2 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System (ohne Eingang) erlaubt die Veränderung von gewissen Punkten (Elementen einer geeigneten Menge) in der Zeit t zu beschreiben. In der Regelungstechnik sind diese Punkte durch den Zustand $\mathbf{x}(t)$ des Systems gegeben. Wählt man als Menge der Zustände $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, dann ist ein autonomes, dynamisches System eine Abbildung

$$\mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

mit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) \ . \tag{2.2}$$

Aus der Beziehung

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{x}_0) \tag{2.3}$$

folgt, dass $\mathbf{\Phi}_0$ die identische Abbildung $\mathbf{I}$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{I}(\mathbf{x})$ sein muss. Aus den Beziehungen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) \tag{2.4a}$$
$$\mathbf{x}(s+t) = \mathbf{\Phi}_s(\mathbf{x}(t)) \tag{2.4b}$$
$$\mathbf{x}(s+t) = \mathbf{\Phi}_{s+t}(\mathbf{x}_0) \tag{2.4c}$$

folgt nun

$$\mathbf{x}(s+t) = \mathbf{\Phi}_s(\mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{\Phi}_{s+t}(\mathbf{x}_0) \tag{2.5}$$

oder

$$\mathbf{\Phi}_s \circ \mathbf{\Phi}_t = \mathbf{\Phi}_{s+t} \ , \tag{2.6}$$

wobei $\circ$ die Komposition der Abbildungen $\mathbf{\Phi}_s$ und $\mathbf{\Phi}_t$ bezeichnet. Durch Vertauschen der Reihenfolge in obigen Überlegungen folgt

$$\mathbf{\Phi}_{s+t} = \mathbf{\Phi}_s \circ \mathbf{\Phi}_t = \mathbf{\Phi}_t \circ \mathbf{\Phi}_s \ , \tag{2.7}$$

wodurch die Schreibweise $\mathbf{\Phi}_{s+t}$ gerechtfertigt wird.

> *Aufgabe* 2.1. Durch $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seien zwei lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst gegeben. Ist die Komposition $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}(\mathbf{x}))$ wieder eine lineare Abbildung? Gilt $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$?

> D.h., sind lineare Abbildungen bezüglich des Hintereinanderausführens kommutativ? Die linearen Abbildungen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind durch die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ gegeben. Wie lauten die Matrizendarstellungen zu obigen Kompositionen?

Im Weiteren wird noch vorausgesetzt, dass $\mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x})$ eine (nach $\mathbf{x}$) stetig differenzierbare Abbildung ist.

Definition 2.1 (Dynamisches System)**.** Ein *(autonomes) dynamisches System* ist eine C^1 (stetig differenzierbare) Abbildung

$$\mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ , \tag{2.8}$$

die folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\mathbf{\Phi}_0$ ist die identische Abbildung $\mathbf{I}$ und

(2) die Komposition $\mathbf{\Phi}_s(\mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}))$ erfüllt die Beziehungen

$$\mathbf{\Phi}_{s+t} = \mathbf{\Phi}_s \circ \mathbf{\Phi}_t = \mathbf{\Phi}_t \circ \mathbf{\Phi}_s \tag{2.9}$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Man beachte, dass aus obiger Definition unmittelbar

$$\mathbf{\Phi}_{-s}(\mathbf{\Phi}_s(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{x}_0) = \left(\mathbf{\Phi}_s^{-1} \circ \mathbf{\Phi}_s\right)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.10}$$

folgt. Die Abbildung $\mathbf{\Phi}_t$ erfüllt also folgende Bedingungen:

(1) $\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{I}$,

(2) $\mathbf{\Phi}_{s+t} = \mathbf{\Phi}_s \circ \mathbf{\Phi}_t = \mathbf{\Phi}_t \circ \mathbf{\Phi}_s$ und

(3) $\mathbf{\Phi}_s^{-1} = \mathbf{\Phi}_{-s}$.

Ein dynamisches System nach Definition 2.1 ist nun eng mit einem System von Differenzialgleichungen verbunden. Aus

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{\Phi}_{t+\Delta t}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0)) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{\Phi}_{\Delta t} - \mathbf{I})\right) \circ \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}_t\bigg|_{t=0} \circ \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}_t\bigg|_{t=0}(\mathbf{x}(t))
\end{aligned} \tag{2.11}$$

folgt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}_t\bigg|_{t=0}(\mathbf{x}(t)) \ . \tag{2.12}$$

Damit erfüllt ein dynamisches System noch die Beziehung

(4) $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Phi}_t\big|_{t=0}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ mit $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{x}_0)$. Man nennt die Abbildung $\boldsymbol{\Phi}_t$ auch den *Fluss* zum Differenzialgleichungssystem (2.12).

Aufgabe 2.2. Wählen Sie das spezielle dynamische System $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ oder $\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}$. Interpretieren Sie jetzt die Eigenschaften der Transitionsmatrix entsprechend der Punkte (1) - (3) eines dynamischen Systems neu. Wie sieht das zugehörige Differenzialgleichungssystem aus?

Als Beispiel wird die Bewegung eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ auf einer Einheitskugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt betrachtet (siehe dazu Abbildung 2.1). Als Ansatz für eine (stetige) Transformation, die Punkte der Einheitskugel wieder auf diese abbildet, wird die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) \tag{2.13}$$

mit einer (3×3)-Matrix $\mathbf{D}$ gewählt. Wegen $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x}(t) = 1$ müssen die Bedingungen

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} \tag{2.14}$$

erfüllt sein.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie die Gültigkeit von (2.14).

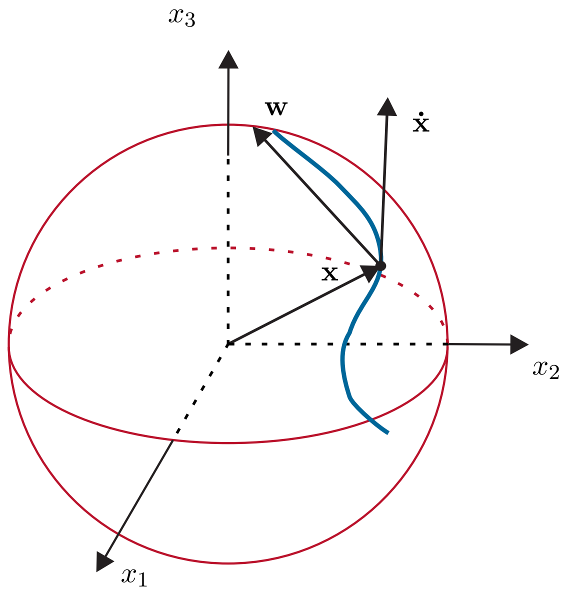

Abbildung 2.1: Bewegung auf einer Kugel.

