

5 Lyapunov-Theorie: Reglerentwurf

In diesem Kapitel werden einige Reglerentwurfsverfahren, die auf der Lyapunov-Theorie beruhen, diskutiert. Die Grundidee dieser Verfahren besteht darin, dass für ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und dem Stelleingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ eine *nichtlineare Zustandsrückführung* $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ so gefunden wird, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des geschlossenen Kreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})) \quad (5.2)$$

stabil bzw. asymptotisch stabil im Sinne von Lyapunov wird.

5.1 Integrator Backstepping

Als Ausgangspunkt und Motivation dieses nichtlinearen Reglerentwurfsverfahrens betrachte man nachfolgendes nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) - x_1^3 + x_2 \quad (5.3a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.3b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$ und dem Stelleingang u . Es soll nun eine Zustandsrückführung $u = u(x_1, x_2)$ so entworfen werden, dass für jeden Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t)| = c < \infty$. Aus (5.3) erkennt man, dass für $x_{1,R} = 0$ die einzige Ruhelage mit $\mathbf{x}_R^T = [0, -1]$ gegeben ist. Betrachtet man nun den Zustand x_2 als *fiktive Stellgröße* für das System (5.3a), dann würde die Zustandsrückführung

$$x_2 = \alpha(x_1) = -\cos(x_1) - c_1 x_1, \quad c_1 > 0 \quad (5.4)$$

mit sich bringen, dass die Ruhelage $x_{1,R} = 0$ des Teilsystems (5.3a), (5.4) asymptotisch stabil ist. Um dies zu zeigen, wähle man die Lyapunov-Funktion

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 > 0, \quad (5.5)$$

dann errechnet sich die zeitliche Ableitung in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_1) &= x_1 \left(-x_1^3 - c_1 x_1 \right) \\ &= -x_1^4 - c_1 x_1^2 < 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Im nächsten Schritt wird nun die Abweichung des Zustandes x_2 von der “idealen” Form (5.4)

$$z = x_2 - \alpha(x_1) = x_2 + \cos(x_1) + c_1 x_1 \quad (5.7)$$

als neue Zustandsgröße eingeführt und man erhält damit die Differenzialgleichung (5.3) im neuen Zustand $[x_1, z]$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \cos(x_1) - x_1^3 + \underbrace{(z - \cos(x_1) - c_1 x_1)}_{x_2} \\ &= -x_1^3 - c_1 x_1 + z \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x}_2 - \frac{d}{dt}\alpha(x_1) \\ &= u - (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1 + z) . \end{aligned} \quad (5.8b)$$

Setzt man nun eine Lyapunov-Funktion in der Form

$$V_a(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + \cos(x_1) + c_1 x_1)^2 \quad (5.9)$$

an, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_a(x_1, x_2) &= x_1(-x_1^3 - c_1 x_1 + z) + z(u - (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1 + z)) \\ &= -c_1 x_1^2 - x_1^4 + z \underbrace{\left\{ x_1 + u - (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1 + z) \right\}}_{\chi} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Idee besteht nun darin, die Stellgröße u so festzulegen, dass $\frac{d}{dt}V_a(x_1, x_2)$ negativ definit wird. Dies geschieht beispielsweise durch die Wahl

$$\chi = x_1 + u - (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1 + z) = -c_2 z, \quad c_2 > 0 \quad (5.11)$$

bzw.

$$u = -x_1 + (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1 + z) - c_2 z . \quad (5.12)$$

Zusammenfassend kann man sich einfach davon überzeugen, dass die Zustandsrückführung (5.12) die Ruhelage $x_{1,R} = z_R = 0$ bzw. $x_{1,R} = 0$ und $x_{2,R} = -1$ global asymptotisch stabilisiert.

Aufgabe 5.1. Zeigen Sie, dass $V_a(x_1, x_2)$ von (5.9) radial unbeschränkt ist.

Die Wahl von u gemäß (5.11) ist natürlich keineswegs eindeutig, denn es könnte einerseits $\chi = -f(z)$ mit jeder beliebigen Funktion $f(z)$ mit der Eigenschaft $f(z)z > 0$ für alle $z \neq 0$ gewählt werden, und andererseits ist es nicht notwendig, sämtliche Terme von χ zu kürzen. So würde beispielsweise die Zustandsrückführung

$$u = -x_1 + (\sin(x_1) - c_1)(-x_1^3 - c_1 x_1) - c_2 z \quad (5.13)$$

zu einem geschlossenen Kreis (5.8), (5.13) der Form

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - c_1 x_1 + z \quad (5.14a)$$

$$\dot{z} = -x_1 - c_2 z - (\sin(x_1) - c_1)z \quad (5.14b)$$

führen und für die Wahl der Parameter $c_2 > c_1 + 1$ zeigt die Lyapunov-Funktion

$$V_a(x_1, z) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z^2 \quad (5.15)$$

und deren zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt}V_a = -x_1^4 - c_1 x_1^2 - (c_2 - c_1 + \sin(x_1))z^2 \quad (5.16)$$

die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage $x_{1,R} = z_R = 0$ bzw. $x_{1,R} = 0$ und $x_{2,R} = -1$.

