

3 Optimaler Zustandsregler

Das Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung eines optimalen Zustandsreglers für lineare, zeitinvariante Systeme und die Kombination dieses Zustandsreglers mit dem optimalen Zustandsbeobachter des letzten Kapitels. Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.1a}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \tag{3.1b}$$

mit dem n -dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p -dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q -dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Gesucht ist nun eine Steuerfolge $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ die das Gütefunktional

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2 \mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k \right) + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \end{aligned} \tag{3.2}$$

für geeignete *Gewichtungsmatrizen* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ minimiert. Wegen des quadratischen Gütekriteriums (3.2) ist dieser Reglerentwurf in der Literatur auch unter dem Namen *LQR (Linear Quadratic Regulator)-Problem* zu finden. Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Methode der *dynamischen Programmierung nach Bellman* herangezogen.

3.1 Dynamische Programmierung nach Bellman

Die Grundlage der dynamischen Programmierung bildet das *Optimalitätsprinzip*:

Satz 3.1 (Optimalitätsprinzip). *Eine optimale Lösung hat die Eigenschaft, dass bei jedem Punkt dieser Lösung beginnend die verbleibende Lösung optimal im Sinne der zu lösenden Aufgabe ist mit dem gewählten Punkt als Anfangsbedingung.*

Die Abbildung 3.1 veranschaulicht Satz 3.1. Diese Idee wird nun im Sinne der *dynamischen Programmierung nach Bellman* so verwendet, dass die Optimierungsaufgabe (3.2) vom Endzeitpunkt N beginnend rückwärts gelöst wird. Dabei kann der Wert der optimalen Steuerung für den Zeitpunkt N , also \mathbf{u}_{N-1} , unabhängig vom erreichten Zustand \mathbf{x}_{N-1} gelöst werden. Im nächsten Schritt wird ausgehend von der optimalen Lösung \mathbf{u}_{N-1}

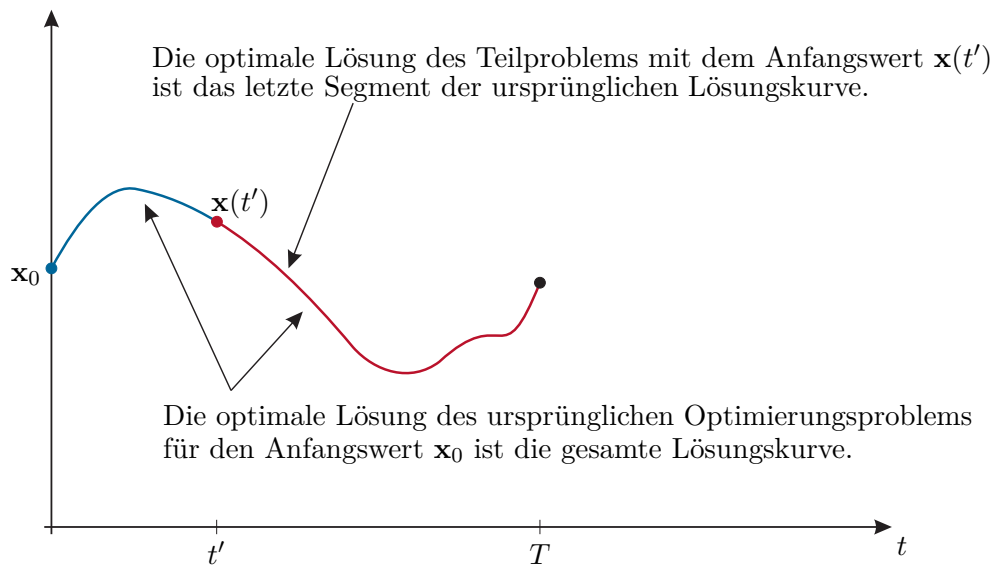


Abbildung 3.1: Zum Optimalitätsprinzip.

das optimale \mathbf{u}_{N-2} berechnet. Wiederholt man diese Vorgehensweise bis $k = 0$, so ist die optimale Steuerstrategie gefunden.

Da bei der dynamischen Programmierung die Linearität der Strecke nicht notwendig ist, wird vorerst die Optimierungsaufgabe

$$\min_{(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J(\mathbf{x}_0) \quad \text{mit} \quad J(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} j_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + s(\mathbf{x}_N) \quad (3.3)$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.4)$$

untersucht. Wie bereits erwähnt, wird die Optimierungsaufgabe (3.3) vom Endzeitpunkt $k = N$ beginnend rückwärts gelöst. Da $J(\mathbf{x}_N)$ unabhängig vom Stelleingang \mathbf{u} ist, gilt trivialerweise

$$J^*(\mathbf{x}_N) = s(\mathbf{x}_N), \quad (3.5)$$

wobei $J^*(\mathbf{x}_N)$ den optimalen Wert von $J(\mathbf{x}_N)$ beschreibt. Nach dem Optimalitätsprinzip gilt für die optimale Stellfolge $\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*$ mit

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} j_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*) + s(\mathbf{x}_N) \quad (3.6)$$

weiterhin die Beziehung

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^l j_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*) + \underbrace{\sum_{k=l+1}^{N-1} j_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*) + s(\mathbf{x}_N)}_{J^*(\mathbf{x}_{l+1})} \quad (3.7)$$

mit

$$J^*(\mathbf{x}_{l+1}) = \min_{(\mathbf{u}_{l+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J(\mathbf{x}_{l+1}) \quad (3.8)$$

sowie

$$J(\mathbf{x}_{l+1}) = \sum_{k=l+1}^{N-1} j_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + s(\mathbf{x}_N) \quad (3.9)$$

und unter der Nebenbedingung (3.4). Man beachte, dass (3.8) mit (3.9) für den Anfangswert \mathbf{x}_{l+1} gelöst wird. Will man nun auf Basis von (3.8) einen Schritt zurückgehen und den optimalen Wert des Gütekriteriums $J^*(\mathbf{x}_l)$ bestimmen, dann folgt aus dem Optimalitätsprinzip die Ersatzaufgabe

$$J^*(\mathbf{x}_l) = \min_{\mathbf{u}_l} \left(j_l(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l) + J^* \left(\underbrace{\mathbf{x}_{l+1}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l)} \right) \right). \quad (3.10)$$

Das Minimum bezüglich \mathbf{u}_l in (3.10) kann dabei meistens aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_l} \{j_l(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l) + J^*(\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l))\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_l} j_l(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} J^*(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_l} \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \mathbf{u}_l) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

ermittelt werden.

Beispiel 3.1. Als nichtregelungstechnische Anwendung betrachte man ein einfaches Zuweisungsproblem. Gegeben sei eine Investitionssumme A , die auf N Projekte aufgeteilt werden soll. Es sei weiters angenommen, dass bei der Zuweisung von einer Summe u_k zum Projekt k das Projekt einen Gewinn $g_k(u_k)$ abwirft. Die zu lösende Optimierungsaufgabe lautet daher

$$\max_{(u_0, \dots, u_{N-1})} J(x_0) \quad \text{mit} \quad J(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(u_k) \quad \text{unter der NB} \quad \sum_{k=0}^{N-1} u_k = A. \quad (3.12)$$

Die Aufgabe kann nun in eine äquivalente Regelungsaufgabe der Form

$$\max_{(u_0, \dots, u_{N-1})} J(x_0) \quad \text{mit} \quad J(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(u_k) \quad (3.13)$$

unter der Nebenbedingung

$$x_{k+1} = x_k - u_k \quad \text{mit} \quad x_0 = A \quad \text{und} \quad x_N = 0 \quad (3.14)$$

umformuliert werden. Wählt man beispielsweise für $g_k(u_k) = \sqrt{u_k}$, dann erhält man mit Hilfe der dynamische Programmierung

$$\begin{aligned}
 J^*(x_N) &= 0 \\
 J^*(x_{N-1}) &= \max_{u_{N-1}} \left\{ \sqrt{u_{N-1}} \right\} \text{ unter der NB } \underline{x_{N-1}} - u_{N-1} = 0 & u_{N-1}^* &= x_{N-1} \\
 J^*(x_{N-2}) &= \max_{u_{N-2}} \left\{ \sqrt{u_{N-2}} + \sqrt{x_{N-2} - u_{N-2}} \right\} = \sqrt{2x_{N-2}} & u_{N-2}^* &= x_{N-2}/2 \\
 J^*(x_{N-3}) &= \max_{u_{N-3}} \left\{ \sqrt{u_{N-3}} + \sqrt{2(x_{N-3} - u_{N-3})} \right\} = \sqrt{3x_{N-3}} & u_{N-3}^* &= x_{N-3}/3 \\
 &\vdots & & \vdots \\
 J^*(x_0) &= \sqrt{Nx_0} & u_0^* &= x_0/N .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aufgabe 3.1. Interpretieren Sie das Ergebnis (3.15).

