

## 4 Singuläre Störtheorie

Es gibt viele (nichtlineare) dynamische Systeme, die sich aus einem *langsamen* und einem *schnellen Teilsystem* zusammensetzen. In diesem Kapitel sollen solche Systeme genauer analysiert werden und es soll geklärt werden, unter welchen Voraussetzungen das schnelle Teilsystem durch die zugehörige *quasi-stationäre Lösung* approximiert werden kann.

### 4.1 Grundidee

In Zustandsdarstellung lässt sich ein System bestehend aus einem schnellen und einem langsamen Teilsystem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \quad (4.1a)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \quad (4.1b)$$

mit dem kleinen positiven *Störparameter*  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , der Zeit  $t \in [t_0, t_1]$  und dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{z} \in \mathcal{D}_z \subset \mathbb{R}^m$  anschreiben. Im Weiteren wird angenommen, dass  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$  bezüglich sämtlicher Argumente  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon)$  stetig differenzierbar sind. Setzt man nun in (4.1)  $\varepsilon = 0$ , dann degeneriert das Differenzialgleichungssystem (4.1b) zu einem *System algebraischer Gleichungen* der Form

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}_r, \mathbf{z}_r, 0) . \quad (4.2)$$

Unter der Voraussetzung, dass das nichtlineare Gleichungssystem (4.2)  $k \geq 1$  *isolierte reelle Wurzeln* der Form

$$\mathbf{z}_r = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r) \quad (4.3)$$

für jedes  $(t, \mathbf{x}_r) \in [0, t_1] \times \mathcal{D}_x$  besitzt, kann zu jeder Wurzel ein wohldefiniertes  $n$ -dimensionales *reduziertes mathematisches Modell* der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}_r, \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r), 0) \quad (4.4)$$

berechnet werden. In diesem Fall sagt man, dass (4.1) in der *Standardform der singulären Störtheorie* vorliegt und (4.4) das zugehörige *quasi-stationäre Modell* darstellt.

Die folgenden Beispiele zeigen, auf welche Art und Weise bei der Modellierung eine singulär gestörte Zustandsdarstellung gemäß (4.1) auftreten kann und wie der singuläre Störparameter  $\varepsilon$  zustande kommt.

**Beispiel 4.1 (Gleichstrommaschine).** Unter der Voraussetzung einer konstanten Erregung ( $\psi_F$  konstant) lässt sich das mathematische Modell einer Gleichstrommaschine

gemäß (1.38) mit  $k_A = k\psi_F$  wie folgt anschreiben:

$$\Theta_G \frac{d}{dt} \omega = k_A i_A - M_L \quad (4.5a)$$

$$L_A \frac{d}{dt} i_A = u_A - R_A i_A - k_A \omega \quad (4.5b)$$

Unter der Annahme, dass die Ankerinduktivität  $L_A$  sehr klein ist, kann  $L_A$  direkt als singulärer Störparameter  $\varepsilon$  herangezogen werden und das System (4.4) liegt bereits in der Standardform der singulären Störtheorie nach (4.1) mit  $x = \omega$  und  $z = i_A$  vor. Setzt man nun  $\varepsilon = L_A = 0$  in (4.5), dann erhält man aus (4.5b) für  $R_A \neq 0$  die (eindeutige) isolierte Wurzel

$$i_A = \frac{u_A - k_A \omega}{R_A} \quad (4.6)$$

und damit das quasi-stationäre Modell

$$\Theta_G \frac{d}{dt} \omega = -\frac{k_A^2}{R_A} \omega + \frac{k_A}{R_A} u_A - M_L . \quad (4.7)$$

Bei dieser Vorgehensweise ist zu bemängeln, dass der singuläre Störparameter  $\varepsilon = L_A$  eine dimensionsbehaftete Größe darstellt und damit auf Basis des Wertes von  $L_A$  alleine nicht darauf geschlossen werden kann, dass es sich bei (4.5b) um ein schnelles Teilsystem handelt. Aus diesem Grund führt man eine Normierung gemäß (1.39) in der Form

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{u}_A = \frac{u_A}{k_A \omega_0}, \quad \tilde{i}_A = \frac{i_A R_A}{k_A \omega_0} \quad \text{und} \quad \tilde{M}_L = \frac{M_L R_A}{k_A^2 \omega_0} \quad (4.8)$$

mit der nominellen Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  ein und (4.5) folgt in normierter Darstellung zu

$$T_M \frac{d}{dt} \tilde{\omega} = \tilde{i}_A - \tilde{M}_L \quad (4.9a)$$

$$T_A \frac{d}{dt} \tilde{i}_A = \tilde{u}_A - \tilde{i}_A - \tilde{\omega} \quad (4.9b)$$

mit der elektrischen und mechanischen Zeitkonstanten

$$T_A = \frac{L_A}{R_A} \quad \text{und} \quad T_M = \frac{R_A \Theta_G}{k_A^2} . \quad (4.10)$$

Mit der normierten Zeit  $\tilde{t} = t/T_M$  ergibt sich schlussendlich (4.9) in der Standardform der singulären Störtheorie

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{\omega} = \tilde{i}_A - \tilde{M}_L \quad (4.11a)$$

$$\frac{T_A}{T_M} \frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{i}_A = \tilde{u}_A - \tilde{i}_A - \tilde{\omega} \quad (4.11b)$$

mit dem *dimensionslosen singulären Störparameter*

$$\varepsilon = \frac{T_A}{T_M} = \frac{L_A k_A^2}{\Theta_G R_A^2} \ll 1, \quad (4.12)$$

da die elektrische Zeitkonstante  $T_A$  sehr viel kleiner als die mechanische Zeitkonstante  $T_M$  ist. Abbildung 4.1 zeigt Simulationsergebnisse des vollständigen und des reduzierten Modells für  $T_A = 10$  ms,  $T_M = 200$  ms,  $\tilde{u}_A = 1$ , dem Lastmomentverlauf  $\tilde{M}_L(\tilde{t}) = 1/2(\sigma(\tilde{t} - 1) - \sigma(\tilde{t} - 2))$  mit der Einheitsprungfunktion  $\sigma(\cdot)$  und den Anfangswerten  $\tilde{i}_A = 0$  und  $\tilde{\omega} = 0$ .