Aufgabe 5.2. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl der Parameter k_1 und k_2 sogar die einfache Zustandsrückführung

$$u = -k_1 z - k_2 x_1^2 z \quad (5.17)$$

zu einem geschlossenen Kreis mit global asymptotisch stabiler Ruhelage führt.

Hinweis: Wählen Sie als Lyapunov-Funktion $V_a = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z^2$ und fassen Sie die Terme von \dot{V}_a geeignet zusammen.

Diese soeben genannten Variationsmöglichkeiten zeigen die Entwurfsfreiheitsgrade der Methode auf. Die Verallgemeinerung des oben diskutierten Beispiels ist nun in folgender Form möglich:

Satz 5.1 (Integrator Backstepping). Gegeben ist das nichtlineare System

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2 \quad (5.18a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.18b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, x_2] \in \mathbb{R}^{n+1}$, dem Stelleingang $u \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$. Es sei angenommen, dass eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha(\mathbf{x}_1)$ mit $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ sowie eine positiv definite, radial unbeschränkte Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ so existieren, dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\alpha(\mathbf{x}_1)\} \leq W(\mathbf{x}_1) \leq 0 \quad (5.19)$$

und $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ genüge der Beziehung $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

- (1) Wenn $W(\mathbf{x}_1)$ negativ definit ist, dann existiert eine Zustandsrückführung $u = \alpha_a(\mathbf{x}_1, x_2)$ so, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_{1,R} = \mathbf{0}$, $x_{2,R} = 0$ des geschlossenen Kreises

global asymptotisch stabil ist mit der Lyapunov-Funktion

$$V_a(\mathbf{x}_1, x_2) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1))^2 . \quad (5.20)$$

Eine mögliche Zustandsrückführung lautet

$$u = -c(x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha(\mathbf{x}_1) \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) x_2 \} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V(\mathbf{x}_1) \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) , \quad c > 0 . \quad (5.21)$$

(2) Wenn $W(\mathbf{x}_1)$ nur negativ semidefinit ist, dann existiert eine Zustandsrückführung $u = \alpha_a(\mathbf{x}_1, x_2)$ so, dass die Zustandsgrößen $\mathbf{x}_1(t)$ und $x_2(t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ beschränkt sind und die Lösung des Systems für $t \rightarrow \infty$ gegen die größte positiv invariante Menge \mathcal{M} der Menge

$$\mathcal{Y} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid W(\mathbf{x}_1) = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \alpha(\mathbf{x}_1) \right\} \quad (5.22)$$

konvergiert.

Beweis. Durch Einführen der neuen Zustandsvariablen $z = x_2 - \alpha(\mathbf{x}_1)$ ergibt sich (5.18) zu

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \{ z + \alpha(\mathbf{x}_1) \} \quad (5.23a)$$

$$\dot{z} = u - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha(\mathbf{x}_1) \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \{ z + \alpha(\mathbf{x}_1) \} \} . \quad (5.23b)$$

Setzt man nun in (5.23) für u die Zustandsrückführung (5.21) ein, so erhält man für die zeitliche Ableitung der positiv definiten, radial unbeschränkten Lyapunov-Funktion $V_a(\mathbf{x}_1, x_2)$ von (5.20) die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_a &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V(\mathbf{x}_1) (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \{ z + \alpha(\mathbf{x}_1) \}) + z \left\{ -cz - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V(\mathbf{x}_1) \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \right\} \\ &\leq W(\mathbf{x}_1) - cz^2 . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Für $W(\mathbf{x}_1) < 0$ ist damit die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_{1,R} = 0$, $x_{2,R} = 0$ gezeigt. Im Falle, wenn $W(\mathbf{x}_1) \leq 0$ ist, dann folgt zufolge des Invarianzprinzips von Krassovskii-LaSalle (siehe Satz 3.4), dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{M} \quad (5.25)$$

mit \mathcal{M} als der größten positiv invarianten Teilmenge der Menge \mathcal{Y}

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{d}{dt} V_a = 0 \quad \text{bzw.} \quad W(\mathbf{x}_1) = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \alpha(\mathbf{x}_1) \right\} . \quad (5.26)$$

Damit ist aber obiger Satz gezeigt. \square

Aufgabe 5.3. Entwerfen Sie eine nichtlineare Zustandsrückführung nach der Integrator Backstepping Methode für das System

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 \quad (5.27a)$$

$$\dot{x}_2 = u . \quad (5.27b)$$

Satz 5.1 lässt sich nun auf Systeme mit einer Kette von Integratoren der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= u . \end{aligned} \quad (5.28)$$

erweitern. Unter der Annahme, dass eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha_1(\mathbf{x}_1)$ mit $\alpha_1(\mathbf{0}) = 0$ sowie eine positiv definite, radial unbeschränkte Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ so existieren, dass die Bedingung (5.19) erfüllt ist, sowie $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ der Beziehung $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ genüge, kann als Lyapunov-Funktion des geschlossenen Kreises die Funktion

$$V_a(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_k) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k (x_j - \alpha_{j-1}(\mathbf{x}_1, x_2, \dots, x_{j-1}))^2 \quad (5.29)$$

angesetzt werden. Um die Vorgangsweise näher zu erläutern, betrachte man den Fall $k = 3$. Das mathematische Modell (5.28) lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2 \quad (5.30a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (5.30b)$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (5.30c)$$

und die Lyapunov-Funktion (5.29) ergibt sich zu

$$V_a(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1))^2 + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2))^2 . \quad (5.31)$$

