

3 Lyapunov-Theorie: Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zur Untersuchung der Stabilität einer Ruhelage für autonome und nichtautonome nichtlineare Systeme behandelt.

3.1 Autonome Systeme

Den Betrachtungen in diesem Abschnitt liegt das autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

mit dem glatten Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zu Grunde. Mit $\Phi_t(\mathbf{x})$ bezeichne man dabei wiederum den Fluss von (3.1). Eine Ruhelage \mathbf{x}_R genüge der Beziehung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \Phi_t(\mathbf{x}_R) = \mathbf{x}_R . \tag{3.2}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist. Gilt nämlich $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$, dann kann man durch die einfache Koordinatentransformation $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ immer erreichen, dass in den neuen Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}_R = \mathbf{0}$ gilt. Im Folgenden soll kurz der Begriff eines Vektorfeldes erläutert werden.

3.1.1 Das Vektorfeld

Ein wichtiges Konzept bei der Untersuchung von (autonomen) Systemen der Form (3.1) ist das des *Vektorfeldes*, wobei so genannte *glatte Vektorfelder* eine besondere Bedeutung haben. Dazu folgende Definition:

Definition 3.1 (Glatte Funktion). Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *glatt* oder C^∞ , wenn f und alle *partiellen Ableitungen* beliebiger Ordnung l

$$\frac{\partial^l}{\prod_{i=1}^n \partial^{l_i} x_i} f(x_1, \dots, x_n), \quad \sum_{i=1}^n l_i = l, \quad l_i \geq 0 \tag{3.3}$$

stetig sind.

Obige Definition kann nun einfach auf eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ übertragen werden, indem man verlangt, dass alle Komponenten $f_i, i = 1, \dots, n$ von \mathbf{f} glatt sind.

Definition 3.2 (Vektorfeld). Ein (glattes) *Vektorfeld* ist nun eine Vorschrift, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ das Paar $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mittels einer (glatten) Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zuordnet.

Man beachte, dass ein Vektorfeld *keine* Abbildung der Art $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt \mathbf{x} des \mathbb{R}^n einen linearen Vektorraum \mathbb{R}^n zu, bei dem das spezielle Koordinatensystem die Bildmenge der Abbildung $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist. Vielfach unterdrückt man bei einem Vektorfeld $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ die explizite Angabe des ersten Arguments und schreibt einfach $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Hat man aber zwei Vektorfelder $\mathbf{f}_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{f}_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann dürfen diese nur addiert werden $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$, wenn $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ gilt, da ja sonst \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 in unterschiedlichen Vektorräumen liegen würden.

Als Beispiel wird das elektrostatische Feld zweier örtlich fester Punktladungen q_1 und q_2 im drei-dimensionalen Raum betrachtet. Befindet sich q_1 in der Position $\mathbf{x}_{q_1}^T = [x_{q_1,1}, x_{q_1,2}, x_{q_1,3}]$, dann wird jedem Punkt $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3]$ die Feldstärke $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ in der Form

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q_1})}{\left((x_{q_1,1} - x_1)^2 + (x_{q_1,2} - x_2)^2 + (x_{q_1,3} - x_3)^2\right)^{3/2}} \quad (3.4)$$

zugeordnet. Die Ladung q_2 erzeugt analog dazu das Feld \mathbf{E}_2 . Beide Vektorfelder dürfen überlagert werden, und man erhält bekannterweise für die Kraft auf eine Testladung q am Ort \mathbf{x} die Beziehung

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + q\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) . \quad (3.5)$$

Man beachte, dass die Summe $q\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_1) + q\mathbf{E}_2(\mathbf{x}_2)$ natürlich für $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ keine sinnvolle Operation darstellt. Abbildung 3.1 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

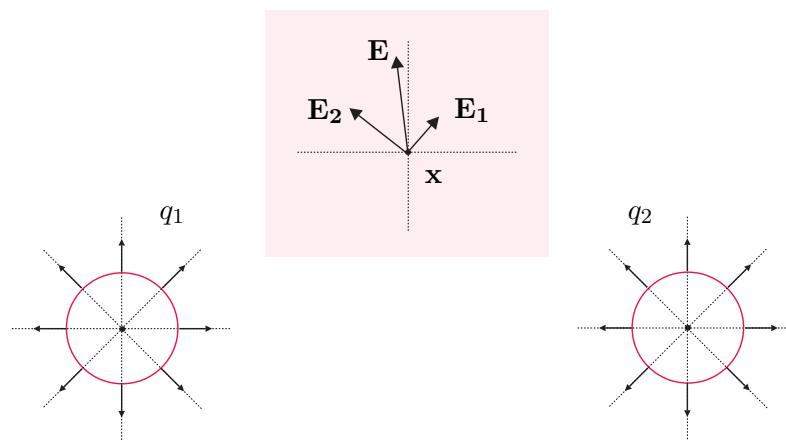


Abbildung 3.1: Zum Begriff des Vektorfeldes am Beispiel des elektrischen Feldes zweier Punktladungen.

Für Systeme zweiter Ordnung vom Typ (3.1) können die Lösungstrajektorien sehr einfach auf grafischem Wege durch Zeichnen des Vektorfeldes $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]$ gewonnen werden. Der Grund hierfür liegt darin, dass für eine Lösungskurve von (3.1), die durch den Punkt $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$ geht, das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ am Punkt \mathbf{x} tangential zur Lösungskurve ist.

Aufgabe 3.1. Zeichnen Sie das Vektorfeld zum Differenzialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.6a)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - 1.5x_2 . \quad (3.6b)$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu MAPLE und den Befehl `fieldplot`.

3.1.2 Stabilität der Ruhelage

Damit ist es möglich, die Stabilität der Ruhelage im Sinne von Lyapunov zu definieren.

Definition 3.3 (Lyapunov-Stabilität autonomer Systeme). Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.1) heißt *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so existiert, dass

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|\Phi_t(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \quad (3.7)$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Darüber hinaus bezeichnet man die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.1) als *anziehend*, wenn eine positive reelle Zahl η so existiert, dass aus

$$\|\mathbf{x}_0\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} . \quad (3.8)$$

Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.1) *stabil und anziehend*, dann nennt man sie auch *asymptotisch stabil*.

Die Wahl der Normen $\|\cdot\|$ in (3.7) und (3.8) ist willkürlich, da, wie im Abschnitt 2.1.1 gezeigt, in einem finit-dimensionalen Vektorraum die Normen topologisch äquivalent sind. Die Unterscheidung zwischen stabil und anziehend in Definition 3.3 ist deshalb von Bedeutung, da eine anziehende Ruhelage nicht stabil sein muss. Ein Beispiel dafür ist durch das System

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \quad (3.9a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \quad (3.9b)$$

mit dem Vektorfeld nach Abbildung 3.2 gegeben.

3.1.3 Direkte (Zweite) Methode von Lyapunov

Bevor die direkte Methode von Lyapunov besprochen wird, soll an Hand des einfachen elektrischen Systems von Abbildung 3.3 die physikalische Idee hinter dieser Methode beleuchtet werden.

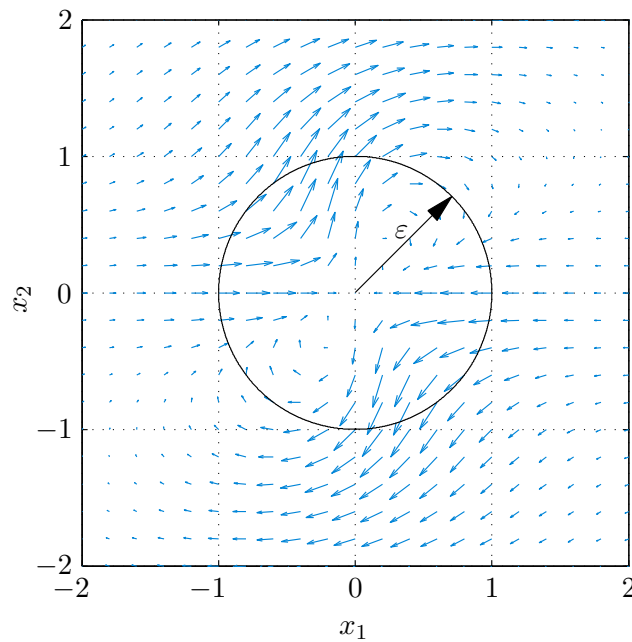


Abbildung 3.2: Vektorfeld eines instabilen aber anziehenden Punktes.

Die Netzwerkgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}(-u_C - R_1 i_L) \quad (3.10a)$$

$$\frac{d}{dt}u_C = \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{u_C}{R_2}\right) \quad (3.10b)$$

mit der Kondensatorspannung u_C und dem Strom durch die Induktivität i_L . Die in den Energiespeichern Kapazität C und Induktivität L gespeicherte Energie

$$V = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2 \quad (3.11)$$

ist für alle $(u_C, i_L) \neq (0,0)$ positiv und deren zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt}V = -R_1 i_L^2 - \frac{1}{R_2}u_C^2 \quad (3.12)$$

für alle $(u_C, i_L) \neq (0,0)$ negativ. Durch Einführen der Norm

$$\left\| \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{Cu_C^2 + Li_L^2} \quad (3.13)$$

lässt sich aus Definition 3.3 für $\delta = \varepsilon$ zeigen, dass die Ruhelage $u_C = i_L = 0$ stabil und anziehend, also asymptotisch stabil, ist.

