

# A Grundlagen der Differentialgeometrie

In diesem Anhang werden einige grundlegende Begriffe der Differentialgeometrie, wie sie im Rahmen der differentialgeometrischen Reglerentwurfsverfahren aufgetreten sind, näher erläutert. Für weitere Details sei auf die am Ende des Kapitels angeführte Literatur verwiesen.

## A.1 Mannigfaltigkeit

Im ersten Schritt soll der Begriff einer Mannigfaltigkeit erläutert werden. Dazu folgende Definition:

**Definition A.1 (Mannigfaltigkeit).** Eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (kurz  $n$ -Mannigfaltigkeit) ist eine Menge  $\mathcal{M}$  zusammen mit einer Familie von Teilmengen  $U, V, \dots$  für die gilt

- (1)  $\mathcal{M} = U \cup V \cup \dots$
- (2) für jede Teilmenge  $U$  gibt es eine injektive Abbildung  $\mathbf{x}_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  so, dass  $\mathbf{x}_U(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist und
- (3) für alle Teilmengen  $U, V$  gilt, dass für den Fall  $U \cap V \neq \{ \}$  die Menge  $\mathbf{x}_U(U \cap V)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und die Komposition

$$\mathbf{x}_V \circ \mathbf{x}_U^{-1} : \mathbf{x}_U(U \cap V) \rightarrow \mathbf{x}_V(U \cap V) \quad (\text{A.1})$$

differenzierbar ist.

Jedes Paar  $(U, \mathbf{x}_U)$  nennt man eine Karte,  $\mathbf{x}_U^{-1}$  heißt Parametrierung und  $\mathbf{x}_U(U)$  nennt man Parameterbereich. Zwei Karten  $(U, \mathbf{x}_U)$  und  $(V, \mathbf{x}_V)$  mit differenzierbaren Abbildungen (Koordinatentransformationen)  $\mathbf{x}_V \circ \mathbf{x}_U^{-1}$  und  $\mathbf{x}_U \circ \mathbf{x}_V^{-1}$  im Überlappungsbereich  $U \cap V$  werden als kompatibel bezeichnet. Die Vereinigung von Karten, die paarweise kompatibel sind und die gesamte Menge  $\mathcal{M}$  gemäß (1) aufspannen, wird als Atlas bezeichnet.

Eine  $n$ -Mannigfaltigkeit ist eine  $C^r$ -Mannigfaltigkeit (glatte Mannigfaltigkeit), wenn die Koordinatentransformationen  $\mathbf{x}_V \circ \mathbf{x}_U^{-1}$  bzw.  $\mathbf{x}_U \circ \mathbf{x}_V^{-1}$  entsprechend  $r$ -fach stetig differenzierbar (glatt) sind.

Die Abbildung  $\mathbf{x}_U$  (ähnliches gilt natürlich auch für alle weiteren Abbildungen  $\mathbf{x}_V$ ) wird häufig in Form von *Koordinatenfunktionen*  $(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n)$  mit  $x_U^k : U \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$ , dargestellt. Für den Punkt  $\mathbf{p} \in U$  beschreibt das  $n$ -Tupel  $(x_U^1(\mathbf{p}), x_U^2(\mathbf{p}), \dots, x_U^n(\mathbf{p}))$  die *lokalen Koordinaten* von  $\mathbf{p}$  in der Karte  $(U, \mathbf{x}_U)$ . Abbildung

A.1 gibt eine geometrische Veranschaulichung dieses Sachverhalts.

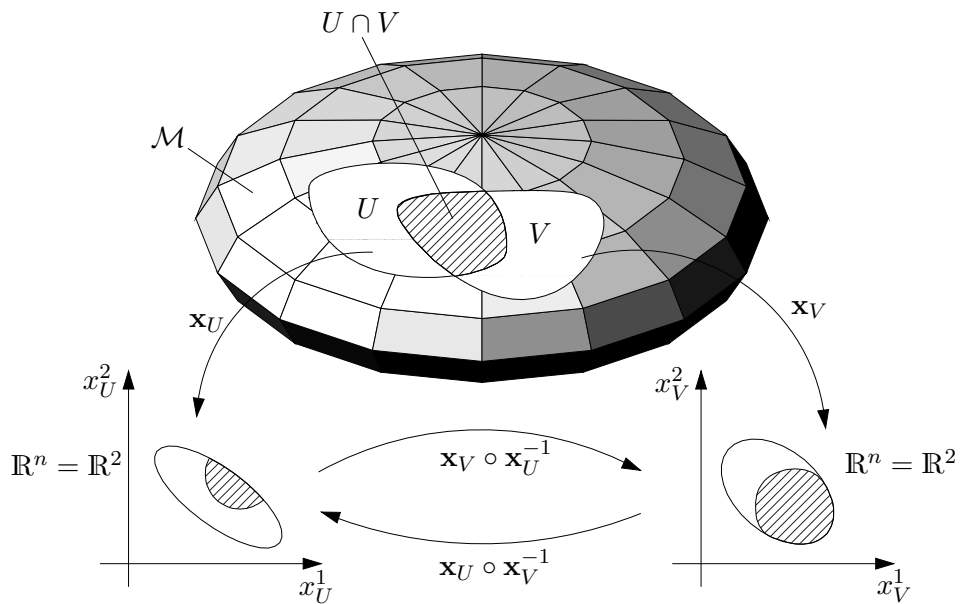


Abbildung A.1: Zur Definition einer Mannigfaltigkeit.

*Beispiel A.1.* Zur Erläuterung der Begriffe betrachte man die Einheitskugel  $S^2$  im  $\mathbb{R}^3$ . Wie man Abbildung A.2 entnehmen kann, ist es mithilfe der so genannten *stereographischen Projektion* möglich, ganz  $S^2$  mithilfe von zwei kompatiblen Karten zu beschreiben.

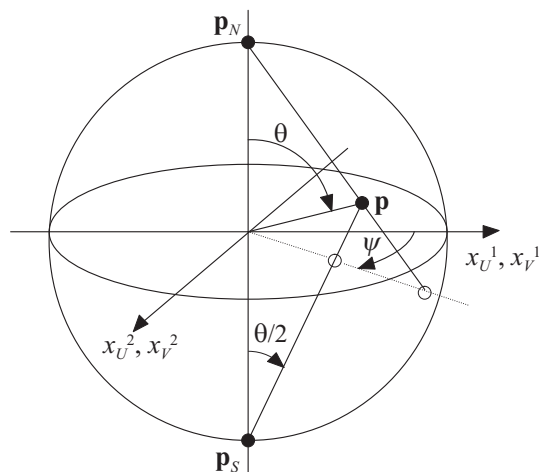


Abbildung A.2: Zur stereographischen Projektion.