In einem ersten Schritt führe man die Zustandsgrößen

$$z_1 = x_2 - \alpha_1(\mathbf{x}_1) \quad (5.32a)$$

$$z_2 = x_3 - \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2) \quad (5.32b)$$

ein und berechne die zeitliche Ableitung der Lyapunov-Funktion (5.31) entlang einer

Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_a &= \frac{\partial V(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\{z_1 + \alpha_1(\mathbf{x}_1)\}) \\ &+ z_1 \left(x_3 - \frac{\partial \alpha_1(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2) \right) \\ &+ z_2 \left(u - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2) \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2 \} - \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)x_3 \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Betrachtet man nun im nächsten Schritt x_3 in der ersten Zeile von (5.33) als Eingangsgröße und wendet dafür Satz 5.1 an, so erhält man

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2) \\ &= -c_1 z_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha_1(\mathbf{x}_1)(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V(\mathbf{x}_1)\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

mit $c_1 > 0$. Durch Ersetzen von $x_3 = z_2 + \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)$ gemäß (5.32) in (5.33) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_a &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} V(\mathbf{x}_1)(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\alpha_1(\mathbf{x}_1))}_{\leq W(\mathbf{x}_1)} - c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \\ &+ z_2 \left(u - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2) \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2 \} - \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)x_3 \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Erneutes Anwenden von Satz 5.1 auf (5.35) mit der Eingangsgröße u führt schlussendlich zur Zustandsrückführung

$$u = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)x_3 \quad (5.36)$$

mit $c_2 > 0$ und $\alpha_2(\mathbf{x}_1, x_2)$ nach (5.34).

Aufgabe 5.4. Beweisen Sie, dass für negativ definites $W(\mathbf{x}_1)$ die Ruhelage $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $x_2 = x_3 = 0$ global asymptotisch stabil ist. Gegen welche Menge konvergieren die Lösungen des Systems, wenn $W(\mathbf{x}_1)$ nur negativ semidefinit ist?

5.2 Verallgemeinertes Backstepping

Die Methode des Integrator Backstepping lässt sich nun auf eine Klasse nichtlinearer Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (5.37a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{u} \quad (5.37b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^p$ und dem Stelleingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ erweitern. Dazu nehme man ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mathbf{x}_{1,R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{2,R} = \mathbf{0}$ eine Ruhelage des freien Systems, also für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ist. Sollte dies nicht der Fall sein, dann findet man eine Zustandstransformation $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1,R}$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2,R}$ und eine Stellgrößentransformation $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_R$ immer so, dass in den neuen Größen dies gilt.

Satz 5.2. Angenommen, es existiert eine Lyapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ und eine Zustandsrückführung $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)$ mit $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ so, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_{1,R} = \mathbf{0}$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \quad (5.38)$$

global (lokal) asymptotisch stabil ist, dann lässt sich eine Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ mit $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ immer so angeben, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_{1,R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{2,R} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Kreises (5.37) global (lokal) asymptotisch stabil ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt konstruktiv und gibt gleichzeitig eine Berechnungsvorschrift für das Zustandsrückführgesetz an.

- (1) Für die Lyapunov-Funktion $V(\mathbf{x}_1)$ gilt aufgrund der asymptotischen Stabilität des Systems (5.38)

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}_1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}V(\mathbf{x}_1)\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) < 0. \quad (5.39)$$

- (2) Es wird nun eine Hilfsgröße $\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ in der Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)+\lambda\mathbf{x}_2} d\lambda \quad (5.40)$$

eingeführt mit der sich $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_2)$ wie folgt

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_2) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 \quad (5.41)$$

ausdrücken lässt. Um dies zu zeigen, multipliziere man (5.40) von rechts mit \mathbf{x}_2 und ersetze den Integranden durch die linke Seite des nachfolgenden Ausdrucks

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1, \underbrace{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1) + \lambda\mathbf{x}_2}_{\mathbf{v}}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v})}{\partial v_1}x_{2,1} + \dots + \frac{\partial f_{1,1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v})}{\partial v_p}x_{2,p} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{1,n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v})}{\partial v_1}x_{2,1} + \dots + \frac{\partial f_{1,n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v})}{\partial v_p}x_{2,p} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)+\lambda\mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2, \end{aligned} \quad (5.42)$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)+\lambda\mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 d\lambda \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1) + \lambda\mathbf{x}_2) d\lambda \end{aligned} \quad (5.43)$$

und damit unmittelbar (5.41)