Damit die Abbildung 2.1 ein dynamisches System beschreibt, müssen die Bedingungen

(1) $\mathbf{D}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{E}$ und

(2) $\mathbf{D}(s+t,\mathbf{x}) = \mathbf{D}(s,\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\mathbf{x})\mathbf{D}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{D}(t,\mathbf{D}(s,\mathbf{x})\mathbf{x})\mathbf{D}(s,\mathbf{x})$

gelten. Weiters weiß man, dass ein dynamisches System mit einem System von Differenzialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\mathbf{x})\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\bigg|_{t=0}\mathbf{x} \tag{2.15}$$

verbunden ist. Außerdem gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0)\right)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}_0) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{D}(t+\Delta t,\mathbf{x}_0)-\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0))\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}_0) \\
&\quad \text{mit Bedingung (2):} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{D}(\Delta t,\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0)\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0)-\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0))\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}_0) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{D}(\Delta t,\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0)-\mathbf{E})\mathbf{D}(t,\mathbf{x}_0)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}_0) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\bigg|_{t=0}\;.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Mit Hilfe von (2.14) ist es unmittelbar einsichtig, dass $\mathbf{W}$ schiefsymmetrisch ist, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right)\mathbf{D}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right)\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{D}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\;. \tag{2.18}$$

Eine schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{W}$ hat im Allgemeinen die Form

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(\mathbf{x}) & \omega_2(\mathbf{x}) \\ \omega_3(\mathbf{x}) & 0 & -\omega_1(\mathbf{x}) \\ -\omega_2(\mathbf{x}) & \omega_1(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

und somit kann die Differenzialgleichung (2.15) wie folgt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{w}(\mathbf{x})\times\mathbf{x} \tag{2.20}$$

mit $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [\omega_1(\mathbf{x}),\,\omega_2(\mathbf{x}),\,\omega_3(\mathbf{x})]$ angeschrieben werden. Das heißt, beschreibt ein dynamisches System die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel, dann erhält man bei der differenziellen Schreibweise das Kreuzprodukt.

2.1 Differenzialgleichungen

Durch ein dynamisches System nach Definition 2.1 ist also ein System von Differenzialgleichungen festgelegt. Wann eine Differenzialgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.21}$$

ein dynamisches System im obigen Sinne beschreibt, wird in weiterer Folge untersucht. In einem ersten Schritt sollen jedoch einige Grundbegriffe erläutert werden.

Definition 2.2 (Linearer Vektorraum)**.** Man nennt eine nichtleere Menge $\mathcal{X}$ einen linearen Vektorraum über einem (skalaren) Körper K mit den binären Operationen $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (Addition) und $\cdot : K \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (Multiplikation mit einem Skalar aus K), wenn folgende Vektorraumaxiome erfüllt sind:

(1) Die Menge $\mathcal{X}$ mit der Verknüpfung $+$ ist eine kommutative Gruppe, d.h. für $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{X}$ gilt:

(1)	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$	Kommutativität	(2.22)
(2)	$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$	Assoziativität	(2.23)
(3)	$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$	neutrales Element	(2.24)
(4)	$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	inverses Element	(2.25)

(2) Die Multiplikation $\cdot$ mit einem Skalar a, $b \in K$ genügt den Gesetzen:

(1)	$a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$	Distributivität	(2.26)
(2)	$(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$	Distributivität	(2.27)
(3)	$(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$	Assoziativität	(2.28)
(4)	$1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$		(2.29)

Definition 2.3 (Linearer Unterraum)**.** Wenn $\mathcal{X}$ ein linearer Vektorraum über dem Körper K ist, dann ist eine Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{X}$ ein linearer Unterraum, wenn gilt $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{S} \Rightarrow a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ für alle Skalare a, $b \in K$.

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{x}_j = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \tag{2.30}$$

mit $\mathcal{X} \ni \mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, n$ und den Skalaren $K \ni a_j$, $j = 1, \ldots, n$ wird als *Linearkombination* der Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}$ bezeichnet. Existieren nun Skalare a_j, $j = 1, \ldots, n$, die nicht alle identisch Null sind, so, dass die Linearkombination $\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ gilt, dann sind die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}$ *linear abhängig*. Wenn außer der trivialen Lösung $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$ keine Skalare existieren, die diese Bedingung erfüllen, dann bezeichnet man die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}$ als *linear unabhängig*. Für die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren einer nichtleeren Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{X}$ schreiben wir in weiterer Folge span($\mathcal{M}$). Der von $\mathcal{M}$ *aufgespannte Unterraum* (auch als lineare Hülle bezeichnet) ist der kleinste Unterraum gemäß Definition 2.3, der $\mathcal{M}$ umfasst, d.h., seine Elemente lassen sich alle als Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{M}$ darstellen.

Wenn nun ein linearer Vektorraum $\mathcal{X}$ durch eine endliche Anzahl n von linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird, dann hat $\mathcal{X}$ die Dimension n und wird als *endlich dimensional* bezeichnet. Wenn keine finite Anzahl existiert, ist $\mathcal{X}$ *unendlich dimensional*.

2.1.1 Der Normbegriff

Beispiele zu linearen Vektorräumen sind die Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die $(n \times m)$ - dimensionalen, reellwertigen Matrizen oder die komplexen Zahlen jeweils mit dem Skalarkörper $\mathbb{R}$.

Definition 2.4 (Normierter linearer Vektorraum)**.** Ein normierter linearer Vektorraum ist ein Vektorraum $\mathcal{X}$ über einem Skalarkörper K mit einer reellwertigen Funktion $\|\mathbf{x}\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, die jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ eine reellwertige Zahl $\|\mathbf{x}\|$, die so genannte Norm von $\mathbf{x}$, zuordnet und folgende Normaxiome erfüllt:

$$(1)\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{X} \qquad \text{Nichtnegativität} \tag{2.31}$$

$$(2)\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.32}$$

$$(3)\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \text{Dreiecksungleichung} \tag{2.33}$$

$$(4)\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\| \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ und alle } \alpha \in K \tag{2.34}$$

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass aus den Normaxiomen folgt $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$.