Die Karte 1 lautet  $(U, \mathbf{x}_U)$  mit

$$U : \{ \mathbf{p} \in S^2 \mid 0 \leq \theta < \pi \} \quad (\text{A.2})$$

und der Abbildung  $\mathbf{x}_U : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die die stereographische Projektion vom Punkt  $\mathbf{p}_S$  (Südpol  $\theta = \pi$ ) auf die äquatorielle Ebene bezeichnet, wobei gilt

$$\mathbf{x}_U : \begin{bmatrix} x_U^1 \\ x_U^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\psi) \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\psi) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Die Karte 2 ergibt sich analog zu  $(V, \mathbf{x}_V)$  mit

$$V : \{ \mathbf{p} \in S^2 \mid 0 < \theta \leq \pi \} \quad (\text{A.4})$$

und der Abbildung  $\mathbf{x}_V : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die die stereographische Projektion vom Punkt  $\mathbf{p}_N$  (Nordpol  $\theta = 0$ ) auf die äquatorielle Ebene bezeichnet mit

$$\mathbf{x}_V : \begin{bmatrix} x_V^1 \\ x_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\psi) \\ \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\psi) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Man kann sich einfach davon überzeugen, dass die Abbildungen  $\mathbf{x}_V \circ \mathbf{x}_U^{-1}$  bzw.  $\mathbf{x}_U \circ \mathbf{x}_V^{-1}$  auf  $U \cap V$  (alle Punkte der Einheitskugel außer dem Nordpol  $\mathbf{p}_N$  und dem Südpol  $\mathbf{p}_S$ ) *Koordinatentransformationen* darstellen mit

$$x_V^1 = \frac{x_U^1}{(x_U^1)^2 + (x_U^2)^2}, \quad x_V^2 = \frac{x_U^2}{(x_U^1)^2 + (x_U^2)^2} \quad (\text{A.6a})$$

$$x_U^1 = \frac{x_V^1}{(x_V^1)^2 + (x_V^2)^2}, \quad x_U^2 = \frac{x_V^2}{(x_V^1)^2 + (x_V^2)^2}. \quad (\text{A.6b})$$

Die Karten  $(U, \mathbf{x}_U)$  und  $(V, \mathbf{x}_V)$  bilden einen *Atlas* der Einheitskugel  $S^2$ .

## A.2 Tangentialraum

In einem ersten Schritt wird eine physikalische Definition eines *Tangentialvektors*, in der Tangentialvektoren nichts anderes als Elemente des  $\mathbb{R}^n$  mit einem bestimmten Transformationsverhalten sind, angegeben. Als Motivation dazu nehme man eine Kurve  $\mathbf{p}(t)$  auf einer  $n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  an. In einer Karte  $(U, \mathbf{x}_U)$  um den Punkt  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  kann diese Kurve durch die  $n$  glatten Koordinatenfunktionen  $x_U^k(t), k = 1, \dots, n$  beschrieben werden. Der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{p}}(0)$  folgt dann in Form des  $n$ -Tupels reeller Zahlen  $(dx_U^1/dt|_{t=0}, dx_U^2/dt|_{t=0}, \dots, dx_U^n/dt|_{t=0})$ . Falls  $\mathbf{p}_0$  auch in einer anderen kompatiblen Karte  $(V, \mathbf{x}_V)$  mit den Koordinatenfunktionen

$x_V^k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$  liegt, kann derselbe Geschwindigkeitsvektor auch mithilfe des  $n$ -Tupels  $(dx_V^1/dt|_{t=0}, dx_V^2/dt|_{t=0}, \dots, dx_V^n/dt|_{t=0})$  beschrieben werden. Da gemäß Definition A.1 im Überlappungsbereich  $U \cap V$  die Koordinatentransformationen umkehrbar eindeutig sind, also  $\mathbf{x}_V = \mathbf{x}_V(\mathbf{x}_U)$  bzw.  $\mathbf{x}_U = \mathbf{x}_U(\mathbf{x}_V)$ , folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}x_V^k \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_V^k}{\partial x_U^j} \right) (\mathbf{p}_0) \frac{d}{dt}x_U^j \Big|_{t=0} \quad (\text{A.7})$$

für  $k = 1, \dots, n$ . Diese Überlegung ist der Ausgangspunkt für die physikalische Definition eines Tangentialvektors:

**Definition A.2 (Physikalische Definition eines Tangentialvektors).** Ein Tangentialvektor oder auch kontravarianter Vektor  $\mathbf{v}$  ordnet jeder Karte  $(U, \mathbf{x}_U)$  mit  $\mathbf{p}_0 \in U$  ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $(v_U^1, v_U^2, \dots, v_U^n)$  so zu, dass in einer anderen Karte  $(V, \mathbf{x}_V)$  mit  $\mathbf{p}_0 \in U \cap V$  derselbe Vektor durch ein  $n$ -Tupel  $(v_V^1, v_V^2, \dots, v_V^n)$  beschrieben wird und die beiden  $n$ -Tupel wie folgt miteinander verbunden sind

$$v_V^k = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_V^k}{\partial x_U^j} \right) (\mathbf{p}_0) v_U^j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.8})$$

Im zweiten Schritt wird der *Tangentialvektor als Ableitungsoperator* interpretiert. Dazu bezeichne wiederum  $\mathcal{M}$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $\mathbf{p}$  einen Punkt von  $\mathcal{M}$ . Eine reellwertige Funktion  $h$  ist glatt in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$ , wenn der Definitionsbereich von  $h$  eine offene Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$  beinhaltet und die Einschränkung von  $h$  auf diese Umgebung eine glatte Funktion ist. Die Menge aller glatten Funktionen in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$  ist ein linearer Vektorraum über den Skalkörper  $\mathbb{R}$  und wird im Weiteren mit  $C^\infty(\mathbf{p})$  bezeichnet. Wenn  $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbf{p})$ , dann gilt auch für die Funktion  $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \in C^\infty(\mathbf{p})$  für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und es gilt für alle  $\mathbf{q}$  in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$

$$(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)(\mathbf{q}) = \lambda_1 h_1(\mathbf{q}) + \lambda_2 h_2(\mathbf{q}). \quad (\text{A.9})$$

Außerdem ist die durch Multiplikation erhaltene Funktion  $h_1 h_2 \in C^\infty(\mathbf{p})$  und es gilt für alle  $\mathbf{q}$  in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$

$$(h_1 h_2)(\mathbf{q}) = h_1(\mathbf{q}) h_2(\mathbf{q}). \quad (\text{A.10})$$

**Definition A.3 (Tangentialvektor als Ableitungsoperator).** Ein Tangentialvektor  $\mathbf{v}$  an einem Punkt  $\mathbf{p}$  ist eine Abbildung  $\mathbf{v} : C^\infty(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- (1) Linearität:  $\mathbf{v}(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 \mathbf{v}(h_1) + \lambda_2 \mathbf{v}(h_2)$  für alle  $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbf{p})$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- (2) Leibniz Regel:  $\mathbf{v}(h_1 h_2) = h_1 \mathbf{v}(h_2) + h_2 \mathbf{v}(h_1)$  für alle  $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbf{p})$

Eine Abbildung, die die Eigenschaften (1) und (2) von Definition A.3 erfüllt, wird auch als *Ableitung* bezeichnet. Im Speziellen bezeichnet  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(h)$  die *Richtungsableitung*

(Lie-Ableitung) der skalaren Funktion  $h$  in Richtung von  $\mathbf{v}$  am Punkt  $\mathbf{p}$  und ist wie folgt definiert

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}(h) = L_{\mathbf{v}}h(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt}(h(\mathbf{p} + t\mathbf{v})) \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) (\mathbf{p}) v^k, \quad (\text{A.11})$$

wobei angenommen wurde, dass die Funktion  $h$  in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{p}$  durch die lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  beschrieben werden kann. Um nun zu zeigen, dass die Richtungsableitung *unabhängig vom gewählten Koordinatensystem* ist, nimmt man zwei kompatible Karten  $(U, \mathbf{x}_U)$  und  $(V, \mathbf{x}_V)$  mit  $\mathbf{p} \in U \cap V$  und den zugehörigen  $n$ -Tupel der Tangentialvektoren  $(v_U^1, v_U^2, \dots, v_U^n)$  bzw.  $(v_V^1, v_V^2, \dots, v_V^n)$  gemäß Definition A.2 an und berechne

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^V(h) &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial x_V^k} \right) (\mathbf{p}) v_V^k \stackrel{(\text{A.8})}{=} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial x_V^k} \right) (\mathbf{p}) \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_V^k}{\partial x_U^j} \right) (\mathbf{p}) v_U^j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial x_U^j} \right) (\mathbf{p}) v_U^j = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^U(h). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Damit ist man nun in der Lage, den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  am Punkt  $\mathbf{p}$  zu definieren.