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) . \quad (5.44)$$

(3) Die Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & -\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ & - \left[\frac{\partial V(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \right]^T \\ & - c(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)), \quad c > 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

garantiert dann die asymptotische Stabilität der Ruhelage des geschlossenen Kreises. Als Kandidat für die Lyapunov-Funktion des geschlossenen Kreises wird die positiv definite Funktion

$$V_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)\|_2^2 \quad (5.46)$$

gewählt. Die zeitliche Ableitung von V_a entlang einer Lösung des Systems lautet

$$\frac{d}{dt} V_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_a}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial V_a}{\partial \mathbf{x}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

und nach Einsetzen von $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ und $V_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ von (5.45) und (5.46) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_a &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1))^T \left\{ -\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial V(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \right]^T - c(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \right\} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \{ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1))(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \} \\ &\quad - c \|\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)\|_2^2 . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ersetzt man in (5.44) \mathbf{x}_2 durch $\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)$, dann erhält man

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1))(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)) \quad (5.49)$$

und somit gilt für (5.48)

$$\frac{d}{dt} V_a = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1))}_{= \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}_1)} - c \|\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_1)\|_2^2 < 0. \quad (5.50)$$

Damit ist Satz 5.2 bewiesen. □

Als Anwendungsbeispiel betrachte man das *aktive Dämpfungssystem* eines Fahrzeuges von Abbildung 5.1, siehe auch Abbildung 4.5.

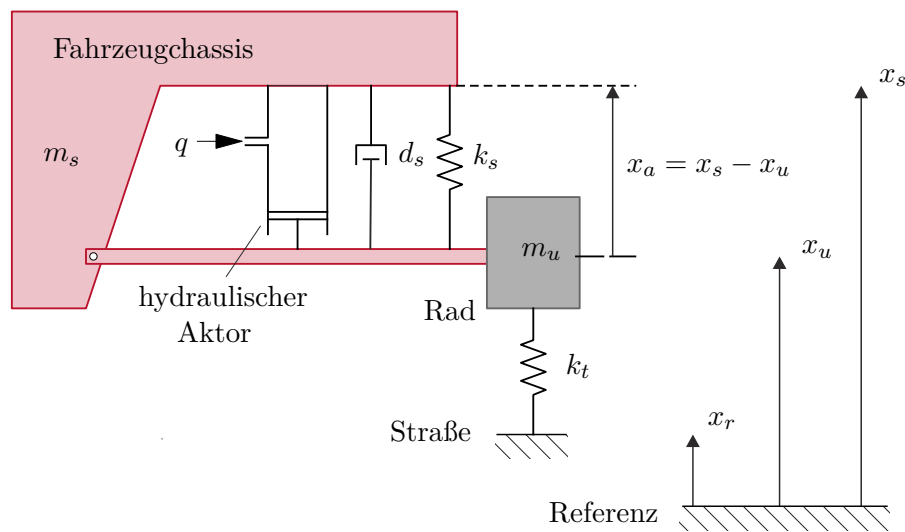


Abbildung 5.1: Aktive Fahrzeugdämpfung.

Ein hydraulischer Aktor ist parallel zu einem Feder-Dämpfersystem mit der Federkonstanten k_s und der Dämpfungskonstanten d_s zwischen Fahrzeugchassis und Radaufhängung montiert. Der Zufluss q an Öl in den hydraulischen Aktor kann über ein stromgeregeltes Servoventil eingestellt werden. Die Dynamik des Servoventils wird näherungsweise durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung in der Form

$$\dot{x}_v = -c_v x_v + k_v i_v, \quad c_v, k_v > 0 \quad (5.51)$$

mit der Steuerschieberposition x_v und dem Servostrom als Eingangsgröße i_v beschrieben. Der Ölfluss q ergibt sich dann aus der Beziehung (vergleiche dazu (1.49))

$$q = \begin{cases} K_{v,1} \sqrt{p_S - p} x_v & \text{für } x_v \geq 0 \\ K_{v,2} \sqrt{p - p_T} x_v & \text{für } x_v \leq 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

mit dem Tankdruck p_T , dem Versorgungsdruck p_S , dem Druck im Zylinder p sowie den Ventilkoeffizienten $K_{v,1}$ und $K_{v,2}$. Setzt man der Einfachheit halber voraus, dass das Öl

inkompressibel ist, also $\frac{d}{dt}p = 0$, und die Leckölströme vernachlässigt werden können, dann lassen sich (5.51) und (5.52) wie folgt

$$\frac{\dot{q}}{K_{v,1}\sqrt{p_S - p}} = -c_v \frac{q}{K_{v,1}\sqrt{p_S - p}} + k_v i_v, \quad x_v \geq 0 \quad (5.53a)$$

$$\frac{\dot{q}}{K_{v,2}\sqrt{p - p_T}} = -c_v \frac{q}{K_{v,2}\sqrt{p - p_T}} + k_v i_v, \quad x_v \leq 0 \quad (5.53b)$$

schreiben. Die Zustandsrückführung, auch *Servokompensation* genannt,

$$i_v = \begin{cases} \frac{i_v^*}{K_{v,1}\sqrt{p_S - p}} & \text{für } x_v \geq 0 \\ \frac{i_v^*}{K_{v,2}\sqrt{p - p_T}} & \text{für } x_v \leq 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

mit der neuen Eingangsgröße i_v^* führt dann zu der Differenzialgleichung für den Ölfuss