3.2 Das LQR-Problem

Wendet man das Prinzip der dynamischen Programmierung auf die Aufgabe (3.2) mit der Nebenbedingung (3.1) an, so erhält man für $k = N$

$$J^*(\mathbf{x}_N) = \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \tag{3.16}$$

und für $k = N - 1$

$$\begin{aligned}
 J^*(\mathbf{x}_{N-1}) &= \\
 &\min_{\mathbf{u}_{N-1}} \left\{ \left(\mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{N} \mathbf{x}_{N-1} \right) + J^* \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{N-1} \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 J^*(\mathbf{x}_{N-1}) &= \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \left\{ \left(\mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{N} \mathbf{x}_{N-1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \left(\mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{N-1} \right)^T \mathbf{S} \left(\mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{N-1} \right) \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Minimiert man (3.18) bezüglich \mathbf{u}_{N-1} ergibt sich die optimale Lösung \mathbf{u}_{N-1}^* von \mathbf{u}_{N-1} zu

$$\mathbf{u}_{N-1}^* = - \left(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S} \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S} \mathbf{\Phi} \right) \mathbf{x}_{N-1} . \tag{3.19}$$

Durch Einsetzen von (3.19) in (3.18) folgt

$$\begin{aligned}
 & J^*(\mathbf{x}_{N-1}) \\
 &= \mathbf{x}_{N-1}^T \left(\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{S} \Phi \right) \mathbf{x}_{N-1} + (\mathbf{u}_{N-1}^*)^T \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma \right) \mathbf{u}_{N-1}^* + 2(\mathbf{u}_{N-1}^*)^T \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{S} \Phi \right) \mathbf{x}_{N-1} \\
 &= \mathbf{x}_{N-1}^T \left\{ \left(\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{S} \Phi \right) - \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{S} \Phi \right)^T \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{S} \Phi \right) \right\} \mathbf{x}_{N-1}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Damit lässt sich unmittelbar nachfolgender Satz angeben:

Satz 3.2 (Linear Quadratic Regulator). Die eindeutige Lösung der Optimierungsaufgabe (3.2) für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System (3.1) mit der symmetrischen positiv semi-definiten Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{P}_N$, der symmetrischen positiv semi-definiten Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

und der positiv definiten Matrix $\left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma \right)$ ist durch das Regelgesetz

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \tag{3.22}$$

mit

$$\mathbf{K}_k = - \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Gamma \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \right) \tag{3.23}$$

und

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \right) - \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \right)^T \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Gamma \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \right) \tag{3.24}$$

gegeben. Der minimale Wert des Gütefunktional (3.2) errechnet sich zu

$$\min_{(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J(\mathbf{x}_0) = J^*(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_0 \tag{3.25}$$

und es gilt $\mathbf{P}_k \geq 0$ für alle $k = 0, 1, \dots, N$.

Beweis von Satz 3.2. Das Regelgesetz (3.22), (3.23) sowie die Iterationsvorschrift (3.24) und auch die Beziehung (3.25) erhält man unmittelbar durch wiederholte Anwendung der Iterationsvorschrift der dynamischen Programmierung aus den Gleichungen (3.19) und (3.20). Es bleibt damit zu zeigen, dass \mathbf{P}_k für alle $k = 0, 1, \dots, N$ positiv semi-definit ist. Dazu setze man in (3.20) für $\mathbf{u}_{N-1}^* = \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}$ ein, womit folgt

$$\begin{aligned}
 J^*(\mathbf{x}_{N-1}) &= \mathbf{x}_{N-1}^T \left(\left(\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_N \Phi \right) + \mathbf{K}_{N-1}^T \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma \right) \mathbf{K}_{N-1} \right. \\
 &\quad \left. + 2\mathbf{K}_{N-1}^T \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Phi \right) \right) \mathbf{x}_{N-1} = \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

und damit für \mathbf{P}_k von (3.24)

$$\mathbf{P}_k = (\Phi + \Gamma \mathbf{K}_k)^T \mathbf{P}_{k+1} (\Phi + \Gamma \mathbf{K}_k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Da nun die Matrizen $\mathbf{P}_N = \mathbf{S}$ und \mathbf{J} positiv semi-definit sind, ist auch direkt die positive Semi-definitheit von \mathbf{P}_k für alle $k = 0, 1, \dots, N$ gezeigt. \square

Wie bereits beim Kalman-Filter als Beobachter (siehe (2.91)) handelt es sich auch bei Gleichung (3.24) um eine *diskrete Riccati-Gleichung*, weshalb der *zeitvariante Zustandsregler* (3.22), (3.23) auch als *Riccati-Regler* bezeichnet wird. Man beachte jedoch, dass die diskrete Riccati-Gleichung (3.24) im Gegensatz zum Kalman-Filter *rückwärts läuft!* Für eine Echtzeimplementierung des Reglers (3.22), (3.23) muss daher die Endzeit N bekannt sein und die Matrizen \mathbf{P}_k bzw. \mathbf{K}_k müssen vorwegberechnet werden.

Wenn die Endzeit $N \rightarrow \infty$ geht, kann man wie bereits beim Kalman-Filter (vergleiche dazu (2.93), (2.94)) eine stationäre Lösung \mathbf{P}_s und \mathbf{K}_s aus (3.22)–(3.24) berechnen. Man könnte nun die stationäre Lösung \mathbf{P}_s der diskreten Riccati-Gleichung (3.24) so bestimmen, dass man vom Anfangswert $\mathbf{P}_\infty = \alpha \mathbf{E}$ für $\alpha \gg 1$ beginnend so lange iteriert, bis sich \mathbf{P}_k nur noch hinreichend wenig im Sinne einer Norm ändert. Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die zugehörige *diskrete algebraische Riccati-Gleichung* für $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_s$ in (3.24)

$$\mathbf{P}_s = \left(\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_s \Phi \right) - \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right)^T \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) \quad (3.28)$$

zu lösen. Damit hat aber der *stationäre Riccati-Regler*

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{K}_s \mathbf{x}_k \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{K}_s = - \left(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) \quad (3.29b)$$

die Struktur eines klassischen Zustandsreglers gemäß Abschnitt 8 des Skripts Automatisierung.

Die diskrete algebraische Riccati-Gleichung (3.28) hat eine eindeutige symmetrische positiv semi-definite Lösung \mathbf{P}_s mit der Eigenschaft, dass sämtliche Eigenwerte von $(\Phi + \Gamma \mathbf{K}_s)$ im offenen Inneren des Einheitskreises liegen, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Das Paar (Φ, Γ) ist *stabilisierbar*, d. h. sämtliche Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises sind erreichbar, und
- (2) das Paar (\mathbf{C}_J, Φ) mit

$$0 \leq \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_J^T \\ \mathbf{D}_J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_J & \mathbf{D}_J \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ist *detektierbar*, d. h. sämtliche Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises sind über den Ausgang \mathbf{C}_J beobachtbar.

Will man nun erreichen, dass sämtliche Pole des geschlossenen Kreises mit der Dynamikmatrix $(\Phi + \Gamma K_s)$ nicht nur im Inneren des Einheitskreises liegen, sondern auf Grund von Robustheitsüberlegungen im Inneren eines Kreises mit dem Radius $r < 1$, dann muss der Reglerentwurf für das Ersatzsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\Phi} \mathbf{x}_k + \tilde{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad (3.31)$$

mit

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{r} \Phi \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma} = \frac{1}{r} \Gamma \quad (3.32)$$

durchgeführt werden. Da dann die Eigenwerte der Matrix $(\tilde{\Phi} + \tilde{\Gamma} K_s)$ im Inneren des Einheitskreises liegen, gilt wegen (3.31), dass die Eigenwerte von $(\Phi + \Gamma K_s)$ im Inneren eines Kreises mit dem Radius r zu liegen kommen.

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie, dass die Lösung des Optimierungsproblems

$$J(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \left(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2 \mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k \right) \quad (3.33)$$

mit $0 < r < 1$ für das System (3.1) durch

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{K}_s \mathbf{x}_k \quad (3.34)$$

mit

$$\mathbf{K}_s = - \left(r^2 \mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(r^2 \mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) \quad (3.35)$$

und

$$r^2 \mathbf{P}_s = \left(r^2 \mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_s \Phi \right) - \left(r^2 \mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right)^T \left(r^2 \mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(r^2 \mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) \quad (3.36)$$

gegeben ist und die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises $(\Phi + \Gamma K_s)$ im Inneren eines Kreises mit dem Radius $0 < r < 1$ liegen.

Wenn in dem Gütefunktional (3.2) nur der p -dimensionale Eingang \mathbf{u} und der q -dimensionale Ausgang \mathbf{y} gewichtet werden sollen, also

$$J(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{y}_k^T \mathbf{Q}_y \mathbf{y}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2 \mathbf{u}_k^T \mathbf{N}_y \mathbf{y}_k \right) + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \quad (3.37a)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{N}_y^T \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N, \quad (3.37b)$$

dann kann (3.37) über die Beziehung $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k$ sowie

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{x}_k^T \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \underbrace{\left(\mathbf{R} + \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{D} + \mathbf{N}_y \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{N}_y^T \right)}_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{u}_k \right. \\ & \quad \left. + 2 \mathbf{u}_k^T \underbrace{\left(\mathbf{N}_y + \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_y \right) \mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{N}}} \mathbf{x}_k \right] \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{u}_k^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{N}}^T \\ \tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

auf die Form von (3.2)

$$J(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{u}_k^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{N}}^T \\ \tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \quad (3.39)$$

überführt und mittels Satz 3.2 gelöst werden.