**Definition A.4 (Tangentialraum).** Der Tangentialraum  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  am Punkt  $\mathbf{p}$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist ein  $n$ -dimensionaler linearer Vektorraum bestehend aus sämtlichen Tangentialvektoren von  $\mathcal{M}$  am Punkt  $\mathbf{p}$ . Bezeichnen  $x^1, \dots, x^n$  die lokalen Koordinaten einer Karte, so bilden die Vektoren

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\mathbf{p}}, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_{\mathbf{p}}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_{\mathbf{p}} \right\} \quad (\text{A.13})$$

eine Koordinatenbasis des Tangentialraums  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ .

Es ist nun unmittelbar einsichtig, dass für  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gilt  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ .

Ein (glattes) Vektorfeld definiert in einer offenen Umgebung eines Punktes  $\mathbf{p}$  ist nun eine (glatte) differenzierbare Zuordnung eines Vektors  $\mathbf{v}$  zu jedem Punkt in dieser Umgebung und lässt sich in lokalen Koordinaten  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  wie folgt

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v^j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (\text{A.14})$$

anschreiben, wobei die *Komponenten des (glatten) Vektorfeldes*  $v^j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, n$  (glatte) differenzierbare Funktionen von  $\mathbf{x}$  sind. Sind mit  $x^k, k = 1, \dots, n$  die Koordinatenfunktionen der Karte gegeben, so berechnen sich die Komponenten  $v^k(\mathbf{x})$  des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  in der Form, siehe (A.11)

$$L_{\mathbf{v}}x^k = \mathbf{v}(x^k) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^j} \right) v^j = v^k. \quad (\text{A.15})$$

Im nächsten Schritt soll nun geklärt werden, wie sich Tangentialvektoren vom Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit in den Tangentialraum einer anderen Mannigfaltigkeit transformieren, wenn zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten eine glatte Abbildung definiert ist.

**Definition A.5 (Differential).** Es seien  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}$  eine  $n$ - bzw.  $d$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei  $\mathbf{t} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Abbildung. Das Differential von  $\mathbf{t}$  an der Stelle  $\mathbf{q} \in \mathcal{N}$  ist die lineare Abbildung

$$\mathbf{t}_* : \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \tag{A.16}$$

mit  $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$ . Die Abbildung  $\mathbf{t}_*$  wird auch als Pushforward bezeichnet. Für  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$  und  $h \in C^\infty(\mathbf{p})$  gilt

$$\underbrace{(\mathbf{t}_*\mathbf{w})}_{\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}}(h) = \mathbf{w} \underbrace{(h \circ \mathbf{t})}_{\in C^\infty(\mathbf{q})} . \tag{A.17}$$

Abbildung A.3 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

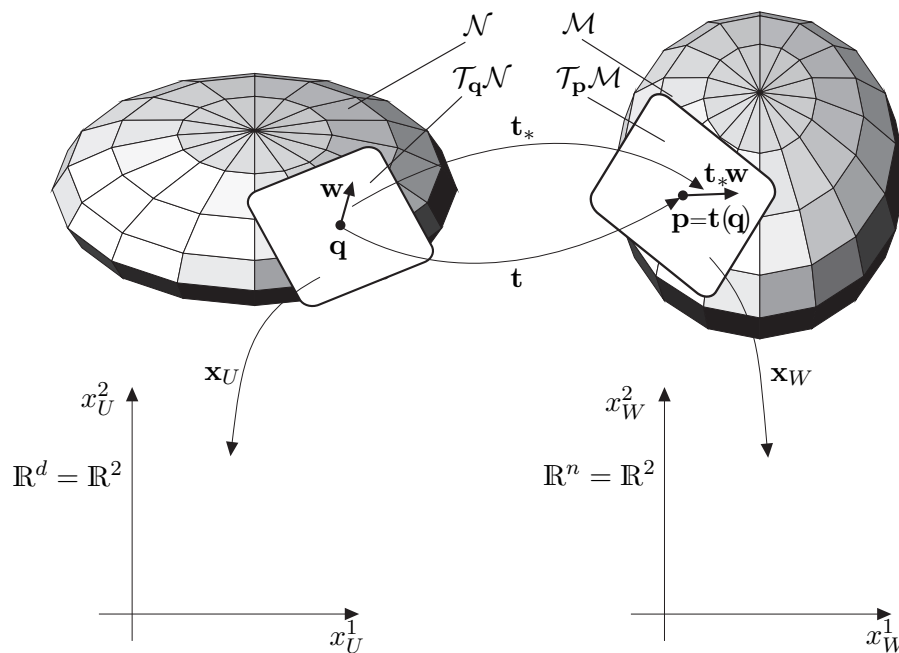


Abbildung A.3: Zur Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten.

Bezeichnet nun  $(U, \mathbf{x}_U)$  die Karte um den Punkt  $\mathbf{q}$  mit den Koordinaten  $(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n)$  und  $(W, \mathbf{x}_W)$  die Karte um den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{q})$  mit den Koordinaten  $(x_W^1, x_W^2, \dots, x_W^d)$ ,

dann lässt sich die Abbildung  $\mathbf{x}_W \circ \mathbf{t} \circ \mathbf{x}_U^{-1}$  in lokalen Koordinaten in der Form

$$\begin{bmatrix} t_1(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n) \\ \vdots \\ t_d(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

ausdrücken und das Differential  $\mathbf{t}_*$  formuliert in lokalen Koordinaten entspricht der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{t}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_d}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^n} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Damit können die Komponenten  $v^j, j = 1, \dots, d$  des Tangentialvektors  $\mathbf{v} = \mathbf{t}_* \mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{t}(\mathbf{q})} \mathcal{M}$  aus den Komponenten  $w^k, k = 1, \dots, n$  des Tangentialvektors  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}} \mathcal{N}$  über die Berechnungsvorschrift

$$v^j = \sum_{k=1}^n (\mathbf{t}_*)^j_k w^k, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{A.20})$$

ermittelt werden.

### A.3 Kotangententialraum

Für das Folgende betrachte man einen  $n$ -dimensionalen linearen Vektorraum  $\mathcal{X}$  mit der Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Jedes Element  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$  lässt sich dann eindeutig bezüglich der Basis in der Form

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \quad (\text{A.21})$$

mit den Komponenten  $v^j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$  ausdrücken.