$$\dot{q} = -c_v q + k_v i_v^* . \quad (5.55)$$

Wegen der Annahme der Inkompressibilität des Öls gilt weiters der Zusammenhang

$$\dot{x}_a = \frac{q}{A} \quad (5.56)$$

mit der Kolbenfläche A . Man wünscht sich nun ein Dämpfungsverhalten der Form

$$q = \alpha(x_a) = -A(d_1 x_a + d_2 x_a^3), \quad d_1, d_2 > 0 , \quad (5.57)$$

also für kleine Auslenkungen ($x_a \ll 1$) ein lineares Verhalten (x_a^3 ist gegenüber x_a vernachlässigbar) und für größere Auslenkungen eine Dämpfung, die proportional der dritten Potenz von x_a ist. Damit kann das Backstepping Verfahren von Satz 5.2 angewandt werden mit $n = p = 1$, $\mathbf{x}_1 = x_a$, $\mathbf{x}_2 = q$, $\mathbf{u} = k_v i_v^*$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{q}{A}$ und $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -c_v q$:

- (1) Die Ruhelage $x_a = 0$ des Systems (5.56) mit der fiktiven Zustandsrückführung (5.57) ist asymptotisch stabil, was unmittelbar mit der Lyapunov-Funktion

$$V(x_a) = \frac{1}{2} x_a^2 \quad (5.58)$$

und deren zeitlichen Ableitung entlang einer Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}V(x_a) = -(d_1 x_a^2 + d_2 x_a^4) < 0 \quad (5.59)$$

gezeigt werden kann.

- (2) Die Hilfsgröße (5.40) lautet in diesem Fall

$$G(x_a, q) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{A} \right) \Big|_{q=\alpha(x_a)+\lambda q} d\lambda = \frac{1}{A} . \quad (5.60)$$

(3) Die Zustandsrückführung nach (5.45) ergibt sich zu

$$k_v i_v^* = c_v q + \frac{\partial \alpha(x_a)}{\partial x_a} \frac{q}{A} - \frac{\partial V(x_a)}{\partial x_a} \frac{1}{A} - c(q - \alpha(x_a)), \quad c > 0 \quad (5.61)$$

bzw. mit der Wahl $c = c_v$ folgt

$$i_v^* = \frac{1}{k_v} \left(-c_v A (d_1 x_a + d_2 x_a^3) - (d_1 + 3d_2 x_a^2) q - x_a \frac{1}{A} \right). \quad (5.62)$$

Wie man sich sehr einfach selbst überzeugen kann, ist

$$V_a(x_a, q) = \underbrace{\frac{1}{2} x_a^2}_{V(x_a)} + \frac{1}{2} \left(q + \underbrace{A(d_1 x_a + d_2 x_a^3)}_{-\alpha(x_a)} \right)^2 \quad (5.63)$$

die zugehörige Lyapunov-Funktion des geschlossenen Kreises gemäß (5.46).

Die Zustandsrückführung für die Servostromvorgabe des Servoventils setzt sich demnach aus (5.54) und (5.62) zusammen.

Aufgabe 5.5. Gegeben ist das mathematische Modell (1.15) der Drehbewegung eines Satelliten nach Abbildung 1.1

$$\Theta_{11} \dot{\omega}_1 = -(\Theta_{33} - \Theta_{22}) \omega_2 \omega_3 + M_1 \quad (5.64a)$$

$$\Theta_{22} \dot{\omega}_2 = -(\Theta_{11} - \Theta_{33}) \omega_1 \omega_3 + M_2 \quad (5.64b)$$

$$\Theta_{33} \dot{\omega}_3 = -(\Theta_{22} - \Theta_{11}) \omega_1 \omega_2 + M_3 \quad (5.64c)$$

mit den Drehwinkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, den Trägheitsmomenten $\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33}$ und den Momenten M_1, M_2 und M_3 um die Trägheitshauptachsen.

- (1) Entwerfen Sie in einem ersten Schritt einen Regler nach der Computed-Torque Methode gemäß Abschnitt 5.5 so, dass die Ruhelage $\omega_{1,R} = \omega_{2,R} = \omega_{3,R} = 0$ asymptotisch stabilisiert wird.
- (2) Nehmen Sie nun an, dass die Kaltgasdüsen in der Achse x_3 ausgefallen sind, also $M_3 = 0$ ist. Entwerfen Sie nun eine Zustandsrückführung nach Satz 5.2 in der Form, dass für diesen Fall die Ruhelage des geschlossenen Kreises $\omega_{1,R} = \omega_{2,R} = \omega_{3,R} = 0$ nach wie vor global asymptotisch stabil ist. Warum kann hier die Computed-Torque Methode nicht mehr angewendet werden?

