B Beobachterentwurf für lineare zeitvariante Systeme

In diesem Anhang werden lineare zeitvariante Systeme der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \qquad t > t_0, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{B.1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}, \qquad t \geq t_0 \tag{B.1b}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ betrachtet. Im Weiteren wird angenommen, dass die Einträge der Matrizen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ und $\mathbf{C}(t)$ hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen der Zeit t sind. Führt man für das System (B.1) eine Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}(t)\mathbf{z} \tag{B.2}$$

mit den Eigenschaften durch, dass

(A) $\mathbf{V}(t)$ für alle $t \geq t_0$ regulär ist, d.h. $|\det(\mathbf{V}(t))| > \varepsilon > 0$ für alle $t \geq t_0$ und

(B) die Einträge von $\mathbf{V}(t)$ stetig differenzierbare Funktionen der Zeit t für alle $t \geq t_0$ sind,

dann erhält man das *äquivalente* transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1}(t)\Big(-\dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{V}(t)\Big)}_{\tilde{\mathbf{A}}(t)}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)}_{\tilde{\mathbf{B}}(t)}\mathbf{u}, \quad t > t_0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \underbrace{\mathbf{V}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0}_{=\mathbf{z}_0} \tag{B.3a}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{C}(t)\mathbf{V}(t)}_{\tilde{\mathbf{C}}(t)}\mathbf{z}, \qquad t \geq t_0\ . \tag{B.3b}$$

Definition B.1 (Lyapunov-Transformation)**.** Man nennt die Transformation (B.2) eine Lyapunov-Transformation, wenn $\mathbf{V}(t)$ und $\mathbf{V}^{-1}(t)$ für alle $t \geq t_0$ beschränkt sind, d.h. $\|\mathbf{V}(t)\|_i < \kappa_1$ und $\|\mathbf{V}^{-1}(t)\|_i < \kappa_2$ für geeignete positive Konstanten κ_1, κ_2 und alle Zeiten $t \geq t_0$.

Für den Zusammenhang der Stabilität der beiden Systeme (B.1) und (B.3) gilt folgender Satz:

Satz B.1 (Stabilität äquivalenter linearer zeitvarianter Systeme)**.** *Sind die beiden Systeme (B.1) und (B.3) über eine Lyapunov-Transformation gemäß Definition B.1 miteinander verbunden, dann folgt aus der exponentiellen Stabilität eines Systems die exponentielle Stabilität des jeweils anderen Systems.*

Aufgabe B.1. Zeigen Sie Satz B.1.

Hinweis: Verwenden Sie dabei Definition 3.12 der exponentiellen Stabilität nichtautonomer Systeme.

Eine wesentliche Grundlage für den Beobachterentwurf bildet die Definition der Beobachtbarkeit linearer zeitvarianter Systeme.

Definition B.2 (Gleichmäßige Beobachtbarkeit linearer zeitvarianter Systeme)**.** Man nennt das System (B.1) gleichmäßig beobachtbar im Zeitintervall $[t_0, t_1]$, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}(t), \mathbf{A}(t)) = \begin{bmatrix} \mathrm{M}^0_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}(t) \\ \mathrm{M}^1_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{M}^{n-1}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}(t) \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

mit dem Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^k_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C} &= \mathrm{M}^1_{\mathbf{A}}\left(\mathrm{M}^{k-1}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}\right) , \\ \mathrm{M}^1_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A} , \\ \mathrm{M}^0_{\mathbf{A}}\,\mathbf{C} &= \mathbf{C} \end{aligned} \tag{B.5}$$

für alle Zeiten $t \in [t_0, t_1]$ den Rang n hat.

Aufgabe B.2. Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}\left(\tilde{\mathbf{C}}(t), \tilde{\mathbf{A}}(t)\right)$ des äquivalenten transformierten Systems (B.3) über die Beziehung

$$\mathcal{O}\left(\tilde{\mathbf{C}}(t), \tilde{\mathbf{A}}(t)\right) = \mathcal{O}(\mathbf{C}(t), \mathbf{A}(t))\mathbf{V}(t) \tag{B.6}$$

mit der Beobachtbarkeitsmatrix des ursprünglichen Systems (B.1) verbunden ist.