Hinweis: Mit Hilfe der Gewichtungsmatrix \mathbf{J} des Gütefunctionals (3.2) bzw. (3.37) kann das Verhalten des geschlossenen Regelkreises gezielt beeinflusst werden. Als generelle Faustregel gilt: je größer die Einträge der Matrix \mathbf{R} (Gewichtung der Stellgrößen) sind, desto kleiner werden die erforderlichen Stellgrößen. Weiters kann durch eine sehr hohe Gewichtung eines bestimmten Zustandes in \mathbf{Q} bzw. $\tilde{\mathbf{Q}}$ erreicht werden, dass im geschlossenen Kreis dieser Zustand sehr schnell nach Null abklingt. Da sich diese Bewertung im Zeitdiskreten als oft sehr schwierig erweist, ist es sinnvoll, das Gütefunctional (3.2) im Zeitkontinuierlichen anzugeben und es anschließend ins Zeitdiskrete zu übersetzen. Die Idee besteht dabei darin, die Zustände und die Stellgrößen im Sinne einer „Leistung“ in der Form

$$\int_0^T x^2(t) dt \quad (3.40)$$

zu bewerten. Als Ausgangspunkt betrachte man das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (3.41b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Das zugehörige Abtastsystem (siehe Abschnitt 6 des Skripts Automatisierung) errechnet sich für die Abtastzeit T_a zu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad (3.42a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (3.42b)$$

mit

$$\Phi = \exp(\mathbf{A}T_a) \quad \text{und} \quad \Gamma = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{B}. \quad (3.43)$$

Man wählt nun für das zeitkontinuierliche System (3.41) ein Gütefunktional der Form

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \int_0^T \left(\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{u}^T(t) \mathbf{N}_c \mathbf{x}(t) \right) dt + \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}_c \mathbf{x}(T) \\ &= \int_0^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c & \mathbf{N}_c^T \\ \mathbf{N}_c & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_c} dt + \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}_c \mathbf{x}(T) \end{aligned} \quad (3.44)$$

mit den symmetrischen, positiv semi-definiten Gewichtungsmatrizen \mathbf{J}_c und \mathbf{S}_c sowie der Endzeit $T = NT_a$. Um (3.44) in die Form von (3.2) überzuführen, schreibt man vorerst (3.44) wie folgt

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \left(\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{u}^T(t) \mathbf{N}_c \mathbf{x}(t) \right) dt \\ &\quad + \mathbf{x}^T(NT_a) \mathbf{S}_c \mathbf{x}(NT_a) \end{aligned} \quad (3.45)$$

um. Berücksichtigt man die Tatsache, dass die Stellgröße $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ im Abtastintervall $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ konstant ist und für den Zustand $\mathbf{x}(t)$ gilt

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\exp(\mathbf{A}(t - kT_a)) \mathbf{x}_k}_{\Phi(t-kT_a)} + \underbrace{\int_{kT_a}^t \exp(\mathbf{A}(t - \tau)) d\tau \mathbf{B} \mathbf{u}_k}_{\Gamma(t-kT_a)}, \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a, \quad (3.46)$$

dann erhält man für (3.45)

$$J(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k \right) + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \quad (3.47)$$

mit

$$\mathbf{Q} = \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi^T(t - kT_a) \mathbf{Q}_c \Phi(t - kT_a) dt = \int_0^{T_a} \Phi^T(t) \mathbf{Q}_c \Phi(t) dt \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{R} = \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \left(\Gamma^T(t - kT_a) \mathbf{Q}_c \Gamma(t - kT_a) + 2\mathbf{N}_c \Gamma(t - kT_a) + \mathbf{R}_c \right) dt \quad (3.48b)$$

$$= \int_0^{T_a} \left(\Gamma^T(t) \mathbf{Q}_c \Gamma(t) + 2\mathbf{N}_c \Gamma(t) + \mathbf{R}_c \right) dt$$

$$\mathbf{N} = \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \left(\Gamma^T(t - kT_a) \mathbf{Q}_c + \mathbf{N}_c \right) \Phi(t - kT_a) dt \quad (3.48c)$$

$$= \int_0^{T_a} \left(\Gamma^T(t) \mathbf{Q}_c + \mathbf{N}_c \right) \Phi(t) dt$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_c \quad (3.48d)$$

sowie

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad \text{und} \quad \Gamma(t) = \int_0^t \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{B}. \quad (3.49)$$

Man beachte, dass hier im Allgemeinen die Kopplungsmatrix \mathbf{N} von Null verschieden ist, selbst wenn $\mathbf{N}_c = \mathbf{0}$ gilt.

Aufgabe 3.3. Vergleichen Sie die MATLAB-Befehle `lqrd`, `dlqr` und `dlqry`. Was leisten diese Befehle? Sehen Sie sich den jeweiligen `help`-Text an und stellen Sie anschließend die Verbindung zur bisher gezeigten Theorie her.

3.3 Das LQR-Problem mit stochastischer Störung

Das Modell (3.1) gemäß (2.72) wird nun um die r -dimensionale stochastische Störung \mathbf{w} erweitert

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \mathbf{G} \mathbf{w}_k \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.50)$$

mit dem n -dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p -dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Es gelten nun folgende Annahmen:

- (1) Von der Störung \mathbf{w} wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \hat{\mathbf{Q}} \delta_{kj} \quad (3.51)$$

mit der Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{Q}} \geq 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

- (2) Der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des Anfangswertes \mathbf{x}_0 sind durch

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0 \quad \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbb{E}([\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0][\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0]^T) = \hat{\mathbf{P}}_0 \geq 0 \quad (3.52)$$

gegeben.

(3) Die Störung \mathbf{w}_k , $k \geq 0$, ist mit dem Anfangswert \mathbf{x}_0 nicht korreliert, d. h. es gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_0^T) = \mathbf{0} . \quad (3.53)$$

Damit folgt aber analog zu (2.76) und (2.77) wegen

$$\mathbf{x}_j = \Phi^j \mathbf{x}_0 + \sum_{l=0}^{j-1} \Phi^l (\Gamma \mathbf{u}_{j-1-l} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{j-1-l}) \quad (3.54)$$

und (3.52) sowie (3.53) auch die Beziehung

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_j^T) = \mathbf{0} \quad \text{für } k \geq j . \quad (3.55)$$

Da nun \mathbf{x}_k , $k \geq 0$, im Gegensatz zu (3.1) ein stochastisches Signal ist, muss das Gütefunktional (3.2) durch

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k) \right) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N) \end{aligned} \quad (3.56)$$

ersetzt werden. Zur Berechnung des optimalen Regelgesetzes, also der Minimierung von (3.56) bezüglich $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ unter der Nebenbedingung (3.50), bedient man sich wiederum der Methode der dynamischen Programmierung. Für $k = N$ gilt

$$J^*(\mathbf{x}_N) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N) \quad (3.57)$$

und für $k = N - 1$ folgt

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{x}_{N-1}) &= \\ \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \mathbb{E} &\left(\mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{N} \mathbf{x}_{N-1} + J^* \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_N \\ \Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1} \end{array} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

mit

$$J^*(\mathbf{x}_N) = (\Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1})^T \mathbf{S} (\Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1}) . \quad (3.59)$$

Minimiert man (3.58) bezüglich \mathbf{u}_{N-1} , ergibt sich die optimale Lösung \mathbf{u}_{N-1}^* von \mathbf{u}_{N-1} zu

$$\mathbf{u}_{N-1}^* = \mathbf{K}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} \quad (3.60)$$

mit

$$\mathbf{K}_{N-1} = -(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma)^{-1} (\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Phi), \quad (3.61)$$

wobei $\mathbf{S} = \mathbf{P}_N$ gesetzt wurde und die Bedingung $(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_N \mathbf{\Gamma}) > 0$ erfüllt sein muss. Durch Einsetzen von (3.60) in (3.58) erhält man

$$\begin{aligned}
 J^*(\mathbf{x}_{N-1}) = & \\
 & \mathbb{E} \left(\underbrace{\mathbf{x}_{N-1}^T \left((\mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P}_N \mathbf{\Phi}) + \mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_N \mathbf{\Gamma}) \mathbf{K}_{N-1} + 2 \mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_N \mathbf{\Phi}) \right)}_{\mathbf{P}_{N-1}} \mathbf{x}_{N-1} \right) \\
 & + \underbrace{2 \mathbb{E} \left(\mathbf{w}_{N-1}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}_N (\mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{N-1}) \right)}_{2 \operatorname{spur}(\mathbf{P}_N \mathbf{G} \mathbb{E}(\mathbf{w}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{\Phi}^T) + 2 \mathbb{E}(\mathbf{w}_{N-1}^T) \mathbf{G}^T \mathbf{P}_N \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{N-1})} + \underbrace{\mathbb{E} \left(\mathbf{w}_{N-1}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}_N \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1} \right)}_{\operatorname{spur}(\mathbf{P}_N \mathbf{G} \mathbb{E}(\mathbf{w}_{N-1} \mathbf{w}_{N-1}^T) \mathbf{G}^T)}. \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich unmittelbar folgendes Ergebnis angeben: Das optimale Regelgesetz \mathbf{u}_k^* für das System mit stochastischer Störung (3.50) entspricht dem des ungestörten Systems und lautet (siehe (3.22))

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \quad (3.63)$$

mit

$$\mathbf{K}_k = -(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) \quad (3.64a)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) - (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi})^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}). \quad (3.64b)$$

Der minimale Wert des Gütefunktional (3.56) errechnet sich nach (3.62) zu

$$\min_{(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J(\mathbf{x}_0) = J^*(\mathbf{x}_0) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{spur}(\mathbf{P}_{k+1} \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T). \quad (3.65)$$

Aufgabe 3.4. Beweisen Sie die Gültigkeit von Beziehung (3.65). Zeigen Sie weiters, dass der Ausdruck $\mathbb{E}(\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_0)$ wie folgt

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{m}_0 + \operatorname{spur}(\mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{P}}_0) \quad (3.66)$$

mit

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \operatorname{cov}(\mathbf{x}_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_0 = \mathbb{E}(\mathbf{x}_0) \quad (3.67)$$

vereinfacht werden kann.