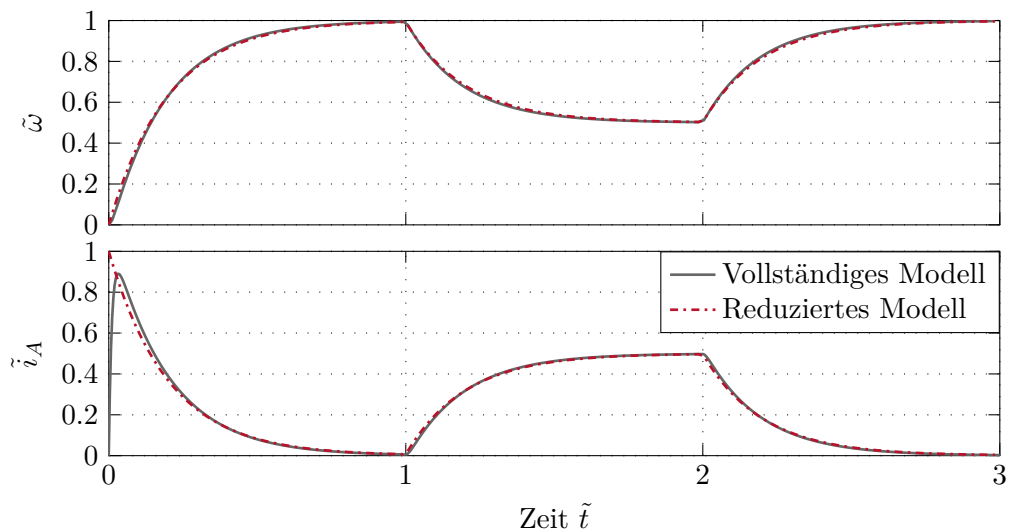


Abbildung 4.1: Simulationsergebnisse des vollständigen und des reduzierten Modells der Gleichstrommaschine.

**Beispiel 4.2 (Kaskadierter Regelkreis).** Gegeben ist der kaskadierte Regelkreis von Abbildung 4.2.

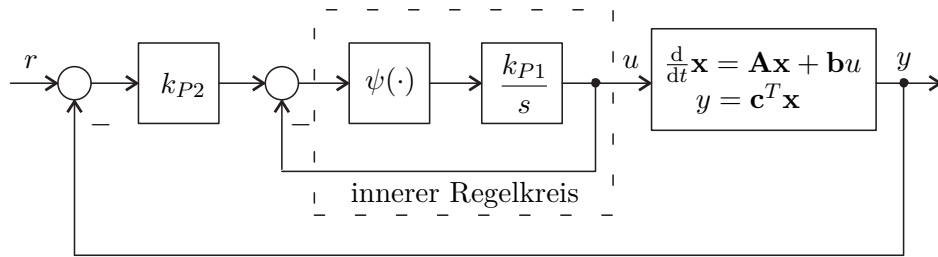


Abbildung 4.2: Kaskadierter Regelkreis.

Im inneren Regelkreis wird ein Aktuator über einen hochverstärkenden Regler geregelt. Der offene Regelkreis des Aktuators ist in Form eines *Hammerstein-Modells* mit der *statischen Eingangsnichtlinearität*  $\psi(e)$  (im vorliegenden Fall gilt  $\psi(0) = 0$ ,  $e\psi(e) > 0$  für alle  $e \neq 0$ ) und einer *linearen Dynamik* (im vorliegenden Fall ein Integrator mit der Übertragungsfunktion  $G(s) = k_{P1}/s$  mit sehr großem Verstärkungsfaktor  $k_{P1} > 0$ ) gegeben. Der geregelte Aktuator wirkt auf ein lineares zeitinvariantes Eingrößensystem

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \quad (4.13a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.13b)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$  und dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$ , welches in einem äußeren Regelkreis über einen P-Regler mit dem Verstärkungsfaktor  $k_{P2}$  geregelt wird. Die Zustandsdarstellung des geschlossenen Kreises hat somit die Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \quad (4.14a)$$

$$\frac{1}{k_{P1}} \frac{d}{dt} u = \psi \left( k_{P2} (r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}) - u \right). \quad (4.14b)$$

Man erkennt unmittelbar, dass für  $k_{P1} \gg 1$  die Größe  $\varepsilon = 1/k_{P1} \ll 1$  einen geeigneten singulären Störparameter darstellt und das System (4.14) in der Standardform der singulären Störtheorie (4.1) vorliegt. Das reduzierte Modell für  $\varepsilon = 0$  bzw. für  $k_{P1} \rightarrow \infty$  ergibt sich direkt zu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \left( \mathbf{A} - k_{P2} \mathbf{b} \mathbf{c}^T \right) \mathbf{x} + k_{P2} \mathbf{b} r, \quad (4.15)$$

was dem Blockschaltbild von Abbildung 4.3 entspricht.

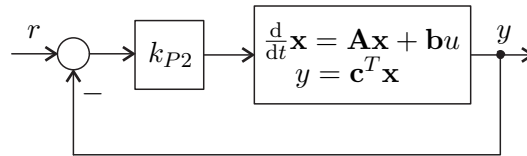


Abbildung 4.3: Blockschaltbild des linearen Systems (4.14b).

Im Sinne der singulären Störtheorie wird der innere Regelkreis als *Durchschaltung* betrachtet, was im Wesentlichen die Grundidee der Kaskadenregelung widerspiegelt.

**Beispiel 4.3 (Elektrisches Netzwerk).** Gegeben ist das nichtlineare elektrische Netzwerk von Abbildung 4.4 mit den spannungsgesteuerten nichtlinearen Widerständen  $i = \psi(u)$ , den linearen Widerständen  $R$  und  $R_C$ , den Spannungsquellen  $U$  und den linearen Kapazitäten  $C$ .