5.3 Adaptive Regelung

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Konzepte der Lyapunov-basierten adaptiven Regelung anhand von einfachen Beispielen besprochen. Zur Erläuterung der Idee betrachte man das einfache nichtlineare System

$$\dot{x} = u + \theta \varphi(x) \quad (5.65)$$

mit dem Zustand $x \in \mathbb{R}$, der Stellgröße $u \in \mathbb{R}$ und dem unbekanntem aber konstanten Parameter $\theta \in \mathbb{R}$. Nimmt man nun in einem ersten Schritt an, dass der Parameter θ bekannt ist, so wird durch die Zustandsrückführung

$$u = -\theta\varphi(x) - c_1x, \quad c_1 > 0 \quad (5.66)$$

die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabilisiert. Eine mögliche Lyapunov-Funktion ist durch

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0, \quad \dot{V}(x) = -c_1x^2 < 0 \quad (5.67)$$

gegeben. Setzt man nun in die Zustandsrückführung (5.66) für den unbekanntem Parameter θ einen Schätzwert $\hat{\theta}$ ein, so erhält man für die Änderung von $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ entlang einer Lösungskurve des geschlossenen Kreises

$$\dot{x} = -c_1x - \hat{\theta}\varphi(x) + \theta\varphi(x) = -c_1x - \underbrace{(\hat{\theta} - \theta)}_{=\tilde{\theta}}\varphi(x) \quad (5.68)$$

den Ausdruck

$$\dot{V}(x) = -c_1x^2 - \tilde{\theta}\varphi(x)x. \quad (5.69)$$

Um den indefiniten Term im *Schätzfehler* $\tilde{\theta}$ zu beseitigen, erweitert man die Lyapunovfunktion um einen zusätzlichen quadratischen Term

$$V_e(x, \tilde{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 > 0, \quad \gamma > 0 \quad (5.70)$$

und berechnet die Änderung von $V_e(x, \tilde{\theta})$ entlang einer Lösungskurve von (5.68)

$$\dot{V}_e(x, \tilde{\theta}) = -c_1x^2 + \tilde{\theta}\left(-\varphi(x)x + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\tilde{\theta}\right). \quad (5.71)$$

Die Differentialgleichung des Schätzwertes $\hat{\theta}$ wird nun so festgelegt, dass der Klammerausdruck in (5.71) verschwindet, d. h.,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\theta} = \frac{d}{dt}(\hat{\theta} - \theta) = \frac{d}{dt}\hat{\theta} = \gamma\varphi(x)x, \quad (5.72)$$

weshalb sich $\dot{V}_e(x, \tilde{\theta})$ zu

$$\dot{V}_e(x, \tilde{\theta}) = -c_1x^2 \leq 0 \quad (5.73)$$

ergibt. Aus Satz 3.4 ist somit unmittelbar einsichtig, dass gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Die Annahme, dass die (nichtlineare) Zustandsrückführung die Strecke für bekannt angenommene Parameter θ stabilisiert, wird in der Literatur auch als *certainty equivalence Eigenschaft* bezeichnet. Diese Eigenschaft liegt einer Vielzahl von adaptiven Reglerentwurfverfahren zu Grunde. Im Weiteren ist einfach zu erkennen, dass der unbekanntem

Parameter θ auf gleiche Art und Weise auf das System (5.65) wirkt wie die Stellgröße u und somit der Ausdruck $\theta\varphi(x)$ bei Kenntnis von θ über die Stellgröße einfach kompensiert werden kann. Diese Struktureigenschaft findet man in der Literatur auch unter dem Namen *matching condition*. Es soll im nächsten Teil dieses Abschnitts gezeigt werden, dass der Entwurf des Parameterschätzers auch dann noch sehr einfach funktioniert, wenn die *matching condition* insofern verletzt ist, als die Stellgröße u erst um einen Integrator später als der unbekannte Parameter θ auf die Strecke wirkt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *extended matching condition*. Das zugehörige System mit der *extended matching condition* für den Parameter θ hat die Form

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi(x_1) \quad (5.74a)$$

$$\dot{x}_2 = u. \quad (5.74b)$$

Im ersten Schritt entwerfe man mithilfe des einfachen Integrator Backstepping Verfahrens eine Zustandsrückführung unter der Annahme, dass der Parameter θ bekannt ist (*certainty equivalence* Eigenschaft). Für die fiktive Stellgröße

$$x_2 = -\theta\varphi(x_1) - c_1x_1, \quad c_1 > 0 \quad (5.75)$$

folgt unmittelbar die asymptotische Stabilität der Ruhelage $x_1 = 0$ des ersten Teilsystems mit der Lyapunov-Funktion

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 > 0, \quad \dot{V}_1(x_1) = -c_1x_1^2 < 0. \quad (5.76)$$

Als Lyapunov-Funktion des Gesamtsystems setzt man

$$V_a(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1)^2 \quad (5.77)$$

an und berechnet sich die Stellgröße u aus

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x_1, x_2) &= \underbrace{x_1(x_2 + \theta\varphi(x_1))}_{=-c_1x_1^2 + (x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1)x_1} + (x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1) \\ &\times \left(u + \left(\theta \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \theta\varphi(x_1)) \right) \\ &= -c_1x_1^2 + (x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1) \\ &\times \underbrace{\left(u + \left(\theta \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \theta\varphi(x_1)) + x_1 \right)}_{=-c_2(x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1), \quad c_2 > 0} \end{aligned} \quad (5.78)$$

zu

$$u = -\left(\theta \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \theta\varphi(x_1)) - x_1 - c_2(x_2 + \theta\varphi(x_1) + c_1x_1). \quad (5.79)$$