**Definition A.6 (Lineares Funktional).** Ein lineares Funktional  $\sigma$  auf  $\mathcal{X}$  ist eine lineare Abbildung  $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. es gilt die Beziehung

$$\sigma(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_1 \sigma(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 \sigma(\mathbf{v}_2) \quad (\text{A.22})$$

für alle  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{X}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Man beachte, dass  $\sigma$  kein Element des Vektorraumes  $\mathcal{X}$  ist sondern im Dualraum  $\mathcal{X}^*$  von  $\mathcal{X}$  liegt. Dazu folgende Definition:

**Definition A.7 (Dualraum).** Die Menge aller linearen Funktionale  $\sigma$  auf einem linearen Vektorraum  $\mathcal{X}$  erzeugt einen neuen Vektorraum, den so genannten Dualraum  $\mathcal{X}^*$  von  $\mathcal{X}$ , wobei folgende Eigenschaften

- (1)  $(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{v}) = \sigma_1(\mathbf{v}) + \sigma_2(\mathbf{v})$  für  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{X}^*$  und  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$

(2)  $(\lambda\sigma)(\mathbf{v}) = \lambda\sigma(\mathbf{v})$  für  $\sigma \in \mathcal{X}^*$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$   
erfüllt sind.

Der Dualraum  $\mathcal{X}^*$  selbst ist also auch ein linearer Vektorraum und für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{X}$  ist die Beziehung  $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}^*)$  erfüllt.

Die zur Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  von  $\mathcal{X}$  zugehörige *duale Basis*  $\{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n\}$  von  $\mathcal{X}^*$  ist in der Form

$$\mu^i \mathbf{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

definiert. Damit erkennt man, dass mit  $\mu^i$  jenes lineare Funktional gegeben ist, mit dem die  $i$ -te Komponente eines Vektors  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bestimmt werden kann, denn es gilt

$$\mu^i \left( \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n v^j \mu^i(\mathbf{e}_j) = v^i. \quad (\text{A.24})$$

Im Allgemeinen lässt sich ein lineares Funktional  $\sigma$  wie folgt anschreiben

$$\sigma = \sum_{j=1}^n a_j \mu^j \quad (\text{A.25})$$

und unter  $\sigma(\mathbf{v})$  versteht man den Ausdruck

$$\sigma(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n a_j \mu^j \left( \sum_{k=1}^n v^k \mathbf{e}_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j v^k \underbrace{\mu^j(\mathbf{e}_k)}_{\delta_k^j} = \sum_{j=1}^n a_j v^j. \quad (\text{A.26})$$

Dieses Konzept lässt sich nun auf den Tangentialraum  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  übertragen.

**Definition A.8 (Kotangententialraum).** Der Dualraum  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  eines Tangentialraumes  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  am Punkt  $\mathbf{p}$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wird als Kotangententialraum bezeichnet.

Wie in Definition A.3 gezeigt wurde, lässt sich ein Tangentialvektor als Ableitungsoperator interpretieren. In diesem Zusammenhang lässt sich der Begriff einer Differentialform einführen.

**Definition A.9 (Differentialform).** Gegeben ist die Funktion  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Differentialform  $df$  von  $f$  am Punkt  $\mathbf{p}$  ist ein lineares Funktional  $df : \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch (siehe auch (A.11))

$$df(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(f) = L_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) \quad (\text{A.27})$$

mit  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ .



Man beachte an dieser Stelle, dass die Definition von  $df$  unabhängig von der Wahl der Basis auf  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  ist. Bezeichnen  $x^1, \dots, x^n$  die lokalen Koordinaten einer Karte, so bilden gemäß Definition A.4 die Vektoren  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\mathbf{p}}, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_{\mathbf{p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\mathbf{p}} \right\}$  eine Koordinatenbasis des Tangentialraums  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ . Die duale Basis des Kotangentialraums  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  ist dann durch die linearen Funktionale  $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$  gegeben, denn es gilt

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (\text{A.28})$$

Die generelle Darstellung einer Differentialform ist durch (siehe (A.25))

$$\sigma = \sum_{j=1}^n a_j dx^j \quad (\text{A.29})$$

gegeben. Man beachte, dass nicht jede Differentialform  $\sigma$  ein so genanntes *exaktes Differential* also das Differential

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \quad (\text{A.30})$$

einer skalaren Funktion  $f(x^1, \dots, x^n)$  ist.

**Definition A.10 (Kovektor).** Ein lineares Funktional  $\sigma : \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  wird als Kovektor, kovarianter Vektor oder 1-Form bezeichnet.

Ein (*glattes*) *Kovektorfeld*, definiert in einer offenen Umgebung eines Punktes  $\mathbf{p}$ , ist eine (glatte) differenzierbare Zuordnung eines linearen Funktionals  $\sigma$  zu jedem Punkt in dieser Umgebung und lässt sich in lokalen Koordinaten  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  wie folgt

$$\sigma = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) dx^j \quad (\text{A.31})$$

anschreiben, wobei die *Komponenten des (glatten) Kovektorfeldes*  $a_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, n$  (glatte) differenzierbare Funktionen von  $\mathbf{x}$  sind.

Im Folgenden soll noch gezeigt werden, wie sich die Komponenten eines Kovektors transformieren. Dazu betrachte man einen Kovektor  $\sigma$  ausgedrückt in lokalen Koordinaten  $(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n)$  der Karte  $(U, \mathbf{x}_U)$  und in den lokalen Koordinaten  $(x_V^1, x_V^2, \dots, x_V^n)$  der kompatiblen Karte  $(V, \mathbf{x}_V)$

$$\sigma = \sum_{j=1}^n a_j^U dx_U^j = \sum_{j=1}^n a_j^V dx_V^j. \quad (\text{A.32})$$

Setzt man nun die Koordinatentransformation  $\mathbf{x}_U = \mathbf{x}_U(\mathbf{x}_V)$  in (A.32) ein, so erhält man

$$\sum_{j=1}^n a_j^U dx_U^j = \sum_{j=1}^n a_j^U \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_U^j}{\partial x_V^k} \right) dx_V^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^U \left( \frac{\partial x_U^j}{\partial x_V^k} \right) dx_V^k = \sum_{k=1}^n a_k^V dx_V^k \quad (\text{A.33})$$

und damit die Transformationsvorschrift für die Komponenten des Kovektors in der Form

$$a_k^V = \sum_{j=1}^n a_j^U \left( \frac{\partial x_U^j}{\partial x_V^k} \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.34})$$

Man beachte, dass dies gerade die inverse Transformation der Komponenten eines Tangentialvektors gemäß (A.8) ist.

Im vorigen Abschnitt wurde in Definition A.5 gezeigt, wie durch eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten über das Differential eine Abbildung zwischen den Tangentialräumen impliziert wird. In der folgenden Definition soll dies auf Kovektoren erweitert werden.