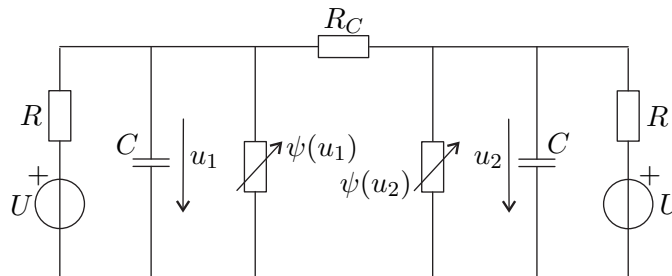


Abbildung 4.4: Elektrisches Netzwerk.

Das mathematische Modell dazu lautet

$$C \frac{d}{dt} u_1 = \frac{1}{R} (U - u_1) - \psi(u_1) - \frac{1}{R_C} (u_1 - u_2) \quad (4.16a)$$

$$C \frac{d}{dt} u_2 = \frac{1}{R} (U - u_2) - \psi(u_2) + \frac{1}{R_C} (u_1 - u_2) . \quad (4.16b)$$

Wird nun angenommen, dass der Widerstand  $R_C \ll 1$  ist, dann lässt sich (4.16) in der Form

$$\varepsilon \frac{d}{dt} u_1 = \frac{\varepsilon}{CR} (U - u_1) - \frac{\varepsilon}{C} \psi(u_1) - \frac{1}{C} (u_1 - u_2) \quad (4.17a)$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt} u_2 = \frac{\varepsilon}{CR} (U - u_2) - \frac{\varepsilon}{C} \psi(u_2) + \frac{1}{C} (u_1 - u_2) . \quad (4.17b)$$

mit dem singulären Störparameter  $\varepsilon = R_C$  schreiben. Offensichtlich hat (4.17) für  $\varepsilon = 0$  keine isolierten Wurzeln, denn es gilt  $u_1 - u_2 = 0$ , weshalb das System (4.17) *nicht* in der Standardform der singulären Störtheorie (4.1) vorliegt.

Führt man nun die reguläre Zustandstransformation

$$x = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} (u_1 - u_2) \quad (4.18)$$

durch, so folgt die Standardform der singulären Störtheorie von (4.16) zu

$$\frac{d}{dt}x = \frac{1}{CR}(U - x) - \frac{1}{2C}(\psi(x+z) + \psi(x-z)) \quad (4.19a)$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}z = -\frac{\varepsilon}{CR}z - \frac{\varepsilon}{2C}(\psi(x+z) - \psi(x-z)) - \frac{2}{C}z \quad (4.19b)$$

mit dem quasi-stationären Modell ( $\varepsilon = 0$  impliziert die eindeutige isolierte Wurzel  $z = 0$ )

$$\frac{d}{dt}x = \frac{1}{CR}(U - x) - \frac{1}{C}\psi(x) . \quad (4.20)$$

**Aufgabe 4.1.** Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild zum quasi-stationären Modell (4.20). Führen Sie eine geeignete Skalierung der Größen so durch, dass der singuläre Störparameter  $\varepsilon$  dimensionslos wird.

## 4.2 Unterschiedliche Zeitskalen

Im Weiteren wird die Approximationsordnung  $\mathcal{O}(\cdot)$  benötigt, die wie folgt definiert ist:

**Definition 4.1 (Approximationsordnung).** Man schreibt  $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$ , wenn positive Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so existieren, dass

$$|\delta_1(\varepsilon)| \leq c_1 |\delta_2(\varepsilon)| \quad \text{für alle } |\varepsilon| < c_2 \quad (4.21)$$

gilt.

Zur Erläuterung der Definition sind im Folgenden einige Beispiele angeführt:

- $\varepsilon^n = \mathcal{O}(\varepsilon^m)$  für alle  $n \geq m$ , da  $|\varepsilon|^n = |\varepsilon|^m |\varepsilon|^{n-m} \leq |\varepsilon|^m$  für alle  $|\varepsilon| < 1$
- $1 + 5\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ , da  $|1 + 5\varepsilon| \leq |1 + 5c_2|$  für alle  $|\varepsilon| < c_2$
- $\varepsilon^2/(1 + \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , da  $\left| \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \right| \leq \frac{1}{1 - c_2} |\varepsilon^2|$  für alle  $|\varepsilon| < c_2 < 1$

Angenommen  $\mathbf{x}(t; \varepsilon)$  und  $\mathbf{z}(t; \varepsilon)$  bezeichnen die Lösungstrajektorie des Systems (siehe (4.1))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{x}_0(\varepsilon) \quad (4.22a)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \quad \mathbf{z}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{z}_0(\varepsilon) , \quad (4.22b)$$

wobei  $\mathbf{x}_0(\varepsilon)$  und  $\mathbf{z}_0(\varepsilon)$  glatte Funktionen von  $\varepsilon$  sind. Für das zugehörige in der Dimension reduzierte quasi-stationäre Modell (siehe (4.4))

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}_r, \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r), 0), \quad \mathbf{x}_r(t_0) = \mathbf{x}_0(0) \quad (4.23)$$

können nur noch  $n$  Anfangsbedingungen vorgegeben werden, da über die Beziehung  $\mathbf{z}_r(t) = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r(t))$  (siehe (4.3)) zum Zeitpunkt  $t = t_0$  die Werte von  $\mathbf{z}_r(t_0) = \mathbf{z}_{r0} = \mathbf{q}(t_0, \mathbf{x}_0(0))$  fest vorgegeben sind. Man beachte, dass zwischen dem Anfangswert  $\mathbf{z}_0(\varepsilon)$  des vollständigen Modells (4.22) und dem Anfangswert  $\mathbf{z}_{r0}$  zufolge des quasi-stationären Systems ein *großer Unterschied* sein kann. Hinsichtlich der Approximationsgüte des quasi-stationären Modells kann man also höchstens für ein Zeitintervall  $t \in [t_s, t_1]$  mit  $t_s > t_0$  erwarten, dass gilt

$$\mathbf{z}(t; \varepsilon) - \mathbf{z}_r(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) . \quad (4.24)$$