Diese Aufgabe zeigt, dass eine Zustandstransformation der Form (B.2) die Eigenschaft der Beobachtbarkeit nicht verändert. Obwohl die nachstehend angeführte Theorie des Beobachterentwurfs unmittelbar auf Mehrgrößensysteme der Form (B.1) anwendbar ist, wollen wir uns der Übersichtlichkeit halber auf lineare zeitvariante Eingrößensysteme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)u, \qquad t > t_0, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{B.7a}$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x}, \qquad t \geq t_0 \tag{B.7b}$$

beschränken. Im ersten Schritt des Beobachterentwurfs soll für das System (B.7) eine Zustandstransformation (B.2) so gesucht werden, dass das System im transformierten Zustand $\mathbf{z}$ in *Beobachtbarkeitsnormalform*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1(t) \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B(t)}\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_{n-2}(t) \\ b_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_B(t)} u \tag{B.8a}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_n(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)}\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} \tag{B.8b}$$

vorliegt, wobei die Funktion $c_n(t) \neq 0$, $t \geq t_0$ einen Entwurfsfreiheitsgrad darstellt. Gemäß (B.3) muss die Transformationsmatrix $\mathbf{V}(t)$ dabei folgenden Bedingungen

$$\mathbf{V}^{-1}(t)\Big(-\dot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{V}(t)\Big) = \mathbf{A}_B(t) \tag{B.9a}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{V}(t) = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t) \tag{B.9b}$$

genügen. Schreibt man nun $\mathbf{V}(t)$ in Form von Spaltenvektoren $\mathbf{v}_j(t), j = 1, \dots, n$ an

$$\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t) & \mathbf{v}_2(t) & \dots & \mathbf{v}_n(t) \end{bmatrix}, \tag{B.10}$$

so kann Bedingung (B.9a) wie folgt

$$-\dot{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) = \mathbf{A}_B^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{V}^{\mathrm{T}}(t) \tag{B.11}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{v}}_1^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) \\ -\dot{\mathbf{v}}_2^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) \\ \vdots \\ -\dot{\mathbf{v}}_{n-1}^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_{n-1}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) \\ -\dot{\mathbf{v}}_n^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}(t) \\ \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}^{\mathrm{T}}(t) \\ \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

formuliert werden. Man erkennt unmittelbar, dass die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix $\mathbf{V}(t)$ folgende Gleichungen

$$-\dot{\mathbf{v}}_{j-1}^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_{j-1}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) = \mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}(t), \qquad j = 2, \ldots, n \tag{B.13a}$$

$$-\dot{\mathbf{v}}_n^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(t)\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}(t) \tag{B.13b}$$

erfüllen müssen. Führt man analog zum Operator $\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^k$ von (B.5) den Operator $\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^k$ in der Form

$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^k \, \mathbf{B} = \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^1 \left(\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{k-1} \, \mathbf{B}\right) , \tag{B.14}$$

$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^1 \, \mathbf{B} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} , \tag{B.15}$$

$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^0 \, \mathbf{B} = \mathbf{B} \tag{B.16}$$

ein, dann lassen sich die Gleichungen (B.13) wie folgt

$$\mathbf{v}_j(t) = -\dot{\mathbf{v}}_{j-1}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{v}_{j-1}(t) = \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{j-1} \, \mathbf{v}_1(t), \quad j = 2, \ldots, n \tag{B.17a}$$

$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^n \, \mathbf{v}_1(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \, \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^j \, \mathbf{v}_1(t) \tag{B.17b}$$

umschreiben. Setzt man $\mathbf{v}_j(t), j = 2, \ldots, n$ von (B.17a) in (B.9b) ein, so folgt

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{V}(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^0 \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^1 \quad \ldots \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{n-1}\Big]\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t) \; . \tag{B.18}$$

Lemma B.1. *Die beiden folgenden Folgen von Bedingungen*

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \, \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^0 \, \mathbf{v}_1(t) = 0 \; , \\ &\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \, \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^1 \, \mathbf{v}_1(t) = 0, \ldots, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \, \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^k \, \mathbf{v}_1(t) = 0 \end{aligned} \tag{B.19}$$

und

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^0 \, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\right)\mathbf{v}_1(t) = 0 \; , \\ &\left(\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^1 \, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\right)\mathbf{v}_1(t) = 0, \ldots, \left(\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^k \, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\right)\mathbf{v}_1(t) = 0 \end{aligned} \tag{B.20}$$

sind für $k \geq 0$ äquivalent.

