

# 1 Nichtlineare Systeme

Die Analyse- und Entwurfsmethoden zur Automatisierung linearer Systeme sind am weitesten fortgeschritten. Verantwortlich hierfür ist das Superpositionsgesetz, das die mathematische Behandlung dieser Klasse dynamischer Systeme wesentlich erleichtert. Die physikalischen Grundgesetze beinhalten aber vielfach wesentliche Nichtlinearitäten. Können diese nicht mehr vernachlässigt werden, muss man auf die Methoden der nichtlinearen Regelungstechnik zurückgreifen.

Infolge des *Superpositionsgesetzes* fallen bei linearen Systemen *lokale* und *globale* Eigenschaften zusammen. Bei *nichtlinearen dynamischen Systemen* gilt dies nicht mehr. Beschränkt man sich bei nichtlinearen Systemen auf lokale Eigenschaften, dann können vielfach durch Linearisierung der Systemgleichungen noch lineare Methoden zum Ziel führen. Ist man jedoch an globalen Eigenschaften wie Stabilität im Großen, etc. interessiert, muss man das nichtlineare mathematische Modell untersuchen.

Eine große Klasse nichtlinearer dynamischer Systeme kann durch mathematische Modelle von nichtlinearen Differenzialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Für diese Modelle steht jedoch kein einfaches Hilfsmittel zur Eingangs- Ausgangsbeschreibung wie das der Laplace-Transformation im linearen Fall zur Verfügung. Die Analyse solcher Systeme erfolgt daher vorzugsweise im Zustandsraum.

## 1.1 Lineare und nichtlineare Systeme

Die Beziehung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

beschreibt ein lineares, zeitinvariantes, autonomes System  $n$ -ter Ordnung mit konzentrierten Parametern. Neben dem Superpositionsprinzip kann das System durch weitere Eigenschaften charakterisiert werden.

Die Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  von (1.1) sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_R . \quad (1.2)$$

Im Falle  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  hat das System genau eine Ruhelage, nämlich  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ , anderenfalls besitzt es unendlich viele Ruhelagen.

**Aufgabe 1.1.** Geben Sie ein System 2-ter Ordnung (1.1) mit unendlich vielen Ruhelagen an.

Mit der Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (1.3)$$

lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 . \quad (1.4)$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $\mathbf{x}(t)$  der Abschätzung

$$a_1 e^{-\alpha_1 t} \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq a_2 e^{\alpha_2 t} \quad (1.5)$$

mit reellen Zahlen  $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  genügt. D. h., eine Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  des Systems (1.1) kann in *endlicher Zeit weder in die Ruhelage*  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  *einlaufen noch in endlicher Zeit über alle Grenzen wachsen.*

Obige Eigenschaften müssen auf ein nichtlineares, autonomes System  $n$ -ter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

nicht mehr zutreffen. Die Ruhelagen dieses Systems sind nun Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) . \quad (1.7)$$

Über die Lösungsmenge  $\mathcal{X}_R$  von (1.7) kann keine allgemeine Aussage gemacht werden. So kann  $\mathcal{X}_R$  genau ein Element, eine endliche Anzahl von Elementen oder eine unendliche Anzahl von Elementen umfassen.

**Aufgabe 1.2.** Geben Sie ein System 1-ter Ordnung (1.6) mit genau drei Ruhelagen an.

Nichtlineare Systeme können auch in endlicher Zeit in die Ruhelage einlaufen. Hierzu betrachte man die Gleichung

$$\dot{x} = -\sqrt{x}, \quad x_0 > 0 . \quad (1.8)$$

Für die Lösung obigen Systems gilt

$$x(t) = \begin{cases} (\sqrt{x_0} - \frac{t}{2})^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2\sqrt{x_0} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (1.9)$$

Die Lösung eines nichtlinearen Systems kann auch in endlicher Zeit über alle Grenzen wachsen. Hierzu wird das System

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x_0 = 0 \quad (1.10)$$

betrachtet. Die Lösung lautet

$$x(t) = \tan(t), \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} . \quad (1.11)$$

Für  $t \geq \frac{\pi}{2}$  existiert keine Lösung.

## 1.2 Satellitenregelung

Abbildung 1.1 zeigt einen Nachrichtensatelliten. Wird der Satellit als starrer Körper aufgefasst, dann kann seine Drehbewegung durch die Beziehung

$$\Theta \dot{\mathbf{w}} = -\mathbf{w} \times (\Theta \mathbf{w}) + \mathbf{M} \quad (1.12)$$

mit

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (1.13a)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{13} & \Theta_{23} & \Theta_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.13b)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (1.13c)$$

beschrieben werden.

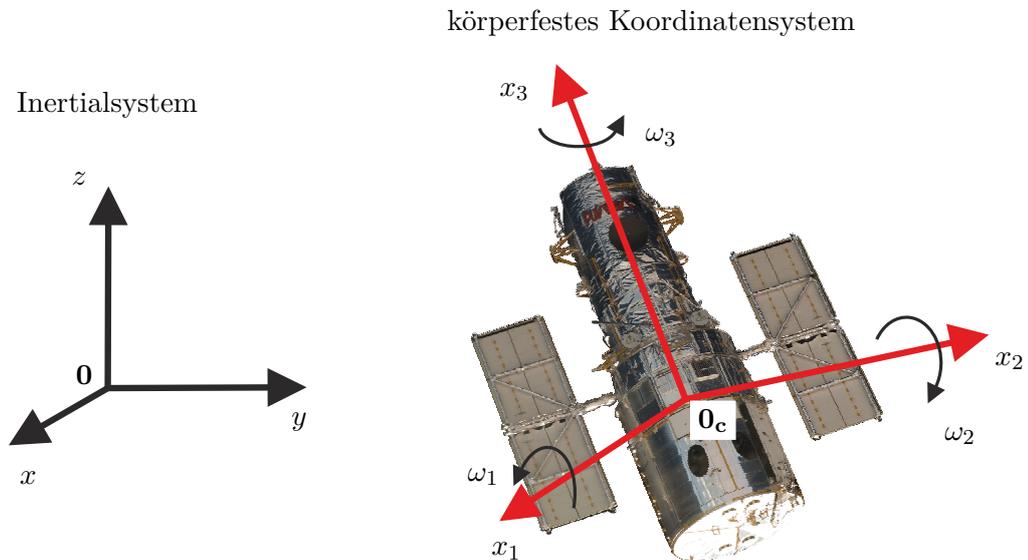


Abbildung 1.1: Zur Drehbewegung eines Satelliten.

Dabei bezeichnet  $\mathbf{w}$  den Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten,  $\Theta$  die Matrix der Trägheitsmomente und  $\mathbf{M}$  den Vektor der Drehmomente. Die Größen  $\mathbf{w}$ ,  $\Theta$  und  $\mathbf{M}$  werden dabei auf das satellitenfeste Koordinatensystem  $(0_C, x_1, x_2, x_3)$  im Schwerpunkt  $0_C$

bezogen. Legt man das Koordinatensystem  $(0_C, x_1, x_2, x_3)$  in die Trägheitshauptachsen des Satelliten, gilt

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

womit sich obiges System zu

$$\Theta_{11}\dot{\omega}_1 = -(\Theta_{33} - \Theta_{22})\omega_2\omega_3 + M_1 \quad (1.15a)$$

$$\Theta_{22}\dot{\omega}_2 = -(\Theta_{11} - \Theta_{33})\omega_1\omega_3 + M_2 \quad (1.15b)$$

$$\Theta_{33}\dot{\omega}_3 = -(\Theta_{22} - \Theta_{11})\omega_1\omega_2 + M_3 \quad (1.15c)$$

vereinfacht.

**Aufgabe 1.3.** Wieviel prinzipiell verschiedene Ruhelagen können Sie für den Satelliten (1.15) für  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  angeben?