Zur Berechnung der Zustandsrückführung und des Parameterschätzers für einen konstanten, aber unbekanntem Parameter θ wird die folgende Lyapunov-Funktion

$$V_a(x_1, x_2, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1)^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad \gamma > 0 \quad (5.80)$$

mit dem Parameterschätzfehler $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ verwendet. Die zeitliche Änderung von $V_a(x_1, x_2, \tilde{\theta})$ lautet

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \underbrace{x_1(x_2 + \theta\varphi(x_1))}_{=-c_1x_1^2 + (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1)x_1 - \tilde{\theta}\varphi(x_1)x_1} + (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1) \\ &\times \left(u + \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \theta\varphi(x_1)) + \varphi(x_1) \frac{d}{dt} \hat{\theta} \right) + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta} \frac{d}{dt} \hat{\theta} \\ &= -c_1x_1^2 + (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1) \\ &\times \underbrace{\left(u + \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1)) + x_1 + \frac{d}{dt} \hat{\theta}\varphi(x_1) \right)}_{=-c_2(x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1), \quad c_2 > 0} \\ &+ \tilde{\theta} \underbrace{\left(-\varphi(x_1)x_1 + \frac{d}{dt} \hat{\theta} \frac{1}{\gamma} - (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1) \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) \varphi(x_1) \right)}_{=0}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Die Zustandsrückführung und der Parameterschätzer folgen dann zu

$$u = - \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1)) - x_1 - \frac{d}{dt} \hat{\theta}\varphi(x_1) - c_2(x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1) \quad (5.82)$$

und

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = \gamma \varphi(x_1) \left(x_1 + (x_2 + \hat{\theta}\varphi(x_1) + c_1x_1) \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1) + c_1 \right) \right). \quad (5.83)$$

Als Anwendungsbeispiel betrachte man das mathematische Modell eines vereinfachten biochemischen Prozesses der Form

$$\dot{x}_1 = [\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]x_1 - Dx_1 \quad (5.84a)$$

$$\dot{x}_2 = -k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]x_1 - Dx_2 + u \quad (5.84b)$$

mit x_1 als der Konzentration der Bakterienpopulation, x_2 der Konzentration des Substrates, der spezifischen Wachstumsrate $\mu(x_2) = [\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]$ mit den unbekanntem aber konstanten Parametern θ_1 und θ_2 , der Zufuhr rate des Substrates u als Eingangsgröße sowie den Systemparametern D und k . Man beachte, dass sowohl die

Zustandsgrößen x_1 und x_2 als auch die spezifische Wachstumsrate $\mu(x_2)$ stets nichtnegativ sind. Die Aufgabe der Regelung besteht nun darin, die Konzentration der Bakterienpopulation x_1 auf einen vorgegebenen Referenzwert $x_{1,d}$ zu regeln.

Im ersten Schritt führt man eine reguläre Zustandstransformation der Form

$$z_1 = \ln(x_1) - \ln(x_{1,d}) \quad \text{bzw.} \quad x_1 = x_{1,d} \exp(z_1) \quad (5.85a)$$

$$z_2 = x_2 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = z_2 \quad (5.85b)$$

durch und das System (5.84) im neuen Zustand $\mathbf{z}^T = [z_1, z_2]$ lautet

$$\dot{z}_1 = [\varphi_0(z_2) + \theta_1 \varphi_1(z_2) + \theta_2 \varphi_2(z_2)] - D \quad (5.86a)$$

$$\dot{z}_2 = -k[\varphi_0(z_2) + \theta_1 \varphi_1(z_2) + \theta_2 \varphi_2(z_2)]x_{1,d} \exp(z_1) - Dz_2 + u. \quad (5.86b)$$

Fasst man nun in der ersten Differenzialgleichung von (5.86) $\varphi_0(z_2)$ als fiktive Eingangsgröße auf, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass das Stellgesetz

$$\varphi_0(z_2) = -\theta_1 \varphi_1(z_2) - \theta_2 \varphi_2(z_2) + D - c_1 z_1, \quad c_1 > 0 \quad (5.87)$$

die gewünschte Ruhelage $z_{1,d} = 0$ ($x_1 = x_{1,d}$) asymptotisch stabilisiert. Als Lyapunov-Funktion wählt man in diesem Zusammenhang

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 > 0, \quad \dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 < 0. \quad (5.88)$$