**Definition A.11 (Pull-back).** Angenommen,  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}$  seien eine  $n$ - bzw.  $d$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $\mathbf{t} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  sei eine glatte Abbildung und  $\mathbf{t}_* : \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  bezeichne das Differential von  $\mathbf{t}$  an der Stelle  $\mathbf{q} \in \mathcal{N}$  mit  $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$ . Der Pull-back  $\mathbf{t}^* : \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{q}}^*\mathcal{N}$  ist eine lineare Abbildung und transformiert Kovektoren von  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  zu Kovektoren von  $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}^*\mathcal{N}$ . Für  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$  und  $\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  gilt

$$\underbrace{(\mathbf{t}^*\sigma)}_{\eta \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}^*\mathcal{N}}(\mathbf{w}) = \sigma \left( \underbrace{\mathbf{t}_*\mathbf{w}}_{\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}} \right). \quad (\text{A.35})$$

Wird nun die Karte um den Punkt  $\mathbf{q}$  mit den Koordinaten  $(x_U^1, x_U^2, \dots, x_U^n)$  mit  $(U, \mathbf{x}_U)$  und die Karte um den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{t}(\mathbf{q})$  mit den Koordinaten  $(x_W^1, x_W^2, \dots, x_W^d)$  mit  $(W, \mathbf{x}_W)$  bezeichnet, dann lässt sich die Abbildung  $\mathbf{x}_W \circ \mathbf{t} \circ \mathbf{x}_U^{-1}$  gemäß (A.18) in lokalen Koordinaten ausdrücken und das Differential  $\mathbf{t}_*$  formuliert in lokalen Koordinaten entspricht der Jacobi-Matrix von (A.19). Im Weiteren sind durch  $\mathbf{v} = \mathbf{t}_*\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{t}(\mathbf{q})}\mathcal{M}$  und  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$  Tangentialvektoren mit den Komponenten  $v^j, j = 1, \dots, d$  und  $w^k, k = 1, \dots, n$  und durch  $\eta = \mathbf{t}^*\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}^*\mathcal{N}$  und  $\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  Kovektoren mit den Komponenten  $\eta_k, k = 1, \dots, n$  und  $\sigma_j, j = 1, \dots, d$  gegeben. Gemäß Definition A.11 und Gleichung (A.26) muss gelten

$$\eta(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^n \eta_k w^k = \sigma(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^d \sigma_j v^j. \quad (\text{A.36})$$

Setzt man nun in (A.36) für  $v^j$  die Beziehung (A.20) ein, so erhält man

$$\sum_{k=1}^n \eta_k w^k = \sum_{j=1}^d \sigma_j \sum_{k=1}^n (\mathbf{t}_*)_k^j w^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma_j (\mathbf{t}_*)_k^j w^k \quad (\text{A.37})$$

und damit die Berechnungsvorschrift für die Komponenten der Kovektoren ausgedrückt in lokalen Koordinaten

$$\eta_k = \sum_{j=1}^d \sigma_j (\mathbf{t}_*)_k^j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.38})$$

Fasst man (A.20) und (A.38) in Matrixschreibweise zusammen, so transformieren sich die Komponenten von  $\mathbf{v} = \mathbf{t}_*\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{t}(\mathbf{q})}\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$ ,  $\eta = \mathbf{t}^*\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbf{q}}^*\mathcal{N}$  und  $\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^*\mathcal{M}$  in der

Form

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_d}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

und

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial x_U^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_d}{\partial x_U^1} & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^2} & \cdots & \frac{\partial t_d}{\partial x_U^n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_d \end{bmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

## A.4 Lie-Klammer

Die Lie-Klammer beschreibt die Änderung eines Vektorfeldes entlang der Integralkurve eines anderen Vektorfeldes. Dazu betrachte man eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit den glatten Vektorfeldern  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$ . Im Weiteren bezeichne  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$  den lokalen Fluss (siehe Definition 2.1) des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$ . Zur Wiederholung sei erwähnt, dass der Fluss  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$  folgenden Eigenschaften genügt:

- (1)  $\Phi_0^{\mathbf{v}} = \mathbf{I}$  mit der identischen Abbildung  $\mathbf{I}$
- (2)  $\Phi_{s+t}^{\mathbf{v}} = \Phi_s^{\mathbf{v}} \circ \Phi_t^{\mathbf{v}} = \Phi_t^{\mathbf{v}} \circ \Phi_s^{\mathbf{v}}$ ,
- (3)  $(\Phi_t^{\mathbf{v}})^{-1} = \Phi_{-t}^{\mathbf{v}}$  und
- (4)  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$  mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t^{\mathbf{v}} \right|_{t=0}(\mathbf{x}(t))$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befinde man sich am Punkt  $\mathbf{p}$ , d.h.  $\Phi_0^{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ , mit den Vektorfeldern  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  und  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ . Bewegt man sich nun die Zeit  $\Delta t$  entlang der Integralkurve von  $\mathbf{v}$ , so gelangt man zum Punkt  $\mathbf{q} = \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$  mit den zugehörigen Vektorfeldern  $\mathbf{v}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}$  und  $\mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}$ . Aus Abbildung A.4 ist unmittelbar einsichtig, dass man die beiden Vektorfelder  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$  und  $\mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}$  nicht direkt miteinander vergleichen kann, da diese in unterschiedlichen Tangentialräumen  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  und  $\mathcal{T}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}\mathcal{M}$  definiert sind.

Aus Definition A.5 weiß man aber, dass über die Pushforward-Abbildung  $\Phi_{\Delta t, *}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$  das Vektorfeld  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$  in den Tangentialraum  $\mathcal{T}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}\mathcal{M}$  transformiert werden kann oder umgekehrt das Vektorfeld  $\mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}$  mit der Pushforward-Abbildung  $\Phi_{-\Delta t, *}^{\mathbf{v}}(\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p}))$  der inversen Abbildung  $\mathbf{p} = \Phi_{-\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$  (siehe Eigenschaft (3) des Flusses  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$ ) zurück in den Tangentialraum  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$  transformiert werden kann. Basierend auf diesen Überlegungen kann die Lie-Klammer wie folgt definiert werden.

**Definition A.12 (Lie-Klammer).** Die Lie-Ableitung oder Lie-Klammer des (glatten) Vektorfeldes  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$  entlang des (glatten) Vektorfeldes  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  einer (glatten)

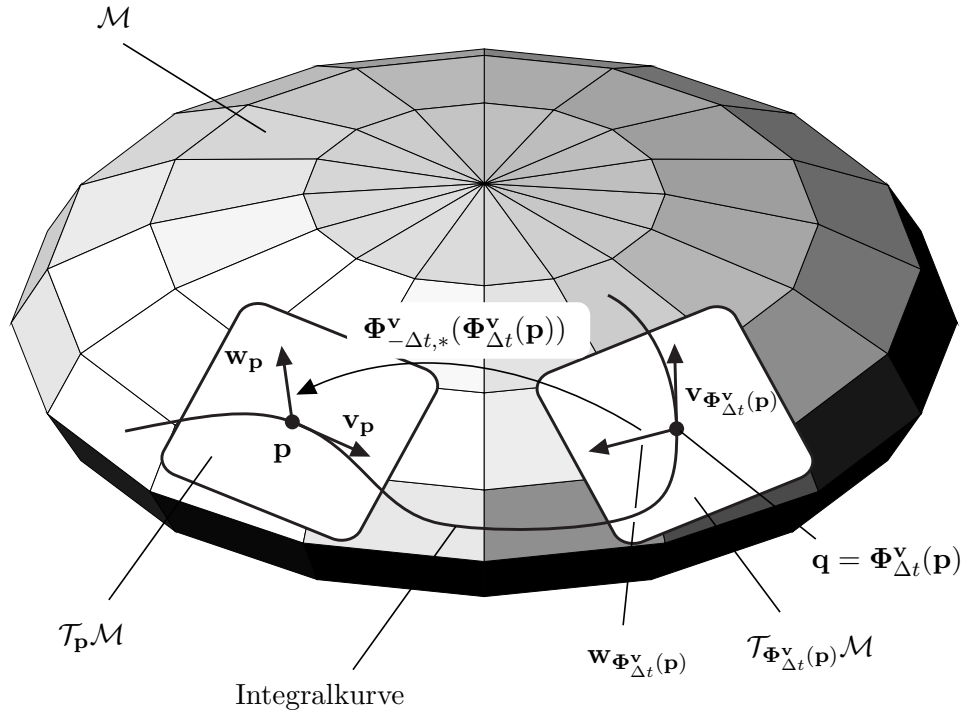


Abbildung A.4: Zur geometrischen Deutung der Lie-Klammer.