### 1.3 Balken mit Kugel

Eine Kugel mit der Masse  $m_K$  rollt auf einem drehbar gelagerten Balken (siehe Abbildung 1.2). Mittels eines am Drehpunkt des Balkens eingebrachten Moments  $M$  wird die

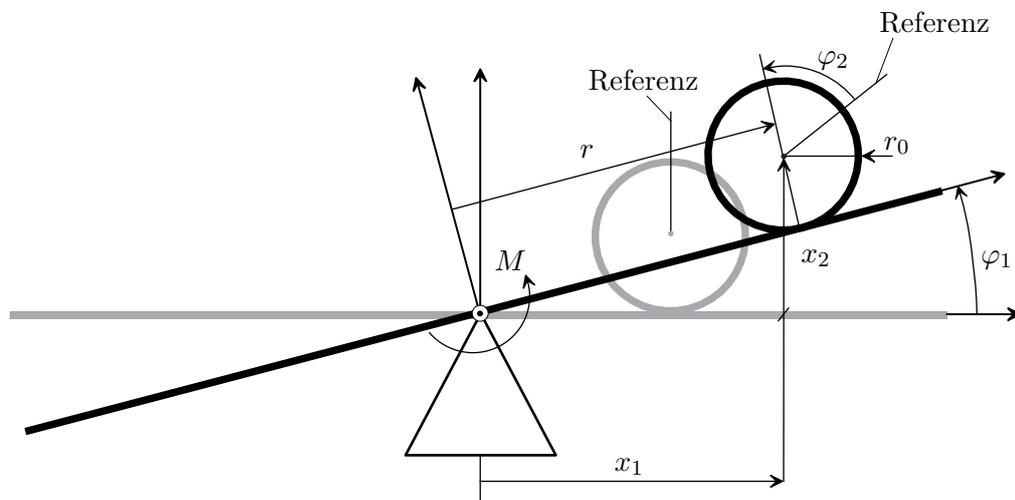


Abbildung 1.2: Balken mit rollender Kugel.

Einrichtung beeinflusst. Es gelten die geometrischen Beziehungen

$$x_1 = r \cos(\varphi_1) - r_0 \sin(\varphi_1) \quad (1.16a)$$

$$x_2 = r \sin(\varphi_1) + r_0 \cos(\varphi_1) \quad (1.16b)$$

sowie

$$\dot{r} = -r_0 \dot{\varphi}_2 . \quad (1.17)$$

Vernachlässigt man die Reibungskräfte, dann lautet die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = & \underbrace{\frac{1}{2} m_K \left( \dot{x}_1^2(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) + \dot{x}_2^2(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right)}_{\text{translatorischer Anteil der kinetischen Energie}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \Theta_B \dot{\varphi}_1^2 + \Theta_K (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \right)}_{\text{rotatorischer Anteil der kinetischen Energie}} - \underbrace{m_K g x_2(\varphi_1, r)}_{\text{potentielle Energie}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

mit der Masse der Kugel  $m_K$ , dem Trägheitsmoment des Balkens  $\Theta_B$ , dem Trägheitsmoment der Kugel  $\Theta_K = \frac{2}{5} m_K r_0^2$  und der Erdbeschleunigung  $g$ .

**Aufgabe 1.4.** Zeigen Sie, dass für das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kugel mit dem Radius  $r_0$  gilt

$$\Theta_K = \frac{2}{5} m_K r_0^2 .$$

Mit den verallgemeinerten Koordinaten  $r(t)$  und  $\varphi_1(t)$  erhält man aus den Lagrangeschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial r} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = 0 \quad (1.19a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = M . \quad (1.19b)$$

Um zu einfacheren Ergebnissen zu gelangen, wird vorausgesetzt, dass die Kugel eine Punktmasse ist, also gilt  $r_0 = 0$  sowie  $\Theta_K = 0$ . Damit vereinfacht sich die Lagrangefunktion zu

$$L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m_K \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_K r^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_B \dot{\varphi}_1^2 - m_K g r \sin(\varphi_1) \quad (1.20)$$

und das mathematische Modell lautet

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = \frac{1}{m_K r^2 + \Theta_B} (M - 2m_K r \dot{r} \dot{\varphi}_1 - g m_K r \cos(\varphi_1)) \quad (1.21a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r = r \dot{\varphi}_1^2 - g \sin(\varphi_1) . \quad (1.21b)$$

Die Ruhelagen dieses Systems sind durch

$$\varphi_{1,R} = 0 \quad (1.22a)$$

$$M_R = g m_K r_R \quad (1.22b)$$

$$r_R \text{ beliebig} \quad (1.22c)$$

gegeben.

**Aufgabe 1.5.** Ersetzen Sie in Abbildung 1.2 die rollende Kugel durch einen reibungsfrei gleitenden Würfel mit der Masse  $m_2$  und der Kantenlänge  $l$ . Geben Sie zu diesem Modell die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen an.

**Aufgabe 1.6.** Abbildung 1.3 zeigt einen Kran mit einem Schwenkarm. Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen. Als verallgemeinerte Koordinaten werden die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  eingeführt. Als Eingangsgrößen dienen die beiden Momente  $M_1$  und  $M_2$ .

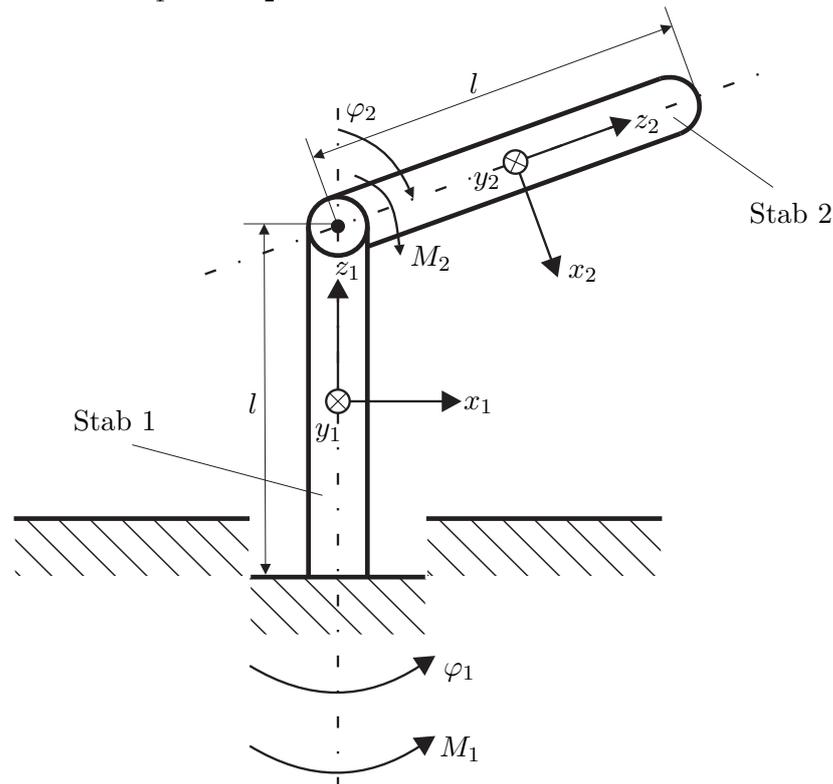


Abbildung 1.3: Kran mit Schwenkarm.