Im Weiteren werden einige klassische normierte Vektorräume betrachtet, wobei zwischen endlich und unendlich dimensionalen Vektorräumen unterschieden wird. Unter der p-Norm, $1 \leq p < \infty$, eines Vektors $\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$ versteht man den Ausdruck

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.35}$$

und für $p = \infty$ gilt

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \; . \tag{2.36}$$

Neben der ∞-*Norm* ("Unendlichkeitsnorm") gemäß (2.36) sind die am häufigsten verwendeten Normen auf $\mathbb{R}^n$ die 1-*Norm* ("Einsernorm")

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{2.37}$$

und die 2-*Norm* ("Quadratnorm" oder "Euklidische Vektornorm")

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \; . \tag{2.38}$$

Es gelten nun folgende Ungleichungen:

Satz 2.1 (Höldersche Ungleichung)**.** *Wenn für die positiven Zahlen* $1 \leq p \leq \infty$ *und* $1 \leq q \leq \infty$ *die Beziehung*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.39}$$

gilt, dann folgt für $\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$ *und* $\mathbf{y}^T = [y_1, \ldots, y_n]$ *die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \ . \tag{2.40}$$

Satz 2.2 (Minkowski Ungleichung)**.** *Für* $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $1 \leq p \leq \infty$*, gilt*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p \ . \tag{2.41}$$

Das Gleichheitszeichen in (2.41) gilt dann und nur dann, wenn $a\mathbf{x} = b\mathbf{y}$ *für positive Konstanten* a *und* b*.*

Man beachte, dass die Minkowski Ungleichung der Dreiecksungleichung (3) für Normen in Definition 2.4 entspricht.

In einem endlich dimensionalen, normierten Vektorraum sind alle Normen *äquivalent*. Das heißt, wenn $\| \ \|_\alpha$ und $\| \ \|_\beta$ zwei verschiedene Normen bezeichnen, dann existieren immer zwei Konstanten $0 < c_1, c_2 < \infty$ so, dass

$$c_1 \| \ \|_\alpha \leq \| \ \|_\beta \leq c_2 \| \ \|_\alpha \tag{2.42}$$

gilt.

Aufgabe 2.5. Beweisen Sie die Aussage, dass in einem endlich dimensionalen Vektorraum alle p-Normen *äquivalent* sind.

Aufgabe 2.6. Zeigen Sie, dass es sich bei der Äquivalenz von Normen ($\| \ \|_\alpha \sim \| \ \|_\beta$) um eine *Äquivalenzrelation* handelt.

Hinweis: Sie müssen die Eigenschaften *Reflexivität* ($\| \ \|_\alpha \sim \| \ \|_\alpha$), *Symmetrie* ($\| \ \|_\alpha \sim \| \ \|_\beta \Rightarrow \| \ \|_\beta \sim \| \ \|_\alpha$) und *Transitivität*($\| \ \|_\alpha \sim \| \ \|_\beta$ und $\| \ \|_\beta \sim \| \ \|_\gamma \Rightarrow \| \ \|_\alpha \sim \| \ \|_\gamma$) nachweisen.

Aufgabe 2.7. Zeichnen Sie in die (x_1, x_2) -Ebene die Mengen $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$ und $\mathcal{M}_\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$ ein. Verifizieren Sie anhand des Bildes die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{x}\|_2 \tag{2.43}$$

und finden Sie geeignete positive Konstanten c_1 und c_2 für die Ungleichung

$$c_1\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq c_2\|\mathbf{x}\|_2 \ . \tag{2.44}$$

Die Äquivalenz von Normen gilt für unendlich dimensionale, normierte Vektorräume nicht. Unter dem *unendlich dimensionalen* Vektorraum $L_p[t_0, t_1]$, $1 \leq p < \infty$, versteht man alle reellwertigen Funktionen $x(t)$ im Intervall $[t_0, t_1]$, für die gilt

$$\|x\|_p = \left(\int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} < \infty \ . \tag{2.45}$$

Man beachte an dieser Stelle, dass im Vektorraum $L_p[t_0, t_1]$ Funktionen, die *fast überall* gleich sind, sich also nur auf einer Menge von abzählbaren Punkten unterscheiden, als identisch angesehen werden. Nur deshalb erfüllt die Norm $\|x\|_p$ von (2.45) die Bedingung (2) von Definition 2.4. Der Vektorraum $L_\infty[t_0, t_1]$ beschreibt nun alle reellwertigen Funktionen $x(t)$, die auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ essentiell beschränkt sind, d.h. beschränkt abgesehen auf einer Menge von abzählbaren Punkten. Die zugehörige Norm lautet dann $\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t_0 \leq t \leq t_1} |x(t)|$. Die Höldersche Ungleichung für die L_p-Räume lautet wie folgt (vergleiche Satz 2.1):

Satz 2.3 (Höldersche Ungleichung für L_p-Räume)**.** *Für $x(t) \in L_p[t_0, t_1]$ und $y(t) \in L_q[t_0, t_1]$ mit $p > 1$ und*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.46}$$

gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} |x(t)y(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|x\|_p \|y\|_q \ . \tag{2.47}$$

Die *Minkowski Ungleichung* für L_p-Räume entspricht wiederum der Dreiecksungleichung (3) gemäß der Normdefinition 2.4 und wird deshalb an dieser Stelle nicht wiederholt.

Die gängigen Normen sind auch hier die L_1-, L_2- und die L_∞-*Norm* und werden im Folgenden nochmals kurz zusammengefasst.

$$\|x\|_1 = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)| \,\mathrm{d}t \ , \tag{2.48a}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} x^2(t) \,\mathrm{d}t} \ , \tag{2.48b}$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname{ess} \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |x(t)| \ . \tag{2.48c}$$

Man überzeugt sich leicht, dass sich für die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 1/t & \text{für } t \geq 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \tag{2.49}$$

die L_1-, L_2- und die L_∞-Norm wie folgt

$$\|x\|_1 = \infty \ , \tag{2.50a}$$
$$\|x\|_2 = 1 \ , \tag{2.50b}$$
$$\|x\|_\infty = 1 \tag{2.50c}$$

berechnen und somit aus der Existenz einer Norm nicht auf die Existenz anderer Normen geschlossen werden kann.

> *Aufgabe* 2.8. Berechnen Sie die L_1-, L_2- und die L_∞-Norm für die Zeitfunktionen $x(t) = \sin(t)$, $x(t) = 1 - \exp(-t)$ und $x(t) = 1/\sqrt[3]{t}$ für $0 \leq t \leq \infty$.

Zur Äquivalenz von Normen sei noch folgende Definition zu topologisch äquivalenten normierten Vektorräumen erwähnt:

Definition 2.5. Es seien $(\mathcal{X}, \| \|_\mathcal{X})$ und $\left(\mathcal{Y}, \| \|_\mathcal{Y}\right)$ zwei normierte lineare Vektorräume. Man nennt nun $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ topologisch isomorph, wenn eine bijektive lineare Abbildung $\mathbf{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und positive reelle Konstanten c_1 und c_2 so existieren, dass gilt

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\mathcal{X} \leq \|\mathbf{T}\mathbf{x}\|_\mathcal{Y} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_\mathcal{X} \tag{2.51}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Man nennt dann die Normen $\| \|_\mathcal{X}$ und $\| \|_\mathcal{Y}$ auch äquivalent.