Für den Zustand  $\mathbf{x}$  des langsamen Teilsystems kann man aufgrund der konsistenten Anfangsbedingung sehr wohl damit rechnen, dass für das gesamte Zeitintervall  $t \in [t_0, t_1]$  die Approximationsordnung

$$\mathbf{x}(t; \varepsilon) - \mathbf{x}_r(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) , \quad (4.25)$$

gilt, da

$$\mathbf{x}(t_0; \varepsilon) - \mathbf{x}_r(t_0) = \mathbf{x}_0(\varepsilon) - \mathbf{x}_0(0) = \mathcal{O}(\varepsilon) . \quad (4.26)$$

Gilt für die Approximationsordnung  $\mathbf{z}(t; \varepsilon) - \mathbf{z}_r(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  im Zeitintervall  $t \in [t_s, t_1]$  mit  $t_s > t_0$ , dann muss offensichtlich der Anfangsfehler  $\mathbf{z}(t_0; \varepsilon) - \mathbf{z}_r(t_0) = \mathbf{z}_0(\varepsilon) - \mathbf{z}_{r0}$  im Zeitintervall  $t \in [t_0, t_s]$  entsprechend abklingen. Dieses Zeitintervall  $[t_0, t_s]$  wird im Rahmen der singulären Störtheorie auch als *boundary layer* bezeichnet. Es sollte an dieser Stelle erwähnt werden, dass im Grenzfall  $\varepsilon = 0$  das schnelle Teilsystem (4.22b) mit  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_2/\varepsilon$  für  $\mathbf{f}_2 \neq 0$  *instantan* gegen das quasi-stationäre Modell konvergiert und für hinreichend kleines  $\varepsilon \ll 1$  ebenfalls zu erwarten ist, dass innerhalb des boundary layer Intervalls der Anfangsfehler  $\mathbf{z}_0(\varepsilon) - \mathbf{z}_{r0}$  so abklingt, dass die Approximationsordnung  $\mathbf{z}(t; \varepsilon) - \mathbf{z}_r(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  im Zeitintervall  $t \in [t_s, t_1]$  mit  $t_s > t_0$  gültig ist.

Mit Hilfe der Zustandstransformation

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \quad (4.27)$$

mit  $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$  gemäß (4.3) wird die quasi-stationäre Lösung von  $\mathbf{z}$  in den Ursprung transformiert und das System (4.22) im neuen Zustand  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), \varepsilon) \quad (4.28a)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), \varepsilon) - \varepsilon \frac{d}{dt} \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \quad (4.28b)$$

mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{x}_0(\varepsilon)$  und  $\mathbf{y}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{z}_0(\varepsilon) - \mathbf{q}(t_0, \mathbf{x}_0(\varepsilon))$ . Führt man nun eine Zeittransformation der Form

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon} \quad \text{und damit} \quad \varepsilon \frac{d}{dt} \mathbf{y} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{y} \quad (4.29)$$

durch, so erkennt man, dass für  $\varepsilon = 0$  die neue Zeit  $\tau$  gegen Unendlich strebt, und zwar für jede Zeit  $t$ , die nur hinreichend wenig größer als  $t_0$  ist. Dies bedeutet also, dass sich die Größen  $t$  und  $\mathbf{x}$  in der Zeitskala  $\tau$  *sehr langsam ändern* und im Grenzübergang  $\varepsilon = 0$

auf  $t = t_0$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(0)$  konstant gehalten werden. Damit lautet das schnelle Teilsystem (4.28b) in der Zeitskala  $\tau$  für  $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{y}_s = \mathbf{f}_2(t_0, \mathbf{x}_0(0), \mathbf{y}_s + \mathbf{q}(t_0, \mathbf{x}_0(0)), 0), \quad \mathbf{y}_s(0) = \mathbf{z}_0(0) - \mathbf{q}(t_0, \mathbf{x}_0(0)). \quad (4.30)$$

Wenn nun die Ruhelage  $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$  von (4.30) asymptotisch stabil ist und  $\mathbf{y}_s(0)$  zum Einzugsbereich gehört, dann kann man erwarten, dass der Anfangsfehler  $\mathbf{y}_s(0)$  innerhalb des boundary layer Intervalls entsprechend abklingt. Außerhalb des boundary layer Intervalls muss man garantieren, dass  $\mathbf{y}_s(\tau)$  nahe bei Null bleibt während sich die Größen  $\mathbf{x}$  und  $t$  sehr langsam von  $\mathbf{x}_0(0)$  und  $t_0$  entfernen dürfen. Man schreibt deshalb (4.30) in der Form

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{y}_s = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), 0) \quad (4.31)$$

mit den festen Parametern  $(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x$  und bezeichnet (4.31) als *boundary layer Modell*. Für das boundary layer Modell (4.31) wird nun in den langsam veränderlichen Parametern  $t$  und  $\mathbf{x}$  gleichmäßige exponentielle Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$  gefordert. Dazu folgende Definition (vergleiche dazu Definition 3.12):

**Definition 4.2 (Exponentielle Stabilität des boundary layer Systems).** Die Ruhelage  $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$  des boundary layer Modells (4.31) ist in den langsam veränderlichen Parametern  $(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x$  gleichmäßig exponentiell stabil, wenn positive Konstanten  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  so existieren, dass

$$\|\mathbf{y}_s(\tau)\| \leq k_1 \|\mathbf{y}_s(0)\| \exp(-k_2 \tau) \quad \text{für alle} \quad \|\mathbf{y}_s(0)\| \leq k_3, \quad (t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x \quad (4.32)$$

und für alle Zeiten  $\tau \geq 0$  gilt.

Die Überprüfung der exponentiellen Stabilität gemäß Definition 4.2 kann nun entweder lokal anhand der Linearisierung erfolgen, d.h., für sämtliche Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_s} \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), 0) \quad (4.33)$$

gilt  $\text{Re}(\lambda_i) \leq -c < 0$  für alle  $(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x$ , oder mithilfe der Lyapunovtheorie gemäß Satz 3.10 gezeigt werden, d.h., es existiert eine Lyapunovfunktion  $V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s)$  so, dass gilt

$$\alpha_1 \|\mathbf{y}_s(\tau)\|^{\alpha_4} \leq V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s) \leq \alpha_2 \|\mathbf{y}_s(\tau)\|^{\alpha_4} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}_s} \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), 0) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{y}_s(\tau)\|^{\alpha_4} \quad (4.35)$$

für alle Zeiten  $\tau \geq 0$ ,  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$  mit  $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$  und positive Konstanten  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich nun im Theorem von Tikhonov zusammenfassen. Der Beweis ist in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen.