**Aufgabe 1.7.** In Abbildung 1.4 ist ein einfacher Manipulator bestehend aus fünf Balkenelementen dargestellt. Es handelt sich dabei um ein System mit zwei Freiheitsgraden, wobei als verallgemeinerte Koordinaten die Größen  $q_1$  und  $q_2$  eingeführt werden. Dieser Manipulator hat die ganz besondere Eigenschaft, dass das Differenzialgleichungssystem entkoppelt, wenn eine einfache geometrische Beziehung erfüllt ist. D. h.,  $q_1$  bzw.  $q_2$  wird lediglich durch  $M_1$  bzw.  $M_2$  beeinflusst. Dies ist für den Reglerentwurf besonders angenehm. Gerade solche Beispiele sind typisch mechatronische Aufgaben, da in diesem Fall die Konstruktion so durchgeführt wird, dass die Regelungsaufgabe sich in weiterer Folge vereinfacht. Um dies zu bewältigen, ist jedoch die Kenntnis des mathematischen Modells erforderlich. Manipulatoren dieses Typs wurden unter



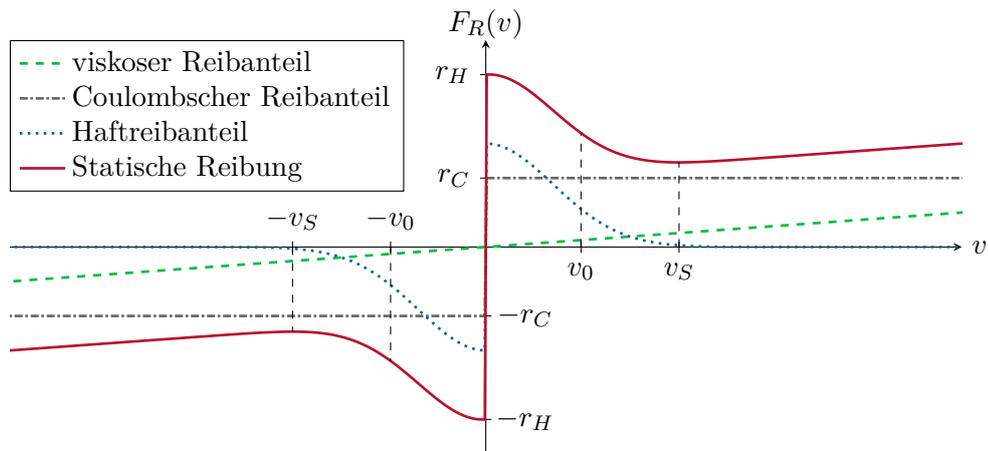


Abbildung 1.6: Zum statischen Reibkraftmodell.

Parameter  $r_H$ , zusammen. Weiters wurde experimentell beobachtet, dass der Kraft-Geschwindigkeitsverlauf bei Eintreten bzw. Verlassen des Haftreibzustandes die Form der punktierten Kurve von Abbildung 1.6 aufweist (*Stribeck-Effekt*). Die Geschwindigkeit  $v_S$ , bei der die Reibkraft  $F_R$  ein Minimum annimmt, wird auch als Stribeck-Geschwindigkeit bezeichnet. Sehr häufig wird dann für die gesamte Reibkraft ein Modellansatz der Form

$$F_R = r_v v + r_C \operatorname{sgn}(v) + (r_H - r_C) \exp\left(-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right) \operatorname{sgn}(v) \quad (1.23)$$

mit einer Bezugsgeschwindigkeit  $v_0$  verwendet. Das mathematische Modell von Abbildung 1.5, angeschrieben um die entspannte Lage der Feder, lautet dann

- (1) Haftbedingung ist erfüllt, also  $v = 0$  und  $|F_u - cx| \leq r_H$ ,

$$\frac{d}{dt}x = 0 \quad (1.24a)$$

$$m \frac{d}{dt}v = 0 \quad (1.24b)$$

- (2) Haftbedingung ist nicht erfüllt

$$\frac{d}{dt}x = v \quad (1.25a)$$

$$m \frac{d}{dt}v = F_u - F_R - cx \quad (1.25b)$$

mit der Reibkraft  $F_R$  nach (1.23).

Bei der Implementierung des mathematischen Modells (1.24) und (1.25) in einem numerischen Simulationsprogramm wie MATLAB/SIMULINK muss ganz genau darauf

geachtet werden, dass die *Strukturumschaltung* zwischen (1.24) und (1.25) auch tatsächlich richtig implementiert wird. Abbildung 1.7 zeigt eine mögliche Implementierung in Form eines SIMULINK-Blockschaltbilds mithilfe der STATEFLOW-TOOLBOX. Die zugehörige MATLAB-S-function mit dem Namen *ein\_masse.m* ist im Folgenden aufgelistet. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass das gesamte Modell der Strecke mit korrekter Strukturumschaltung auch sehr effizient in einer C-CODE-S-function ohne Verwendung der STATEFLOW-TOOLBOX implementiert werden kann.

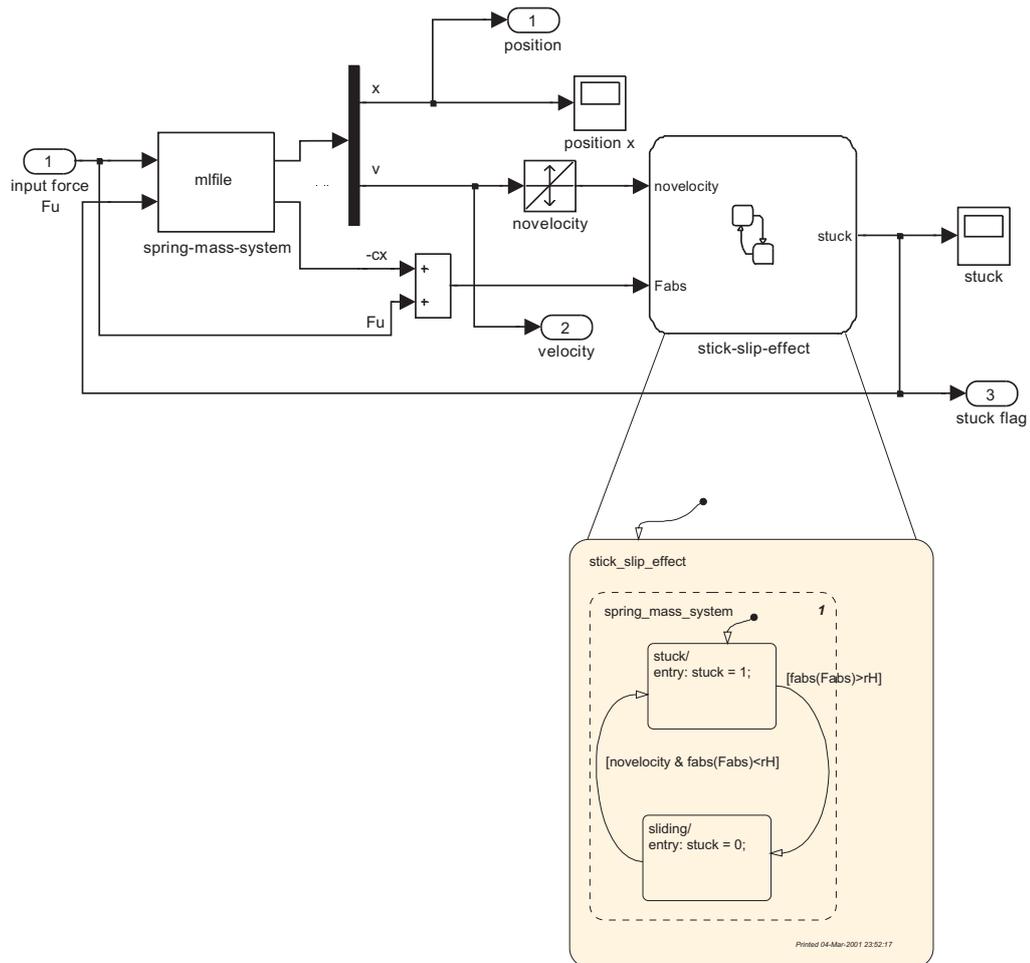


Abbildung 1.7: Blockschaltbild in SIMULINK zum Feder-Masse-System mit Haftreibung.

```

1 function ein_masse(block)
2 %
3 % Simulationsmodell für Einmassenschwinger mit Haftreibung
4 %
5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6 % Beschreibung: Einmassenschwinger für Vorlesung Regelungssysteme