$n$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  lautet

$$L_{\mathbf{v}_p} \mathbf{w}_p = [\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \Phi_{-\Delta t, *}^{\mathbf{v}}(\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})) \mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})} - \mathbf{w}_p \right). \quad (\text{A.41})$$

Die Lie-Klammer erfüllt dabei folgende Eigenschaften:

- (1) Schiefsymmetrie:  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in \mathcal{T}_p \mathcal{M}$

$$[\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p] = -[\mathbf{w}_p, \mathbf{v}_p] \quad (\text{A.42})$$

- (2) Bilinearität:  $\mathbf{v}_{1,p}, \mathbf{v}_{2,p}, \mathbf{w}_p \in \mathcal{T}_p \mathcal{M}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$[\lambda_1 \mathbf{v}_{1,p} + \lambda_2 \mathbf{v}_{2,p}, \mathbf{w}_p] = \lambda_1 [\mathbf{v}_{1,p}, \mathbf{w}_p] + \lambda_2 [\mathbf{v}_{2,p}, \mathbf{w}_p] \quad (\text{A.43})$$

- (3) Jacobi-Identität:  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{T}_p \mathcal{M}$

$$[\mathbf{v}_{1,p}, [\mathbf{v}_{2,p}, \mathbf{v}_{3,p}]] + [\mathbf{v}_{2,p}, [\mathbf{v}_{3,p}, \mathbf{v}_{1,p}]] + [\mathbf{v}_{3,p}, [\mathbf{v}_{1,p}, \mathbf{v}_{2,p}]] = \mathbf{0} \quad (\text{A.44})$$

Für das Weitere sei angenommen, dass  $\mathbf{x}^T = [x^1, \dots, x^n]$  die lokalen Koordinaten einer Karte für eine offene Menge der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die die Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q} = \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$  beinhaltet, bezeichnen und  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  beschreiben die Darstellungen der Vektorfel-

der in lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$ . Um nun einen Ausdruck für die Lie-Klammer (A.41) in lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  anzugeben, werden im Folgenden einige Taylorreihenentwicklungen bezüglich der Zeit  $t$  um den Punkt  $t = 0$  berechnet. Für  $\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$  folgt damit

$$\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \underbrace{\Phi_0^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \Delta t} \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}} \Big|_{\Delta t=0}}_{=\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \Delta t + \dots \quad (\text{A.45})$$

Da nach (A.19) die Pushforward-Abbildung in lokalen Koordinaten der Jacobi-Matrix entspricht, errechnet sich  $\Phi_{-\Delta t,*}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  mit (A.45) zu

$$\Phi_{-\Delta t,*}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi_{-\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t + \dots \quad (\text{A.46})$$

Analog dazu lässt sich  $\mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})}$  in der Form

$$\mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})} = \mathbf{w}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \dots) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t + \dots \quad (\text{A.47})$$

und  $\Phi_{-\Delta t,*}^{\mathbf{v}}(\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$  wie folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{-\Delta t,*}^{\mathbf{v}}(\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) &= \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \dots) \Delta t + \dots \\ &= \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

anschreiben. Setzt man (A.45) - (A.48) in (A.41) ein und bricht die Taylorreihenentwicklungen nach dem linearen Term in  $\Delta t$  ab, so erhält man

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{w}](\mathbf{x}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \left( \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t \right) \left( \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta t \right) - \mathbf{w}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Mit Hilfe des Operators  $\text{ad}$  lässt sich die  $k$ -fach rekursive Lie-Klammer in der Form

$$\text{ad}_{\mathbf{v}}^k \mathbf{w}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \text{ad}_{\mathbf{v}}^{k-1} \mathbf{w}](\mathbf{x}), \quad \text{ad}_{\mathbf{v}}^0 \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.50})$$

definieren.

*Bemerkung A.1.* Die Lie-Klammer gemäß Definition A.12 lässt sich auch als zeitliche Ableitung der Zeitfunktion

$$\Lambda(\Delta t) = \Phi_{-\Delta t,*}^{\mathbf{v}}(\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})) \mathbf{w}_{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{v}}(\mathbf{p})} - \mathbf{w}_{\mathbf{p}} \quad (\text{A.51})$$

an der Stelle  $\Delta t = 0$  interpretieren. Man kann nun zeigen, dass in lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  gilt

$$\frac{d^k}{d\Delta t^k} \Lambda(\Delta t) \Big|_{\Delta t=0} = \text{ad}_{\mathbf{v}}^k \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.52})$$

Wenn nun die Funktion  $\Lambda(\Delta t)$  in der Nähe von  $\Delta t = 0$  analytisch ist, dann lässt sich  $\Lambda(\Delta t)$  in Form der sogenannten *Campbell-Baker-Hausdorff Formel*

$$\Lambda(\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{ad}_{\mathbf{v}}^k \mathbf{w}(\mathbf{x}) \frac{(\Delta t)^k}{k!} \tag{A.53}$$

anschreiben.

Die Lie-Klammer  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  zweier Vektorfelder  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  ist selbst wiederum ein Vektorfeld. Die Frage, die im Folgenden beantwortet werden soll, ist, mit welchem Fluss das Vektorfeld  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  verbunden ist. Dazu sei folgendes Theorem ohne Beweis angegeben:

**Satz A.1 (Lie-Klammer als Kommutator).** *Mit  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$  und  $\Phi_t^{\mathbf{w}}$  seien die lokalen Flüsse der Vektorfelder  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  bezeichnet. Im Weiteren sei durch  $\phi(t)$  die Komposition der Flüsse  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$  und  $\Phi_t^{\mathbf{w}}$  in der Form*

$$\phi(t) := \Phi_{-t}^{\mathbf{w}} \circ \Phi_{-t}^{\mathbf{v}} \circ \Phi_t^{\mathbf{w}} \circ \Phi_t^{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \tag{A.54}$$

gegeben. Dann gilt für jede glatte Funktion  $h \in C^\infty(\mathbf{p})$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](h) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(\phi(\sqrt{\Delta t})) - h(\phi(0))}{\Delta t} . \tag{A.55}$$

Abbildung A.5 gibt eine grafische Interpretation dieses Sachverhaltes. Der Fluss, der durch die Lie-Klammer  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  generiert wird, ist offensichtlich ein Maß dafür, wie stark die Flüsse  $\Phi_t^{\mathbf{v}}$  und  $\Phi_t^{\mathbf{w}}$  auf  $\mathcal{M}$  kommutieren. Aus diesem Grund wird die Lie-Klammer  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  oftmals auch als *Kommutator* der beiden Vektorfelder (Ableitungsoperatoren nach Definition A.3)  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  bezeichnet. Man kann nun einfach zeigen, dass  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  genau dann identisch verschwindet, d.h.  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{0}$ , wenn gilt

$$\Phi_{\tau_1}^{\mathbf{v}} \circ \Phi_{\tau_2}^{\mathbf{w}} = \Phi_{\tau_2}^{\mathbf{w}} \circ \Phi_{\tau_1}^{\mathbf{v}} \tag{A.56}$$

für alle  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .

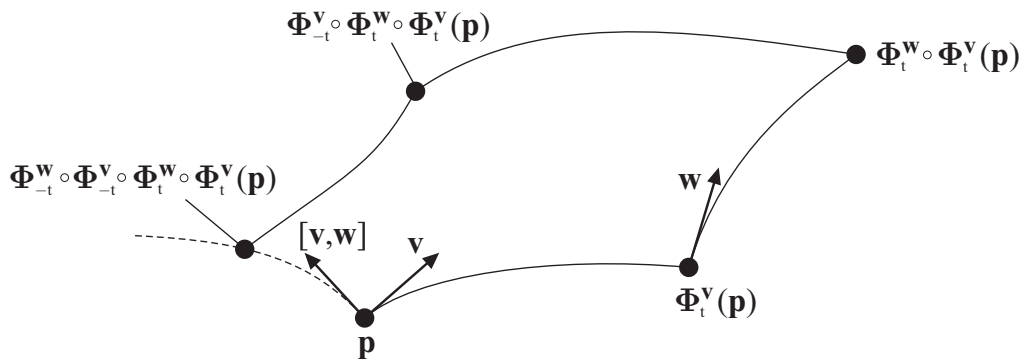


Abbildung A.5: Die Lie-Klammer als Kommutator.

Für  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  und  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt offensichtlich

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}, \quad (\text{A.57})$$

wobei die Matrix  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}$  auch als Kommutator der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bezeichnet wird.

## A.5 Distribution und Kodistribution

In diesem Abschnitt werden lineare Unterräume des Tangentialraumes  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$  bzw. des Kotangentialraumes  $\mathcal{T}_p^*\mathcal{M}$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  näher betrachtet. Dazu folgende Definition:

**Definition A.13 (Distribution).** Gegeben sei eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Eine Vorschrift die jedem Punkt  $\mathbf{p} \in U \subset \mathcal{M}$  einen linearen Unterraum  $\Delta_{\mathbf{p}}$  des Tangentialraumes  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$  in der Form

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \text{span}\{\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, \mathbf{v}_{2,\mathbf{p}}, \dots, \mathbf{v}_{d,\mathbf{p}}\} \quad (\text{A.58})$$

zuordnet, wird als (glatte) Distribution bezeichnet. Die Distribution heißt regulär in einer Umgebung  $V$  des Punktes  $\mathbf{p} \in V \subset U$  mit der Basis  $\mathbf{v}_{i,\mathbf{p}}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , falls für alle  $\mathbf{q} \in V$  gilt

$$\dim(\Delta_{\mathbf{q}}) = d. \quad (\text{A.59})$$

Bezeichnet man mit  $\mathbf{x}^T = [x^1, \dots, x^n]$  die lokalen Koordinaten einer Karte für eine offene Menge der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die die Umgebung  $V$  vollständig beinhaltet, dann schreibt man die Distribution in lokalen Koordinaten in der Form

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{x})\} \quad (\text{A.60})$$

an. Wenn nun für ein glattes Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \Delta(\mathbf{x})$ , dann lässt sich  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  in  $V$  immer in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d h_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.61})$$

mit den glatten Funktionen  $h_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, d$  ausdrücken. Man sagt auch, dass eine Distribution  $\Delta_1(\mathbf{x})$  eine Distribution  $\Delta_2(\mathbf{x})$  beinhaltet,  $\Delta_2(\mathbf{x}) \subset \Delta_1(\mathbf{x})$ , wenn für jedes  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \Delta_2(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \Delta_1(\mathbf{x})$ .

Damit lässt sich nun der Begriff der *Involutivität* formal definieren. Eine geometrische Deutung dieses Begriffes erfolgt im folgenden Abschnitt.

**Definition A.14 (Involutivität).** Eine reguläre Distribution  $\Delta_{\mathbf{p}} = \text{span}\{\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, \mathbf{v}_{2,\mathbf{p}}, \dots, \mathbf{v}_{d,\mathbf{p}}\}$  ist genau dann involutiv auf  $V$ , falls für alle  $\mathbf{q} \in V$

gilt

$$[\mathbf{v}_{i,\mathbf{q}}, \mathbf{v}_{j,\mathbf{q}}] \in \Delta_{\mathbf{q}}, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (\text{A.62})$$

Man beachte, dass eine 1-dimensionale Distribution und eine  $n$ -dimensionale Distribution definiert auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit immer involutiv sind. Falls eine Distribution  $\Delta(\mathbf{x})$  nicht involutiv ist, ist man oft an der hinsichtlich der Dimension kleinstmöglichen Distribution interessiert, die involutiv ist und  $\Delta(\mathbf{x})$  beinhaltet. Diese Distribution wird als *involutiver Abschluss*  $\text{inv}(\Delta(\mathbf{x}))$  von  $\Delta(\mathbf{x})$  mit  $\Delta(\mathbf{x}) \subset \text{inv}(\Delta(\mathbf{x}))$  bezeichnet.

**Beispiel A.2.** Ist die Distribution  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x})\}$  mit  $\mathbf{x}^T = [x^1, x^2, x^3, x^4]$  und den glatten Vektorfeldern

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

involutiv? Mit dem Ausdruck der Lie-Klammer

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2](\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

erkennt man unmittelbar, dass

$$\text{rang}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2](\mathbf{x})\} = 3 \quad (\text{A.65})$$

und damit  $\Delta(\mathbf{x})$  nicht involutiv ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$[\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2](\mathbf{x})](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{v}_2(\mathbf{x}), [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2](\mathbf{x})](\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.66})$$

und damit der involutive Abschluss  $\text{inv}(\Delta(\mathbf{x}))$  von  $\Delta(\mathbf{x})$  durch

$$\text{inv}(\Delta(\mathbf{x})) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2](\mathbf{x})\} \quad (\text{A.67})$$

gegeben ist.

Auf analoge Art und Weise lässt sich nun auch eine Kodistribution als linearer Unterraum des Kotangententialraumes  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^* \mathcal{M}$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  definieren.