Abschließend sollte noch beachtet werden, dass die Normen von endlich und unendlich dimensionalen Vektorräumen auch kombiniert auftreten können. Als Beispiel betrachte man den Vektorraum $\mathbf{C}^n[t_0, t_1]$, die Menge aller vektorwertigen, stetigen Zeitfunktionen, die das Intervall $[t_0, t_1]$ auf den $\mathbb{R}^n$ abbilden. Definiert man nun eine Norm der Form

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_C &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right)^{1/2} \ , \end{aligned} \tag{2.52}$$

dann ist durch $\| \|_2$ eine Norm des $\mathbb{R}^n$ mit einem *n-dimensionalen Vektor als Argument* gegeben, wohingegen $\| \|_C$ die Norm auf $\mathbf{C}^n[t_0, t_1]$ mit einer *vektorwertigen Zeitfunktion als Argument* bezeichnet.

> *Aufgabe* 2.9. Beweisen Sie, dass $\|\mathbf{x}(t)\|_C$ von (2.50) eine Norm ist.

2.1.2 Induzierte Matrixnorm

Eine reellwertige $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ beschreibt eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$. Angenommen, $\|\mathbf{x}\|_p$ bezeichnet eine zulässige Norm, dann definiert man die so genannte *induzierte* p-Norm in der Form

$$\|\mathbf{A}\|_{i,p} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \ . \tag{2.53}$$

Es ist damit unmittelbar einsichtig, dass nachfolgende Ungleichung für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}\|\mathbf{x}\|_p \leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{A}\|_{i,p}\|\mathbf{x}\|_p \tag{2.54}$$

Für $p = 1,\, 2,\, \infty$ folgt

$$\underbrace{\|\mathbf{A}\|_{i,1} = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\ ,}_{\text{maximale Spaltensumme}} \quad \|\mathbf{A}\|_{i,2} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})} \quad \text{und} \quad \underbrace{\|\mathbf{A}\|_{i,\infty} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\ ,}_{\text{maximale Zeilensumme}} \tag{2.55}$$

wobei mit $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$ der größte Eigenwert von $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (größter singulärer Wert von $\mathbf{A}$) gemeint ist. Nimmt man beispielsweise die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}\ , \tag{2.56}$$

dann errechnen sich die induzierten Normen zu (in MATLAB mit den Befehlen *norm*(A,1), *norm*(A) und *norm*(A,inf))

$$\|\mathbf{A}\|_{i,1} = 16\ , \tag{2.57a}$$

$$\|\mathbf{A}\|_{i,2} = 16.708\ , \tag{2.57b}$$

$$\|\mathbf{A}\|_{i,\infty} = 24\ . \tag{2.57c}$$

Aufgabe 2.10. Beweisen Sie, dass für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times l}$ mit der induzierten Matrixnorm $\|\ \|_{i,p}$ gilt

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_{i,p} \leq \|\mathbf{A}\|_{i,p}\|\mathbf{B}\|_{i,p}\ . \tag{2.58}$$

Aufgabe 2.11. Zeigen Sie, dass für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_{i,2} &\leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_{i,1}\|\mathbf{A}\|_{i,\infty}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_{i,\infty} \leq \|\mathbf{A}\|_{i,2} &\leq \sqrt{m}\|\mathbf{A}\|_{i,\infty} \\ \frac{1}{\sqrt{m}}\|\mathbf{A}\|_{i,1} \leq \|\mathbf{A}\|_{i,2} &\leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_{i,1} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Mit Hilfe des so genannten *Rayleigh-Quotienten* lässt sich eine sehr schöne Abschätzung von quadratischen Formen angeben. Unter dem Rayleigh-Quotienten einer reellwertigen (komplexwertigen) $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ mit einem beliebigen nichttrivialen Vektor $\mathbf{x}$ versteht man den Ausdruck

$$R[\mathbf{x}] = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\ . \tag{2.60}$$

Man beachte, dass im komplexen Fall unter $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ das transponierte, konjugiert Komplexe verstanden wird. Gesucht wird nun jenes $\mathbf{x}$, für welches der Rayleigh-Quotient extremal wird, d.h.,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} R[\mathbf{x}]\right)^T = \frac{2\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^2} 2\mathbf{x} = \frac{2}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - R[\mathbf{x}]\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ . \tag{2.61}$$

Da aber der Rayleigh-Quotient reell ist, reduziert sich die Extremalwertaufgabe auf das Lösen einer Eigenwertaufgabe der Form

$$(\mathbf{A} - R[\mathbf{x}]\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.62}$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$. Damit sind die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ Lösungen der Extremalwertaufgabe des Rayleigh-Quotienten (2.61) und mit $\mathbf{x}$ als Eigenvektor von $\mathbf{A}$ entspricht der Rayleigh-Quotient $R[\mathbf{x}]$ wegen

$$R[\mathbf{x}] = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} = \frac{\lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} = \lambda \tag{2.63}$$

dem zugehörigen Eigenwert λ. Damit lässt sich für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ folgende nützliche Abschätzung

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|_2^2 \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \le \lambda_{\max}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|_2^2 \tag{2.64}$$

angeben.

> *Aufgabe* 2.12. Zeigen Sie, dass sich jede quadratische Matrix $\mathbf{A}$ in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{A}_s$ und einen schiefsymmetrischen Anteil $\mathbf{A}_{ss}$ zerlegen lässt. Zeigen Sie weiters, dass in der quadratischen Form $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ der schiefsymmetrische Anteil der Matrix $\mathbf{A}$ herausfällt.

> *Aufgabe* 2.13. Versuchen Sie an Hand des Rayleigh-Quotienten zu zeigen, dass eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ausschließlich reelle Eigenwerte und eine positiv definite Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ausschließlich positive, reelle Eigenwerte besitzt.

2.1.3 Banachraum

Im Folgenden soll der Begriff der Konvergenz in einem normierten Vektorraum definiert werden.

Definition 2.6 (Konvergenz)**.** Eine Folge von Punkten $(\mathbf{x}_k)$ in einem normierten linearen Vektorraum $(\mathcal{X}, \|\ \ \|)$ mit $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ (in kompakter Schreibweise $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$), wenn

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0 \tag{2.65}$$

gilt. Für eine stetige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gilt weiters, dass aus $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ folgt $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Obige Definition erlaubt es zu untersuchen, ob eine gegebene Folge gegen einen gegebenen Grenzwert konvergiert oder nicht. Dies setzt jedoch die Kenntnis des Grenzwertes voraus, welche im Allgemeinen nicht vorliegt. Daher bedient man sich gerne des Konzepts der *Cauchy-Folge*.