```

```

7 %
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9 % inputs:   u1(1)... Eingangskraft
10 %          u2(1)... stuck Flag
11 % states:  x(1)... x  Position der Masse
12 %          x(2)... v  Geschwindigkeit der Masse
13 % outputs: y1(1)...x
14 %          y1(2)...v
15 %          y2(1)...-c*x
16 % parameters:
17 %          p(1)... c   Steifigkeit Feder
18 %          p(2)... m   Masse
19 %          p(3)... r_C Coulomb Reibungskonstante
20 %          p(4)... r_v viskose Reibungskonstante
21 %          p(5)... r_H Haftreibungskonstante
22 %          p(6)... v_0 Referenzgeschwindigkeit
23 %          p(7)... x_I Anfangsposition der Masse
24 %          p(8)... v_I Anfangsgeschwindigkeit der Masse
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 % Sample Time: Continuous
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 setup(block);
30
31 function setup(block)
32
33 % Register number of input and output ports
34 block.NumInputPorts = 2;
35 block.NumOutputPorts = 2;
36
37 % Register number of continuous states
38 block.NumContStates = 2;
39
40 % Register dialog parameter
41 block.NumDialogPrms = 8;
42
43 % Port dimensions
44 block.InputPort(1).Dimensions = 1;
45 block.InputPort(1).SamplingMode = 'Sample';
46 block.InputPort(1).DirectFeedthrough = false;
47 block.InputPort(2).Dimensions = 1;
48 block.InputPort(2).SamplingMode = 'Sample';
49 block.InputPort(2).DirectFeedthrough = false;
50
51 block.OutputPort(1).Dimensions = 2;

```

```
52 block.OutputPort(1).SamplingMode = 'Sample';
53 block.OutputPort(2).Dimensions    = 1;
54 block.OutputPort(2).SamplingMode = 'Sample';
55
56 % Set block sample time to continuous time
57 block.SampleTimes = [0 0];
58
59 % Register methods
60 block.RegBlockMethod('InitializeConditions', @InitConditions);
61 block.RegBlockMethod('Outputs',           @Output);
62 block.RegBlockMethod('Derivatives',       @Derivatives);
63 block.RegBlockMethod('Terminate',         @Terminate);
64
65 function InitConditions(block)
66     % define parameters
67     x_I = block.DialogPrm(7).Data;
68     v_I = block.DialogPrm(8).Data;
69
70     x0(1) = x_I;
71     x0(2) = v_I;
72
73     block.ContStates.Data=x0;
74
75 function Output(block)
76
77     % define x, y, u, p for better code readability
78     x = block.ContStates.Data;
79     c = block.DialogPrm(1).Data;
80
81     % set value of output
82     y1(1) = x(1);
83     y1(2) = x(2);
84     y2(1) = -c*x(1);
85
86     block.OutputPort(1).Data=y1;
87     block.OutputPort(2).Data=y2;
88
89 function Derivatives(block)
90
91     % define x, y, u, p for better code readability
92     x = block.ContStates.Data;
93     u1 = block.InputPort(1).Data;
94     u2 = block.InputPort(2).Data;
95
96     % define parameters
```

```

97  c   = block.DialogPrm(1).Data;
98  m   = block.DialogPrm(2).Data;
99  r_C = block.DialogPrm(3).Data;
100 r_v = block.DialogPrm(4).Data;
101 r_H = block.DialogPrm(5).Data;
102 v_0 = block.DialogPrm(6).Data;
103 F_u  = u1(1);
104 stuck = u2(1);
105
106 % differential equations
107 if (stuck>0.5)
108     dx(1)=0.0;
109     dx(2)=0.0;
110 else
111     F_R  = r_C*sign(x(2))+r_v*x(2) + ...
112           (r_H-r_C)*exp(-(x(2)/v_0)^2)*sign(x(2));
113     dx(1) = x(2);
114     dx(2) = -c/m*x(1)-F_R/m+F_u/m;
115 end;
116
117 block.Derivatives.Data=dx;
118
119 function Terminate(block)

```

Haftreibung in Kombination mit einem Regler mit Integralanteil führt im Allgemeinen zu unerwünschten Grenzyklen. Um dies zu zeigen, soll im nächsten Schritt für das Feder-Masse-System von Abbildung 1.5 mit der Eingangskraft  $F_u$  ein PI-Regler als Positionsregler entworfen werden. Für den Entwurf des PI-Reglers ist es üblich, den Coulombschen Reibanteil und die Haftreibungskomponente zu vernachlässigen, d. h.  $r_H = r_C = 0$ . Damit liegt nämlich ein einfaches lineares System mit der Position  $x$  als Ausgangsgröße und der Kraft  $F_u$  als Eingangsgröße und der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{x}}{\hat{F}_u} = \frac{1}{ms^2 + r_v s + c} \quad (1.26)$$

vor. Wählt man für die Parameter die Werte  $c = 2$ ,  $m = 1$ ,  $r_C = 1$ ,  $r_v = 3$ ,  $r_H = 4$  und  $v_0 = 0.01$ , dann führt der PI-Regler  $R(s) = 4\frac{s+1}{s}$  für das lineare System (1.26) zu der Sprungantwort des geschlossenen Kreises von Abbildung 1.8.

Implementiert man den PI-Regler am ursprünglichen Modell (1.24) und (1.25), so erhält man den Positions- und Geschwindigkeitsverlauf von Abbildung 1.9.

**Aufgabe 1.8.** Versuchen Sie die Ergebnisse von Abbildung 1.9 in MATLAB/SIMULINK nachzuvollziehen. Überlegen Sie sich Maßnahmen, um die Grenzyklen zu verhindern (Tote Zone, Integrator mit abschaltbarem I-Anteil, Dither etc.).

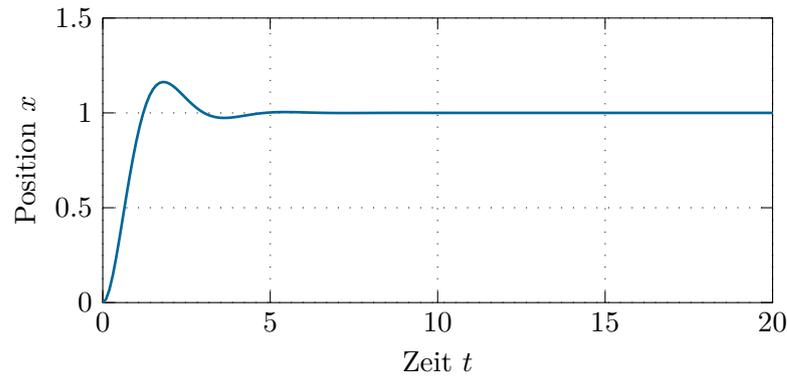


Abbildung 1.8: Sprungantwort des linearen Systems.

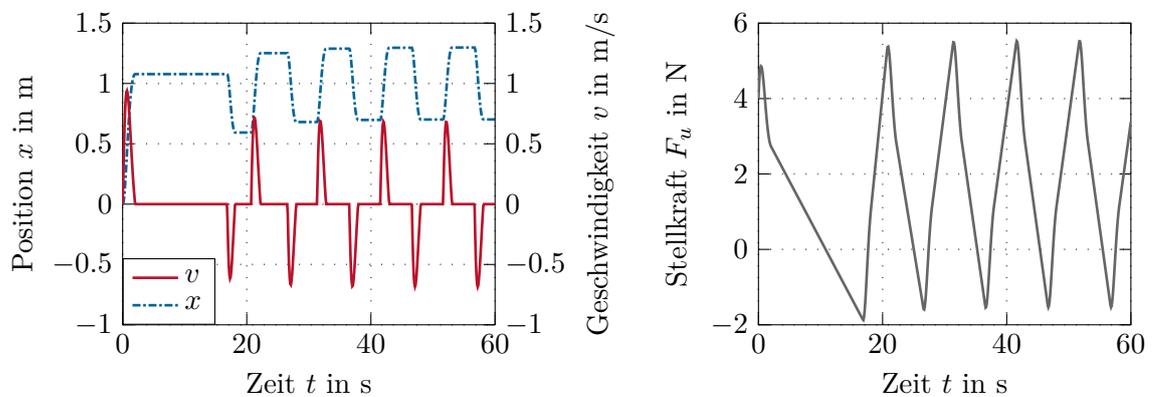


Abbildung 1.9: Positionsregelung eines Feder-Masse-Systems mit Haftreibung mithilfe eines PI-Reglers.