**Satz 4.1 (Theorem von Tikhonov).** Gegeben ist das singular gestörte Problem (siehe auch (4.22))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{x}_0(\varepsilon) \quad (4.36a)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \quad \mathbf{z}(t_0; \varepsilon) = \mathbf{z}_0(\varepsilon) \quad (4.36b)$$

mit der isolierten Wurzel  $\mathbf{z}_r = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r)$  von (4.36b) für  $\varepsilon = 0$ , siehe auch (4.3). Angenommen für alle

$$[t, \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), \varepsilon] \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times [0, \varepsilon_0]$$

mit  $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$  (im Weiteren sei  $\mathcal{D}_x$  konvex) gelten folgende Bedingungen:

A.) Die Funktionen  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$ , deren erste partielle Ableitungen nach  $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon)$  und die erste partielle Ableitung von  $\mathbf{f}_2$  bezüglich  $t$  sind stetig. Im Weiteren sind die ersten partiellen Ableitungen von  $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$  und  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, 0)$  ebenfalls stetig in den Argumenten und die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0(\varepsilon)$  und  $\mathbf{z}_0(\varepsilon)$  sind glatte Funktionen von  $\varepsilon$ .

B.) Das in der Dimension reduzierte quasi-stationäre Modell (siehe auch (4.4))

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}_r, \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r), 0), \quad \mathbf{x}_r(t_0) = \mathbf{x}_0(0) \quad (4.37)$$

hat im Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  eine eindeutige Lösung auf einer kompakten Teilmenge von  $\mathcal{D}_x$ .

C.) Die Ruhelage  $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$  des boundary layer Modells (siehe auch (4.31))

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{y}_s = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_s + \mathbf{q}(t, \mathbf{x}), 0) \quad (4.38)$$

ist in den langsam veränderlichen Parametern  $t$  und  $\mathbf{x}$  gleichmäßig exponentiell stabil (siehe Definition 4.2) mit dem kompakten Einzugsbereich  $\Omega_y \subset \mathcal{D}_y$ .

Dann existiert eine positive Konstante  $\varepsilon^*$  so, dass für alle  $\mathbf{z}_0(0) - \mathbf{q}(t_0, \mathbf{x}_0(0)) = \mathbf{y}_s(0) \in \Omega_y$  und  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$  das singular gestörte Problem (4.36) eine eindeutige Lösung  $\mathbf{x}(t; \varepsilon)$  und  $\mathbf{z}(t; \varepsilon)$  auf dem Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  besitzt und die Approximation

$$\mathbf{x}(t; \varepsilon) - \mathbf{x}_r(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{z}(t; \varepsilon) - \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r(t)) - \mathbf{y}_s \left( \frac{t - t_0}{\varepsilon} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.40)$$

für alle  $t \in [t_0, t_1]$  gilt. Darüber hinaus existiert eine positive Konstante  $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$  so, dass gilt

$$\mathbf{z}(t; \varepsilon) - \mathbf{q}(t, \mathbf{x}_r(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.41)$$

für alle  $t$  im Zeitintervall  $[t_s, t_1]$ ,  $t_s > t_0$  und alle  $\varepsilon < \varepsilon^{**}$ .

Die Aussage von Satz 4.1 bezieht sich auf ein finites Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ . Möchte man dies auf ein infinites Zeitintervall  $t \in [t_0, \infty)$  ausdehnen, so muss der Punkt B.) von Satz 4.1 durch die exponentielle Stabilität der Ruhelage des quasi-stationären Modells (4.37) für alle  $t \in [t_0, \infty)$  ersetzt werden.

**Aufgabe 4.2.** Gegeben ist das singular gestörte Problem

$$\dot{x} = x^2 + z, \quad x(0) = x_0 \quad (4.42a)$$

$$\varepsilon \dot{z} = x^2 - z + 1, \quad z(0) = z_0. \quad (4.42b)$$

Gesucht ist eine  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  Approximation von  $x(t)$  und  $z(t)$  im Zeitintervall  $t \in [0, 1]$ . Für  $x_0 = z_0 = 0$  soll das approximierte Modell für  $\varepsilon = 0.1$  und  $\varepsilon = 0.05$  mit dem Originalmodell (4.42) in einer Simulation in MATLAB/SIMULINK verglichen werden.

**Hinweis:** Für die Simulation beachte man, dass das System in endlicher Zeit (kurz nach  $t = 1$  s) nach Unendlich strebt.

**Aufgabe 4.3.** Gegeben ist das singular gestörte Problem

$$\dot{x} = x + z, \quad x(0) = x_0 \quad (4.43a)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2}(2x + z)\right), \quad z(0) = z_0. \quad (4.43b)$$

Gesucht ist eine  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  Approximation von  $x(t)$  und  $z(t)$  im Zeitintervall  $t \in [0, 1]$ . Für  $x_0 = z_0 = 1$  soll das approximierte Modell für  $\varepsilon = 0.1$  und  $\varepsilon = 0.2$  mit dem Originalmodell (4.43) in einer Simulation in MATLAB/SIMULINK verglichen werden.

## 4.3 Lineare zeitinvariante Systeme

Gegeben ist das singular gestörte lineare zeitinvariante System in der Standardform (4.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{z} \quad (4.44a)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{z} \quad (4.44b)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Setzt man in (4.44b)  $\varepsilon = 0$ , so kann man unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{A}_{22}$  regulär ist, die resultierende algebraische Gleichung in der Form

$$\mathbf{z}_r = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_r \quad (4.45)$$

explizit lösen. Mit (4.45) eingesetzt in (4.44a) folgt das *quasi-stationäre Modell* zu

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \left(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right)\mathbf{x}_r. \quad (4.46)$$

Das boundary layer Modell (4.31) errechnet sich über die Zustandstransformation  $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}$  (siehe (4.27)) zu

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{y} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{A}_{22}\left(\mathbf{y} - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}\right) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{y}. \quad (4.47)$$

Damit ist für lineare zeitinvariante Systeme unmittelbar einsichtig, dass nach Satz 4.1 die Matrix  $\mathbf{A}_{22}$  eine Hurwitz-Matrix (alle Eigenwerte mit Realteil echt kleiner Null) sein muss.