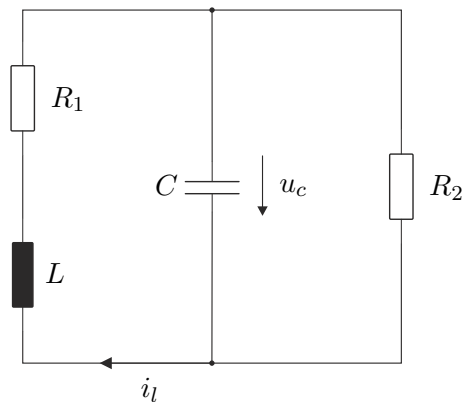


Abbildung 3.3: Einfaches elektrisches System.

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie, dass (3.13) eine Norm ist.

Im Rahmen der Lyapunov-Theorie wird nun für nichtlineare Systeme vom Typ (3.1) die Energiefunktion (3.11) durch eine Funktion V mit entsprechenden Eigenschaften ersetzt. Dazu folgende Definition:

Definition 3.4 (Positive/Negative (Semi-)Definitheit). Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Eine Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal positiv (negativ) definit*, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $V(\mathbf{x})$ ist stetig differenzierbar,
- (2) $V(\mathbf{0}) = 0$ und
- (3) $V(\mathbf{x}) > 0$, ($V(\mathbf{x}) < 0$) für $\mathbf{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\}$.

Gilt $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ und gibt es eine Konstante $r > 0$ so, dass

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) > 0 \quad \left(\sup_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) < 0 \right), \quad (3.14)$$

dann nennt man $V(\mathbf{x})$ *positiv (negativ) definit*.

Genügt $V(\mathbf{x})$ in (3) lediglich den Bedingungen

- (3) $V(\mathbf{x}) \geq 0$, ($V(\mathbf{x}) \leq 0$) für $\mathbf{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\}$,

dann heißt $V(\mathbf{x})$ *(lokal) positiv (negativ) semidefinit*.

Aufgabe 3.3. Welche der nachfolgenden Funktionen sind positiv (negativ) (semi)definit?

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^4 \quad (3.15a)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^4 - ax_3^2 + x_3^4, \quad a > 0 \quad (3.15b)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 \quad (3.15c)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3^2 \quad (3.15d)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \exp(-x_1^2) + x_2^2 \quad (3.15e)$$

In Anlehnung an das elektrische Beispiel von Abbildung 3.3 versucht man nun eine positiv definite Funktion $V(\mathbf{x})$ (entspricht der Energiefunktion), die so genannte *Lyapunovfunktion*, zu konstruieren, deren zeitliche Ableitung negativ definit ist. Für die zeitliche Änderung von $V(\mathbf{x})$ entlang einer Trajektorie $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$ von (3.1) gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Phi_t(\mathbf{x}_0)) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\Phi_t(\mathbf{x}_0)) \frac{d}{dt} \Phi_t(\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Abbildung 3.4 veranschaulicht diesen Sachverhalt mittels der *Höhenlinien* $V(\mathbf{x}) = c$ für verschiedene positive Konstanten c .

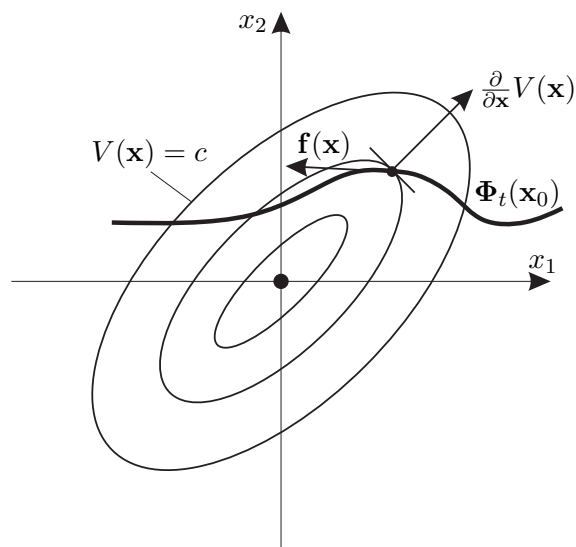


Abbildung 3.4: Zur Konstruktion einer Lyapunovfunktion.

Aufgabe 3.4. Zeigen Sie, dass für Systeme zweiter Ordnung die Höhenlinien in der Nähe der Ruhelage immer Ellipsen sind. (Dies begründet auch die Wahl der schematischen Darstellung von Abbildung 3.4.)

Damit ist man nun in der Lage, die direkte Methode von Lyapunov zu formulieren:

Satz 3.1 (Direkte Methode von Lyapunov). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.1) und $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Existiert eine Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $V(\mathbf{x})$ auf \mathcal{D} positiv definit und $\dot{V}(\mathbf{x})$ auf \mathcal{D} negativ semidefinit ist, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ stabil. Ist $\dot{V}(\mathbf{x})$ sogar negativ definit, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil. Man nennt dann die Funktion $V(\mathbf{x})$ auch Lyapunovfunktion.*

Der Beweis dieses Satzes wird hier nicht angeführt, kann aber in der am Ende angeführten Literatur nachgelesen werden. Es sei an dieser Stelle aber angemerkt, dass mithilfe der Höhenlinien von Abbildung 3.4 die Aussage des Satzes 3.1 einfach veranschaulicht werden kann.

Aufgabe 3.5. Gegeben ist ein *RLC*-Netzwerk, welches durch nachfolgendes Differenzialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_C \\ \dot{\mathbf{x}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_L \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

beschrieben wird. Dabei bezeichnet \mathbf{x}_C den Vektor der Kondensatorspannungen und \mathbf{x}_L den Vektor der Induktivitätsströme. Die Diagonalmatrix \mathbf{C} beinhaltet alle Kondensatorwerte und die positiv definite Matrix \mathbf{L} setzt sich aus Haupt- und Gegeninduktivitäten zusammen. Die Matrizen \mathbf{R}_{11} und \mathbf{R}_{22} seien symmetrisch und es gelte $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21}^T$. Zeigen Sie, dass für negativ definite Matrizen \mathbf{R}_{11} und \mathbf{R}_{22} die Ruhelage $\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_L = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Verwenden Sie als Lyapunovfunktion die in den Energiespeichern gespeicherte Gesamtenergie $V(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_L) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_C^T \mathbf{C} \mathbf{x}_C + \frac{1}{2} \mathbf{x}_L^T \mathbf{L} \mathbf{x}_L$.

Man beachte, dass aus dem Versagen eines Kandidaten für $V(\mathbf{x})$ *nicht* die Instabilität der Ruhelage folgt. Man muss in so einem Fall eine andere Funktion $V(\mathbf{x})$ wählen. Doch ist die Existenz einer Lyapunovfunktion immer gewährleistet, wenn die Ruhelage stabil im Sinne von Lyapunov ist, d. h., das Problem besteht im Wesentlichen darin, eine geeignete Lyapunovfunktion $V(\mathbf{x})$ zu finden. Bei den meisten technisch-physikalischen Anwendungen kann die Lyapunovfunktion aus *physikalischen Überlegungen* gewonnen werden, indem man als geeigneten Kandidaten die im System gespeicherte Energie heranzieht. Wenn dies nicht möglich ist, z. B. wenn durch Regelung die physikalische Struktur teilweise zerstört wird, dann muss man sich entsprechend anderer Methoden bedienen.

Im Falle eines Eingrößensystems der Form

$$\dot{x} = -f(x) \quad (3.18)$$

mit stetigem $f(x)$, $f(0) = 0$, sowie $xf(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ mit $x \in (-a, a)$ wählt man als Kandidaten für die Lyapunovfunktion

$$V(x) = \int_0^x f(z) dz . \quad (3.19)$$

Offensichtlich ist $V(\mathbf{x})$ auf dem Intervall $(-a, a)$ positiv definit und für die zeitliche Ableitung von $V(\mathbf{x})$ gilt

$$\dot{V}(x) = f(x)(-f(x)) = -f^2(x) < 0 \quad (3.20)$$

für alle $x \neq 0$ mit $x \in (-a, a)$. Damit ist die asymptotische Stabilität der Ruhelage $x_R = 0$ gezeigt.

Aufgabe 3.6. Zeigen Sie, dass sich ein Eingrößensystem mit asymptotisch stabiler Ruhelage $x_R = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$ um die Ruhelage immer in der Form von (3.18) mit der Bedingung $xf(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{D} - \{0\}$ schreiben lässt.

3.1.4 Einzugsbereich

Obwohl mit obigen Mitteln bereits die Stabilität einer Ruhelage beurteilt werden kann, ist von der erlaubten Auslenkung \mathbf{x}_0 aus der Ruhelage $\mathbf{0}$ nur bekannt, dass sie hinreichend klein sein muss. Um diese möglichen Auslenkungen quantitativ klassifizieren zu können, definiert man den so genannten Einzugsbereich.

Definition 3.5 (Einzugsbereich). Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage von (3.1). Man nennt dann die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \right\} \quad (3.21)$$

den *Einzugsbereich* von $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Wenn $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ gilt, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ *global asymptotisch stabil*.