Aufgabe B.3. Beweisen Sie Lemma B.1.

Hinweis: Beachten Sie, dass aus $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{v}_1(t) = 0$ folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{v}_1(t)\right) = \dot{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\mathbf{v}}_1(t) = 0$.

Wendet man Lemma B.1 auf (B.18) an, so erhält man die Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^0\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \\ \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^1\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{n-1}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t),\mathbf{A}(t))} \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{c}_B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

und unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Beobachtbarkeit des Systems (B.7) nach Definition B.2 kann $\mathbf{v}_1(t)$ in der Form

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathcal{O}^{-1}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix} \tag{B.22}$$

berechnet werden. Damit lautet die Transformationsmatrix $\mathbf{V}(t)$ auf Beobachtbarkeitsnormalform (B.12)

$$\mathbf{V}(t) = \Big[\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^0 \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^1 \quad \dots \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{n-1}\Big] \mathbf{v}_1(t) \tag{B.23}$$

mit $\mathbf{v}_1(t)$ als letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}^{-1}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big)$ (vergl. (B.4)) multipliziert mit der noch frei zu wählenden Funktion $c_n(t)$. Liegt das System in Beobachtbarkeitsnormalform gemäß (B.8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} = \mathbf{A}_B(t)\mathbf{z} + \mathbf{b}_B(t)u, \qquad t > t_0, \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \tag{B.24a}$$

$$y = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{z}, \qquad t \geq t_0 \tag{B.24b}$$

vor, dann kann auf einfache Art und Weise die *zeitabhängige Beobachterverstärkung*

$$\hat{\mathbf{k}}_B^{\mathrm{T}}(t) = \Big[k_{B,0}(t) \quad k_{B,1}(t) \quad \dots \quad k_{B,n-1}(t)\Big] \tag{B.25}$$

für den vollständigen Beobachter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_B(t)\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}_B(t)u - \hat{\mathbf{k}}_B(t)(y - \hat{y}), \qquad t > t_0, \qquad \hat{\mathbf{z}}(t_0) = \hat{\mathbf{z}}_0 \tag{B.26a}$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)\hat{\mathbf{z}}, \qquad t \geq t_0 \tag{B.26b}$$

mit dem geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{z}}$ berechnet werden, indem man die Fehlerdynamik $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{z}} = \underbrace{\Big(\mathbf{A}_B(t) + \hat{\mathbf{k}}_B(t)\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)\Big)}_{\mathbf{A}_{B,e}}\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_{B,0}(t)c_n(t) - a_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & k_{B,1}(t)c_n(t) - a_1(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{B,n-2}(t)c_n(t) - a_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & \dots & 1 & k_{B,n-1}(t)c_n(t) - a_{n-1}(t) \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{z}} \tag{B.27}$$

genauer betrachtet. Wählt man nun

$$k_{B,j}(t) = \frac{1}{c_n(t)}(a_j(t) - p_j), \qquad j = 0, \dots, n-1 \;, \tag{B.28}$$

dann kann mit den Koeffizienten p_j, $j = 0, \dots, n-1$, das charakteristische Polynom der Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_{B,e}$ in der Form $s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0$ beliebig vorgegeben werden. Um nun die zeitabhängige Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ für den Beobachter im Originalzustand $\mathbf{x}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(t)u - \hat{\mathbf{k}}(t)(y - \hat{y}), \qquad t > t_0, \qquad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \tag{B.29a}$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\hat{\mathbf{x}}, \qquad t \geq t_0 \tag{B.29b}$$

zum System (B.7) zu berechnen, führt man einfach für den Beobachter (B.26) die inverse Zustandstransformation $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^{-1}(t)\hat{\mathbf{x}}, t \geq t_0$ mit $\mathbf{V}(t)$ gemäß (B.23) in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{V}(t)\Big(-\dot{\mathbf{V}}^{-1}(t) + \mathbf{A}_B(t)\mathbf{V}^{-1}(t)\Big)}_{\mathbf{A}(t)}\hat{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{V}(t)\mathbf{b}_B(t)}_{\mathbf{b}(t)}u - \underbrace{\mathbf{V}(t)\hat{\mathbf{k}}_B(t)}_{\hat{\mathbf{k}}(t)}(y - \hat{y}) \tag{B.30a}$$