Aus (3.65), (3.66) und (3.67) folgt also, dass der minimale Wert des Gütefunktional bei dem System mit stochastischer Störung größer als der des ungestörten Systems (siehe (3.25)) ist. Hinzu kommen nämlich zwei zusätzliche Terme: ein Term mit $\hat{\mathbf{Q}}$ zufolge der stochastischen Störung \mathbf{w} und ein Term mit $\hat{\mathbf{P}}_0$ zufolge des stochastischen Charakters des Anfangswertes \mathbf{x}_0 . In Satz 3.2 wurde gezeigt, dass $\mathbf{P}_k \geq 0$ ist für alle $k \geq 0$, sofern \mathbf{S} und \mathbf{J} von (3.56) positiv semi-definit sind. Damit kann aber, wie man aus (3.65) erkennt, das

Minimierungsproblem mit dem Gütefunktional (3.56) für $N \rightarrow \infty$ nicht gelöst werden. Um trotzdem auch für den Fall mit stochastischer Störung den stationären Riccati-Regler (3.29) berechnen zu können, setzt man das Gütefunktional in der Form

$$J(\mathbf{x}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k \right) \right) \quad (3.68)$$

an.

Aufgabe 3.5. Zeigen Sie, dass der stationäre Riccati-Regler (3.29) das Gütefunktional (3.68) mit der Nebenbedingung (3.50) minimiert und für den minimalen Wert des Gütefunktionals gilt

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \text{spur}(\mathbf{P}_s \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T)$$

mit \mathbf{P}_s als Lösung der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung (3.28).

3.4 Das LQG-Regelungsproblem

Im Folgenden sei angenommen, dass lediglich der Ausgang \mathbf{y} gemessen werden kann, der Zustand \mathbf{x} hingegen nicht zur Verfügung steht. Dazu betrachte man das auch dem Kalman-Filter zugrundeliegende (siehe (2.72)) zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k + \mathbf{G} \mathbf{w}_k \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.69b)$$

mit dem n -dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p -dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q -dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, der r -dimensionalen Störung $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$, dem Messrauschen \mathbf{v} sowie den Matrizen $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Es gelten nun wieder folgende Annahmen:

- (1) Von der Störung \mathbf{w} und vom Messrauschen \mathbf{v} wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \hat{\mathbf{Q}} \delta_{kj} \quad (3.70a)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbb{E}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \hat{\mathbf{R}} \delta_{kj} \quad (3.70b)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{0} \quad (3.70c)$$

mit $\hat{\mathbf{Q}} \geq 0$ sowie $\hat{\mathbf{R}} > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

- (2) Der Erwartungswert des Anfangswertes und die Kovarianzmatrix des Anfangsfehlers sind durch

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0 \quad \mathbb{E}([\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0]^T) = \hat{\mathbf{P}}_0 \geq 0 \quad (3.71)$$

mit dem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_0$ des Anfangswertes \mathbf{x}_0 gegeben.

- (3) Die Störung \mathbf{w}_k , $k \geq 0$, und das Messrauschen \mathbf{v}_l , $l \geq 0$, sind mit dem Anfangswert \mathbf{x}_0 nicht korreliert, d. h. es gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_0^T) = \mathbf{0} \quad (3.72a)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_l \mathbf{x}_0^T) = \mathbf{0} . \quad (3.72b)$$

Damit folgt aber wegen (3.54) und (3.70) auch die Beziehung

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{x}_j^T) = \mathbf{0} \quad \text{für } k \geq j \quad (3.73a)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_l \mathbf{x}_j^T) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } l, j . \quad (3.73b)$$

Die Regelungsaufgabe besteht nun darin, das Gütefunktional

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k) \right) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N) \end{aligned} \quad (3.74)$$

für die positiv semi-definiten Gewichtungsmatrizen \mathbf{J} und \mathbf{S} bezüglich $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ unter der Nebenbedingung (3.69) so zu minimieren, dass das Regelgesetz nur von den messbaren Ausgangsgrößen \mathbf{y} abhängt.

Bezeichnet man mit $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ den Schätzwert von \mathbf{x}_k unter Zuhilfenahme von $0, 1, \dots, k-1$ Messungen (vgl. Definition 2.3), dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k) &= \mathbb{E}((\hat{\mathbf{x}}_k - (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k))^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}}_k - (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k))) \\ &= \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_k) - 2 \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)) + \mathbb{E}((\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)) \\ &= \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_k) - 2 \operatorname{spur}(\mathbf{Q} \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T)) + \operatorname{spur}(\mathbf{Q} \mathbb{E}((\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T)) . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Im Weiteren werden nur Schätzer in Betracht gezogen, für die die Beziehung

$$\mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T) = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

gilt, also der zweite Term in Ausdruck (3.75) Null wird. Nach Satz 2.4 bzw. Aufgabe 2.5 erfüllt dies der Minimum-Varianz-Schätzer und damit auch der Gauß-Markov-Schätzer und natürlich das Kalman-Filter, vgl. dazu Aufgabe 2.5. Mittels der dynamischen Programmierung erhält man nun in einem ersten Schritt für $\mathbf{S} = \mathbf{P}_N$ den minimalen Wert des Gütefunktionals $J^*(\mathbf{x}_N)$ von $J(\mathbf{x}_N)$ zu

$$J^*(\mathbf{x}_N) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_N \mathbf{x}_N) = \operatorname{spur}(\mathbf{P}_N \mathbb{E}(\mathbf{x}_N \mathbf{x}_N^T)) \quad (3.77)$$

bzw. mit $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_N - \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N$ auch

$$J^*(\hat{\mathbf{x}}_N, \hat{\mathbf{P}}_N) = E(\mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_N \mathbf{x}_N) = E(\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N) + \text{spur}(\mathbf{P}_N \hat{\mathbf{P}}_N) \quad (3.78)$$

mit der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers

$$\hat{\mathbf{P}}_N = \text{cov}(\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{x}_N) = E((\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{x}_N)(\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{x}_N)^T). \quad (3.79)$$

Im nächsten Schritt der dynamischen Programmierung muss nun nachfolgende Minimierungsaufgabe

$$J^*(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_{N-1}} E \left(\mathbf{x}_{N-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{N-1} + 2\mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{N} \mathbf{x}_{N-1} + J^* \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_N \\ \Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1} \end{array} \right) \right) \quad (3.80)$$

mit

$$J^*(\mathbf{x}_N) = E((\Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1})^T \mathbf{P}_N (\Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1})) \quad (3.81)$$

gelöst werden. Da \mathbf{u}_{N-1} aber nicht von \mathbf{x}_{N-1} abhängen darf, löst man die Minimierungsaufgabe bezüglich eines Schätzwertes $\hat{\mathbf{x}}_{N-1}$, indem man in (3.80), (3.81)

$$\mathbf{x}_{N-1} = \mathbf{x}_{N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{N-1} + \hat{\mathbf{x}}_{N-1} \quad (3.82)$$

setzt. Das Regelgesetz mit der Reglerverstärkungsmatrix \mathbf{K}_{N-1} ist identisch zu (3.60) mit (3.61) und lautet

$$\mathbf{u}_{N-1}^* = \mathbf{K}_{N-1} \hat{\mathbf{x}}_{N-1} \quad (3.83)$$

und

$$\mathbf{K}_{N-1} = -(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma)^{-1} (\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Phi) \quad (3.84)$$

mit dem minimalen Wert des Gütefunktional

$$J^*(\mathbf{x}_{N-1}) = E \left(\mathbf{x}_{N-1}^T \underbrace{\left((\mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_N \Phi) + \mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma) \mathbf{K}_{N-1} + 2\mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{N} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Phi) \right)}_{\mathbf{P}_{N-1}} \mathbf{x}_{N-1} \right) + \underbrace{2E(\mathbf{w}_{N-1}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}_N (\Phi \mathbf{x}_{N-1} + \Gamma \mathbf{u}_{N-1}))}_{2 \text{ spur}(\mathbf{P}_N \mathbf{G} E(\mathbf{w}_{N-1} \mathbf{x}_{N-1}^T) \Phi^T) + 2 \text{ spur}(\mathbf{P}_N \mathbf{G} E(\mathbf{w}_{N-1} \hat{\mathbf{x}}_{N-1}^T) \mathbf{K}_{N-1}^T \Gamma^T)} + \underbrace{E(\mathbf{w}_{N-1}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}_N \mathbf{G} \mathbf{w}_{N-1})}_{\text{spur}(\mathbf{P}_N \mathbf{G} E(\mathbf{w}_{N-1} \mathbf{w}_{N-1}^T) \mathbf{G}^T)} + \underbrace{E((\mathbf{x}_{N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{N-1})^T \mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma) \mathbf{K}_{N-1} (\mathbf{x}_{N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{N-1}))}_{\text{spur}(E((\mathbf{x}_{N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{N-1})(\mathbf{x}_{N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{N-1})^T) \mathbf{K}_{N-1}^T (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_N \Gamma) \mathbf{K}_{N-1})} \quad (3.85)$$

Aus der Rekursion erhält man schlussendlich mit $E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = \hat{\mathbf{Q}}$ und (3.79) den minimalen Wert des Gütefunktional für alle Stellfolgenwerte zu (man vergleiche das Ergebnis mit (3.65))

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J(\mathbf{x}_0) = J^*(\mathbf{x}_0) &= E(\mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{spur}(\mathbf{P}_{k+1} \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \text{spur}(\hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{K}_k^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{K}_k). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Man erkennt, dass (3.86) unabhängig von der Art des Schätzers ist, sofern dieser die Bedingung (3.76) sowie $E(\mathbf{w}_j \hat{\mathbf{x}}_0^T)$ erfüllt. Diese Eigenschaft gemeinsam mit der Tatsache, dass die Pole beim Zustandsbeobachter- und Zustandsreglerentwurf getrennt voneinander vorgegeben werden können, bezeichnet man auch als *Separationstheorem für den optimalen Zustandsbeobachter- und Zustandsreglerentwurf*.