Kann man zeigen, dass die Lyapunovfunktion $V(\mathbf{x})$ auf einem Gebiet \mathcal{X} positiv definit und $\dot{V}(\mathbf{x})$ auf einem Gebiet \mathcal{Y} negativ definit ist, wobei die Gebiete \mathcal{X} und \mathcal{Y} die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ beinhalten, dann ist eine einfache Abschätzung des Einzugsbereiches durch die größte *Niveaumenge*

$$\mathcal{L}_c = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid V(\mathbf{x}) \leq c \} \quad (3.22)$$

gegeben, für die gilt $\mathcal{L}_c \subset \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

Aufgabe 3.7. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_c \subset \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ nach Definition 3.6 eine positiv invariante Menge ist. Geben Sie eine Begründung dafür an, dass dies tatsächlich eine geeignete Abschätzung des Einzugsbereiches ist.

Beim Nachweis der globalen asymptotischen Stabilität treten nun prinzipielle Schwierigkeiten auf, da für große c die Niveaumengen (3.22) nicht mehr *abgeschlossen und beschränkt (kompakt)* sein müssen. Geht diese Eigenschaft verloren, dann sind die Niveaumengen keine positiv invarianten Mengen und daher keine geeigneten Abschätzungen für den Einzugsbereich mehr. Ein Beispiel dazu ist durch die Lyapunovfunktion

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} + x_2^2 \quad (3.23)$$

gegeben. Wie man aus Abbildung 3.5 erkennt, sind die Niveaumengen \mathcal{L}_c für kleine c kompakt. Dies folgt aber unmittelbar aus der Tatsache, dass $V(\mathbf{x})$ positiv definit ist.

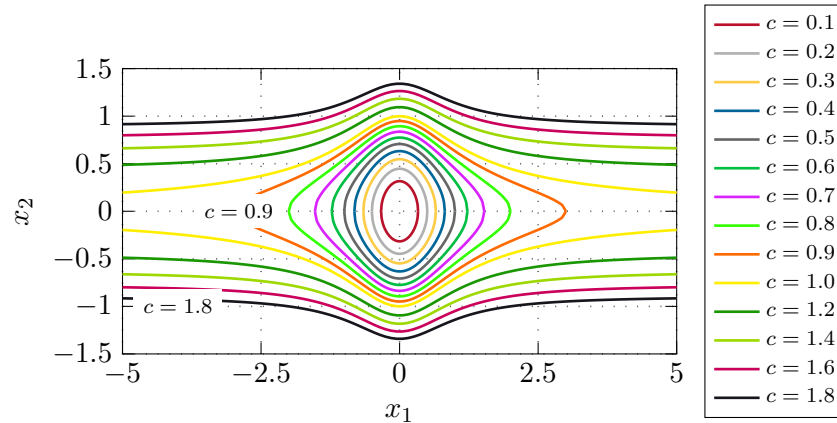


Abbildung 3.5: Zur Abgeschlossenheit von Niveaumengen.

Damit die Niveaumengen \mathcal{L}_c vollständig in einem Gebiet $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$ enthalten sind, muss die Bedingung $c < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) < \infty$ erfüllt sein, d. h., wenn gilt

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) < \infty, \quad (3.24)$$

dann sind die Niveaumengen \mathcal{L}_c für $c < l$ kompakt. Für die Lyapunovfunktion (3.23) folgt

$$\begin{aligned} l &= \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|\mathbf{x}\|=r} \left(\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} + x_2^2 \right) \\ &= \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

weshalb die Niveaumengen nur für $c < 1$ kompakt sind. Um nun sicher zu stellen, dass die Niveaumengen \mathcal{L}_c für alle $c > 0$ kompakt sind, wird die zusätzliche Forderung

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty \quad (3.26)$$

aufgestellt. Eine Funktion, die dieser Bedingung genügt, heißt *radial unbeschränkt*. Damit kann folgender Satz formuliert werden.

Satz 3.2 (Global asymptotische Stabilität). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.1). Existiert eine Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $V(\mathbf{x})$ positiv definit, $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativ definit und $V(\mathbf{x})$ radial unbeschränkt ist, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ global asymptotisch stabil.*

Auch hier sei für den exakten Beweis auf die Literatur verwiesen.

Als Beispiel betrachte man das dynamische System von Abbildung 3.6 mit $T_1, T_2 > 0$ und der Sättigungskennlinie

$$F(x_1) = \begin{cases} -1 & \text{für } x_1 \leq -1 \\ x_1 & \text{für } -1 < x_1 < 1 \\ 1 & \text{für } x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

bzw.

$$\frac{x_1}{F(x_1)} = \begin{cases} -x_1 & \text{für } x_1 \leq -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x_1 < 1 \\ x_1 & \text{für } x_1 \geq 1 \end{cases} . \quad (3.28)$$

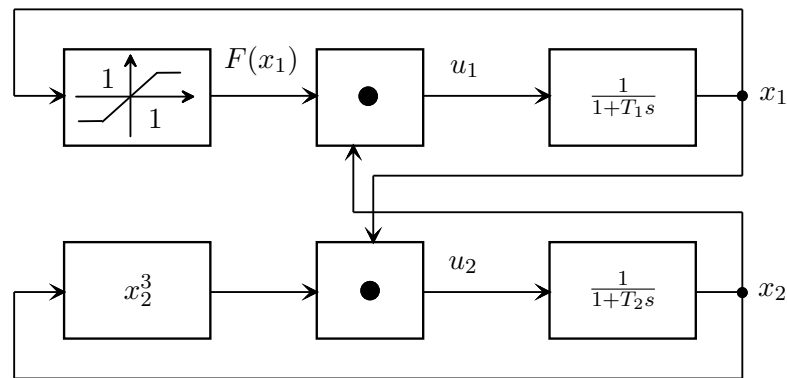


Abbildung 3.6: Blockschaltbild des untersuchten dynamischen Systems.

Das zugehörige mathematische Modell lautet

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} (F(x_1)x_2 - x_1) \quad (3.29a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} (x_2^3 x_1 - x_2) . \quad (3.29b)$$

Wählt man nun als Kandidaten für die Lyapunovfunktion

$$V(\mathbf{x}) = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2, \quad a, b \neq 0 , \quad (3.30)$$

dann ergibt sich für $\dot{V}(\mathbf{x})$ der Ausdruck

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1^2 \frac{2a^2}{T_1} \left(\frac{F(x_1)}{x_1} x_2 - 1 \right) + x_2^2 \frac{2b^2}{T_2} (x_2^2 x_1 - 1) . \quad (3.31)$$

Offensichtlich ist $\dot{V}(\mathbf{x})$ für

$$x_2 < \frac{x_1}{F(x_1)} \quad \text{und} \quad x_1 < \frac{1}{x_2^2} \quad (3.32)$$

negativ definit. Zur Abschätzung des Einzugsbereiches wird eine Niveaumenge $\mathcal{L}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid V(\mathbf{x}) \leq c\}$ gesucht, auf der $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativ definit ist. Dazu bestimmt man jene Ellipse $V(\mathbf{x}) = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 = (\sqrt{c})^2$, welche die Kennlinien (3.32) berührt. Der Berührungspunkt zwischen der Ellipse

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{c}/a)^2} + \frac{x_2^2}{(\sqrt{c}/b)^2} = 1 \quad (3.33)$$

und der Sättigungskennlinie $x_2 = \frac{x_1}{F(x_1)}$ liefert unmittelbar die Beziehung $\sqrt{c}/b = 1$. Zur Ermittlung des zweiten Berührungspunktes nützt man die Tatsache, dass am Berührungspunkt der beiden Kennlinien

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{c}/a)^2} + x_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{x_2^2} \quad (3.34)$$

die Steigungen

$$\frac{2x_1 dx_1}{(\sqrt{c}/a)^2} + 2x_2 dx_2 = 0 \quad \text{und} \quad dx_1 = \frac{-2 dx_2}{x_2^3} \quad (3.35)$$

bzw.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2(\sqrt{c}/a)^2} \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2^3}{2} \quad (3.36)$$

gleich sein müssen. Aus (3.34) und (3.36) folgt

$$\frac{-x_1}{(\sqrt{c}/a)^2} = \frac{-x_2^4}{2} \quad \text{und} \quad x_2^4 = \frac{1}{x_1^2} \quad (3.37)$$

und damit

$$x_1^3 = \frac{(\sqrt{c}/a)^2}{2}. \quad (3.38)$$

Setzt man (3.38) in (3.34) ein, dann erhält man als Ergebnis

$$\sqrt{c}/a = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.39)$$

Damit errechnet sich als eine Abschätzung des Einzugsbereiches das Innere der Ellipse

$$\frac{x_1^2}{\frac{27}{4}} + x_2^2 = 1. \quad (3.40)$$

Abbildung 3.7 zeigt die grafische Darstellung des Sachverhaltes.

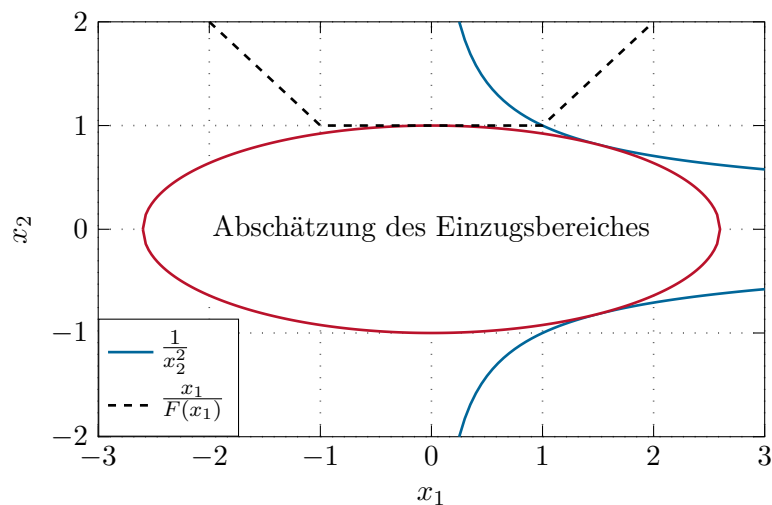


Abbildung 3.7: Zur Berechnung des Einzugsbereiches von Abbildung 3.6.