$$\hat{y} = \underbrace{\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)}_{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)}\hat{\mathbf{x}}, \quad t \geq t_0 \tag{B.30b}$$

für $t > t_0$ und $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{V}(t_0)\hat{\mathbf{z}}_0$ durch. Unter Verwendung von (B.23) und (B.28) lässt sich der Ausdruck für die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}(t) &= \mathbf{V}(t)\hat{\mathbf{k}}_B(t) \\
&= \frac{1}{c_n(t)}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^j\,\mathbf{v}_1(t)\Big)(a_j(t) - p_j) \\
&= \underbrace{\frac{1}{c_n(t)}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^j\,\mathbf{v}_1(t)\Big)a_j(t)}_{\overset{(\mathrm{B.17b})}{=} -\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^n\,\mathbf{v}_1(t)} - \frac{1}{c_n(t)}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^j\,\mathbf{v}_1(t)\Big)p_j
\end{aligned} \tag{B.31}$$

vereinfachen. Der vorgestellte Beobachterentwurf ist in der Literatur auch unter dem Namen Polvorgabe für lineare zeitvariante Systeme zu finden und lässt sich wie folgt zusammenfassen.

Satz B.2 (Formel von Ackermann zur Polvorgabe für lineare zeitvariante Systeme)**.** *Angenommen, das lineare zeitvariante System (B.7) ist gleichmäßig beobachtbar für* $t \geq t_0$ *im Sinne von Definition B.2, d.h. die Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big) = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^0\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \\ \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^1\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{n-1}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix} \tag{B.32}$$

mit dem Operator

$$\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{k}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{1}\left(\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{k-1}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)\;, \tag{B.33}$$

$$\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{1}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\;, \tag{B.34}$$

$$\mathrm{M}_{\mathbf{A}}^{0}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \tag{B.35}$$

hat den Rang n für alle Zeiten $t \geq t_0$. Dann führt die zeitabhängige Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ des vollständigen Zustandsbeobachters (B.29)

$$\hat{\mathbf{k}}(t) = -\frac{1}{c_n(t)}\left(p_0\,\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{0} + p_1\,\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{1} + \ldots + p_{n-1}\,\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{n-1} + \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{n}\right)\mathbf{v}_1(t) \tag{B.36}$$

mit

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathcal{O}^{-1}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}\;, \tag{B.37}$$

dem Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{k}\,\mathbf{v}_1 &= \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{1}\left(\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{k-1}\,\mathbf{v}_1\right)\;, \\ \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{1}\,\mathbf{v}_1 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_1 + \mathbf{A}\mathbf{v}_1\;, \\ \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{0}\,\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{B.38}$$

sowie der frei zu wählenden Funktion $c_n(t) \neq 0$ für alle Zeiten $t \geq t_0$ zu einer zeitunabhängigen Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{A}_{B,e} = \mathbf{A}_B(t) + \hat{\mathbf{k}}_B(t)\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)$ im transformierten Zustand $\tilde{\mathbf{z}}$ der Beobachtbarkeitsnormalform (siehe (B.27)), deren charakteristisches Polynom $s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_0$ durch die Koeffizienten p_j, $j = 0, \ldots, n-1$, als beliebiges Hurwitzpolynom vorgegeben werden kann.

Unter der Voraussetzung, dass die Transformation (B.2) mit

$$\mathbf{V}(t) = \left[\mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{0} \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{1} \quad \ldots \quad \mathrm{N}_{\mathbf{A}}^{n-1}\right]\mathbf{v}_1(t) \tag{B.39}$$

auf Beobachtbarkeitsnormalform (B.8) gemäß Definition B.1 eine Lyapunov- Transformation ist, folgt nach Satz B.1 die exponentielle Stabilität der Beobachterfehlerdynamik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\mathbf{A}(t) + \hat{\mathbf{k}}(t)\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t)\right)}_{\mathbf{A}_e}\tilde{\mathbf{x}} \tag{B.40}$$

im Originalzustand $\mathbf{x}$. Man beachte, dass die Beobachtungsfehler $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{z}}$ über die Beziehung $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(t)\tilde{\mathbf{z}}$ miteinander verbunden sind.