**Aufgabe 1.9.** Bestimmen Sie für den Reibmodellansatz (1.23) mit den Parametern  $r_C = 1$ ,  $r_v = 3$ ,  $r_H = 4$  und  $v_0 = 0.01$  die Stribeck-Geschwindigkeit  $v_S$ .

Neben den statischen Reibkraftmodellen findet man in der Literatur auch verschiedene dynamische Modelle. Im Wesentlichen beruhen viele dieser Modelle auf einem bürstenförmigen Kontaktmodell zweier rauer Oberflächen. Beim so genannten *LuGre-Modell* errechnet sich die Reibkraft in der Form

$$F_R = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{d}{dt} z + \sigma_2 \Delta v, \quad (1.27)$$

mit der Relativgeschwindigkeit  $\Delta v$  der beiden Kontaktflächen. Die mittlere Durchbiegung der Bürsten  $z$  genügt dabei der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt} z = \Delta v - \frac{|\Delta v|}{\chi} \sigma_0 z \quad (1.28)$$

mit

$$\chi = r_C + (r_H - r_C) \exp\left(-\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right). \quad (1.29)$$

Analog zum statischen Reibkraftmodell (siehe (1.23)) bezeichnet  $r_C$  den Koeffizienten der Coulomb-Reibung,  $r_H$  die Haftreibung und  $v_0$  eine Bezugsgeschwindigkeit. Die Koeffizienten  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  erlauben eine Parametrierung des Reibkraftmodells mithilfe von Messwerten. Für eine konstante Relativgeschwindigkeit  $\Delta v$  errechnet sich die statische Reibkraft ( $\frac{d}{dt}z = 0$ ) zu

$$F_R = \sigma_2 \Delta v + r_C \operatorname{sgn}(\Delta v) + (r_H - r_C) \exp\left(-\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \operatorname{sgn}(\Delta v). \quad (1.30)$$

Man erkennt, dass mit (1.30) die Beziehung von (1.23) vorliegt. Der Parameter  $\sigma_2$  von (1.27) entspricht also dem Parameter  $r_v$  des viskosen Reibanteils von (1.23). Der Vorteil des dynamischen Reibmodells liegt darin, dass für die Simulation keine Strukturumschaltung notwendig ist. Jedoch wird im Allgemeinen das gesamte Differenzialgleichungssystem *sehr steif*, was den Einsatz spezieller Integrationsalgorithmen erfordert.

## 1.5 Linearer und nichtlinearer Oszillator

Der einfachste lineare Oszillator mit einer Kreisfrequenz von  $\omega_0$  wird durch ein Differenzialgleichungssystem der Form

$$\dot{x}_1 = -\omega_0 x_2 \quad (1.31a)$$

$$\dot{x}_2 = \omega_0 x_1 \quad (1.31b)$$

mit der Ausgangsgröße  $x_1$  beschrieben. Ein prinzipieller Nachteil dieses Oszillators ist, dass Störungen die Amplitude verändern können (siehe Abbildung 1.10 links). Es ist naheliegend, den linearen Oszillator so zu erweitern, dass die Amplitude „stabilisiert“ wird. Eine Möglichkeit dazu zeigt das nachfolgende System

$$\dot{x}_1 = -\omega_0 x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1.32a)$$

$$\dot{x}_2 = \omega_0 x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \quad (1.32b)$$

In Abbildung 1.10 (rechtes Bild) ist der Einfluss der nichtlinearen Terme zu entnehmen.

**Aufgabe 1.10.** Berechnen Sie für den nichtlinearen Oszillator (1.32) die allgemeine Lösung. Verwenden Sie dazu die transformierten Größen

$$x_1(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad (1.33a)$$

$$x_2(t) = r(t) \sin(\varphi(t)). \quad (1.33b)$$

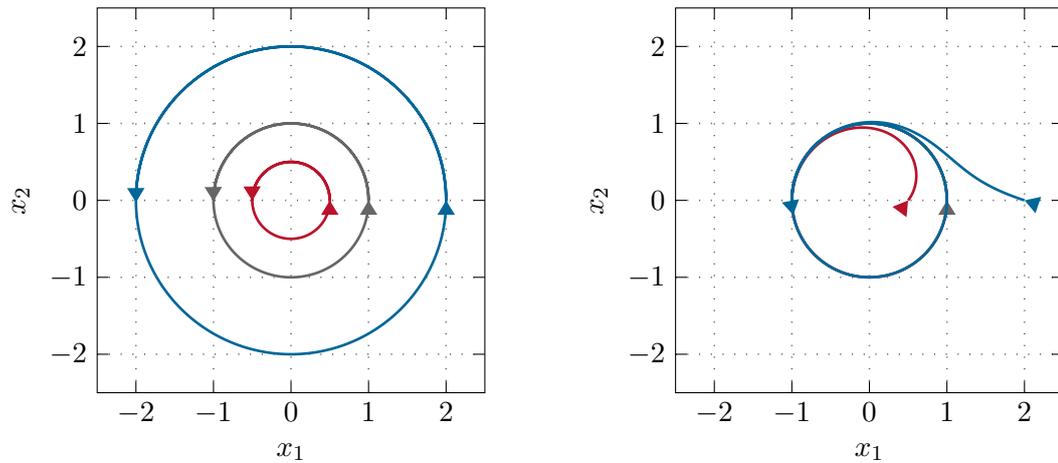


Abbildung 1.10: Nichtlinearer und linearer Oszillator.

## 1.6 Fahrzeugmanöver

Abbildung 1.11 zeigt ein drastisch vereinfachtes Modell eines Fahrzeugmanövers. Als Stellgrößen werden die Rollgeschwindigkeit  $u_1$  und die Rotationsgeschwindigkeit  $u_2$  der Achse betrachtet.

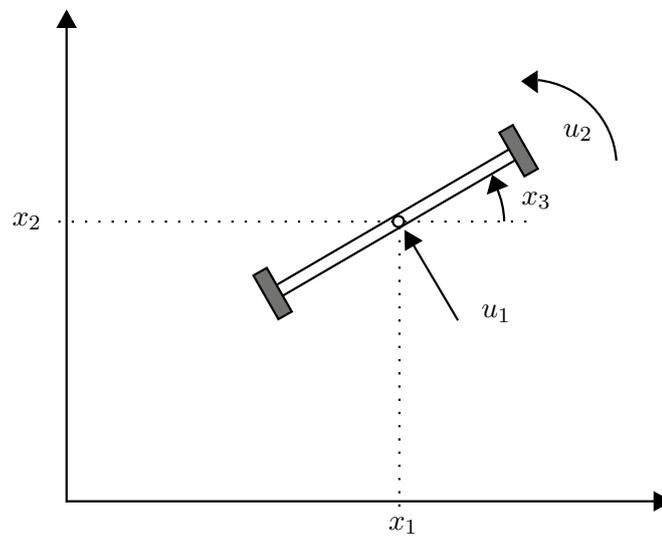


Abbildung 1.11: Einfaches Fahrzeugmodell.

Das zugehörige mathematische Modell lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x_3) \\ \cos(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 . \quad (1.34)$$

Linearisiert man das Modell um eine Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} \\ x_{2,R} \\ x_{3,R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

erhält man

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\sin(x_{3,R}) \\ \cos(x_{3,R}) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_2 . \quad (1.36)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

den Rang zwei hat. Jedes um eine Ruhelage linearisierte Modell des Fahrzeugmanövers ist also nicht steuerbar. Aus der Erfahrung ist aber bekannt, dass dies auf das ursprüngliche System nicht zutreffen kann (oder wie ist Ihre Erfahrung mit dem Einparken?).