Aufgabe 3.8. Gegeben ist nachfolgendes dynamisches System

$$\dot{x}_1 = \frac{-6x_1}{u^2} + 2x_2, \quad u = 1 + x_1^2 \quad (3.41a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{u^2}. \quad (3.41b)$$

- (1) Berechnen Sie die Ruhelage(n) des Systems (3.41). Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt $V(\mathbf{x}) > 0$ und $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2. \quad (3.42)$$

- (2) Ist (Sind) die Ruhelage(n) stabil, asymptotisch stabil, global stabil bzw. global asymptotisch stabil?

Aufgabe 3.9. Gegeben ist nachfolgendes dynamisches System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3x_2 \quad (3.43a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2. \quad (3.43b)$$

- (1) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil ist.
 (2) Geben Sie eine möglichst große Abschätzung des Einzugsbereiches an.

3.1.5 Das Invarianz-Prinzip

In Erweiterung des Satzes 3.1 gibt es nun Systeme, deren Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil ist, obwohl die zeitliche Ableitung der Lyapunovfunktion $\dot{V}(\mathbf{x})$ nur negativ semidefinit ist. Als Beispiel betrachte man das einfache Feder-Masse-Dämpfer System von Abbildung 3.8 mit der Masse m , der linearen Dämpferkraft $F_d = d \frac{d}{dt} z$, $d > 0$, und der nichtlinearen Federkraft $F_c = \psi_F(z)$ für die gilt $k_1 z^2 \leq \psi_F(z) z \leq k_2 z^2$ mit $0 < k_1 < k_2$.

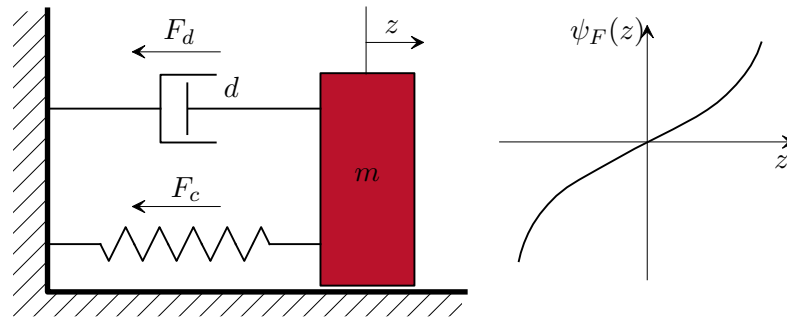


Abbildung 3.8: Einfaches mechanisches System.

Die Bewegungsgleichungen dazu lauten

$$\frac{d}{dt} z = v \quad (3.44a)$$

$$\frac{d}{dt} v = -\frac{1}{m}(\psi_F(z) + dv) \quad (3.44b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [z, v]$ und der einzigen Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Die im System gespeicherte kinetische und potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} m v^2 + \int_0^z \psi_F(w) dw \quad (3.45)$$

ist natürlich positiv definit und dient als geeigneter Kandidat für eine Lyapunovfunktion. Offensichtlich ist

$$\frac{d}{dt} V = m v \left(-\frac{1}{m}(\psi_F(z) + dv) \right) + \psi_F(z) v = -d v^2 \quad (3.46)$$

negativ semidefinit und man kann zufolge von Satz 3.1 schließen, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ stabil im Sinne von Lyapunov ist. D. h., die im System gespeicherte Energie V nimmt immer ab, außer für $v = 0$ bleibt sie gleich. Setzt man $v = 0$ in (3.44) ein, dann erkennt man, dass gilt $z = \bar{z}$ und $\frac{d}{dt} v = -\frac{1}{m} \psi_F(\bar{z})$ für ein konstantes \bar{z} . Aus der speziellen Form der Kennlinie $\psi_F(z)$ von Abbildung 3.8 folgt, dass $\frac{d}{dt} v$ nur für $\bar{z} = 0$ Null wird. Damit ist aber gezeigt, dass die im System gespeicherte Energie V solange abnehmen muss, bis der Punkt $z = v = 0$ erreicht ist, und dies zeigt die asymptotische Stabilität der Ruhelage.

Die mathematische Verallgemeinerung führt zum so genannten Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle. Bevor dieses genauer behandelt wird, sollte noch der Begriff einer

Grenzmengem erläutert werden. Ohne besondere Einschränkung der Allgemeinheit betrachte man dazu wiederum das autonome, glatte System n -ter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.47)$$

mit dem Fluss $\Phi_t(\mathbf{x})$ gemäß (3.1).

Definition 3.6 (Positiv invariante Menge). Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *positiv invariante Menge* des Systems (3.47), wenn das Bild der Menge M unter dem Fluss Φ_t die Menge M selbst ist, also $\Phi_t(M) \subseteq M$, für alle $t > 0$.

Einfache Beispiele einer positiv invarianten Menge sind die Menge $\{\mathbf{x}_R\}$ mit \mathbf{x}_R als Ruhelage, die Menge der Punkte eines Grenzyklus, etc.. Eine Menge M heißt *negativ invariante Menge* des Systems (3.47), wenn $\Phi_{-t}(M)$ positiv invariant ist. Ebenso von Interesse sind Punkte, denen eine Trajektorie beliebig oft, beliebig nahe kommt. Dazu folgende Definition:

Definition 3.7 (Grenzpunkt und Grenzmengem). Ein Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißt ω -Grenzpunkt von \mathbf{x} des Systems (3.47), wenn eine Folge (t_i) von reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, \infty)$ mit $t_i \rightarrow \infty$ so existiert, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \Phi_{t_i}(\mathbf{x})\| = 0 \quad (3.48)$$

gilt. Die Menge aller ω -Grenzpunkte von \mathbf{x} , die so genannte ω -Grenzmengem von \mathbf{x} , wird mit $L_\omega(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Äquivalent zu obiger Definition kann man Grenzpunkte und Grenzmengem für $t < 0$ betrachten. In diesem Fall werden die Bezeichnungen α -Grenzpunkt und α -Grenzmengem $L_\alpha(\mathbf{x})$ verwendet.

Definition 3.8 (Grenzyklus). Ein Grenzyklus von (3.47) ist eine geschlossene Trajektorie γ , die den Bedingungen $\gamma \subset L_\omega(\mathbf{x})$ oder $\gamma \subset L_\alpha(\mathbf{x})$ für gewisse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ genügt. Im ersten Fall bezeichnet man den Grenzyklus als ω -Grenzyklus und im zweiten Fall als α -Grenzyklus.

In Abbildung 3.9 werden die Begriffe Grenzmengem und Grenzyklus anhand einer schematischen Darstellung der Trajektorienschar des Van der Pol Oszillators veranschaulicht. Dabei beschreibt γ die eindeutige geschlossene Trajektorie, die für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ abgesehen vom Punkt \mathbf{x}_A , die ω -Grenzmengem $L_\omega(\mathbf{x})$ bildet, d. h., γ beschreibt einen ω -Grenzyklus. Weiters ist der Punkt \mathbf{x}_A die α -Grenzmengem $L_\alpha(\mathbf{x})$ für jeden Punkt \mathbf{x} im Inneren von γ . Liegt \mathbf{x} außerhalb von γ , dann ist $L_\alpha(\mathbf{x}) = \{\}$.

Mit diesen Begriffen ist es nun möglich, das Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle zu formulieren.

Satz 3.3 (Hilfssatz für das Invarianztheorem). Wenn die Lösung $\mathbf{x}(t) = \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ des Systems (3.1) für $t \geq 0$ beschränkt ist, dann ist die ω -Grenzmengem $L_\omega(\mathbf{x}_0)$ von \mathbf{x}_0 nach Definition 3.7 eine nichtleere, kompakte (beschränkte und abgeschlossene), positiv

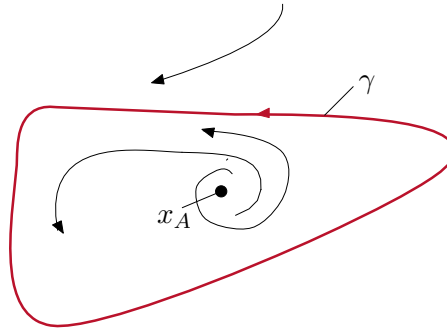


Abbildung 3.9: Grenzpunkte und Grenzmengen.

invariante Menge mit der Eigenschaft

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}_0) \in L_\omega(\mathbf{x}_0) . \quad (3.49)$$

Der Beweis dieses Satzes ist in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen.