Aufgabe B.4. Zeigen Sie, dass Satz B.2 für lineare zeitinvariante Systeme der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{B.41a}$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{B.41b}$$

in die bekannte Ackermannformel für lineare zeitinvariante Systeme übergeht (Vorlesung Automatisierung).

Aufgabe B.5. Bei linearen Systemen sind der Zustandsregler- und Zustandsbeobachterentwurf dual (Vorlesung Automatisierung). Überlegen Sie sich, wie Sie mit der hier vorgestellten Theorie einen Zustandsregler für lineare zeitvariante Systeme der Form (B.7) entwerfen können. Analog zu Definition B.2 nennt man das System (B.7) im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ gleichmäßig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}(t), \mathbf{b}(t)) = \left[\mathrm{N}^0_{\mathbf{A}}\,\mathbf{b}(t), \mathrm{N}^1_{\mathbf{A}}\,\mathbf{b}(t), \ldots, \mathrm{N}^{n-1}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{b}(t)\right] \tag{B.42}$$

mit dem Operator $\mathrm{N}^k_{\mathbf{A}}$ nach (B.16) für alle Zeiten $t \in [t_0, t_1]$ den Rang n hat.

Beispiel B.1. Als Beispiel betrachte man das einfache lineare zeitvariante System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5\exp(-3t) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{B.43a}$$

$$y = \begin{bmatrix} \sin(t) & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}\ . \tag{B.43b}$$

Die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big) &= \begin{bmatrix} \mathrm{M}^0_{\mathbf{A}}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \\ \mathrm{M}^1_{\mathbf{A}}\,\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(t) & 4 \\ \cos(t) - 4 & 3\sin(t) + 20\exp(-3t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.44}$$

errechnet sich zu

$$\det\Big(\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big)\Big) = 3(\sin(t))^2 + 20\exp(-3t)\sin(t) - 4\cos(t) + 16\ , \tag{B.45}$$

woraus man erkennt, dass das System (B.43b) gemäß Definition B.2 für alle $t \geq t_0 \geq 0$ gleichmäßig beobachtbar ist. Wählt man in (B.22)

$$c_n(t) = \det\Big(\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(t), \mathbf{A}(t)\Big)\Big)\ , \tag{B.46}$$

dann folgt

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{bmatrix} -4 \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{B.47}$$

bzw. für die Transformationsmatrix $\mathbf{V}(t)$ erhält man nach (B.23)

$$\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 3\sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) + 4 + 5\exp(-3t)\sin(t) \end{bmatrix} . \tag{B.48}$$

Aufgabe B.6. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} = \mathbf{V}(t)\mathbf{z}$ mit $\mathbf{V}(t)$ von (B.48) eine Lyapunov-Transformation gemäß Definition B.1 ist.

Wählt man als gewünschtes charakteristisches Polynom des Fehlersystems in Beobachtbarkeitsnormalform ein Hurwitzpolynom der Form $s^2 + p_1 s + p_0$ mit geeigneten Koeffizienten p_0 und p_1, dann lautet der zugehörige Beobachter im Originalzustand $\mathbf{x}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5\exp(-3t) \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u - \hat{\mathbf{k}}(t)(y - \hat{y}), \quad t > t_0, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \tag{B.49}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \sin(t) & 4 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}, \quad t \geq t_0 \tag{B.50}$$

mit der zeitabhängigen Beobachterverstärkung

$$\hat{\mathbf{k}}(t) = -\frac{1}{c_n(t)}\begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{bmatrix} \tag{B.51}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(t) &= 4p_0 - 12 - 3p_1\sin(t) + 6\cos(t) - 15\exp(-3t)\sin(t) \\ k_2(t) &= -4p_1 + \exp(-3t)(10\cos(t) - (15 + 5p_1)\sin(t) - 20) \\ &\quad - (4 - p_0)\sin(t) + p_1\cos(t) - 25\exp(-6t)\sin(t) \ . \end{aligned} \tag{B.52}$$

B.1 Literatur

[B.1] E. Freund, *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer, Berlin-Heidelberg: Lecture Notes in Operations Research und Mathematical Systems, 1971.

[B.2] T. Kailath, *Linear Systems*. New York: Prentice Hall, 1980.

[B.3] R. Rothfuß, *Anwendung flachheitsbasierter Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Düsseldorf: Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 664, VDI Verlag, 1997.