## 1.7 Gleichstrommaschinen

Abbildung 1.12 zeigt das Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine. Das zugehörige mathematische Modell lässt sich in der Form

$$L_A \frac{d}{dt} i_A = u_A - R_A i_A - \underbrace{k\psi_F \omega}_{u_{ind}} \quad (1.38a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_F = u_F - R_F i_F \quad (1.38b)$$

$$\Theta_G \frac{d}{dt} \omega = \underbrace{k\psi_F i_A}_{M_{el}} - M_L \quad (1.38c)$$

mit der Ankerinduktivität  $L_A$ , dem Ankerwiderstand  $R_A$ , dem Erregerstrom  $i_F = f(\psi_F)$ , dem Erregerkreiswiderstand  $R_F$ , dem Trägheitsmoment der Gleichstrommaschine und aller starr angeflanschter Komponenten  $\Theta_G$  sowie der Ankerkreisconstanten  $k$  anschreiben. Die Zustandsgrößen sind in diesem Fall der Ankerstrom  $i_A$ , der verkettete Erregerfluss  $\psi_F$  sowie die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega$ , als Stellgrößen dienen die Ankerspannung  $u_A$  sowie die Erregerspannung  $u_F$  und das Lastmoment  $M_L$  wirkt als Störgröße auf das System. Diese Beschreibung der fremderregten Gleichstrommaschine setzt bereits voraus, dass nachfolgende Modellannahmen berücksichtigt wurden:

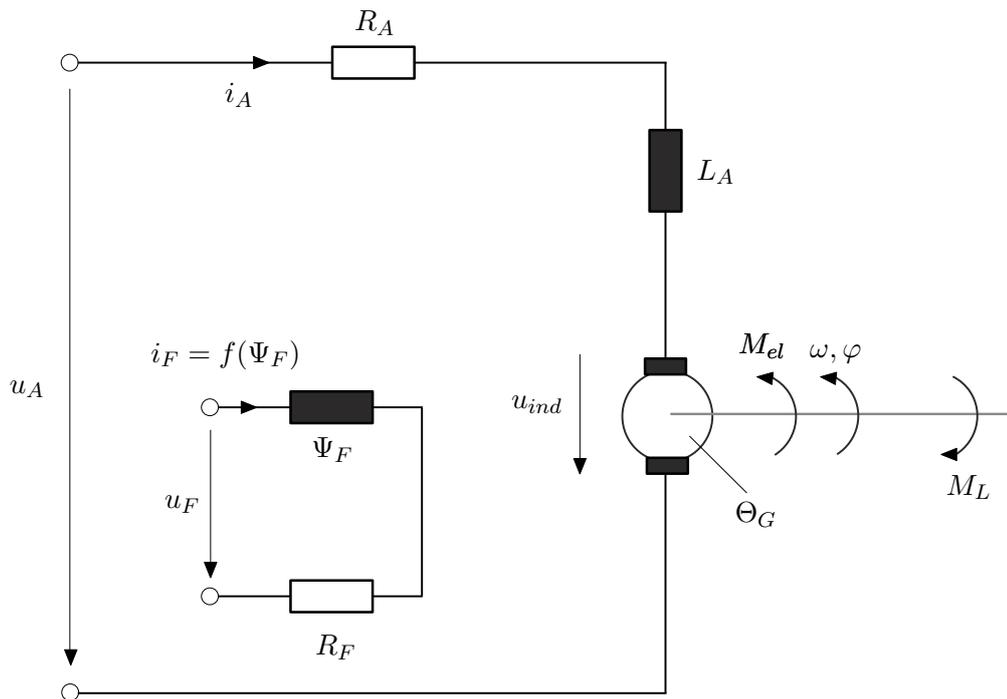


Abbildung 1.12: Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine.

- Die räumlich verteilten Wicklungen können als konzentrierte Induktivitäten in den jeweiligen Wicklungsachsen modelliert werden,
- die um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten Induktivitäten im Anker- und Erregerkreis deuten bereits an, dass eine vollkommene Entkopplung zwischen Anker- und Erregerfeld angenommen wird,
- die Widerstände im Anker- und Erregerkreis sind konstant,
- es werden keine Eisenverluste berücksichtigt,
- es gibt keine Sättigungserscheinungen im Ankerkreis und
- die Kommutierung werde als ideal vorausgesetzt (keine Drehmomentenwelligkeit).

Um das stationäre Verhalten der Gleichstrommaschine unabhängig von den speziell vorliegenden Maschinenparametern klassifizieren zu können, führt man im Weiteren eine Normierung von (1.38) auf dimensionslose Größen durch. Mit den Bezugsgrößen der nominellen Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0$ , des nominellen verketteten Erregerflusses  $\psi_{F,0}$

sowie

$$u_{A,0} = u_{ind,0} = k\psi_{F,0}\omega_0, \quad (1.39a)$$

$$i_{A,0} = \frac{u_{A,0}}{R_A}, \quad (1.39b)$$

$$M_{el,0} = k\psi_{F,0}i_{A,0}, \quad (1.39c)$$

$$u_{F,0} = R_F i_{F,0} \quad (1.39d)$$

ergibt sich (1.38) in dimensionsloser Form zu

$$\frac{L_A}{R_A} \frac{d}{dt} \left( \frac{i_A}{i_{A,0}} \right) = \frac{u_A}{u_{A,0}} - \frac{i_A}{i_{A,0}} - \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \frac{\omega}{\omega_0} \quad (1.40a)$$

$$\frac{\psi_{F,0}}{u_{F,0}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \right) = \frac{u_F}{u_{F,0}} - \tilde{f} \left( \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \right) \quad (1.40b)$$

$$\frac{\Theta_G \omega_0}{M_{el,0}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \frac{i_A}{i_{A,0}} - \frac{M_L}{M_{el,0}}, \quad (1.40c)$$

wobei gilt  $\frac{i_F}{i_{F,0}} = \frac{f(\psi_F)}{i_{F,0}} = \tilde{f} \left( \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \right)$ . Wegen des größeren Luftspaltes in Ankerquerrichtung gilt  $\frac{L_A}{R_A} \ll \frac{\psi_{F,0}}{u_{F,0}}$  und auch magnetische Sättigungserscheinungen im Ankerkreis sind im Allgemeinen zu vernachlässigen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im Weiteren sämtliche normierten Größen  $\frac{x}{x_0}$  in der Form  $\frac{x}{x_0} = \tilde{x}$  angeschrieben.

Für konstante Eingangsgrößen  $u_A$ ,  $u_F$  und  $M_L$  erhält man aus (1.40) für den stationären Zustand die Gleichungen

$$0 = \tilde{u}_A - \tilde{i}_A - \tilde{\psi}_F \tilde{\omega} \quad (1.41a)$$

$$0 = \tilde{u}_F - \tilde{f}(\tilde{\psi}_F) \quad (1.41b)$$

$$0 = \tilde{\psi}_F \tilde{i}_A - \tilde{M}_L. \quad (1.41c)$$

Betrachtet man den normierten verketteten Fluss  $\tilde{\psi}_F$  als unabhängige Eingangsgröße - diese kann stationär immer aus  $\tilde{u}_F$  über (1.41b) berechnet werden - dann können für den stationären Zustand der fremderregten Gleichstrommaschine folgende Zusammenhänge

$$\tilde{i}_A = \frac{1}{\tilde{\psi}_F} \tilde{M}_L, \quad (1.42a)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\tilde{\psi}_F} \tilde{u}_A - \frac{1}{\tilde{\psi}_F^2} \tilde{M}_L \quad (1.42b)$$

angegeben werden. Man beachte, dass der verkettete Erregerfluss  $\psi_F$  durch die Eisen-sättigung im Erregerkreis limitiert ist, weshalb man  $\psi_{F,0}$  immer so festlegen kann, dass näherungsweise im gesamten Arbeitsbereich gilt

$$\tilde{\psi}_F = \frac{\psi_F}{\psi_{F,0}} \leq 1. \quad (1.43)$$

**Aufgabe 1.11.** Zeigen Sie, dass im Falle einer konstant erregten Gleichstrommaschine  $\psi_F = \psi_{F,0}$  das mathematische Modell (1.38) linear ist.

