}_k$ in (2.134) wird wiederum vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathrm{E}(\breve{\mathbf{v}}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\Big(\breve{\mathbf{v}}_k\breve{\mathbf{v}}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{R}_k\delta_{kj} \tag{2.136a}$$

$$\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{Q}_k\delta_{kj} \tag{2.136b}$$

$$\mathrm{E}\Big(\mathbf{w}_k\breve{\mathbf{v}}_j^{\mathrm{T}}\Big) = \mathbf{0} \tag{2.136c}$$

mit $\mathbf{Q}_k \geq 0$ sowie $\mathbf{R}_k > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

(4) Die Iterationsgleichungen des Extended Kalman-Filters lauten dann für $k \geq 0$

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

$$\mathbf{C}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) \tag{2.137a}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}\Big(\mathbf{C}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\Big)^{-1} \tag{2.137b}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\mathbf{L}}_k\Big(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\hat{\mathbf{x}}_k^- - \breve{\mathbf{u}}_k\Big) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\mathbf{L}}_k\Big(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big)\Big) \tag{2.137c}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \Big(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{L}}_k\mathbf{C}_k\Big)\mathbf{P}_k^- \tag{2.137d}$$

$$\mathbf{\Phi}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) \tag{2.137e}$$

$$\mathbf{G}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) \tag{2.137f}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_k\hat{\mathbf{x}}_k^+ + \underbrace{\mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) - \mathbf{\Phi}_k\hat{\mathbf{x}}_k^+}_{\bar{\mathbf{u}}_k} = \mathbf{F}_k\Big(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\Big) \tag{2.137g}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_k\mathbf{P}_k^+\mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^{\mathrm{T}}\ . \tag{2.137h}$$

Hinweis: Beim Extended Kalman-Filter Entwurf wird angenommen, dass die linearisierte Transformation von Mittelwert und Kovarianz in guter Genauigkeit dem Mittelwert und der Kovarianz der nichtlinearen Transformation entspricht. Diese Annahme trifft im Allgemeinen nicht zu, weshalb zur Verbesserung des Beobachterentwurfes für nichtlineare Systeme häufig das im nächsten Abschnitt betrachtete *Unscented Kalman-Filter* verwendet wird.

Aufgabe 2.15. Das mathematische Modell

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 &= x_2 + w_1\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 &= \frac{1}{2}\rho_0\exp\Big(-\frac{x_1}{k}\Big)C_w\frac{A}{m}x_2^2 - g + w_2\end{aligned}$$

beschreibt den freien Fall eines Körpers der Masse m und der Querschnittsfläche A in der Erdatmosphäre mit der Höhe x_1 und der Geschwindigkeit x_2. Der Term $\rho_0\exp(-x_1/k)$ entspricht dabei der höhenabhängigen Dichte in der Atmosphäre (ρ_0 Dichte auf Meereshöhe), womit der Term mit x_2^2 die Verzögerung durch den Luftwiderstand mit dem Luftwiderstandsbeiwert C_w beschreibt. Weiterhin stellt g die Erdbeschleunigung dar.

Das Prozessrauschen ist durch die stochastischen Größen w_1 und w_2 gegeben. Die Höhe x_1 kann über die Ausgangsgleichung

$$y = x_1 + v$$

mit dem Messrauschen v ermittelt werden.

Entwerfen Sie für die Parameter $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, $k = 9100\,\mathrm{m}$, $A = 0.5\,\mathrm{m^2}$, $m = 100\,\mathrm{kg}$, und $C_w = 0.5$ ein Extended Kalman-Filter, das neben der Höhe x_1 und der Geschwindigkeit x_2 auch den konstanten Luftwiderstandsbeiwert

©W. Kemmetmüller, A. Kugi, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

C_w schätzt. Erweitern Sie dazu das Differentialgleichungssystem um den Zustand $x_3 = C_w$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3 = 0 + w_3$$

und der Prozessstörungskomponente w_3. Verwenden Sie zur Bestimmung des Abtastsystems das Euler-Verfahren. Nehmen Sie an, dass die nominellen Werte bzw. Anfangsbedingungen der Größen C_w, x_1 und x_2 normalverteilt sind. Die entsprechenden Werte der Mittelwerte und Varianzen können der nachfolgenden Tabelle 2.1 entnommen werden. Für die Simulation nehmen Sie folgende Werte an: $C_w = 0.6$, $x_1(0) = 39\,500\,\mathrm{m}$ und $x_2(0) = -10\,\mathrm{m/s}$.

Variable	Mittelwert	Varianz
C_w	0.5	1
$x_1(0)$	$39 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$	$1 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^2$
$x_2(0)$	$0\,\mathrm{m/s}$	$1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

Tabelle 2.1: Mittelwerte und Varianzen der Parameter bzw. der Anfangsbedingungen.

Aufgabe 2.16. Zur Positionsbestimmung eines Fahrzeuges in einem zweidimensionalen Raum (o-Achse: Ost-Koordinate, n-Achse: Nord-Koordinate) soll ein Extended Kalman-Filter eingesetzt werden. Mehrere Messstationen mit den Koordinaten (O_i, N_i), $i = 1, \ldots, M$ messen den Abstand zum Fahrzeug. Die Beschleunigung des Fahrzeugs in Nord- und Ost-Richtung wird durch weißes Rauschen modelliert. Das Differenzengleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} o_{k+1} \\ n_{k+1} \\ o_{v,k+1} \\ n_{v,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} o_k \\ n_k \\ o_{v,k} \\ n_{v,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \\ w_{3,k} \\ w_{4,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_k}$$

beschreibt das Fahrzeugverhalten, wobei o_k und n_k bzw. $o_{v,k}$ und $n_{v,k}$ die Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten des Fahrzeuges bezogen auf den Ursprung eines ortsfesten Koordinatensystems in Ost- und Nordrichtung zum Zeitpunkt kT_a mit der Abtastzeit T_a bezeichnen und $w_{j,k}$, $j = 1, \ldots, 4$ die Komponenten des Prozessrauschens sind. Im Weiteren sind durch

$$y_{i,k} = \sqrt{(n_k - N_i)^2 + (o_k - O_i)^2} + v_{i,k}, \quad i = 1, \ldots, M$$

mit dem Messrauschen $v_{i,k}$, $i = 1, \ldots, M$ die Entfernungsmessungen des Fahrzeuges von den Stationen gegeben. Nehmen Sie an, dass alle stochastischen Größen $(w_{j,k})$ und $(v_{i,k})$ normalverteilt, unkorreliert und mittelwertfrei sind. Die Abtastzeit sei mit