Definition 2.7 (Cauchy-Folge)**.** Eine Folge $(\mathbf{x}_k)$ mit $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$\lim_{n,m \to \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| = 0 \tag{2.66}$$

gilt.

Der Zusammenhang zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen wird durch folgenden Satz charakterisiert.

Satz 2.4 (Cauchy-Folge)**.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. Die Umkehrung gilt jedoch nicht generell in normierten Vektorräumen.*

Zur Veranschaulichung dieses Satzes betrachte man $\mathcal{X} = C[0,1]$, also die Folge stetiger Funktionen $\{x_k(t)\}$, $k = 2, 3, \ldots$ im Intervall $0 \leq t \leq 1$, der Form

$$x_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \\ kt - \frac{k}{2} + 1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{k} < t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} < t \leq 1 \;. \end{cases} \tag{2.67}$$

Wählt man für $\{x_k(t)\} \subset C[0,1]$ als Norm die L_2-Norm

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) \,\mathrm{d}t \right)^{1/2} , \tag{2.68}$$

dann folgt mit $n > m$

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_2^2 &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \left(mt - \frac{m}{2} + 1 \right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left(mt - \frac{m}{2} - nt + \frac{n}{2} \right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{(m-n)^2}{3n^2 m} \end{aligned} \tag{2.69}$$

sofort

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_m - x_n\|_2^2 = 0 \;. \tag{2.70}$$

Damit sieht man, dass die Folge (2.67) für die L_2-Norm eine Cauchy-Folge ist. Für die Grenzfunktion gilt aber

$$\lim_{k \to \infty} x_k(t) = x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} < t \leq 1 \;. \end{cases} \tag{2.71}$$

Damit ist die Grenzfunktion $x(t)$ nicht stetig und damit auch kein Element von $C[0,1]$.

Aufgabe 2.14. Zeichnen Sie ein Bild der Folge (2.67).

Da man im Allgemeinen daran interessiert ist, dass der Grenzwert von Cauchy-Folgen in einem normierten linearen Vektorraum auch in diesem Vektorraum zu liegen kommt, führt man den Begriff eines *Banachraums* ein.

Definition 2.8 (Banachraum)**.** Ein normierter linearer Vektorraum $(\mathcal{X}, \|\;\|)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge gegen ein Element $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ konvergiert. Einen vollständigen, normierten Vektorraum nennt man auch *Banachraum*.

Satz 2.5 (Cauchysches Konvergenzkriterium)**.** *In einem vollständigen, normierten Vektorraum konvergiert eine Folge dann und nur dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Die normierten linearen Vektorräume $(\mathbb{R}^n, \|\;\|_p)$, $(\mathbb{R}^n, \|\;\|_\infty)$, $L_p[t_0, t_1]$ und $L_\infty[t_0, t_1]$ sind Beispiele für Banachräume. Im Weiteren kann gezeigt werden, dass $C[0, 1]$ mit der Norm $\|\;\|_\infty$ ebenfalls ein Banachraum ist.

Für das Nachfolgende werden noch einige wichtige Definitionen benötigt:

Definition 2.9 (Abgeschlossene Teilmenge)**.** Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(\mathbf{x}_k)$ mit $\mathbf{x}_k \in \mathcal{S}$ gilt, dass der Grenzwert ebenfalls in $\mathcal{S}$ liegt. Im Falle, dass $\mathcal{S}$ nicht abgeschlossen ist, kann man zu $\mathcal{S}$ die Menge aller möglichen Grenzwerte der konvergenten Folgen in $\mathcal{S}$ hinzunehmen und man nennt diese Menge $\bar{\mathcal{S}}$ die *Abschließung* (*abgeschlossene Hülle*) von $\mathcal{S}$. Damit ist $\bar{\mathcal{S}}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die $\mathcal{S}$ enthält.

Definition 2.10 (Beschränkte Teilmenge)**.** Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ heißt *beschränkt*, wenn gilt

$$\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{S}}} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} < \infty \;. \tag{2.72}$$

Definition 2.11 (Kompakte Teilmenge)**.** Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ heißt *kompakt* bzw. *relativ kompakt*, wenn jede Folge in $\mathcal{S}$ bzw. $\bar{\mathcal{S}}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in $\mathcal{S}$ bzw. $\bar{\mathcal{S}}$ beinhaltet.

Für die Unterräume eines Banachraumes gelten nun folgende Sätze:

Satz 2.6. *In einem Banachraum ist eine Teilmenge genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Satz 2.7. *In einem normierten linearen Vektorraum ist jeder endliche dimensionale Unterraum vollständig.*

Als nächstes betrachte man eine Gleichung der Form $\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$. Eine Lösung $\mathbf{x}^*$ dieser Gleichung bezeichnet man als *Fixpunkt* der Abbildung T, da $\mathbf{x}^*$ invariant gegenüber T ist. Eine klassische Vorgehensweise, den Fixpunkt zu finden, ist die so genannte *sukzessive*

Approximation mittels der Differenzengleichung $\mathbf{x}_{k+1} = T(\mathbf{x}_k)$ mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0$. Das so genannte *Kontraktionstheorem* gibt nun hinreichende Bedingungen dafür an, wann in einem Banachraum für die Abbildung T ein eindeutiger Fixpunkt existiert und die Folgenwerte der sukzessiven Approximation gegen diesen konvergieren.

Satz 2.8 (Kontraktionstheorem)**.** *Gegeben ist eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{S}$ eines Banachraums $\mathcal{X}$ mit der Abbildung $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Wenn für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| \leq \rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ , \quad 0 \leq \rho < 1 \ , \tag{2.73}$$

dann hat die Gleichung

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) \tag{2.74}$$

genau eine Fixpunktlösung $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ und die Folge $\mathbf{x}_{k+1} = T(\mathbf{x}_k)$ konvergiert für jeden Anfangswert $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ gegen $\mathbf{x}^*$. Man nennt dann T eine Kontraktion.

Folgende Aufgabe zeigt eine einfache Anwendung des Kontraktionstheorems.

Aufgabe 2.15. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.75}$$

mit einer reellwertigen $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$. Es gelte

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ . \tag{2.76}$$

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung besitzt und diese mittels der Differenzengleichung

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \ , \quad k \geq 0 \ , \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \tag{2.77}$$

für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ berechnet werden kann.

2.1.4 Hilbertraum

Ein so genannter *Prä-Hilbertraum* ist nun ein linearer Vektorraum $\mathcal{X}$ mit einem inneren Produkt.

Definition 2.12 (Prä-Hilbertraum)**.** Es sei $\mathcal{X}$ ein linearer Vektorraum mit dem Skalarkörper K. Eine Abbildung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to K$, die je zwei Elementen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ einen Skalar zuordnet, heißt *inneres Produkt*, wenn sie folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned}
&(1)\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \quad \text{Sesquilinear} \\
&(2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^* \\
&(3)\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&(4)\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0
\end{aligned} \tag{2.78}$$

mit $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$ als das konjugiert Komplexe von $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ und $a \in K$ genügt.