Satz 3.4 (Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle). *Angenommen, \mathcal{X} ist eine kompakte, positiv invariante Menge und $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die auf \mathcal{X} der Bedingung $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ genügt. Die Menge \mathcal{Y} ist jene Teilmenge von \mathcal{X} , für die $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$. Bezeichnet man mit \mathcal{M} die größte positiv invariante Menge von \mathcal{Y} , dann gilt*

$$L_\omega(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M} . \quad (3.50)$$

Der Beweis dieses Satzes ist ebenfalls in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen. Wie man aus Satz 3.4 erkennt, muss $V(\mathbf{x})$ nicht positiv definit sein. Die Schwierigkeit hier liegt nun darin, die kompakte, positiv invariante Menge \mathcal{X} zu finden. Man weiß aber aus Abschnitt 3.1.4, dass die Niveaumenge einer positiv definiten Funktion $V(\mathbf{x})$ lokal kompakt und positiv invariant ist. Kann man darüber hinaus die radiale Unbeschränktheit nachweisen, dann gilt dies sogar global. Damit ist es möglich, nachfolgenden Satz als direkte Konsequenz von Satz 3.4 zu formulieren.

Satz 3.5 (Anwendung des Invarianztheorems). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.1) und $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Existiert eine Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $V(\mathbf{x})$ auf \mathcal{D} positiv definit und $\dot{V}(\mathbf{x})$ auf \mathcal{D} negativ semidefinit ist, dann ist der Punkt $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil, wenn die größte positiv invariante Teilmenge von $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ die Menge $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$ ist. Ist darüber hinaus $V(\mathbf{x})$ radial unbeschränkt, dann ist $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ global asymptotisch stabil.*

In Anlehnung an das Feder-Masse-Dämpfer System von Abbildung 3.8 wird das Beispiel

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.51a)$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) \quad (3.51b)$$

mit

$$g(0) = 0, \quad x_1 g(x_1) > 0 \quad \text{für } x_1 \neq 0, \quad x_1 \in (-a, a) \quad (3.52)$$

$$h(0) = 0, \quad x_2 h(x_2) > 0 \quad \text{für } x_2 \neq 0, \quad x_2 \in (-a, a) \quad (3.53)$$

untersucht. Weiters wird angenommen, dass $g(x_1)$ und $h(x_2)$ auf dem Intervall $(-a, a)$ stetig sind. Man kann sich einfach davon überzeugen, dass $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ in der Menge $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -a < x_1 < a, -a < x_2 < a\}$ die einzige Ruhelage ist. Als Kandidat für eine Lyapunovfunktion wird

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} g(x) dx + \frac{x_2^2}{2} \quad (3.54)$$

gewählt. Offensichtlich ist $V(\mathbf{x})$ auf \mathcal{D} positiv definit und für \dot{V} gilt

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_2h(x_2) \leq 0. \quad (3.55)$$

Die Menge $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ ergibt sich im vorliegenden Beispiel zu $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid x_1 \text{ beliebig und } x_2 = 0\}$. Damit die Lösungskurven für alle Zeiten $t \geq 0$ in \mathcal{Y} verbleiben, folgt unmittelbar, dass $x_1 = 0$ sein muss, d. h., die größte positiv invariante Teilmenge von \mathcal{Y} ist die Menge $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$, weshalb nach Satz 3.5 gezeigt ist, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3.10. Gegeben ist ein dynamisches System erster Ordnung

$$\dot{x}_1 = ax_1 + u \quad (3.56)$$

mit einem adaptiven Regelgesetz

$$\dot{x}_2 = \gamma x_1^2, \quad \gamma > 0 \quad (3.57a)$$

$$u = -x_2 x_1. \quad (3.57b)$$

Zeigen Sie mithilfe des Invarianzprinzips von Krassovskii-LaSalle, dass für den geschlossenen Kreis gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ unabhängig vom Streckenparameter a . Es sei lediglich bekannt, dass der Parameter a nach oben beschränkt ist, nämlich $a < b$.

Hinweis: Wählen Sie als Kandidat für die Lyapunovfunktion

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2, \quad b > a. \quad (3.58)$$

3.1.6 Lineare Systeme

Die Stabilitätsuntersuchung linearer Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.59)$$

kann an Hand der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} durchgeführt werden. Mittels einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ kann das System auf *Jordanform*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} \quad (3.60)$$

mit

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

transformiert werden. Ein Jordanblock \mathbf{J}_i hat dabei die Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_i \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (3.62)$$

für einen m -fachen reellen Eigenwert $\lambda_i = a_i$ der Matrix \mathbf{A} bzw.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A}_i & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_i \end{bmatrix}_{2m \times 2m}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

für einen m -fachen konjugiert komplexen Eigenwert $\lambda_i = a_i \pm jb_i$ der Matrix \mathbf{A} .

Aufgabe 3.11. Wie muss die Transformationsmatrix \mathbf{T} aussehen, damit man die Jordanform erhält.

Hinweis: Eigenvektoren

Für die Stabilität nach Lyapunov gilt nun folgender Satz:

Satz 3.6 (Stabilität linearer Systeme). Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.59) ist genau dann stabil im Sinne von Lyapunov, wenn für jeden Jordanblock \mathbf{J}_i von (3.60) gilt $a_i < 0$ oder $a_i \leq 0$ und $m = 1$. Gilt für jeden Jordanblock \mathbf{J}_i von (3.60), dass $a_i < 0$ ist, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil.

Aufgabe 3.12. Beweisen Sie Satz 3.6.

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden noch zwei Definitionen benötigt.

Definition 3.9 (Hurwitz-Matrix). Eine $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} heißt *Hurwitz-Matrix*, wenn für alle Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} gilt, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Definition 3.10 (Positiv definite Matrix). Eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{P} heißt *positiv definit*, wenn gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. Im Falle von $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \geq 0$ nennt man \mathbf{P} *positiv semidefinit*.

Aufgabe 3.13. Wo liegen die Eigenwerte einer positiv (semi)definiten Matrix? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Wählt man nun als Kandidaten für eine Lyapunovfunktion von (3.59)

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.64)$$

mit einer positiv definiten Matrix \mathbf{P} , so folgt für \dot{V}

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.65)$$

mit einer quadratischen Matrix \mathbf{Q} , die der Beziehung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

genügt. Man nennt (3.66) auch *Lyapunov-Gleichung*.

Aufgabe 3.14. Zeigen Sie, dass die Lyapunov-Gleichung (3.66) eine lineare Gleichung in den Elementen p_{ij} von \mathbf{P} ist.

Ist die Matrix \mathbf{Q} positiv definit, dann folgt aus Satz 3.1, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil und folglich \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix ist. D. h., zu einer gegebenen positiv definiten Matrix \mathbf{P} wird für das System (3.59) die Matrix \mathbf{Q} berechnet und auf positive Definitheit untersucht. Bei linearen Systemen lässt sich diese Vorgangsweise umkehren. Man gibt ein positiv definites \mathbf{Q} vor und berechnet dazu \mathbf{P} . Dazu der nachstehende Satz:

Satz 3.7 (Lyapunov-Gleichung). Die Matrix \mathbf{A} ist genau dann eine Hurwitz-Matrix, wenn die Lyapunov-Gleichung (3.66) für jedes positiv definite \mathbf{Q} eine positiv definite Lösung \mathbf{P} besitzt. In diesem Fall ist \mathbf{P} eindeutig bestimmt.

Beweis. (\Leftarrow): Folgt trivialerweise aus Satz 3.1. (\Rightarrow): Wenn \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix ist, dann ist die Existenz des Integrals

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (3.67)$$

garantiert. Ist darüber hinaus \mathbf{Q} positiv definit, dann muss dies auch für \mathbf{P} gelten, denn aus

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0 \quad (3.68)$$

folgt

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\mathbf{x}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}}_{>0} dt = 0. \quad (3.69)$$

Da \mathbf{Q} positiv definit ist, muss $e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ sein und wegen der Regularität der Transitionsmatrix gilt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Rechnung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} &= \int_0^{\infty} \mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt + \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{A} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t}) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} - \mathbf{Q} \\ &= -\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.70)$$

zeigt, dass \mathbf{P} von (3.67) tatsächlich eine Lösung der Lyapunov-Gleichung (3.66) ist. Verbleibt noch die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Angenommen, \mathbf{P}_0 ist eine weitere Lösung der Lyapunov-Gleichung (3.66). Für die zeitliche Änderung des Ausdrucks

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \mathbf{X} \quad (3.71)$$

mit \mathbf{X} als Lösung der Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (3.72)$$

folgt

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \left(\underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}}_{-\mathbf{Q}} - \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{A})}_{-\mathbf{Q}} \right) \mathbf{X} = \mathbf{0} . \quad (3.73)$$

Damit ist also $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ konstant entlang einer Trajektorie von (3.59). Aus

$$\mathbf{F}(e^{\mathbf{A}t}) = e^{\mathbf{A}^T t} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) e^{\mathbf{A}t} \quad (3.74)$$

erhält man dann mit

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{F}(e^{\mathbf{A}t}) &= \mathbf{F}(\mathbf{E}) \\ &= (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{F}(e^{\mathbf{A}t}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.75)$$

die Eindeutigkeit der Lösung von (3.66). \square

Aufgabe 3.15. Gegeben sind zwei identische lineare Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.76a)$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i . \quad (3.76b)$$

Überprüfen Sie die Stabilität der Ruhelage, wenn die beiden Systeme in Serie bzw. parallel geschaltet werden. Geben Sie eine physikalische Interpretation der Ergebnisse an, wenn Sie das System (3.76) als ungedämpften Feder-Masse-Schwinger betrachten.

Aufgabe 3.16. Gegeben ist das lineare autonome zeitinvariante Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} . \quad (3.77)$$

Zeigen Sie, dass die Existenz einer positiv definiten Lösung $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Ungleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < \mathbf{0} \quad (3.78)$$

hinreichend dafür ist, dass mit $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ eine Lyapunovfunktion für (3.77) gegeben ist.