Man unterscheidet nun bei fremderregten Gleichstrommaschinen zwischen *Anker-* und *Feldregelung*. Bei der Ankerregelung wird der Erregerfluss wie bei der konstant erregten Gleichstrommaschine  $\psi_F = \psi_{F,0}$  gesetzt und die Regelung der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  erfolgt über die Ankerkreissspannung  $u_A$ .

**Aufgabe 1.12.** Zeichnen Sie die stationären Kennlinien von (1.42) für  $\tilde{\psi}_F = 1$  mit  $\tilde{u}_A$  als Parameter ( $\tilde{u}_A = -1.0, -0.5, 0.5, 1.0$ ) im Bereich  $-0.5 \leq \tilde{M}_L \leq 0.5$ .

Im Gegensatz dazu wird bei der Feldregelung die Ankerspannung mit dem nominellen Wert  $u_A = \pm u_{A,0}$  betrieben und die Drehzahlregelung erfolgt über die Erregerspannung  $u_F$  durch Schwächung des Erregerflusses im Bereich  $\tilde{\psi}_{F,\min} \leq \tilde{\psi}_F \leq 1$ . Setzt man in (1.42)  $\tilde{u}_A = 1$ , dann ergeben sich die stationären Kennlinien von Abbildung 1.13. Die maximal erreichbare Drehwinkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_{\max}$  bei konstantem Lastmoment  $\tilde{M}_L$  erhält man aus (1.42) mit  $\tilde{u}_A = 1$  über die Beziehung

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{\psi}_F} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_F^2} \left( 1 - \frac{2}{\tilde{\psi}_F} \tilde{M}_L \right) = 0 \quad (1.44)$$

in der Form

$$\tilde{\psi}_{F,\min} = 2\tilde{M}_L, \quad (1.45a)$$

$$\tilde{\omega}_{\max} = \frac{1}{4\tilde{M}_L}. \quad (1.45b)$$

Man erkennt aus (1.45), dass für ein gegebenes konstantes Lastmoment  $\tilde{M}_L$  der untere Grenzwert des Flusses durch  $\tilde{\psi}_{F,\min} = 2\tilde{M}_L$  gegeben ist.

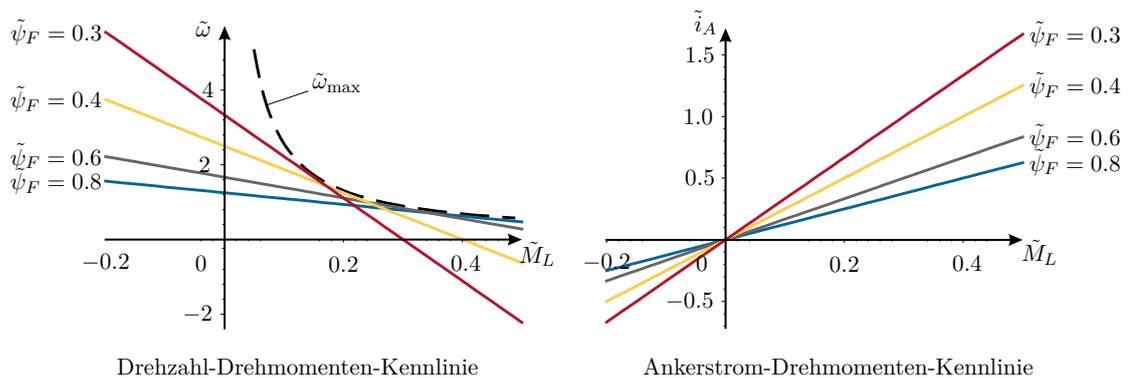


Abbildung 1.13: Stationäre Kennlinien bei der Feldregelung.

Das linke Bild von Abbildung 1.13 zeigt unter anderem, dass ein Verringern des Flusses  $\tilde{\psi}_F$  je nach Lastmoment  $\tilde{M}_L$  nicht unbedingt zu einer Erhöhung der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}$  führt. Dadurch wird in der Praxis meist eine Kombination aus Anker- und

Feldregelung gewählt - nämlich in der Form, dass bis zum nominellen Wert der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  die Drehwinkelgeschwindigkeit durch die Ankerspannung  $u_A$  geregelt und der Erregerfluss  $\psi_F$  auf seinen nominellen Wert  $\psi_{F,0}$  gehalten wird und erst bei Erreichen der Ankerspannung  $u_{A,0}$  eine weitere Erhöhung der Drehwinkelgeschwindigkeit durch Feldschwächung erfolgt.

**Aufgabe 1.13.** In Abbildung 1.14 ist das Ersatzschaltbild einer Reihenschlussmaschine wie sie sehr häufig bei Traktionsantrieben verwendet werden dargestellt.

Die Bezeichnungen sind vollkommen analog zur fremderregten Gleichstrommaschine. Eventuell vorhandene externe Widerstände im Ankerkreis werden dem Ankerwiderstand  $R_A$  zugeschlagen und der einstellbare Widerstand  $R_P$  dient der Feldschwächung. Geben Sie ein mathematisches Modell der Reihenschlussmaschine an und überlegen Sie, wie sich der Widerstand  $R_P$  auf das stationäre Verhalten auswirkt.

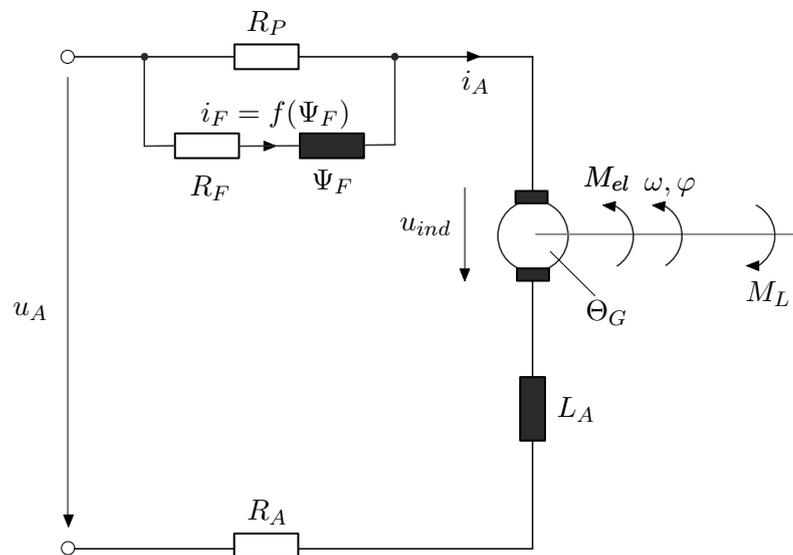


Abbildung 1.14: Ersatzschaltbild einer Reihenschlussmaschine.