Beispiele zu Vektorräumen mit einem inneren Produkt sind die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \tag{2.79}$$

oder der Vektorraum der auf dem Intervall $-1 \leq t \leq 1$ stetigen Zeitfunktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} y(\tau) x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \ . \tag{2.80}$$

Wie die Beispiele zeigen, ist dort durch ein inneres Produkt auch die spezielle Norm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \tag{2.81}$$

gegeben. Um diese Eigenschaft zu verallgemeinern, wird der nachstehende Satz benötigt.

Satz 2.9 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, die Elemente eines linearen Vektorraums $\mathcal{X}$ mit dem Skalarkörper K und einem inneren Produkt sind, gilt*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \ . \tag{2.82}$$

Das Gleichheitszeichen in (2.82) ist genau dann erfüllt, wenn $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist.

Beweis. Zum Beweis betrachte man die für alle $a \in K$ gültige Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x} - a\mathbf{y}, \mathbf{x} - a\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle a\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \underbrace{\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} \rangle}_{=\langle a\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle^* = a^* \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*} + |a|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned} \tag{2.83}$$

mit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Wählt man

$$a = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \ , \tag{2.84}$$

folgt daraus

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\|^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \tag{2.85}$$

oder

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \ . \tag{2.86}$$

Für $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ muss nichts gezeigt werden. □

Satz 2.10 (Norm im Prä-Hilbertraum)**.** *In einem Prä-Hilbertraum $\mathcal{X}$ ist die Funktion $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ eine Norm im Sinne der Definition 2.4.*

In einem Prä-Hilbertraum gelten noch weitere nützliche Eigenschaften:

Satz 2.11. *In einem Prä-Hilbertraum $\mathcal{X}$ folgt aus der Tatsache, dass $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ist für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, dass $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist.*

Aufgabe 2.16. Beweisen Sie Satz 2.11.

Satz 2.12 (Parallelogramm Gleichung)**.** *In einem Prä-Hilbertraum $\mathcal{X}$ gilt*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2 = 2\|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{y}\|_2^2 \; . \tag{2.87}$$

Aufgabe 2.17. Beweisen Sie Satz 2.12.

Definition 2.13 (Hilbertraum)**.** Einen vollständigen Prä-Hilbertraum nennt man einen *Hilbertraum*.

Ein Hilbertraum ist demnach ein Banachraum, der mit einem inneren Produkt versehen ist, das gemäß Satz 2.10 eine Norm induziert. Die Räume $(\mathbb{R}^n, \| \, \|_2))$ und $L_2[t_0, t_1]$ sind Hilberträume mit den inneren Produkten

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \tag{2.88}$$

für $\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathbf{y}^T = [y_1, \ldots, y_n]$ bzw.

$$\langle x, y \rangle_{L_2[t_0,t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} x(t) y^*(t) \, \mathrm{d}t \tag{2.89}$$

für x, $y \in L_2[t_0, t_1]$. Man beachte, dass in diesem Fall die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.82) der Hölderschen Ungleichung (2.40) bzw. (2.47) für $p = q = 2$ entspricht.

2.1.5 Existenz und Eindeutigkeit

Die Lösung einer Differenzialgleichung muss nicht eindeutig sein. Hierzu betrachte man die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^{1/3} \; , \quad x_0 = 0 \; . \tag{2.90}$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$x(t) = 0 \; , \tag{2.91a}$$

$$x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \tag{2.91b}$$

Lösungen von (2.90) sind. Obwohl die rechte Seite der Differenzialgleichung stetig ist, ist die Lösung nicht eindeutig. Tatsächlich garantiert die Stetigkeit die *Existenz einer Lösung*, für die *Eindeutigkeit* werden jedoch weitere Bedingungen benötigt. Im Folgenden wird das zeitvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \; , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.92}$$

untersucht, da damit auch der nichtautonome Fall abgedeckt ist.

Satz 2.13 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Es sei* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *stückweise stetig in* t *und genüge der Abschätzung (*Lipschitz-Bedingung*)*

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \ , \quad 0 < L < \infty \tag{2.93}$$

für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq r\}$ *und alle* $t \in [t_0, t_0+\tau]$. *Dann existiert ein* $\delta > 0$ *so, dass*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \ , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.94}$$

genau eine *Lösung für* $t \in [t_0, t_0+\delta]$ *besitzt. Man sagt dann auch, die Funktion* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *ist* lokal Lipschitz *auf* $B \subset \mathbb{R}^n$. *Gilt die Bedingung (2.93) sogar im gesamten* $\mathbb{R}^n$, *dann bezeichnet man die Funktion* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ global Lipschitz.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Kontraktionstheorem nach Satz 2.8. Dazu wird in einem ersten Schritt der Banachraum $\mathcal{X} = \mathbf{C}^n[t_0, t_0+\delta]$ aller vektorwertigen, stetigen Zeitfunktionen im Zeitintervall $[t_0, t_0+\delta]$ mit der Norm $\|\mathbf{x}(t)\|_C = \sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}\|\mathbf{x}(t)\|$ definiert. Zur Erläuterung siehe auch (2.52). Weiters wird die Differenzialgleichung (2.94) in eine äquivalente Integralgleichung der Form

$$(P\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{2.95}$$

umgewandelt. Im Rahmen des Beweises wird nun gezeigt, dass die Abbildung P auf der abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ mit $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n[t_0, t_0+\delta] \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_C \leq r\}$ eine Kontraktion ist und dass P die Teilmenge $\mathcal{S}$ auf sich selbst abbildet. Dazu berechne man

$$(P\mathbf{x}_1)(t) - (P\mathbf{x}_2)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_2(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{2.96}$$

für $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t) \in \mathcal{S}$.

Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
\|(P\mathbf{x}_1)(t) - (P\mathbf{x}_2)(t)\|_C &= \left\| \int_{t_0}^{t} (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_1(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_2(\tau)))\, \mathrm{d}\tau \right\|_C \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_1(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_2(\tau))\|_C\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\|_C\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq L\delta\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|_C \ ,
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

und durch geeignete Wahl von

$$
\delta \leq \rho/L \ , \quad \rho < 1 \ , \tag{2.98}
$$

ist mit (2.98) nach Satz 2.8 gezeigt, dass P eine Kontraktion auf $\mathcal{S}$ ist. Im nächsten Schritt muss dann bewiesen werden, dass die Abbildung P die Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ auf sich selbst abbildet. Da $\mathbf{f}$ stückweise stetig ist, folgt, dass $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ auf dem Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ beschränkt ist, also

$$
h = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| \ . \tag{2.99}
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|(P\mathbf{x})(t) - \mathbf{x}_0\|_C &\leq \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\|_C\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_0)\|_C\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (\|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_0)\|_C + \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_0)\|_C)\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L\|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_0\|_C + h)\, \mathrm{d}\tau \\
&\leq \delta(Lr + h) \ .
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

Wählt man nun

$$
\delta \leq \frac{r}{Lr + h} \ , \tag{2.101}
$$

dann wird $\mathcal{S}$ durch P auf sich selbst abgebildet. Kombiniert man (2.98) und (2.101) und wählt man δ kleiner gleich dem betrachteten Zeitintervall τ von Satz 2.13,

$$\delta = \min\left(\frac{\rho}{L}, \frac{r}{Lr+h}, \tau\right) \;, \quad \rho < 1 \;, \tag{2.102}$$

dann ist damit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in $\mathcal{S}$ für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ gezeigt. □

Da es sich bei der Abbildung P von (2.95) um eine Kontraktion handelt, weiß man zufolge von Satz 2.8, dass die Folge $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ gegen die eindeutige Lösung der Integralgleichung (2.95) bzw. der äquivalenten Differenzialgleichung (2.94) konvergiert. Man nennt diese Vorgehensweise auch die *Iterationsmethode nach Picard*.

Aufgabe 2.18. Zeigen Sie, dass für lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \;, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \;, \tag{2.103}$$

die Iterationsmethode nach Picard gerade die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ iterativ berechnet.

Aufgabe 2.19. Berechnen Sie mithilfe der Iterationsmethode nach Picard die Transitionsmatrix eines linearen, zeitvarianten Systems der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \;, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \;. \tag{2.104}$$

Hinweis: Die Transitionsmatrix von (2.104) errechnet sich aus der *Peano-Baker-Reihe* zu

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathbf{A}(\tau)\int_0^\tau \mathbf{A}(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau + \ldots \tag{2.105}$$

Für eine skalare Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht explizit von der Zeit t abhängt, kann die Lipschitz-Bedingung (2.93) sehr einfach wie folgt

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L \tag{2.106}$$

angeschrieben werden. Die Bedingung (2.106) erlaubt eine sehr einfache grafische Interpretation, nämlich die Funktion $f(x)$ darf keine Steigung besitzen, die größer als L ist. Daher sind Funktionen $f(x)$, die an einem Punkt eine unendliche Steigung aufweisen (wie die Funktion $x^{1/3}$ von (2.90) am Punkt $x = 0$) sicher nicht lokal Lipschitz. Dies impliziert natürlich auch, dass unstetige Funktionen $f(x)$ am Punkt der Unstetigkeitsstelle die Lipschitz-Bedingung (2.93) nicht erfüllen. Dieser Zusammenhang zwischen der Lipschitz-Bedingung und der Beschränktheit von $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right|$ wird im folgenden Satz ohne Beweis verallgemeinert:

Satz 2.14 (Lipschitz-Bedingung und Stetigkeit)**.** *Sind die Funktion* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *von (2.92) und* $[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}](t, \mathbf{x})$ *auf der Menge* $[t_0, t_0 + \delta] \times B$ *mit* $B \subset \mathbb{R}^n$ *stetig, dann erfüllt* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *lokal die Lipschitz-Bedingung von (2.93).*

Zur Überprüfung der *globalen Existenz und Eindeutigkeit* einer Differenzialgleichung vom Typ (2.92) sei nachfolgender Satz angegeben:

Satz 2.15 (Globale Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Angenommen, die Funktion* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *von (2.92) ist stückweise stetig in* t *und global Lipschitz für alle* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ *nach Satz 2.13. Dann besitzt die Differenzialgleichung (2.92) eine eindeutige Lösung im Zeitintervall* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$*. Sind die Funktion* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *von (2.92) und* $[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}](t, \mathbf{x})$ *auf der Menge* $[t_0, t_0 + \tau] \times \mathbb{R}^n$ *stetig, dann ist* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *genau dann global Lipschitz, wenn* $[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}](t, \mathbf{x})$ *auf* $[t_0, t_0 + \tau] \times \mathbb{R}^n$ gleichmäßig beschränkt *ist.*

Zur Erläuterung sei gesagt, dass $[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}](t, \mathbf{x})$ *gleichmäßig beschränkt* ist, wenn unabhängig von $t_0 \geq 0$ zu jeder positiven, finiten Konstanten a ein von t_0 unabhängiges $\beta(a) > 0$ so existiert, dass gilt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \right\|_i \leq a \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) \right\|_i \leq \beta(a) \tag{2.107}$$

mit $\| \, \|_i$ als induzierter Norm gemäß (2.53) für alle $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Die Beweise der letzten beiden Sätze sind in der am Ende dieses Kapitels angeführten Literatur nachzulesen. Als Beispiel betrachte man das System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} . \tag{2.108}$$

Aus Satz 2.14 kann man unmittelbar folgern, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ von (2.108) lokal Lipschitz auf $\mathbb{R}^2$ ist. Die Anwendung des Satzes 2.15 zeigt aber, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nicht global Lipschitz ist, da $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht gleichmäßig beschränkt ist.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die mathematischen Modelle der meisten physikalischen Systeme in der Form von (2.92) lokal Lipschitz sind, da dies nach Satz 2.14 im Wesentlichen einer Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit der rechten Seite entspricht. Im Gegensatz dazu ist die globale Lipschitz-Bedingung sehr restriktiv und wird nur von den wenigsten physikalischen Systemen eingehalten, was aus der Forderung an die gleichmäßige Beschränktheit von $[\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}](t, \mathbf{x})$ schon zu erahnen war.

Aufgabe 2.20. Überprüfen Sie für die nachfolgenden Funktionen

$$(1) \quad f(x) = x^2 + |x| \tag{2.109}$$

$$(2) \quad f(x) = \sin(x)\,\mathrm{sgn}(x) \tag{2.110}$$

$$(3) \quad f(x) = \tan(x) \tag{2.111}$$

sowie

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax_1 + \tanh(bx_1) - \tanh(bx_2) \\ ax_2 + \tanh(bx_1) + \tanh(bx_2) \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + a\|x_2\| \\ -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1 x_2 \end{bmatrix} , \tag{2.113}$$

ob diese (a) stetig, (b) stetig differenzierbar, (c) lokal Lipschitz und (d) global Lipschitz sind.

Aufgabe 2.21. Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.114}$$

für alle $t \geq t_0$ eine eindeutige Lösung hat.