Da der Ausdruck $\mathbf{K}_k^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{K}_k$ für alle $k \geq 0$ positiv definit ist, kann man den dritten Term in (3.86) (bzw. den letzten Term in (3.85)) auch in der Form

$$\sum_{k=0}^{N-1} \text{spur}(\hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{K}_k^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{K}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} E((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \bar{\mathbf{K}}_k^T \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)) \quad (3.87)$$

mit der Cholesky-Zerlegung

$$\bar{\mathbf{K}}_k^T \bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{K}_k^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{K}_k \quad (3.88)$$

anschreiben. Nach Satz 2.5 ist die lineare Minimum-Varianz-Schätzung einer linearen Funktion eines Parametervektors äquivalent der linearen Funktion der Minimum-Varianz-Schätzung des Parametervektors selbst, weswegen der Wert des Gütefunktional (3.86) durch die Wahl eines Minimum-Varianz-Schätzers kleinstmöglich gemacht werden kann. Da das Kalman-Filter auf der rekursiven Minimum-Varianz-Schätzung beruht, wird das optimale LQG-Regelungsproblem durch die Kombination eines LQR-Zustandsreglers und eines Kalman-Filter Beobachters gelöst.

Dazu sei der *dynamische Regler mit optimaler Ausgangsrückführung* für das System (3.69) nach (3.83)–(3.85) und Satz 2.7 im Folgenden nochmals in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \mathbf{u}_k) \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (3.89a)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{x}}_k \quad (3.89b)$$

mit

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) - (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi})^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) \quad (3.90a)$$

$$\mathbf{K}_k = -(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) \quad (3.90b)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{\Phi}^T + \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T - \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T + \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{\Phi}^T \quad (3.90c)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T + \hat{\mathbf{R}})^{-1}, \quad (3.90d)$$

der Randbedingung $\mathbf{P}_N = \mathbf{S} \geq 0$ und der Anfangsbedingung $\hat{\mathbf{P}}_0 \geq 0$ zusammengefasst.

Man überzeugt sich leicht, dass für $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ der LQR-Zustandsregler und das Kalman-Filter gemäß der Definition im Skript Automatisierung *dual* sind. Es gilt nämlich dann für (3.90)

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi - \Phi^T \mathbf{P}_{k+1} \Gamma (\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \quad (3.91a)$$

$$\mathbf{K}_k = -(\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}_{k+1} \Phi \quad (3.91b)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \hat{\mathbf{Q}} + \Phi \hat{\mathbf{P}}_k \Phi^T - \Phi \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \Phi^T \quad (3.91c)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \Phi \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{C}^T)^{-1}, \quad (3.91d)$$

d. h. die diskrete Riccati-Gleichung des Zustandsreglers (3.91a) geht für $\Phi^T = \Phi$, $\Gamma = \mathbf{C}^T$, $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}$, $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}$ und $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}$ in die diskrete Riccati-Gleichung des Kalman-Filters (3.91c) über. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Riccati-Gleichung des Zustandsreglers rückwärts und die des Kalman-Filters vorwärts läuft. Weiters gilt für $\Phi^T = \Phi$, $\Gamma = \mathbf{C}^T$, $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}$ und $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}$ die Beziehung $\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{K}}_k^T$.

Wie bereits im Abschnitt 3.3 beim LQR-Regler mit stochastischer Störung gezeigt wurde, ist das Gütefunktional (3.74) für $N \rightarrow \infty$ nicht sinnvoll, weshalb dem stationären LQG-Problem (stationärer LQR-Regler und stationärer Kalman-Filter) das Gütekriterium

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{x}_k) \right) \quad (3.92)$$

zugrunde gelegt wird.

Man beachte, dass sich das stationäre Kalman-Filter und der stationäre Riccati-Regler gemeinsam

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \mathbf{u}_k) \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \quad (3.93a)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (3.93b)$$

auch als Reglerübertragungsmatrix $\mathbf{R}_{LQG}(z)$ mit dem q -dimensionalen Eingang \mathbf{y} und dem p -dimensionalen Ausgang \mathbf{u} in der Form

$$\mathbf{R}_{LQG}(z) = \frac{\mathbf{u}_z(z)}{\mathbf{y}_z(z)} = \mathbf{K} \left(z\mathbf{E} - (\Phi + \Gamma \mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K})) \right)^{-1} \hat{\mathbf{K}} \quad (3.94)$$

schreiben lässt.

Aufgabe 3.6. Gegeben ist das vereinfachte Modell eines Musikkassetten-Antriebs nach Abbildung 3.2. Die beiden Gleichstrommotoren können unabhängig voneinander angesteuert werden, wodurch sowohl die Bandposition x_3 (Position des Lesekopfes) als auch die Zugkraft f_e getrennt geregelt werden können.

Das Massenträgheitsmoment der Motoren inklusive der Scheiben ist durch $J = 6.375 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ gegeben, der Radius der Scheiben beträgt $r = 0.1 \text{ m}$, die Ankerkonstante der Gleichstrommotoren hat den Wert $k_m = 0.544 \text{ Nm/A}$ und das masselose Band kann näherungsweise durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten $c = 2.113 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ und einen linearen Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten

$d = 3.75 \text{ Ns/m}$ modelliert werden.

Berechnen Sie das mathematische Modell mit den Eingangsgrößen $\mathbf{u}^T = [i_1 \ i_2]$ und den Ausgangsgrößen $\mathbf{y}^T = [x_3 \ f_e]$. Wählen Sie eine geeignete Abtastzeit T_a und bestimmen Sie das zugehörige Abtastsystem. Entwerfen Sie ein Kalman-Filter sowie einen LQR-Zustandsregler mit Hilfe von MATLAB und simulieren Sie das Ergebnis in MATLAB/SIMULINK.

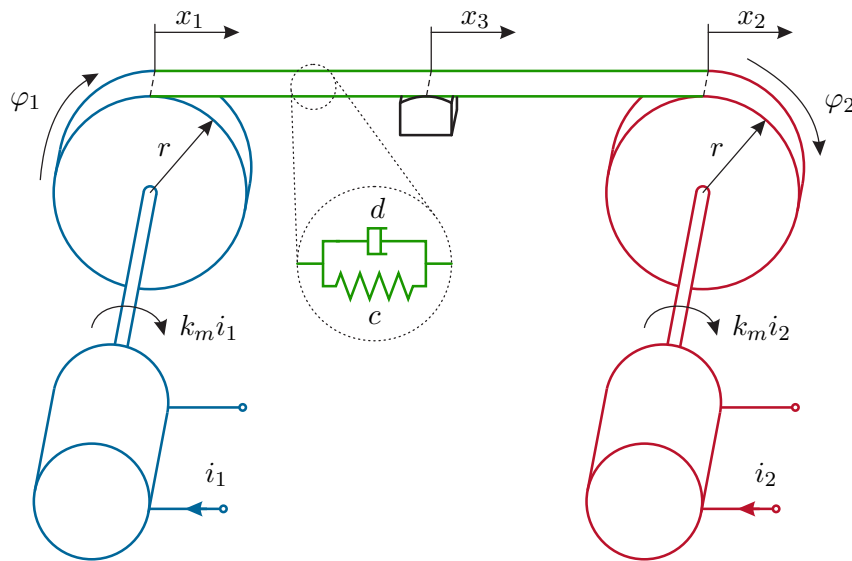


Abbildung 3.2: Zur Aufgabe 3.6 des Musikassettens-Antriebs.

Hinweis: (zu Aufgabe 3.6) Das zeitkontinuierliche mathematische Modell folgt aus den Beziehungen

$$J \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = k_m i_1 + f_e r$$

$$J \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 = k_m i_2 - f_e r$$

$$f_e = c(x_2 - x_1) + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} .$$

Wählen Sie als Zustandsgrößen die Winkel φ_1 und φ_2 sowie die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 .

Aufgabe 3.7. Abbildung 3.3 zeigt das vereinfachte Modell einer Magnetlagerung. Die Aufgabe der Regelung besteht darin, die Masse m durch die Magnetkraft f_{mag} in einem konstanten Abstand s (Geschwindigkeit $\dot{s} = w$) zu halten. Für die weitere Berechnung seien folgende Parameter gegeben: Masse $m = 500$ kg, Windungszahl der Spule $N = 500$, Widerstand der Spule $R = 2\Omega$, Permeabilitätskonstante der Luft $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ sowie die Fläche des Luftspalts zur Berechnung der Magnetkraft $A = 0.04 \text{ m}^2$.

Bestimmen Sie das nichtlineare mathematische Modell in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

$$y = s$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [s \quad w \quad i]$, der Eingangsspannung u als Eingangsgröße und der Position s als Ausgangsgröße. Linearisieren Sie das mathematische Modell um die Ruhelage (\mathbf{x}_0, u_0) , die durch die stationäre Spannung $u_0 = 60 \text{ V}$ festgelegt ist. Entwerfen Sie einen zeitkontinuierlichen LQR-Zustandsregler und ein zeitkontinuierliches Kalman-Filter mit Hilfe von MATLAB und simulieren Sie das Ergebnis in MATLAB/SIMULINK. Verwenden Sie dazu die Befehle `ss`, `lqr`, `lqe`, `reg` und `lqgreg` sowie `lqg` der ROBUST CONTROL TOOLBOX.

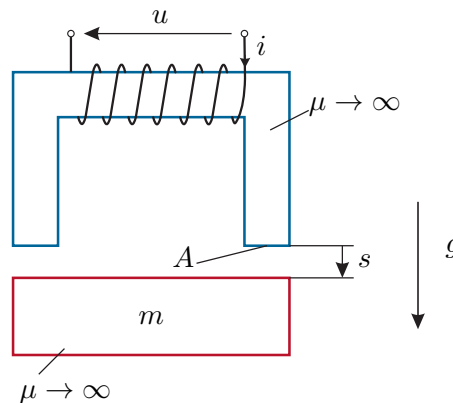


Abbildung 3.3: Zur Aufgabe 3.7 der Magnetlagerung.