Aufgabe 3.17. Das lineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (3.79b)$$

sei vollständig beobachtbar. Zeigen Sie, dass \mathbf{A} genau dann eine Hurwitz-Matrix ist, wenn die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} \quad (3.80)$$

für ein positiv definites \mathbf{P} erfüllt ist. Zeigen Sie weiters, dass in diesem Fall die Lösung für \mathbf{P} eindeutig ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle und die Tatsache, dass für das beobachtbare Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) gilt, $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ für alle $t \geq 0$ dann und nur dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ für alle $t \geq 0$.

3.1.7 Indirekte (Erste) Methode von Lyapunov

Neben der im Abschnitt 3.1.3 besprochenen zweiten Methode von Lyapunov, die im Wesentlichen auf der Konstruktion einer Lyapunovfunktion beruht, besteht auch die Möglichkeit, den Stabilitätscharakter einer Ruhelage an Hand des um diese Ruhelage linearisierten Systems zu beurteilen. Dazu betrachte man wiederum das nichtlineare autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.81)$$

mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Unter der Voraussetzung, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ auf einer offenen Umgebung \mathcal{D} von $\mathbf{0}$ stetig differenzierbar ist, lässt sich $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \quad (3.82)$$

schreiben. Es gilt dann nachfolgender Satz:

Satz 3.8 (Indirekte (erste) Methode von Lyapunov). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.81) und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sei auf einer offenen Umgebung $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{0}$ stetig differenzierbar. Mit*

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (3.83)$$

gilt nun:

- (1) *Haben **alle** Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} einen Realteil kleiner Null, also $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil.*
- (2) *Genügt **ein** Eigenwert λ_i von \mathbf{A} der Bedingung $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, dann ist der Ursprung instabil.*
- (3) *Bei Eigenwerten λ_i von \mathbf{A} mit $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ ist keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems möglich.*

Beweis. Zum Beweis des ersten Teils dieses Satzes wird die Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.84)$$

mit positiv definitem \mathbf{P} als Kandidat für eine Lyapunovfunktion herangezogen. Für \dot{V} folgt wegen (3.82)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x})) + (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}))^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{r}(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (3.85)$$

Da \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix ist, hat die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.86)$$

für jedes positiv definite \mathbf{Q} eine positiv definite Lösung \mathbf{P} . Weiters wurde vorausgesetzt, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar ist, und deshalb existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 < \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2, \quad \|\mathbf{x}\|_2 < \delta . \quad (3.87)$$

Für eine positiv definite Matrix \mathbf{P} gilt für die induzierte 2er-Norm die Abschätzung (vergleiche dazu (2.55))

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \leq \|\mathbf{P}\|_{i,2} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \quad (3.88)$$

mit $\lambda_{\min}(\mathbf{P}) > 0$ bzw. $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) > 0$ als den kleinsten bzw. größten Eigenwert von \mathbf{P} . Damit folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung (2.82) und (3.87) sowie (3.88) die Abschätzung

$$\left| \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \right| \leq \|\mathbf{P} \mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \leq \underbrace{\|\mathbf{P}\|_{i,2}}_{< \varepsilon \|\mathbf{x}\|_2} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3.89)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ &\leq (-\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + 2\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{P})) \|\mathbf{x}\|_2^2 , \end{aligned} \quad (3.90)$$

und \dot{V} ist für

$$\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \quad (3.91)$$

sicher negativ definit. Dies beweist aber nach Satz 3.1 die asymptotische Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. Der Beweis des zweiten Teiles von Satz 3.8 wird hier nicht ausgeführt, kann aber in der entsprechenden Literatur nachgelesen werden. \square

Aufgabe 3.18. Suchen Sie in der am Ende angeführten Literatur nach Instabilitätssätzen von Lyapunov und wenden Sie diese für den Beweis des zweiten Teiles von Satz 3.8 an.

Besitzt das linearisierte System Eigenwerte λ_i mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, dann erlaubt die indirekte Methode keine Aussage. Man betrachte dazu das nichtlineare Eingrößensystem

$$\dot{x} = ax^3 \quad (3.92)$$

mit dem um die Ruhelage $x_R = 0$ linearisierten System

$$\dot{x} = 0. \quad (3.93)$$

Als Kandidaten für eine Lyapunovfunktion wählt man

$$V(x) = x^4 \quad (3.94)$$

und man erhält für \dot{V}

$$\dot{V}(x) = 4ax^6. \quad (3.95)$$

Man überzeugt sich leicht, dass der Ursprung im Falle von $a < 0$ asymptotisch stabil, aber für $a > 0$ instabil ist. Für $a = 0$ ist das System linear und besitzt unendlich viele Ruhelagen.

Aufgabe 3.19. Untersuchen Sie für die Systeme (3.9), (3.29), (3.41) und (3.43) die Stabilität der Ruhelage(n) mithilfe der indirekten Methode von Lyapunov.

3.2 Nichtautonome Systeme

Den folgenden Betrachtungen liegt das nichtautonome nichtlineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (3.96)$$

mit $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig in t und lokal Lipschitz in \mathbf{x} auf $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, zu Grunde (vergleiche Satz 2.13). Die bei der Trajektorienfolgeregelung nichtlinearer Systeme auftretenden Fehlersysteme weisen typischerweise die Struktur von (3.96) auf. Man nennt $\mathbf{x}_R \in \mathcal{D}$ eine Ruhelage von (3.96) für $t = t_0$, wenn für alle Zeiten $t \geq t_0 \geq 0$ die Beziehung

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_R) = \mathbf{0} \quad (3.97)$$

erfüllt ist, wobei \mathbf{x}_R von der Zeit t unabhängig sein muss. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass eine Ruhelage mit $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für $t_0 = 0$ gegeben ist.

Aufgabe 3.20. Zeigen Sie, dass man für $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$, $t_0 \neq 0$ durch eine einfache Koordinaten- und Zeittransformation immer erreichen kann, dass in den neuen Koordinaten die Ruhelage $\tilde{\mathbf{x}}_R = \mathbf{0}$ für $\tilde{t} = 0$ ist.

Im Folgenden soll kurz gezeigt werden, dass die Ruhelage eines nichtautonomen Systems (3.96) auch die transformierte nichttriviale Lösung eines autonomen Systems sein kann. Dies hat den Vorteil, dass man die Untersuchung der Stabilität einer Lösungstrajektorie auf die Stabilität einer Ruhelage eines nichtautonomen Systems zurückführen kann. Man betrachte dazu das autonome System

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) , \quad (3.98)$$

wobei $\bar{\mathbf{y}}(\tau)$ eine Lösung von (3.98) für $\tau \geq \tau_0 \geq 0$ bezeichnet. Führt man nun eine Koordinaten- und Zeittransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(\tau)$ und $t = \tau - \tau_0$ durch, so erhält man das transformierte System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t + \tau_0) - \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}}(t + \tau_0) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}(t + \tau_0)) - \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}}(t + \tau_0) \\ &:= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (3.99)$$

Da $\bar{\mathbf{y}}(\tau)$ eine Lösung von (3.98) für $\tau \geq \tau_0 \geq 0$ ist, gilt

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}(\tau)), \quad \tau \geq \tau_0 \geq 0 \quad (3.100)$$

bzw. in der transformierten Zeit t

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}}(t + \tau_0) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}(t + \tau_0)), \quad t \geq 0 . \quad (3.101)$$

Aus (3.99) und (3.101) ist unmittelbar einsichtig, dass $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für $t_0 = 0$ eine Ruhelage des transformierten Systems $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ darstellt.

Die Definition der Lyapunov Stabilität gemäß Definition 3.3 lässt sich nun auch auf nichtautonome Systeme übertragen, doch muss hier zusätzlich die Abhängigkeit des Systemverhaltens vom Anfangszeitpunkt t_0 explizit berücksichtigt werden.

Definition 3.11 (Lyapunov-Stabilität nichtautonomer Systeme). Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.96) heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ so existiert, dass

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad (3.102)$$

für alle $t \geq t_0 \geq 0$ gilt,

- *gleichmäßig stabil*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ (unabhängig von t_0) so existiert, dass (3.102) für alle $t \geq t_0 \geq 0$ erfüllt ist,
- *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und eine positive reelle Zahl $\eta(t_0)$ so existiert, dass aus

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta(t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} , \quad (3.103)$$

- *gleichmäßig asymptotisch stabil*, wenn sie gleichmäßig stabil ist, eine positive reelle Zahl η (unabhängig von t_0) so existiert, dass (3.103) für alle $t \geq t_0 \geq 0$ erfüllt ist und man für jedes $\mu > 0$ ein $T(\mu) > 0$ so finden kann, dass

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t)\| < \mu \quad \text{für alle } t \geq t_0 + T(\mu) \quad (3.104)$$

gilt.

Für nichtautonome Systeme der Form (3.96) lässt sich nun in Analogie zu Satz 3.1 folgender Satz zur Überprüfung der gleichmäßigen Stabilität angeben:

Satz 3.9 (Gleichmäßige Stabilität nichtautonomer Systeme). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.96) für $t = 0$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Existiert eine stetig differenzierbare Funktion $V(t, \mathbf{x}) : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und auf \mathcal{D} stetige positiv definite Funktionen $W_1(\mathbf{x})$ und $W_2(\mathbf{x})$ so, dass gilt*

$$W_1(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x}) \quad (3.105a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V \right) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.105b)$$

für alle $t \geq 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ gleichmäßig stabil. Findet man darüber hinaus eine auf \mathcal{D} stetige positiv definite Funktion $W_3(\mathbf{x})$ so, dass (3.105b) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V \right) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}) < 0 \quad (3.106)$$

für alle $t \geq 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ abgeschätzt werden kann, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ gleichmäßig asymptotisch stabil.