Für lineare zeitinvariante Systeme gilt nun folgender Satz (für einen Beweis sei auf die am Ende angeführte Literatur verwiesen):

**Satz 4.2** (Zur Eigenwertverteilung singular gestörter linearer zeitinvarianter Systeme).  
 Wenn  $\mathbf{A}_{22}$  von (4.44) regulär ist, dann konvergieren die ersten  $n$  Eigenwerte des Systems (4.44) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ , siehe (4.46). Die restlichen  $m$  Eigenwerte streben mit der Rate  $1/\varepsilon$  nach Unendlich entlang der Asymptoten definiert durch die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_{22}$ , siehe (4.47).

Satz 4.2 ist auch für die Analyse nichtlineare Systeme von großer Bedeutung. Typischerweise führt man in einem ersten Schritt immer eine Linearisierung des nichtlinearen Systems um einen oder mehrere Arbeitspunkte durch und berechnet sich die Eigenwerte der resultierenden Dynamikmatrix. Wenn diese Eigenwerte betragsmäßig entsprechend weit auseinanderliegen, ist dies ein deutlicher Hinweis auf unterschiedliche Dynamiken im System und meist ein Ausgangspunkt für die Formulierung des mathematischen Modells in der Standardform der singulären Störtheorie gemäß (4.1). Dazu betrachte man das nichtlineare System der Form

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (4.48)$$

mit  $\mathbf{w} \in \mathcal{D}_w \subset \mathbb{R}^{n+m}$  und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ . Die Linearisierung des Systems (4.48) um eine Ruhelage  $(\mathbf{w}_R, \mathbf{u}_R)$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{w}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}$  lautet

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{w} = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{f} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{w}_R \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_R}}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{w} + \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{w}_R \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_R}}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}. \quad (4.49)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  charakterisieren die Dynamik des Systems in der Umgebung der Ruhelage  $(\mathbf{w}_R, \mathbf{u}_R)$ . Angenommen diese Eigenwerte lassen sich in  $n$  langsame und  $m$  schnelle Eigenwerte clustern (typischerweise unterscheiden sich die Zeitkonstanten um einen Faktor 10 und größer) und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  bzw.  $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+m}$  bezeichnen die zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren bzw. Real- und Imaginärteile der komplexwertigen Eigen- und Hauptvektoren zur Transformation auf reelle Jordansche Normalform, siehe beispielsweise Satz 3.2 vom Skriptum Automatisierung. Die reelle Jordansche Normalform des linearisierten Systems (4.49) ergibt sich direkt mit Hilfe der regulären Zustandstransformation

$$\Delta \mathbf{w} = \underbrace{\left[ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+m} \right]}_{\mathbf{V}} \Delta \bar{\mathbf{w}} \quad (4.50)$$

zu

$$\frac{d}{dt} \Delta \bar{\mathbf{w}} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \Delta \bar{\mathbf{w}} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \Delta \mathbf{u} \quad (4.51)$$

bzw. mit  $\Delta \bar{\mathbf{w}}^T = [\Delta \mathbf{x}^T, \Delta \mathbf{z}^T]$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} . \quad (4.52)$$

Dabei beschreibt der Zustand  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^n$  das langsame und  $\Delta \mathbf{z} \in \mathcal{D}_z \subset \mathbb{R}^m$  das schnelle Teilsystem von (4.52). Über die reguläre Zustandstransformation (4.50) können die langsamen und schnellen Zustände direkt den originalen Zustandsgrößen  $\Delta \mathbf{w}$  in der Form

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \Delta \mathbf{w} \quad (4.53)$$

zugeordnet werden. Diese Betrachtungsweise kann für verschiedene Ruhelagen ( $\mathbf{w}_R, \mathbf{u}_R$ ) durchgeführt werden und ist auch bei der Analyse des nichtlinearen Systems (4.48) sehr hilfreich. Man erhält auf diese Art und Weise einen Anhaltspunkt, welche Zustände bzw. Zustandskombinationen das schnelle Teilsystem von (4.48) bilden. Diese Vorgehensweise in Kombination mit domänenspezifischem Wissen über das Systemmodell ermöglicht dann zumeist eine Formulierung des Systems (4.48) in der Standardform der singulären Störtheorie (4.1). Für das resultierende quasi-stationäre Modell (4.4) muss auf alle Fälle gelten, dass bei der Linearisierung um die jeweilige Ruhelage die  $m$  schnellen Eigenwerte nicht mehr vorhanden sind.

**Aufgabe 4.4.** Berechnen Sie das quasi-stationäre Modell erster Ordnung für das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -41x_3^3 - x_1^3 + 8x_1x_2x_3 - 7x_2^2x_3 - 30x_2x_3^2 + 3x_1^2x_2 - 4x_1^2x_3 - 3x_1x_2^2 + 27x_1x_2^2 \\ &\quad - 680x_3 - 290x_2 + 290x_1 + \frac{1}{2}u \\ \dot{x}_2 &= 7x_2^2x_3 - x_2^3 + 37x_2x_3^2 + 49x_3^3 + 100x_1 - 100x_2 - 200x_3 + 10x_1^2x_3 - 20x_1x_2x_3 \\ &\quad - 40x_1x_3^2 + \frac{1}{2}u \\ \dot{x}_3 &= -10x_1^2x_3 + 20x_1x_2x_3 + 40x_1x_3^2 - 10x_2^2x_3 - 40x_2x_3^2 - 50x_3^3 + 100x_1 - 100x_2 \\ &\quad - 200x_3 \end{aligned}$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch Simulation in MATLAB.