Hinweis: (zu Aufgabe 3.7) Das nichtlineare mathematische Modell lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} s \\ w \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{ki^2}{2ms^2} \\ \frac{s}{k} \left(u - Ri + \frac{iwk}{s^2} \right) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{2} A \mu_0 N^2 .$$

Aufgabe 3.8. Betrachten Sie die Temperaturregelstrecke nach Abbildung 3.4 mit einem konstanten Massenstrom $\dot{m}_{zu} = \dot{m}_{ab} = \dot{m}$.

Die Temperatur im Tank T_{tank} mit der konstanten Wassermenge m_{tank} kann über das Mischventil mit der Ausgangstemperatur T_m beeinflusst werden. Für die Temperatur direkt am Tankeingang T_{zu} gilt wegen der Vernachlässigung der Wärmeverluste der Rohrleitung

$$T_{zu} = T_m(t - T_t)$$

mit der durch den Transportprozess durch die Rohrleitung bedingten Totzeit T_t .

Bestimmen Sie das mathematische Modell der Temperaturregelstrecke mit der Zustandsgröße $x = T_{tank}$, der Eingangsgröße $u = T_m$ und der Ausgangsgröße $y = T_{ab} = T_{tank}$. Berechnen Sie weiters allgemein die Transporttotzeit T_t für eine reibungsfreie Rohrleitung mit dem Innendurchmesser D und der Länge L bei gegebenen Massenstrom \dot{m} und Dichte ρ der Flüssigkeit.

Die in der Wassermenge m_{tank} mit der Temperatur T_{tank} und der spezifischen Wärmekapazität von Wasser c_W gespeicherte Energie E_{tank} lautet

$$E_{tank} = c_W m_{tank} T_{tank} .$$

Wählen Sie geeignete Parameter und implementieren Sie das mathematische Modell in MATLAB/SIMULINK. Entwerfen Sie für eine geeignete Abtastzeit T_a ein Kalman-Filter sowie einen LQR-Zustandsregler und simulieren Sie den geschlossenen Regelkreis mit der zeitkontinuierlichen Regelstrecke in MATLAB/SIMULINK.

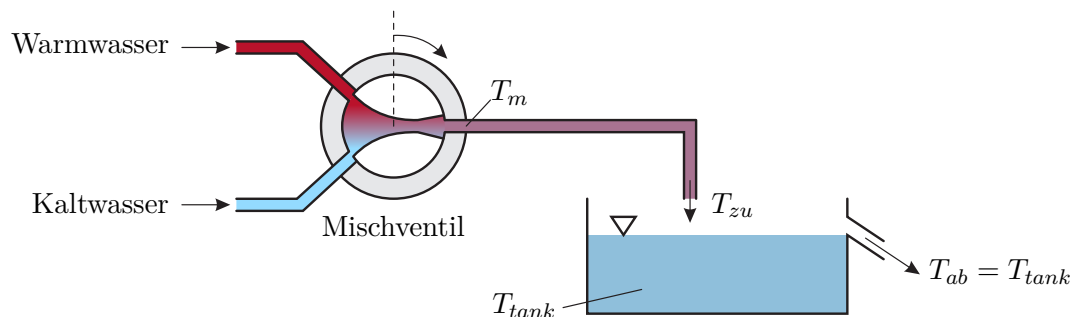


Abbildung 3.4: Zur Aufgabe 3.8 der Temperaturregelstrecke.

3.5 Erweiterte Konzepte der Zustandsregelung

3.5.1 Feedforward der geschätzten Störung

Bereits beim Kalman-Filter (siehe Abschnitt 2.3.2) wurde dargestellt, wie man deterministische Störungen durch Hinzunahme eines Störmodells systematisch berücksichtigen kann. Im Folgenden wird dieses Konzept auf den kombinierten Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf erweitert. Dazu betrachte man das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.95a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.95b)$$

mit dem n -dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p -dimensionalen deterministischen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q -dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, der r -dimensionalen deterministischen Störung $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Es sei angenommen, dass die Störung \mathbf{w} durch das Störmodell

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \mathbf{A}_z\mathbf{z} \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (3.96a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}_z\mathbf{z} \quad (3.96b)$$

beschrieben werden kann. In einem ersten Schritt wird nun für das erweiterte System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G}\mathbf{C}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.97a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (3.97b)$$

das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit T_a in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xz} \\ \mathbf{0} & \Phi_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (3.98a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \quad (3.98b)$$

berechnet.

Aufgabe 3.9. Zeigen Sie, dass das Abtastsystem von (3.97) die Struktur von (3.98) haben muss.

Wie man sieht, ist der Zustand des Störmodells \mathbf{z} über den Eingang \mathbf{u} nicht erreichbar. Wenn das System (3.98) vollständig beobachtbar ist, kann der Zustand \mathbf{x} sowie der Zustand des Störmodells \mathbf{z} über einen Beobachter

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xz} \\ \mathbf{0} & \Phi_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{\mathbf{K}}_z \end{bmatrix} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.99)$$

beobachtet werden. Im nächsten Schritt wird ein Zustandsregler

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k \quad (3.100)$$

für das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi\mathbf{x}_k + \Gamma\mathbf{u}_k \quad (3.101)$$

entworfen und in der Form

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_z\hat{\mathbf{z}}_k \quad (3.102)$$

erweitert und implementiert. Damit lautet der geschlossene Regelkreis (3.98), (3.99) und (3.102)

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\Phi + \Gamma\mathbf{K})\mathbf{x}_k + (\Phi_{xz} + \Gamma\mathbf{K}_z)\mathbf{z}_k - \Gamma\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_k - \Gamma\mathbf{K}_z\tilde{\mathbf{z}}_k \quad (3.103a)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \Phi_z\mathbf{z}_k \quad (3.103b)$$

mit der Dynamik der Beobachtungsfehler $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ und $\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \tilde{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C} & \Phi_{xz} \\ -\hat{\mathbf{K}}_z\mathbf{C} & \Phi_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Man beachte, dass mit der Reglermatrix \mathbf{K} die Dynamik festgelegt wird, mit der ein Anfangsfehler $\mathbf{x}(0)$ bei verschwindender Störung, also $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, zu Null geregelt wird. Im Weiteren legen die Beobachtermatrizen $\hat{\mathbf{K}}$ und $\hat{\mathbf{K}}_z$ die Fehlerdynamik fest und mit Hilfe von \mathbf{K}_z kann der Einfluss der Störung \mathbf{w} gezielt unterdrückt werden. Wie man aus (3.103) erkennt, ist die optimale Wahl für \mathbf{K}_z , falls möglich, durch

$$\Phi_{xz} + \Gamma\mathbf{K}_z = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

gegeben. Man nennt diese Strategie zur Störunterdrückung auch *Feedforward der geschätzten Störung*. Abbildung 3.5 zeigt das zugehörige Blockschaltbild.

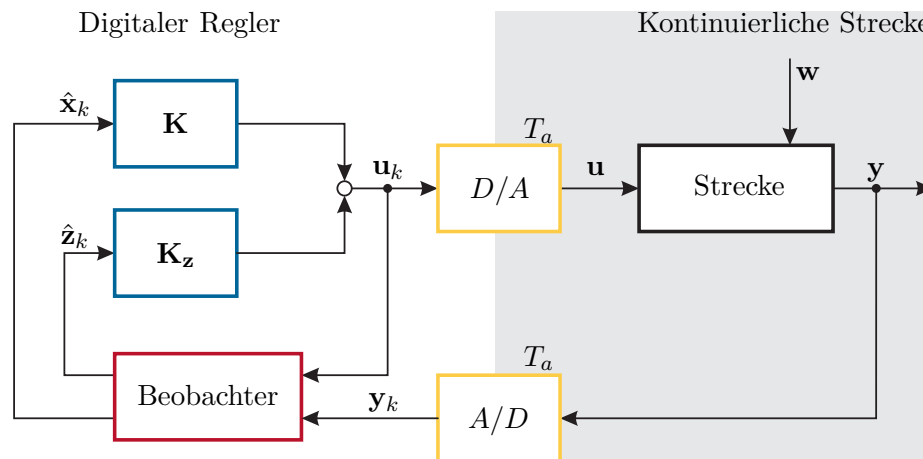


Abbildung 3.5: Blockschaltbild zum Feedforward der geschätzten Störung.

3.5.2 Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf mit Integralanteil

Es sei nun angenommen, dass die Störung \mathbf{w} in (3.95) konstant aber unbekannt ist. Dann lautet das zugehörige Störmodell (3.96)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{w} \quad (3.106a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} \quad (3.106b)$$

und das Abtastsystem (3.98) ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (3.107a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \quad (3.107b)$$

mit

$$\Phi = \exp(\mathbf{A}T_a) \quad (3.108a)$$

$$\Phi_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{G} \quad (3.108b)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{B} . \quad (3.108c)$$

Aufgabe 3.10. Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.108).

Nimmt man nun an, dass $\Phi_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = \Gamma$ bzw. $\mathbf{G} = \mathbf{B}$ gilt, d. h. die Störung \mathbf{z}_k wirkt beim Abtastsystem vor dem Eingang \mathbf{u}_k auf das System, dann lässt sich (3.105) exakt lösen. Es gilt nämlich $\mathbf{K}_{\mathbf{z}} = -\mathbf{E}$. Damit lautet der Regler von (3.102)

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{z}}_k \quad (3.109)$$

und der Beobachter von (3.99) hat die Form

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) . \quad (3.110)$$

Man erkennt durch Umschreiben von (3.109) und (3.110)

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\Phi + \Gamma\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.111a)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_k + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.111b)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{z}}_k, \quad (3.111c)$$

dass sich der Regler aus der Rückführung des geschätzten Zustandes $\hat{\mathbf{x}}_k$ mit der Reglermatrix \mathbf{K} und dem durch die Matrix $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}$ gewichteten integrierten Ausgangsfehler zusammensetzt. Abbildung 3.6 zeigt die zugehörige Reglerstruktur in Form eines Blockschaltbildes.