**Definition A.15 (Kodistribution).** Gegeben sei eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Eine Vorschrift die jedem Punkt  $\mathbf{p} \in U \subset \mathcal{M}$  einen linearen Unterraum  $\Delta_{\mathbf{p}}^*$  des Kotangententialraumes  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}^* \mathcal{M}$  in der Form

$$\Delta_{\mathbf{p}}^* = \text{span}\{\sigma_{1,\mathbf{p}}, \sigma_{2,\mathbf{p}}, \dots, \sigma_{m,\mathbf{p}}\} \quad (\text{A.68})$$



zuordnet, wird als (glatte) Kodistribution bezeichnet. Die Kodistribution heißt regulär in einer Umgebung  $V$  des Punktes  $\mathbf{p} \in V \subset U$  mit der Basis  $\sigma_{i,\mathbf{p}}, i = 1, \dots, m$ , falls für alle  $\mathbf{q} \in V$  gilt

$$\dim(\Delta_{\mathbf{q}}^*) = m. \quad (\text{A.69})$$

Bezeichnet man mit  $\mathbf{x}^T = [x^1, \dots, x^n]$  die lokalen Koordinaten einer Karte für eine offene Menge der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die die Umgebung  $V$  vollständig beinhaltet, dann schreibt man die Kodistribution in lokalen Koordinaten in der Form

$$\Delta^*(\mathbf{x}) = \text{span}\{\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x})\} \quad (\text{A.70})$$

an. Wenn nun für ein glattes Kovektorfeld  $\eta(\mathbf{x})$  gilt  $\eta(\mathbf{x}) \in \Delta^*(\mathbf{x})$ , dann lässt sich  $\eta(\mathbf{x})$  in  $V$  immer in der Form

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m h_i(\mathbf{x})\sigma_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.71})$$

mit den glatten Funktionen  $h_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$  ausdrücken. Man sagt auch, dass eine Kodistribution  $\Delta_1^*(\mathbf{x})$  eine Kodistribution  $\Delta_2^*(\mathbf{x})$  beinhaltet,  $\Delta_2^*(\mathbf{x}) \subset \Delta_1^*(\mathbf{x})$ , wenn für jedes  $\eta(\mathbf{x}) \in \Delta_2^*(\mathbf{x}) \Rightarrow \eta(\mathbf{x}) \in \Delta_1^*(\mathbf{x})$ .

Eine spezielle Kodistribution, die im Weiteren noch eine wesentliche Rolle spielen wird, ist der so genannte *Annulator*  $\Delta^\perp$  zu einer Distribution  $\Delta$ .

**Definition A.16 (Annulator).** Gegeben sei eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit einer regulären  $d$ -dimensionalen Distribution  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  in einer Umgebung  $V$  des Punktes  $\mathbf{p}$ . Der Annulator  $\Delta^\perp$  ist die Menge aller linearen Funktionale  $\sigma$ , für die gilt

$$\sigma(\mathbf{v}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, d \quad (\text{A.72})$$

mit

$$\dim(\Delta^\perp) = n - \dim(\Delta) = n - d \quad (\text{A.73})$$

für alle  $\mathbf{q} \in V$ .

Aus Definition A.16 ist unmittelbar einsichtig, dass aus  $\Delta_2(\mathbf{x}) \subset \Delta_1(\mathbf{x})$  folgt  $\Delta_1^\perp(\mathbf{x}) \subset \Delta_2^\perp(\mathbf{x})$ . Wenn man in den lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  einer Karte die Vektorfelder  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, d$ , der Distribution  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{x})\}$  als Spaltenvektoren einer Matrix

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{x})] \quad (\text{A.74})$$

auffasst, dann lassen sich in den lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  die Komponenten des Annulators  $\Delta^\perp(\mathbf{x}) = \text{span}\{\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\sigma}_{n-d}(\mathbf{x})\}$  als Zeilenvektoren in der Matrix

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{n-d}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

zusammenfassen und es gilt die Beziehung

$$\Sigma(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} . \quad (\text{A.76})$$

Man sieht also, dass der Annullator über den Nullraum bzw. Kern von  $\mathbf{V}^T(\mathbf{x})$  bestimmt werden kann.

## A.6 Theorem von Frobenius

Im Abschnitt 6.3, im Speziellen (6.57) - (6.64), und im Abschnitt 6.5.1, insbesondere (6.146), wurde nach den unabhängigen Lösungen  $h_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, n - d$  eines speziellen Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}) \right) \mathbf{v}_k(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.77})$$

mit den linear unabhängigen glatten Vektorfeldern  $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}), k = 1, \dots, d$  und den lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}^T = [x^1, \dots, x^n]$  gesucht. Fasst man die Vektorfelder  $\mathbf{v}_k(\mathbf{x})$  zu einer regulären Distribution  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{x})\}$  zusammen, so kann die Lösbarkeit von (A.77) auch auf die Frage zurückgeführt werden, ob ein Annullator  $\Delta^\perp(\mathbf{x})$  von  $\Delta(\mathbf{x})$  gefunden werden kann, der von  $n - d$  exakten Differenzialen (siehe auch (A.30)) von  $n - d$  funktional unabhängigen glatten Funktionen  $h_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, n - d$  der Form

$$\Delta^\perp(\mathbf{x}) = \text{span}\{dh_1(\mathbf{x}), dh_2(\mathbf{x}), \dots, dh_{n-d}(\mathbf{x})\}, \quad dh_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{A.78})$$

mit  $\dim(\Delta^\perp(\mathbf{x})) = n - d$  aufgespannt wird. Falls so ein Annullator gefunden werden kann, also eine Lösung von (A.77) existiert, dann sagt man auch, dass die Distribution  $\Delta(\mathbf{x})$  *vollständig integrabel* ist. Das *Theorem von Frobenius* gibt nun eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit einer Distribution an.

**Satz A.2 (Theorem von Frobenius).** *Eine reguläre Distribution ist genau dann vollständig integrabel, wenn sie involutiv ist.*

Für den Beweis dieses Satzes sei auf die Literatur verwiesen, doch soll im Folgenden noch eine geometrische Interpretation gegeben werden.

Für das Folgende nehme man eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit einer regulären  $d$ -dimensionalen Distribution  $\Delta$  an. Eine  $r$ -dimensionale Submannigfaltigkeit  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{M}$  nennt man eine *Integralmannigfaltigkeit* von  $\Delta$ , wenn jedes Vektorfeld aus  $\Delta$  im Tangentialraum von  $\mathcal{N}$  liegt. Eine Distribution wird als vollständig integrabel bezeichnet, wenn lokale Koordinaten  $y^1, y^2, \dots, y^d, y^{d+1}, \dots, y^n$  so existieren, dass die Submannigfaltigkeiten charakterisiert durch  $y^{d+1} = \text{const}, y^{d+2} = \text{const}, \dots, y^n = \text{const}$   $d$ -dimensionale Integralmannigfaltigkeiten sind. Eine Karte mit diesen Koordinaten wird auch als *Frobenius-Karte* bezeichnet. D.h., wenn eine  $d$ -dimensionale Distribution  $\Delta_{\mathbf{p}}$  in einer Umgebung  $U$  eines Punktes  $\mathbf{p}$  involutiv ist, dann existiert eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Integralmannigfaltigkeit)  $\mathcal{N}$  immer so, dass der Tangentialraum  $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$  mit  $\Delta_{\mathbf{p}}$  in  $U$  zusammenfällt.

## A.7 Literatur

- [A.1] R. L. Bishop und S. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications Inc., 1980.
- [A.2] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.
- [A.3] W. Burke, *Applied Differential Geometry*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985.
- [A.4] T. Frankel, *The Geometry of Physics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.
- [A.5] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems (3rd Edition)*. London: Springer, 1995.
- [A.6] W. Kühnle, *Differentialgeometrie*, 3rd. Vieweg & Sohn Verlag, 2005.
- [A.7] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*. New York: Springer, 1991.
- [A.8] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds*. Addison Wesley, 1991.
- [A.9] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry - Vol. One*. Houston, Texas, USA: Publish or Perish, 1999.
- [A.10] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.