**Beispiel 4.4 (Feder-Masse-Dämpfer-System).** Gegeben ist das mathematische Modell eines linearen Feder-Masse-Dämpfer Systems mit der Federsteifigkeit  $c$ , der Dämpfungskonstanten  $d$ , der Masse  $m$  und der äußeren Kraft  $F$  in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F . \quad (4.54)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  errechnen sich zu

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}}. \quad (4.55)$$

Unter der Bedingung  $d < 2\sqrt{mc}$  gibt es ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar, für  $d = 2\sqrt{mc}$  gilt  $\lambda_1 = \lambda_2$  und für  $d > 2\sqrt{mc}$  erhält man zwei reelle Eigenwerte. Wenn nun die Dämpfung  $d \gg 2\sqrt{mc}$  wird und im Grenzfall gegen Unendlich strebt, dann geht der Eigenwert  $\lambda_1$  gegen Null und  $\lambda_2$  gegen  $-\frac{d}{m}$ . Damit enthält das System eine langsame und eine schnelle Dynamik. Wählt man  $\varepsilon = \frac{m}{d}$ , dann lässt sich (4.54) in der Standardform der singulären Störtheorie wie folgt anschreiben

$$\dot{x} = v \quad (4.56)$$

$$\varepsilon \dot{v} = -\frac{c}{d}x - v + \frac{1}{d}F \quad (4.57)$$

und das quasi-stationäre Modell lautet

$$\dot{x}_r = -\frac{c}{d}x_r + \frac{1}{d}F. \quad (4.58)$$

Man kann also unter gewissen Voraussetzungen das Verhalten eines PT2-Gliedes in sehr guter Näherung durch ein PT1-Glied approximieren.

*Aufgabe 4.5.* Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines PT2-Gliedes

$$G(s) = \frac{V}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2}.$$

Unter welchen Voraussetzungen und in welcher Form lässt sich das System durch ein PT1-Glied approximieren. Konstruieren Sie dazu ein Beispiel und vergleichen Sie die Sprungantworten in MATLAB.

*Beispiel 4.5 (Radaufhängung).* Abbildung 4.5 zeigt die schematische Darstellung eines Viertelfahrzeuges mit der Masse des Rades  $m_u$ , der Ersatzsteifigkeit des Rades  $k_t$ , der Aufbaumasse  $m_s$ , der Feder- und Dämpferkonstanten der Radaufhängung  $k_s$  und  $d_s$  sowie der Aktuatorkraft  $F$  zufolge eines aktiven oder semi-aktiven Unterstützungssystems.

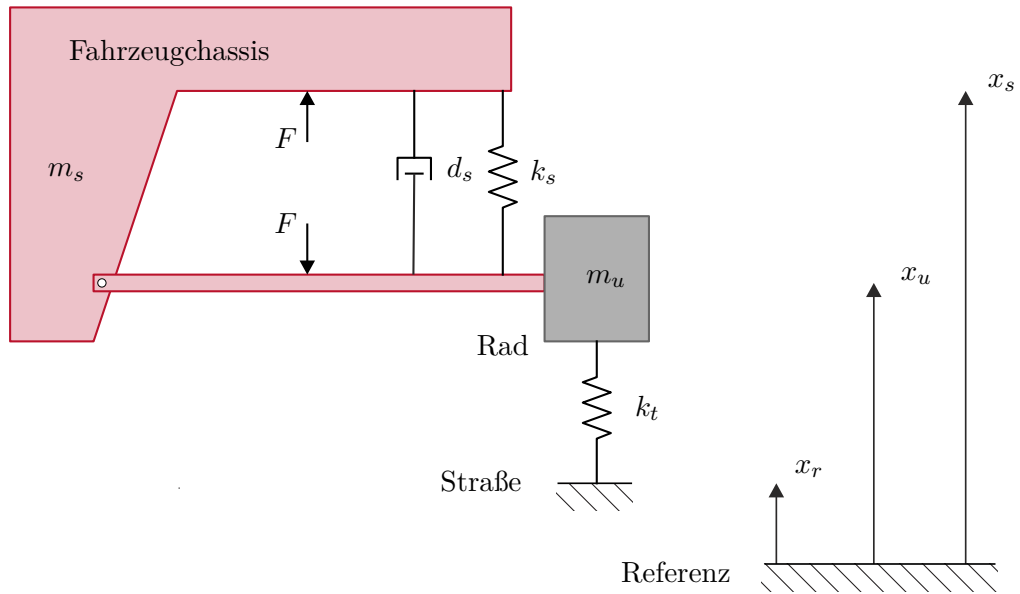


Abbildung 4.5: Modell eines Viertelfahrzeuges.

Mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes ergeben sich die beiden Differentialgleichungen zu

$$m_s \ddot{x}_s = F - k_s(x_s - x_u) - d_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (4.59)$$

$$m_u \ddot{x}_u = -F + k_s(x_s - x_u) + d_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) + k_t(x_r - x_u), \quad (4.60)$$

wobei  $x_r(t)$  die Straßenanregung bezeichnet. In Zustandsdarstellung erhält man ein lineares zeitinvariantes dynamisches System 4ter Ordnung der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_s \\ v_s \\ x_u \\ v_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{d_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{d_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{d_s}{m_u} & -\frac{k_s+k_t}{m_u} & -\frac{d_s}{m_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ v_s \\ x_u \\ v_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix} x_r \quad (4.61)$$

mit den Eingangsgrößen  $F$  und  $x_r$ . Betrachtet man die beiden Teilsysteme Rad und Aufbaumasse getrennt, so lauten die zugehörigen Eigenfrequenzen  $\sqrt{\frac{k_t}{m_u}}$  und  $\sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$ .