Der Beweis dieses Satzes ist in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen.

Aufgabe 3.21. Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - g(t)x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

mit der stetig differenzierbaren Zeitfunktion $g(t)$, $0 \leq g(t) \leq k$ und $\frac{d}{dt}g(t) \leq g(t)$ für alle $t \geq 0$ gleichmäßig asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3.22. Gegeben ist das folgende mathematische Modell (mathematisches Pendel mit zeitveränderlicher Dämpfung)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - g(t)x_2 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

mit der stetig differenzierbaren Zeitfunktion $g(t)$, $0 < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty$ und $\frac{d}{dt}g(t) \leq \gamma < 2$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ gleichmäßig asymptotisch stabil ist.

Neben der gleichmäßigen Stabilität spielt auch die so genannte exponentielle Stabilität eine wesentliche Rolle bei der Analyse nichtautonomer Systeme.

Definition 3.12 (Exponentielle Stabilität nichtautonomer Systeme). Die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ von (3.96) heißt *exponentiell stabil*, wenn positive Konstanten k_1 , k_2 und k_3 so existieren, dass gilt

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < k_3 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t)\| < k_1 \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-k_2(t-t_0)}. \quad (3.109)$$

Die Überprüfung der exponentiellen Stabilität kann dabei anhand des folgenden Theorems erfolgen.

Satz 3.10 (Exponentielle Stabilität nichtautonomer Systeme). *Es sei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage von (3.96) für $t = 0$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Existiert eine stetig differenzierbare Funktion $V(t, \mathbf{x}) : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und positive Konstanten α_j , $j = 1, \dots, 4$, so, dass gilt*

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}(t)\|^{\alpha_4} \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}(t)\|^{\alpha_4} \quad (3.110a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V \right) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}(t)\|^{\alpha_4} \quad (3.110b)$$

für alle $t \geq 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ exponentiell stabil.

Beweis. Aus den beiden Ungleichungen (3.110) erkennt man, dass gilt

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}(t)\|^{\alpha_4} \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(t, \mathbf{x}) \quad (3.111)$$

und damit

$$V(t, \mathbf{x}) \leq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}(t-t_0)}. \quad (3.112)$$

Im Weiteren folgt aus (3.110a)

$$V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}(t_0)\|^{\alpha_4} \quad (3.113)$$

und

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\frac{V(t, \mathbf{x})}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}}, \quad (3.114)$$

weshalb mit (3.112) folgende Abschätzung

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\frac{V(t, \mathbf{x})}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}} \leq \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}} \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4}(t-t_0)} \quad (3.115)$$

angegeben werden kann. Dies zeigt unmittelbar die exponentielle Stabilität gemäß Definition 3.12 für $k_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}}$ und $k_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4}$. \square

Aufgabe 3.23. Gegeben ist das folgende mathematische Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t)x_2 - g(t)x_1^3 \\ -h(t)x_1 - g(t)x_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

mit den stetig differenzierbaren und beschränkten Zeitfunktionen $h(t)$ und $g(t)$, $g(t) \geq k > 0$ für alle $t \geq 0$. Ist die Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ gleichmäßig asymptotisch stabil? Ist die Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ exponentiell stabil?

Aufgabe 3.24. Gegeben ist das folgende mathematische Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \sin(t) \\ -x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos(t) \end{bmatrix}. \quad (3.117)$$

Zeigen Sie, dass die Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ exponentiell stabil ist.

3.2.1 Lineare Systeme

Auch die Stabilitätsuntersuchung linearer zeitvarianter Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (3.118)$$

ist wesentlich schwieriger verglichen zum zeitinvarianten Fall gemäß (3.59).

Beispiel 3.1. Man betrachte dazu das System (3.118) mit der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5(\cos(t))^2 & 1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) \\ -1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) & -1 + 1.5(\sin(t))^2 \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

In diesem Fall sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -1/4 \pm I\sqrt{7}/4$ von $\mathbf{A}(t)$ für alle Zeiten t konstant und haben negativen Realteil und trotzdem ist die Ruhelage instabil wie eine Berechnung der Lösung für $t_0 = 0$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{t/2} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ -e^{t/2} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \quad (3.120)$$

zeigt. Zur Erinnerung sei an dieser Stelle erwähnt, dass bei der Linearisierung von nichtlinearen (autonomen) Systemen um eine Solltrajektorie im Allgemeinen lineare zeitvariante Systeme auftreten.

Die Stabilitätsuntersuchung der Ruhelage kann beispielsweise mithilfe von Satz 3.9 erfolgen. Dazu wählt man eine geeignete Lyapunovfunktion der Form

$$V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}, \quad 0 < \alpha_1 \mathbf{E} \leq \mathbf{P}(t) \leq \alpha_2 \mathbf{E} \quad (3.121)$$

mit der stetig differenzierbaren, beschränkten und symmetrischen Matrix $\mathbf{P}(t)$ sowie den positiven Konstanten α_1 und α_2 . Die Lyapunovfunktion genügt somit den Ungleichungen

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (3.122)$$

Erfüllt nun $\mathbf{P}(t)$ die Matrixdifferenzialgleichung

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (3.123)$$

für eine stetige, beschränkte und symmetrische Matrix $\mathbf{Q}(t)$, für die gilt

$$0 < \alpha_3 \mathbf{E} \leq \mathbf{Q}(t) , \quad (3.124)$$

dann folgt für die Änderung von $V(t, \mathbf{x})$ entlang einer Lösungskurve von (3.118)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) \right) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} \\ &\leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|_2^2 < 0 . \end{aligned} \quad (3.125)$$

Aus (3.122) und (3.125) erkennt man unmittelbar, dass damit auch die exponentielle Stabilität nach Satz 3.10 für $\alpha_4 = 2$ gezeigt wird. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass bei linearen zeitvarianten Systemen gleichmäßige asymptotische Stabilität und exponentielle Stabilität äquivalent sind.

Für die Analyse linearer zeitvarianter periodischer Systeme der Form (3.118) mit $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$ findet man in der Literatur eine ausführliche Theorie, siehe beispielsweise *Floquet-Theorie*. An dieser Stelle wird auf eine weitere Ausführung zu diesem Thema verzichtet, doch wird im Folgenden noch eine nützliche Abschätzung für die Trajektorien linearer zeitvarianter Systeme angegeben.

Satz 3.11 (Ungleichung von Vazevski). *Eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ des linearen zeitvarianten Systems (3.118) mit der reellwertigen Dynamikmatrix $\mathbf{A}(t)$ genügt der folgenden Ungleichung*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau\right) \leq \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \exp\left(\int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau\right) , \quad (3.126)$$

wobei $\lambda(t)$ und $\Lambda(t)$ den kleinsten und größten Eigenwert des symmetrischen Anteils der Matrix $\mathbf{A}(t)$

$$\mathbf{A}_s(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \right) \quad (3.127)$$

bezeichnen.

Beweis. Für feste Zeit t gilt zufolge von (2.64) die Beziehung

$$\lambda(t)\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}_s(t)\mathbf{x}(t) \leq \Lambda(t)\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \quad (3.128)$$

und durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 &= \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left(\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\right)\mathbf{x}(t) \\ &= 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}_s(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.129)$$

erhält man

$$2\lambda(t)\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq \frac{d}{dt}\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq 2\Lambda(t)\|\mathbf{x}(t)\|_2^2. \quad (3.130)$$

Betrachtet man nun im ersten Schritt nur den linken Teil der Ungleichung (3.130), so folgt unmittelbar das Ergebnis gemäß (3.126)

$$2\lambda(t)\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq 2\|\mathbf{x}(t)\|_2 \frac{d(\|\mathbf{x}(t)\|_2)}{dt} \quad (3.131a)$$

$$\lambda(t) dt \leq \frac{d(\|\mathbf{x}(t)\|_2)}{\|\mathbf{x}(t)\|_2} \quad (3.131b)$$

$$\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \leq \ln\left(\frac{\|\mathbf{x}(t)\|_2}{\|\mathbf{x}(t_0)\|_2}\right) \quad (3.131c)$$

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau\right) \leq \|\mathbf{x}(t)\|_2. \quad (3.131d)$$

□

Aufgabe 3.25. Zeigen Sie auf gleiche Art und Weise den rechten Teil der Ungleichung (3.130).

Zieht man als Beispiel nochmals das System (3.118) mit der Dynamikmatrix (3.119) heran, dann errechnet sich der symmetrische Anteil der Dynamikmatrix zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s(t) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 1.5(\cos(t))^2 & -1.5 \sin(t) \cos(t) \\ -1.5 \sin(t) \cos(t) & -1 + 1.5(\sin(t))^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.132)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_{s1} = 1/2$ und $\lambda_{s2} = -1$. Nach Satz 3.11 erfüllt demnach eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_2 e^{-(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_2 e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}. \quad (3.133)$$

3.2.2 Lyapunov-ähnliche Theorie: Barbalat's Lemma

Neben der Lyapunov-Theorie für nichtautonome nichtlineare Systeme der Form (3.96), wie sie im vorigen Abschnitt behandelt wurde, findet man in der Literatur in diesem Zusammenhang häufig einen Lyapunov-ähnlichen Zugang über das so genannte *Lemma von Barbalat*, welches auf den mathematischen Eigenschaften des asymptotischen Verhaltens von Funktionen und deren Ableitungen beruht. Dazu sollen im ersten Schritt einige asymptotische Eigenschaften von Funktionen und deren Ableitungen diskutiert werden. Für eine nach der Zeit t differenzierbare Funktion $f(t)$ gilt:

- (1) Aus $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$ folgt nicht $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$ mit $|c| < \infty$.

Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(t) = \ln(t)$. Es gilt zwar für die Ableitung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = \frac{1}{t} = 0, \quad (3.134)$$

aber die Funktion selbst geht für $t \rightarrow \infty$ selbst gegen ∞ .

- (2) Aus $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$ mit $|c| < \infty$ folgt nicht $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$.

Als Beispiel wähle man die Funktion $f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$, für die gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, aber

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 \cos(e^{2t}) e^t - e^{-t} \sin(e^{2t}) \right) \quad (3.135)$$

ist nicht definiert.

- (3) $f(t)$ ist nach unten hin beschränkt und nicht zunehmend ($\dot{f}(t) \leq 0$), dann folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$ mit $|c| < \infty$.

Das Lemma von Barbalat klärt nun, unter welchen Voraussetzungen die Ableitung $\dot{f}(t)$ einer beschränkten Funktion für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Satz 3.12 (Barbalat's Lemma). Wenn für die differenzierbare Funktion $f(t)$ gilt, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$ mit $|c| < \infty$ und $\dot{f}(t)$ ist gleichmäßig stetig, dann folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$.

Bevor gezeigt wird, wie dieser Satz zur Stabilitätsuntersuchung herangezogen wird, soll im Folgenden noch kurz der Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit* einer Funktion $f(t)$ wiederholt werden.

Definition 3.13 ($\epsilon\delta$ -Stetigkeit). Eine Funktion $f(t)$ ist genau dann im Punkt t_1 stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon, t_1) > 0$ so gibt, dass gilt

$$|t - t_1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_1)| < \epsilon . \quad (3.136)$$

Eine Funktion $f(t)$ heißt genau dann *gleichmäßig stetig*, falls ein δ immer so gefunden werden kann, dass es unabhängig von t_1 ist.

Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(t) = t^2$. Man gibt nun ein $\epsilon > 0$ vor und bestimme ein δ so, dass gilt

$$|t^2 - t_1^2| < \epsilon \quad \text{oder} \quad |t - t_1||t + t_1| < \epsilon, \quad |t - t_1| < \delta . \quad (3.137)$$

Aus (3.137) erkennt man, dass für $t > t_1 > 0$ zu jedem ϵ immer ein δ so gefunden werden kann, dass gilt

$$0 < t - t_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad (t - t_1)(t + t_1) < \epsilon . \quad (3.138)$$

Ersetzt man in (3.138) t durch $t_n = t_1 + \delta - \frac{\delta}{n}$ und lässt $n \rightarrow \infty$ gehen, dann folgt

$$\delta(2t_1 + \delta) < \epsilon \quad (3.139)$$

bzw. erst recht

$$\delta < \frac{\epsilon}{2t_1} . \quad (3.140)$$

Man erkennt also, dass mit wachsendem t_1 bei gleichbleibendem ϵ die Zahl δ immer kleiner wird und somit kein kleinstes δ angegeben werden kann, das für alle t_1 richtig wäre. Damit ist die Funktion $f(t) = t^2$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Im Gegensatz dazu gilt für die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ unter der Voraussetzung $t > t_1 > 0$

$$|\sqrt{t} - \sqrt{t_1}| < \sqrt{|t - t_1|} < \epsilon , \quad (3.141)$$

und mit der Wahl $\delta = \epsilon^2$ folgt sofort die *gleichmäßige Stetigkeit*, also

$$|t - t_1| < \delta , \quad (3.142a)$$

$$\sqrt{|t - t_1|} < \epsilon , \quad (3.142b)$$

$$|\sqrt{t} - \sqrt{t_1}| < \epsilon . \quad (3.142c)$$

Aufgabe 3.26. Beweisen Sie die letzte Folgerung in (3.142).

Wie man sieht, ist die Überprüfung der gleichmäßigen Stetigkeit auf diese Art und Weise recht schwierig. Deshalb verwendet man oft ein *hinreichendes Kriterium* folgender Form:

Satz 3.13 (Hinreichende Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit). Eine differenzierbare Funktion $f(t)$ ist dann gleichmäßig stetig, wenn die Ableitung $\frac{d}{dt}f(t)$ beschränkt ist.

Aus dem Lemma von Barbalat folgt nun unmittelbar folgender Satz zur Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer, nichtautonomer Systeme der Form (3.96).

Satz 3.14 (Lyapunov-ähnliche Methode). Wenn eine skalare Funktion $V(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Bedingungen

- (1) $V(t, \mathbf{x})$ ist nach unten hin beschränkt,
- (2) $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ und
- (3) $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ ist gleichmäßig stetig in der Zeit t

erfüllt, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t, \mathbf{x}) = 0$.

Als Anwendungsbeispiel betrachte man folgende regelungstechnische Aufgabe: Eine Masse m , die reibungsfrei auf einer horizontalen Oberfläche gleitet, soll mithilfe der Kraft F positioniert werden. Das zugehörige Differentialgleichungssystem lautet

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = F . \quad (3.143)$$

Angenommen, die Sollposition $r_{soll}(t)$ wird durch eine Person über einen Steuerknüppel vorgegeben, dann besteht die einfache Möglichkeit, dieses externe Signal über ein Referenzmodell der Form

$$\ddot{x}_{soll} + a_1 \dot{x}_{soll} + a_0 x_{soll} = a_0 r_{soll}, \quad G(s) = \frac{\hat{x}_{soll}}{\hat{r}_{soll}} = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.144)$$

für geeignete Parameter a_1 und a_0 in ein zweifach stetig differenzierbares Führungssignal $x_{soll}(t)$ umzuwandeln. Die Parameter a_1 und a_0 werden dabei so gewählt, dass das Referenzmodell mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ stabil ist und die Performancevorgaben eingehalten werden. Nun führt das einfache Regelgesetz

$$F(t) = m \left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right), \quad e = x - x_{soll} \quad (3.145)$$

für $\lambda > 0$ zu einem asymptotisch stabilen geschlossenen Kreis mit der Fehlerdynamik

$$\ddot{e} + 2\lambda \dot{e} + \lambda^2 e = 0 . \quad (3.146)$$

Für das Weitere sei angenommen, dass die Masse m zwar konstant, aber nicht genau bekannt ist, d. h. man kennt lediglich den Schätzwert \hat{m} . Setzt man nun für m den Schätzwert \hat{m} in das Regelgesetz (3.145) ein, dann erhält man für den geschlossenen Kreis

$$m \ddot{x} = \hat{m} \left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right) \quad (3.147)$$

bzw.

$$m \ddot{x} - m \left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right) = \hat{m} \left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right) - m \left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right) \quad (3.148)$$

und durch Einführen eines verallgemeinerten Regelfehlers $s = \dot{e} + \lambda e$ ergibt sich

$$m \frac{d}{dt} s + m \lambda s = e_m \underbrace{\left(\ddot{x}_{soll} - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 e \right)}_{w(t)} \quad (3.149)$$

mit dem Parameterfehler $e_m = \hat{m} - m$.

Das *adaptive Regelgesetz*

$$\frac{d}{dt} \hat{m} = -\gamma w s, \quad \gamma > 0 \quad (3.150)$$

garantiert, dass der verallgemeinerte Regelfehler asymptotisch gegen Null konvergiert. Zum Beweis setzte man die nach unten hin beschränkte Funktion

$$V(s, e_m) = \frac{1}{2} \left(m s^2 + \frac{1}{\gamma} e_m^2 \right) \quad (3.151)$$

an und berechne deren zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V &= m s \left(-\lambda s + \frac{1}{m} e_m w \right) + \frac{1}{\gamma} e_m (-\gamma w s) \\ &= -\lambda m s^2 \leq 0 . \end{aligned} \quad (3.152)$$

Da nun V in s und e_m positiv definit und \dot{V} negativ semidefinit ist, sind die Funktion s und e_m beschränkt. Leitet man nun \dot{V} nochmals zeitlich ab, dann erhält man

$$\ddot{V} = -2\lambda m s \left(-\lambda s + \frac{1}{m} e_m w \right) , \quad (3.153)$$

und diese Funktion ist wegen der beschränkten Größen s und e_m und der Vorgabe von beschränkten Führungssignalen $r_{soll}(t)$ (damit ist auch $w(t)$ beschränkt) ebenfalls beschränkt. Zuzufolge von Satz 3.13 ist somit \dot{V} gleichmäßig stetig, das Lemma von Barbalat (Satz 3.14) kann angewandt werden und man erhält

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda m s^2 = 0 \quad (3.154)$$

also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0 . \quad (3.155)$$

3.3 Literatur

- [3.1] B. P. Demidovich, *Vorlesung zur Mathematischen Stabilitätstheorie*. Moskau: Verlag der Moskau Universität, 1998.
- [3.2] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelung I + II*. München: Oldenbourg, 1993.
- [3.3] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [3.4] E. Slotine und W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [3.5] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.