## 1.8 Hydraulischer Aktor (Zweistangenzyylinder)

Abbildung 1.15 zeigt einen über ein 3/4-Wegeventil mit Nullüberdeckung angesteuerten Zweistangenzyylinder. Man beachte, dass diese Konfiguration auch den sehr häufig auftretenden Fall eines doppeltwirkenden Zylinders mit einseitiger Kolbenstange (Differenzialzylinder) beinhaltet. Dabei bezeichnet  $x_k$  die Kolbenposition,  $V_{0,1}$  und  $V_{0,2}$  sind die Volumina der beiden Zylinderkammern für  $x_k = 0$ ,  $A_1$  und  $A_2$  beschreiben die effektiven Kolbenflächen,  $m_k$  ist die Summe aller bewegten Massen,  $q_1$  bzw.  $q_2$  bezeichnen den Fluss vom Steuerventil zum Zylinder bzw. vom Zylinder zum Steuerventil,  $q_{int}$  ist der interne Leckölfluss und mit  $q_{ext,1}$  und  $q_{ext,2}$  werden die externen Leckölflüsse beschrieben. Im Allgemeinen ist die Dichte von Öl  $\rho_{oil}$  eine Funktion des Drucks  $p$  und der Temperatur  $T$ . Der Temperatureinfluss soll im Weiteren vernachlässigt und als konstitutive Gleichung

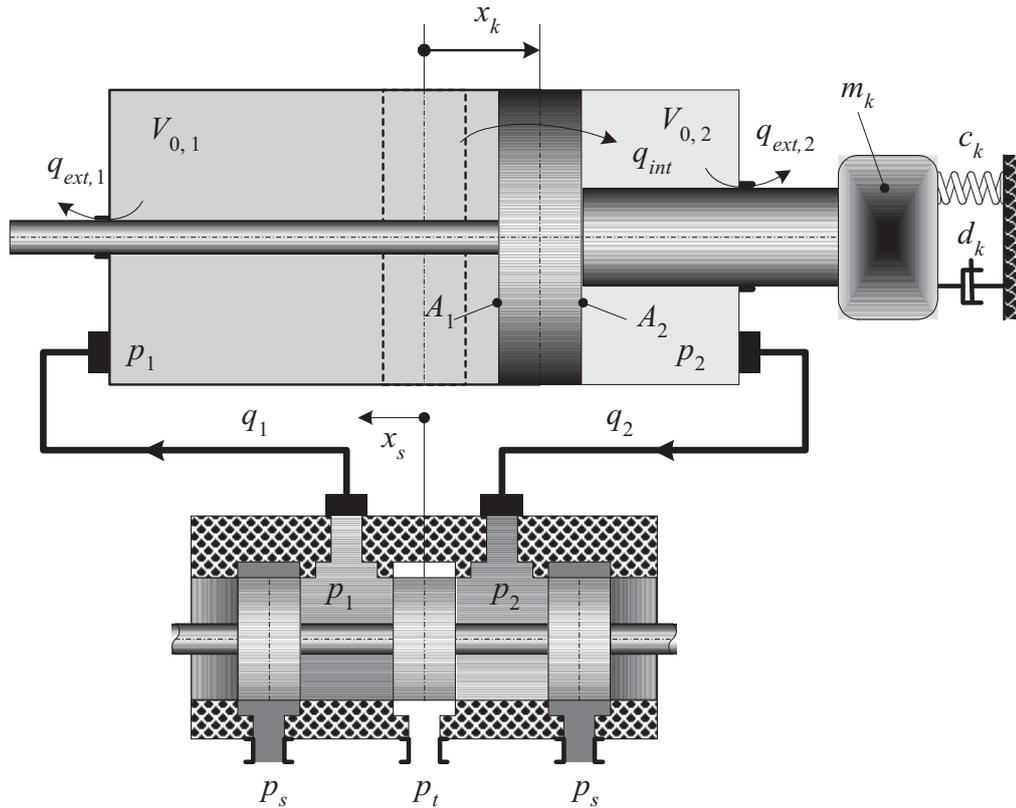


Abbildung 1.15: Zweistangenzyylinder mit 3/4-Wegeventil.

der isotherme Kompressionsmodul  $\beta_T$  mit

$$\frac{1}{\beta_T} = \frac{1}{\rho_{oil}} \left( \frac{\partial \rho_{oil}}{\partial p} \right)_{T = \text{const.}} \quad (1.46)$$

verwendet werden. Die Kontinuitätsgleichungen für die beiden Zylinderkammern lauten

$$\frac{d}{dt} (\rho_{oil}(p_1)(V_{0,1} + A_1 x_k)) = \rho_{oil}(p_1)(q_1 - q_{int} - q_{ext,1}) \quad (1.47a)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_{oil}(p_2)(V_{0,2} - A_2 x_k)) = \rho_{oil}(p_2)(q_{int} - q_{ext,2} - q_2) \quad (1.47b)$$

mit den Zylinderdrücken  $p_1$  und  $p_2$ . Da die internen und externen Leckköflüsse  $q_{int}$ ,  $q_{ext,1}$  sowie  $q_{ext,2}$  im Allgemeinen laminar sind, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Leckköfluss und Druckabfall. Unter Verwendung der Beziehung (1.46) vereinfacht sich (1.47) zu

$$\frac{d}{dt} p_1 = \frac{\beta_T}{(V_{0,1} + A_1 x_k)} \left( q_1 - A_1 \frac{d}{dt} x_k - C_{int}(p_1 - p_2) - C_{ext,1} p_1 \right) \quad (1.48a)$$

$$\frac{d}{dt} p_2 = \frac{\beta_T}{(V_{0,2} - A_2 x_k)} \left( -q_2 + A_2 \frac{d}{dt} x_k + C_{int}(p_1 - p_2) - C_{ext,2} p_2 \right) \quad (1.48b)$$

mit den laminaren Leckkoeffizienten  $C_{int}$ ,  $C_{ext,1}$  und  $C_{ext,2}$ . Für ein 3/4-Wegeventil mit Nullüberdeckung errechnen sich die Flüsse  $q_1$  bzw.  $q_2$  in der Form

$$q_1 = K_{v,1}\sqrt{p_S - p_1}\text{sg}(x_s) - K_{v,2}\sqrt{p_1 - p_T}\text{sg}(-x_s) \quad (1.49a)$$

$$q_2 = K_{v,2}\sqrt{p_2 - p_T}\text{sg}(x_s) - K_{v,1}\sqrt{p_S - p_2}\text{sg}(-x_s) \quad (1.49b)$$

mit dem Tankdruck  $p_T$ , dem Versorgungsdruck  $p_S$ , der Steuerschieberposition  $x_s$ , der Funktion  $\text{sg}(x_s) = x_s$  für  $x_s \geq 0$  und  $\text{sg}(x_s) = -x_s$  für  $x_s < 0$  sowie den Ventilkoeffizienten  $K_{v,i} = C_d A_{v,i} \sqrt{2/\rho_{oil}}$ ,  $i = 1, 2$ . Dabei bezeichnet der Ausdruck  $A_{v,i} x_s$  den Blendenquerschnitt und  $C_d$  den Durchflusskoeffizienten ( $C_d \approx 0.6 - 0.8$ , abhängig von der Geometrie der Steuerkante, Reynoldszahl, Durchströmungsrichtung etc.).

Vernachlässigt man die Dynamik des Steuerschiebers und betrachtet die Steuerschieberposition  $x_s$  als Eingangsgröße in das System, dann erhält man für Abbildung 1.15 ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d}{dt}p_1 = \frac{\beta_T}{(V_{0,1} + A_1 x_k)} (q_1 - A_1 v_k - C_{int}(p_1 - p_2) - C_{ext,1} p_1) \quad (1.50a)$$

$$\frac{d}{dt}p_2 = \frac{\beta_T}{(V_{0,2} - A_2 x_k)} (-q_2 + A_2 v_k + C_{int}(p_1 - p_2) - C_{ext,2} p_2) \quad (1.50b)$$

$$\frac{d}{dt}x_k = v_k \quad (1.50c)$$

$$\frac{d}{dt}v_k = \frac{1}{m_k} (A_1 p_1 - A_2 p_2 - d_k v_k - c_k x_k) \quad (1.50d)$$

mit  $q_1$  und  $q_2$  von (1.49).

## 1.9 Literatur

- [1.1] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström und P. Lischinsky, „A New Model for Control of Systems with Friction,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 40, Nr. 3, S. 419–425, März 1995.
- [1.2] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*. Springer, Berlin: Dover Publications, 1990.
- [1.3] H. E. Merritt, *Hydraulic Control Systems*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1967.
- [1.4] H. Murrenhoff, *Grundlagen der Fluidtechnik*. Aachen, Germany: Shaker, 2001.
- [1.5] G. Pfaff, *Regelung elektrischer Antriebe I*. München: Oldenbourg, 1990.
- [1.6] M. W. Spong, *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989.