Für typische Fahrzeuge ist die Radeigenfrequenz  $\sqrt{\frac{k_t}{m_u}}$  in der Größenordnung eines Faktors 10 höher als die Eigenfrequenz  $\sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$  des Aufbaus. Dies deutet darauf hin, dass (4.61) ein schnelles und ein langsames Teilsystem beinhaltet und das Verhältnis

der beiden Eigenfrequenzen

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{k_s}{m_s}}}{\sqrt{\frac{k_t}{m_u}}} = \sqrt{\frac{k_s m_u}{k_t m_s}} \ll 1 \quad (4.62)$$

einen geeigneten singulären Störparameter darstellt. Um nun das System (4.61) in die Standardform der singulären Störtheorie (4.44) zu transformieren, wird einerseits eine Zeitnormierung  $\tau = t\sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$  auf die langsame Zeitkonstante und andererseits eine Skalierung und Transformation der Zustandsgrößen in der Form

$$\tilde{x}_s = x_s \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}, \quad \tilde{v}_s = v_s, \quad \tilde{x}_d = (x_u - x_r) \sqrt{\frac{k_t}{m_u}}, \quad \tilde{v}_d = v_u - \dot{x}_r \quad (4.63)$$

durchgeführt. Man beachte an dieser Stelle, dass insbesondere die Einführung der Relativposition  $x_u - x_r$  zwischen der Oberfläche der Fahrbahn und dem Rad entscheidend ist, da dies im Wesentlichen die schnelle Dynamik repräsentiert. Im Gegensatz zur Relativposition beinhaltet die Auslenkung des Rades  $x_u$  selbst auch langsame Komponenten zufolge der zum Teil langsam veränderlichen Straßenanregung  $x_r(t)$ . Das zeitnormierte und skalierte System ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \\ \varepsilon \tilde{x}_d \\ \varepsilon \tilde{v}_d \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{d_s}{\sqrt{m_s k_s}} & \varepsilon & \frac{d_s}{\sqrt{m_s k_s}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{k_s m_s}{k_t m_u}} & \frac{d_s}{\sqrt{m_u k_t}} & -\frac{k_s + k_t}{k_t} & -\frac{d_s}{\sqrt{m_u k_t}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\varepsilon)} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \\ \tilde{x}_d \\ \tilde{v}_d \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{m_s k_s}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{m_u k_t}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} F + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \\ 0 \\ -\frac{k_s + k_t}{\sqrt{m_u k_t}} + \sqrt{\frac{k_t}{m_u}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_1} x_r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_s}{\sqrt{m_s k_s}} \\ 0 \\ -\frac{d_s}{\sqrt{m_u k_t}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_2} \dot{x}_r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_3} \ddot{x}_r. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Mit einer geeigneten Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  und der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{g}_j$ ,  $j = 1, \dots, 3$  errechnet sich das reduzierte quasi-stationäre Modell zu (siehe auch Satz 4.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \end{bmatrix} &= \left( \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}(0) \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \end{bmatrix} + \left( \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_{12}(0) \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 \right) F + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{g}_{j1} - \mathbf{A}_{12}(0) \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{g}_{j2} \right) x_r^{(j-1)} \end{aligned} \quad (4.65)$$

mit der  $j$ -ten Zeitableitung  $x_r^{(j)}(t)$  von  $x_r(t)$ . Damit folgt

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{-d_s}{\sqrt{m_s k_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{v}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{m_s k_s}} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d_s}{\sqrt{m_s k_s}} \end{bmatrix} \dot{x}_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \end{bmatrix} x_r. \quad (4.66)$$

In den unnormierten Zustandsgrößen in der Zeit  $t$  lautet das reduzierte quasi-stationäre Modell (4.66)

$$m_s \ddot{x}_s = F - k_s(x_s - x_r) - d_s(\dot{x}_s - \dot{x}_r), \quad (4.67)$$

was der schematischen Darstellung von Abbildung 4.6 entspricht.

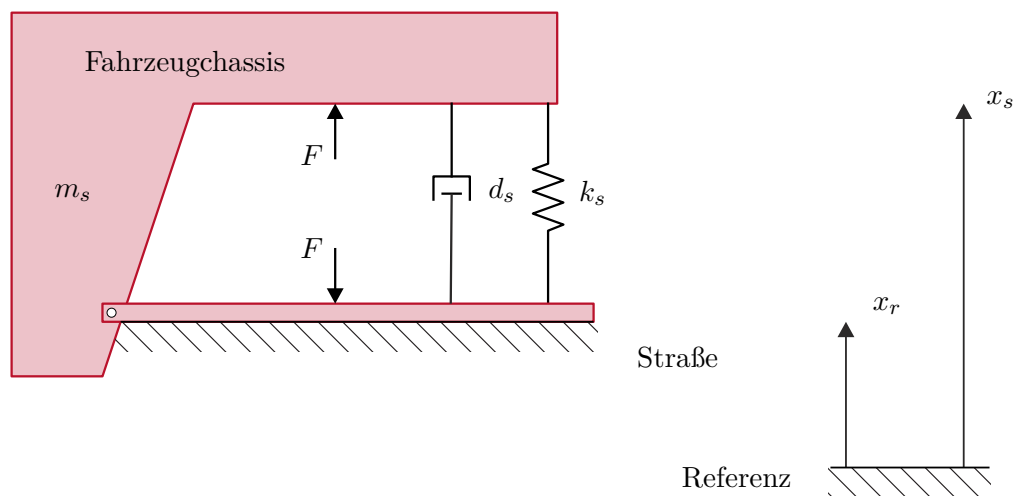


Abbildung 4.6: Reduziertes quasi-stationäres Modell eines Viertelfahrzeuges.

**Aufgabe 4.6.** Zeigen Sie die Gültigkeit von (4.64).

**Aufgabe 4.7.** Berechnen Sie für das singular gestörte lineare zeitinvariante System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varepsilon z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

das zugehörige quasi-stationäre Modell und das zugehörige boundary layer Modell. Untersuchen Sie das Verhalten der Eigenwerte in Abhängigkeit vom singularen Störparameter  $\varepsilon$ .



*Aufgabe 4.8.* Leiten Sie für das mathematische Modell des Hydraulikaktors (1.50) das quasi-stationäre Modell her. Beachten Sie dabei, dass der typische Kompressionsmodul  $\beta_T$  von Hydrauliköl sehr groß ist.

*Aufgabe 4.9.* Leiten Sie für das mathematische Modell der fremderregten Gleichstrommaschine (1.38) das quasi-stationäre Modell unter der Annahme her, dass die Zeitkonstante des Ankerkreises wesentlich kleiner als die Zeitkonstante des Erregerkreises sowie die mechanische Zeitkonstante ist.

## 4.4 Literatur

- [4.1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [4.2] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [4.3] P. Kokotović, H. K. Khalil und J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Philadelphia, USA: SIAM, 1999.