2.1.6 Einfluss von Parametern

Vielfach möchte man den Einfluss von Parametern auf die Lösung einer Differenzialgleichung der Art

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \ , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.115}$$

mit dem Parametervektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ untersuchen. Mit $\mathbf{p}_0$ sei im Weiteren der nominelle Wert des Parametervektors $\mathbf{p}$ bezeichnet.

Satz 2.16 (Einfluss von Parametern)**.** *Es sei angenommen, dass* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ *stetig in* $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ *und lokal Lipschitz in* $\mathbf{x}$ *(Lipschitz-Bedingung (2.93)) auf* $[t_0, t_0 + \tau] \times D \times \{\mathbf{p} | \ \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| \leq r\}$ *mit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ist. Weiters sei durch* $\mathbf{y}(t, \mathbf{p}_0)$ *eine Lösung der Differenzialgleichung* $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}_0)$ *mit dem Anfangswert* $\mathbf{y}(t_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{y}_0 \in D$ *gegeben, wobei die Lösung* $\mathbf{y}(t, \mathbf{p}_0)$ *für alle Zeiten* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ *in* D *verbleibe. Dann existiert für ein gegebenes* $\varepsilon > 0$ *ein* δ_1*,* $\delta_2 > 0$ *so, dass für*

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta_1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| < \delta_2 \tag{2.116}$$

die Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{p})$ *mit dem Anfangswert* $\mathbf{z}(t_0, \mathbf{p}) = \mathbf{z}_0$ *eine eindeutige Lösung* $\mathbf{z}(t, \mathbf{p})$ *für alle Zeiten* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ *hat und* $\mathbf{z}(t, \mathbf{p})$ *die Bedingung*

$$\|\mathbf{z}(t, \mathbf{p}) - \mathbf{y}(t, \mathbf{p}_0)\| < \varepsilon \tag{2.117}$$

erfüllt.

Für den Beweis dieses Satzes sei auf die am Ende dieses Kapitels angeführte Literatur verwiesen. Grob gesprochen besagt dieser Satz, dass für alle Parameter $\mathbf{p}$, die hinreichend nahe beim nominellen Wert $\mathbf{p}_0$ liegen ($\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| < \delta_2$), die Differenzialgleichung (2.115) eine eindeutige Lösung besitzt und diese sehr nahe bei der nominellen Lösung der Differenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_0)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ liegt.

Angenommen, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ erfüllt die Bedingungen von Satz 2.16 und hat zusätzlich stetige erste partielle Ableitungen bezüglich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ für alle $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in [t_0, t_0 + \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$. Die Differenzialgleichung (2.115) kann nun in eine äquivalente Integralgleichung der Form

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s, \mathbf{p}), \mathbf{p})\, \mathrm{d}s \tag{2.118}$$

umgeschrieben werden. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ bezüglich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{p}}\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{p}}\mathbf{x}_0}_{=\mathbf{0}} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s, \mathbf{p}), \mathbf{p})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{p}}\mathbf{x}(s, \mathbf{p}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s, \mathbf{p}), \mathbf{p})\, \mathrm{d}s \ . \tag{2.119}$$

Leitet man (2.119) bezüglich t ab, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{p})\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{p}) \ , \quad \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t_0, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \tag{2.120}$$

sowie

$$\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{p}}\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) \ , \tag{2.121a}$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{p}) = \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\mathbf{p})} \ , \tag{2.121b}$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{p}) = \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\mathbf{p})} \ . \tag{2.121c}$$

Für Parameter $\mathbf{p}$, die hinreichend nahe beim nominellen Wert $\mathbf{p}_0$ liegen, sind die Matrizen $\mathbf{A}(t, \mathbf{p})$ und $\mathbf{B}(t, \mathbf{p})$ und somit auch $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p})$ auf dem Zeitintervall $[t_0, t_0 + \tau]$ wohl definiert. Setzt man für $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ in $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p})$ ein, ergibt sich die so genannte *Sensitivitätsfunktion*

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{p}}\mathbf{x}(t, \mathbf{p})\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \tag{2.122}$$

und diese ist Lösung der Differenzialgleichung (man vergleiche dazu (2.120))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_0) \ , \tag{2.123a}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ , \tag{2.123b}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}\mathbf{S} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \ , \tag{2.123c}$$

$$\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{0} \ . \tag{2.123d}$$

Man bezeichnet die Matrixdifferenzialgleichung für $\mathbf{S}(t)$ auch *Sensitivitätsgleichung*. Die Sensitivitätsfunktion kann nun dahingehend interpretiert werden, dass sie eine Approximation erster Ordnung für die Auswirkung der Parametervariationen auf die Lösung angibt. Damit ist es aber möglich, für kleine Änderungen des Parametervektors $\mathbf{p}$ vom nominellen Wert $\mathbf{p}_0$ die Lösung $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ von (2.115) in folgender Form

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) \approx \mathbf{x}(t, \mathbf{p}_0) + \mathbf{S}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \tag{2.124}$$

zu approximieren. Diese Approximation ist unter anderem auch die Grundlage für die singuläre Störtheorie. Man könnte sich zwar auch vorstellen, die Auswirkung von Parameterschwankungen durch einfache Variation der Parameter in den Differenzialgleichungen festzustellen. Dies hätte jedoch den Nachteil, dass kleine Parameterschwankungen meist in den Rundungsfehlern der Integration untergehen und damit keine quantitativen Aussagen des Einflusses der Parameter auf die Lösung erlauben.

Aufgabe 2.22. Gegeben ist folgendes Differenzialgleichungssystem (Phase-Locked-Loop)

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.125}$$

$$\dot{x}_2 = -c\sin(x_1) - (a + b\cos(x_1))x_2 \tag{2.126}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2]$ und dem Parametervektor $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = [a, b, c]$. Die Nominalwerte des Parametervektors $\mathbf{p}$ lauten $\mathbf{p}_0 = [1, 0, 1]$. Gesucht ist die Sensitivitätsfunktion $\mathbf{S}(t)$ nach (2.122). Vergleichen Sie die Lösungen für den nominellen Parametervektor $\mathbf{p}_0$ und für den Parametervektor $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = [1.2, -0.2, 0.8]$ für $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = [1, 1]$ durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Aufgabe 2.23. Berechnen Sie die Sensitivitätsgleichung für den *Van der Pol Oszillator*

$$\ddot{v} - \varepsilon\left(1 - v^2\right)\dot{v} + v = 0 \tag{2.127}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [v, \dot{v}]$ und dem Parameter $p = \varepsilon$. Vergleichen Sie die Lösungen für verschiedene kleine Abweichungen vom nominellen Wert $\varepsilon_0 = 0.01$ durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

2.2 Literatur

[2.1] M. Hirsch und S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. San Diego: Academic Press, 1974.

[2.2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[2.3] D. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[2.4] ——, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[2.5] E. Slotine und W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.

[2.6] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.