Zusammenfassend sieht der Entwurf mit Integralanteil folgendermaßen aus:

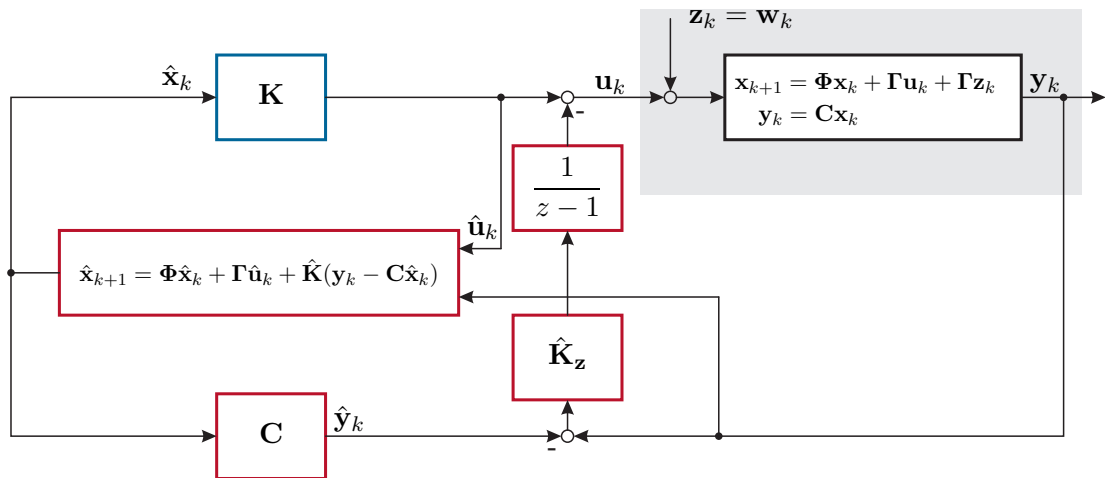


Abbildung 3.6: Zum Zustandsregler-/Zustandsbeobachterentwurf mit Integralanteil.

- (1) Man entwirft für das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad (3.112a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \quad (3.112b)$$

einen Zustandsregler der Form

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K} \mathbf{x}_k . \quad (3.113)$$

- (2) Im zweiten Schritt erweitert man das System (3.112) um eine konstante, aber unbekannte Störung
- \mathbf{w}
- , die am Eingang der Strecke wirkt, also

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{w} \quad (3.114a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \quad (3.114b)$$

und entwirft dafür die Beobachterverstärkungsmatrizen $\hat{\mathbf{K}}$ und $\hat{\mathbf{K}}_z$ eines vollständigen Beobachters (siehe (3.110)).

- (3) Der Regler folgt dann gemäß (3.109) zu

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{z}}_k . \quad (3.115)$$

3.5.3 Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf mit Führungsgrößen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man beim Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf systematisch Führungsgrößen mitberücksichtigen kann. In der englischsprachigen Literatur wird diese Aufgabenstellung oft auch als *Servoproblem* bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Größen $\bar{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^p$

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_k \quad (3.116)$$

des Systems

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad (3.117a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k, \quad (3.117b)$$

mit dem n -dimensionalen Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem p -dimensionalen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem q -dimensionalen Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, auf einen vorgegebenen stationären Referenzwert $\mathbf{r}_s \in \mathbb{R}^p$

$$\bar{\mathbf{y}}_s = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_s = \mathbf{r}_s \quad (3.118)$$

geregelt werden sollen. In einem ersten Schritt wird ein Zustandsregler

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K} \mathbf{x}_k \quad (3.119)$$

entworfen, beispielsweise als stationärer Riccati-Regler, und in einem zweiten Schritt in der Form

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}(\mathbf{L}_r \mathbf{r}_k - \mathbf{x}_k) + \mathbf{L}_u \mathbf{r}_k \quad (3.120)$$

mit $\mathbf{L}_r \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{L}_u \in \mathbb{R}^{p \times p}$ erweitert. Die Matrizen \mathbf{L}_r und \mathbf{L}_u sollen dabei nachfolgende Bedingungen für den stationären Zustand

$$\mathbf{L}_r \mathbf{r}_s = \mathbf{x}_s \quad (3.121a)$$

$$\mathbf{L}_u \mathbf{r}_s = \mathbf{u}_s \quad (3.121b)$$

erfüllen. Aus (3.117) folgt im stationären Zustand

$$(\mathbf{E} - \Phi) \mathbf{x}_s - \Gamma \mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad (3.122)$$

und durch Einsetzen von (3.121) in (3.118) und (3.122) erhält man

$$((\mathbf{E} - \Phi) \mathbf{L}_r - \Gamma \mathbf{L}_u) \mathbf{r}_s = \mathbf{0} \quad (3.123a)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_s = \mathbf{C}_r \mathbf{L}_r \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s \quad (3.123b)$$

bzw. für $\mathbf{r}_s \neq \mathbf{0}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} - \Phi & -\Gamma \\ \mathbf{C}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (3.124)$$

Wenn die Matrix \mathbf{X} invertierbar ist, dann können aus (3.124) die Matrizen \mathbf{L}_r und \mathbf{L}_u berechnet werden. In Abbildung 3.7 ist die zugehörige Reglerstruktur dargestellt.

Man erkennt, dass (3.120) auch in der Form

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K} \mathbf{x}_k + \mathbf{L} \mathbf{r}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_u - \mathbf{K} \mathbf{L}_r \quad (3.125)$$

vereinfacht werden kann.

Nimmt man nun an, dass der Zustand \mathbf{x}_k nicht messbar ist, dann wird zusätzlich ein Zustandsbeobachter der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.126)$$

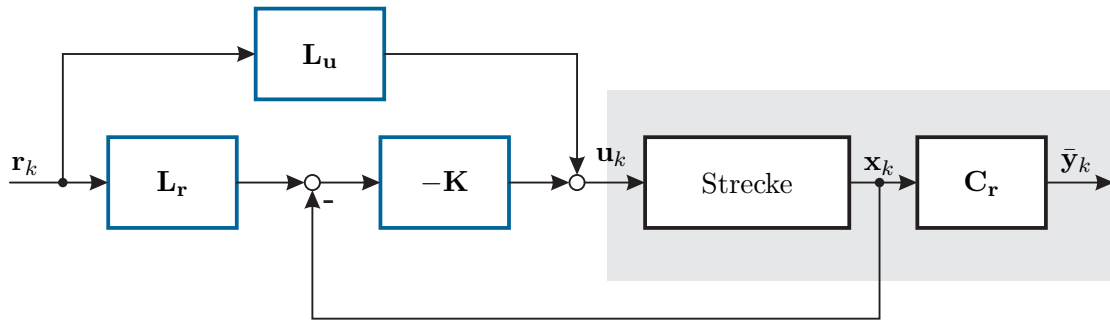


Abbildung 3.7: Reglerstruktur bei Zustandsregelung mit Führungsgrößen.

benötigt. Der geschlossene Kreis (3.117), (3.125) und (3.126) lautet dann mit dem Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\Phi + \Gamma\mathbf{K})\mathbf{x}_k - \Gamma\mathbf{K}\mathbf{e}_k + \Gamma\mathbf{L}\mathbf{r}_k \quad (3.127a)$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\Phi - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{C})\mathbf{e}_k \quad (3.127b)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k. \quad (3.127c)$$

Wie zu erwarten, ist der Beobachtungsfehler \mathbf{e}_k über den Referenzeingang \mathbf{r}_k nicht erreichbar.

Aufgabe 3.11. Auf analoge Art und Weise wie in Abschnitt 3.5.2 gezeigt, kann man den Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf mit Führungsgrößen um einen Integralanteil erweitern. Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall das Regelgesetz wie folgt

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\Phi + \Gamma\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) + \Gamma\mathbf{L}\mathbf{r}_k$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_k + \hat{\mathbf{K}}_z(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{z}}_k + \mathbf{L}\mathbf{r}_k$$

errechnet.

3.5.4 Das Feedforward-Konzept

Wenn sich das geregelte System wie ein Referenzmodell der Form

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_m \bar{\mathbf{x}}_k + \Gamma_m \mathbf{r}_k \quad (3.128a)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{x}}_k \quad (3.128b)$$

verhalten soll, dann kann man folgende Vorgangsweise wählen: Man simuliert das Referenzmodell (3.128) im Computer mit und setzt das Regelgesetz wie folgt

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) + \bar{\mathbf{u}}_k \quad (3.129)$$

an.

Das so genannte (*Stellgrößen-*)*Feedforward-Signal* $\bar{\mathbf{u}}_k$ wird dabei so bestimmt, dass bei idealer Übereinstimmung von Referenzmodell und geregelterm System, also $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$, auch die Ausgangsgrößen des Referenzmodells und des geregelten Systems übereinstimmen, also $\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k$.

Die Berechnung des Feedforward-Signals im Mehrgrößenfall gestaltet sich im Allgemeinen relativ schwierig. Im Eingrößenfall kann mit Hilfe der z -Übertragungsfunktionen von (3.117) und (3.128)

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \mathbf{\Gamma} \quad (3.130a)$$

$$G_m(z) = \frac{\bar{y}_z(z)}{r_z(z)} = \mathbf{c}_m^T (z\mathbf{E} - \Phi_m)^{-1} \mathbf{\Gamma}_m \quad (3.130b)$$

aus der Bedingung

$$G(z)u_z(z) = y_z(z) = \bar{y}_z(z) = G_m(z)r_z(z) \quad (3.131)$$

die z -Transformierte $\bar{u}_z(z)$ des Feedforward-Signals (\bar{u}_k) wie folgt

$$\bar{u}_z(z) = \frac{G_m(z)}{G(z)} r_z(z) \quad (3.132)$$

errechnet werden. Man erkennt aus (3.132), dass dies nur dann möglich ist, wenn die Graddifferenz von $G_m(z)$ größer gleich der Graddifferenz von $G(z)$ ist, $G_m(z)$ BIBO-stabil ist und sämtliche Nullstellen im geschlossenen Äußeren des Einheitskreises von $G(z)$ auch Nullstellen von $G_m(z)$ sind.

Im Fall, dass die Zählerpolynome von $G(z)$ und $G_m(z)$ übereinstimmen und die Ordnungen der Nennerpolynome gleich sind, also

$$G(z) = \frac{zG(z)}{n_G(z)} = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_{n-1}z^{n-1} + b_nz^n}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n} \quad (3.133a)$$

$$G_m(z) = \frac{zG_m(z)}{n_{G_m}(z)} = V \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_{n-1}z^{n-1} + b_nz^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \dots + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + z^n}, \quad (3.133b)$$

folgt $\bar{u}_z(z)$ einfach zu

$$\bar{u}_z(z) = V \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \dots + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + z^n} r_z(z). \quad (3.134)$$

Der Faktor V wird beispielsweise so gewählt, dass gilt $\lim_{z \rightarrow 1} G_m(z) = 1$. Liegt nun das Referenzmodell (3.128) in der ersten Standardform vor, dann lautet die Zustandsrealisierung

von (3.134) in der ersten Standardform im Eingrößenfall

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,k+1} \\ \bar{x}_{2,k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1,k+1} \\ \bar{x}_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & \dots & -\bar{a}_{n-2} & -\bar{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k} \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1,k} \\ \bar{x}_{n,k} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_m} r_k \quad (3.135a)$$

$$\bar{u}_k = V \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 a_n & a_1 - \bar{a}_1 a_n & \dots & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} a_n \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_m^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k} \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1,k} \\ \bar{x}_{n,k} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_k} + V a_n r_k . \quad (3.135b)$$

Nun kann man sämtliche bisher gewonnenen Ergebnisse in einer gemeinsamen Struktur zusammenfassen. Ein Zustandsregler- und Zustandsbeobachter mit Integralanteil und Feedforward über ein Referenzmodell im Falle eines Eingrößensystems setzt sich aus dem *Referenzmodell* (siehe (3.128))

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_m \bar{\mathbf{x}}_k + \Gamma_m r_k \quad (3.136a)$$

$$\bar{y}_k = \bar{\mathbf{c}}_m^T \bar{\mathbf{x}}_k \quad (3.136b)$$

aus dem *Zustands- und Störgrößenbeobachter* (siehe (3.110))

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{k}_z \end{bmatrix} (y_k - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.137)$$

und aus dem *Stellgrößengesetz*, bestehend aus dem *Rückkopplungsanteil* $-\mathbf{k}^T(\bar{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) - \hat{z}_k$ und dem *Feedforward-Anteil* $\bar{u}_k = \bar{\mathbf{c}}_m^T \bar{\mathbf{x}}_k + V a_n r_k$ (siehe (3.119), (3.129) und (3.135)),

$$u_k = -\mathbf{k}^T(\bar{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) - \hat{z}_k + \underbrace{\bar{\mathbf{c}}_m^T \bar{\mathbf{x}}_k + V a_n r_k}_{\bar{u}_k} \quad (3.138)$$

zusammen. Durch Vereinfachung der Gleichungen (3.136)–(3.138) erhält man schlussendlich

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_m \bar{\mathbf{x}}_k + \Gamma_m r_k \quad (3.139a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T - \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma (\bar{\mathbf{c}}_m^T - \mathbf{k}^T) \bar{\mathbf{x}}_k + V a_n \Gamma r_k + \hat{\mathbf{k}} y_k \quad (3.139b)$$

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k + \hat{k}_z (y_k - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.139c)$$

$$u_k = (\bar{\mathbf{c}}_m^T - \mathbf{k}^T) \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{z}_k + V a_n r_k . \quad (3.139d)$$

Die Abbildung 3.8 zeigt die Struktur des Regelkonzeptes (3.139).

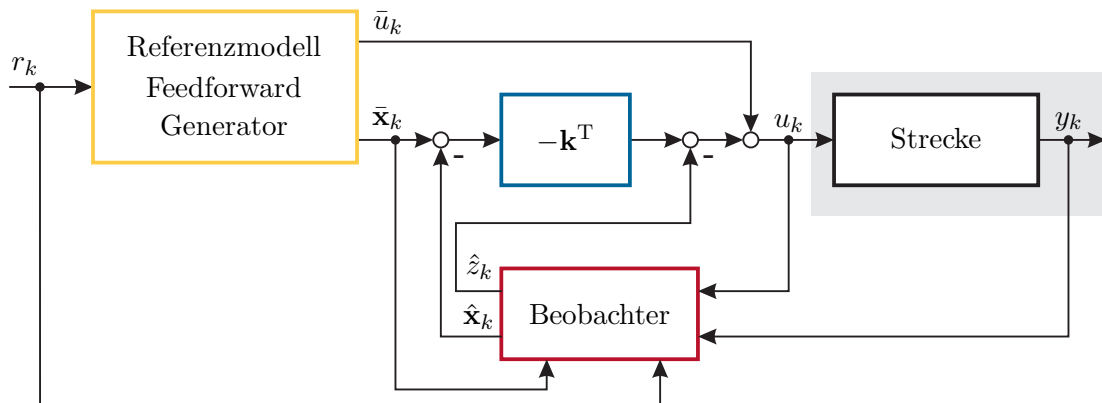


Abbildung 3.8: Zur Regelstruktur des Feedforward-Konzeptes.

Aufgabe 3.12. Betrachten Sie die Übertragungsfunktion eines Doppelintegrators

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Bestimmen Sie für die Abtastzeit $T_a = 0.1$ s das zugehörige Abtastmodell. Wenden Sie für dieses Abtastmodell, sofern möglich, sämtliche Regelkonzepte, die in diesem Kapitel vorgestellt wurden, an. Berücksichtigen Sie dabei einmal eine konstante, aber unbekannte Störung am Eingang und einmal eine sinusförmige Eingangsstörung der Form

$$w(t) = A \sin(2t + \varphi)$$

mit unbekannter Amplitude A und unbekannter Phase φ . Im Weiteren sollen sprungförmige und sinusförmige Referenzsignale vorgegeben werden, denen das System zumindest stationär ohne Regelfehler folgen kann. Implementieren Sie sämtliche Regelkonzepte in MATLAB/SIMULINK.

Aufgabe 3.13. Gegeben ist das durch einen fremderregten Gleichstrommotor angetriebene mechanische System von Abbildung 3.9. Bestimmen Sie das mathematische Modell unter der Annahme, dass die Dynamik des Gleichstrommotors vernachlässigt werden kann. Verwenden Sie als Zustandsgrößen die Drehwinkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 und den Differenzwinkel $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, als Eingangsgröße den Ankerstrom i_a und als Ausgangsgröße ω_2 . Die Ankerkreis konstante hat den Wert $k_a = 1$ Nm/A, die Masenträgheitsmomente der beiden Massen sind $J_1 = 10/9$ kgm² und $J_2 = 10$ kgm² und die Feder- sowie die Dämpfungskonstante der Torsionswelle sind durch $c = 1$ Nm/rad und $d = 0.1$ Nms/rad gegeben.

Bestimmen Sie für eine Abtastzeit $T_a = 0.5$ s das zugehörige Abtastmodell. Wenden Sie für dieses Abtastmodell, sofern möglich, sämtliche in diesem Kapitel vorgestellten Regelkonzepte an und testen Sie Ihre Ergebnisse in MATLAB/SIMULINK.

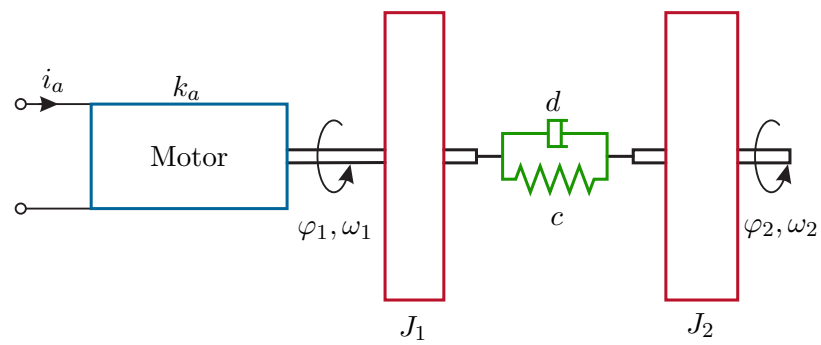


Abbildung 3.9: Mechanisches System mit Torsionswelle.

3.6 Literatur

- [3.1] G. Franklin, J. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3. Aufl. Menlo Park, USA: Addison–Weseley, 1998.
- [3.2] K. Åström und B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. New York, USA: Prentice Hall, 1997.
- [3.3] A. Bryson und Y. Ho, *Applied Optimal Control*. Washington, USA: He, 1975.
- [3.4] P. Dorato, C. Abdallah und V. Cerone, *Linear Quadratic Control: An Introduction*. Florida, USA: Krieger Publishing Company, 2000.