Zur Herleitung der Zustandsrückführung und des Parameterschätzers für $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_1, \theta_2]$ wählt man wie zuvor gezeigt eine Lyapunov-Funktion der Form

$$V_a(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.89a)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2], \quad \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) = \begin{bmatrix} \varphi_1(z_2) \\ \varphi_2(z_2) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \quad (5.89b)$$

sowie der positiv definiten Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$. Die Änderung der Lyapunov-Funktion $V_a(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ entlang einer Lösung des Systems (5.86) errechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= z_1 \left(\varphi_0(z_2) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D \right) + \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) \\
&\quad \times \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \dot{z}_2 + c_1 \dot{z}_1 + \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\
&= z_1 \left(\left[\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right] - c_1 z_1 - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \\
&\quad + \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \dot{z}_2 + c_1 \dot{z}_1 + \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \\
&\quad \times \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -c_1 z_1^2 + \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \dot{z}_2 \right. \\
&\quad \left. + c_1 \dot{z}_1 + \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + z_1 \right) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \left(-z_1 \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \\
&= -c_1 z_1^2 + \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \right. \\
&\quad \times \left(-k \left[\varphi_0(z_2) + \underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}}^T - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T}_{=\hat{\boldsymbol{\theta}}^T - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right] x_{1,d} \exp(z_1) - D z_2 + u \right) \\
&\quad \left. + c_1 \left(\left[\varphi_0(z_2) + \underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}}^T - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T}_{=\hat{\boldsymbol{\theta}}^T - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right] - D \right) + \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + z_1 \right\} \\
&\quad + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \left(-z_1 \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \\
&= -c_1 z_1^2 + \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) \right. \\
&\quad \times \left(-k \left[\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right] x_{1,d} \exp(z_1) - D z_2 + u \right) \\
&\quad \left. + c_1 \left(\left[\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right] - D \right) + \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + z_1 \right\} \\
&\quad + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \left\{ -z_1 \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial}{\partial z_2} \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right) k \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) x_{1,d} \exp(z_1) - c_1 \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Aufgabe 5.6. Rechnen Sie die Beziehung (5.90) nach.

Hinweis: Nehmen Sie sich dazu etwas Zeit.

Die Zustandsrückführung erhält man, indem man den einfach unterstrichenen Ausdruck

in (5.90) gleich $-c_2 \left(\varphi_0(z_2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}_{12}(z_2) - D + c_1 z_1 \right)$, $c_2 > 0$ setzt und der Parameterschätzer folgt direkt durch Nullsetzen des zweifach unterstrichenen Ausdrucks in (5.90) und der Tatsache, dass gilt $\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}$.

5.4 PD-Regelgesetz für Starrkörpersysteme

Bezeichnet man mit $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ die verallgemeinerten Lagekoordinaten eines mechanischen Starrkörpersystems, dann erhält man die Bewegungsgleichungen aus den so genannten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} L = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (5.91)$$

mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{q}$, den generalisierten Kräften bzw. Momenten $\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$ und der Lagrange-Funktion L . Bei Starrkörpersystemen ergibt sich die Lagrange-Funktion immer aus der Differenz von kinetischer und potenzieller Energie, also $L = T - V$. Unter der Voraussetzung, dass

- (1) sich die kinetische Energie T als quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ in der Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.92)$$

mit der symmetrischen, positiv definiten generalisierten Massenmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ schreiben lässt, und

- (2) die potenzielle Energie $V(\mathbf{q})$ unabhängig von $\dot{\mathbf{q}}$ ist,

lassen sich die Bewegungsgleichungen (5.91) in der Form

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.93)$$

schreiben. Um dies zu zeigen, setze man T von (5.92) und $V(\mathbf{q})$ in die Euler-Lagrange Gleichungen (5.91) ein und mit

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = \sum_{j=1}^n d_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j, \quad (5.94a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L \right) &= \sum_{j=1}^n d_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} d_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n d_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \end{aligned} \quad (5.94b)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} d_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k} V \quad (5.94c)$$

ergibt sich (5.91) schlussendlich zu

$$\sum_{j=1}^n d_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} d_{ij}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j}_{B} + \frac{\partial}{\partial q_k} V = \tau_k . \quad (5.95)$$

Schreibt man nun für

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial q_j} d_{ki}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j , \quad (5.96)$$

dann folgt der Term B von (5.95) zu

$$B = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial q_i} d_{kj}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial q_j} d_{ki}(\mathbf{q}) - \frac{\partial}{\partial q_k} d_{ij}(\mathbf{q}) \right)}_{c_{ijk}(\mathbf{q})} \dot{q}_i \dot{q}_j , \quad (5.97)$$

wobei die Terme $c_{ijk}(\mathbf{q})$ als *Christoffel-Symbole erster Art* bezeichnet werden. Setzt man weiters $\frac{\partial V}{\partial q_k}(\mathbf{q}) = g_k(\mathbf{q})$, dann erhält man aus (5.95) und (5.97) unmittelbar die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\sum_{j=1}^n d_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(\mathbf{q}) = \tau_k . \quad (5.98)$$

Wie man erkennt, beinhalten die Bewegungsgleichungen (5.98) drei verschiedene Terme - jene, wo die zweite Ableitung der generalisierten Koordinaten auftritt (*Beschleunigungsterme*), jene wo das Produkt $\dot{q}_i \dot{q}_j$ vorkommt (*Zentrifugalterme* für $i = j$ und *Coriolisterme* für $i \neq j$) und diejenigen, die lediglich von \mathbf{q} abhängen (*Potentialkräfte*). Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann auch in Matrixform wie folgt

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.99)$$

mit dem (k, j) -ten Element der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[k, j] = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \quad (5.100)$$

anschreiben.

Aufgabe 5.7. Zeigen Sie, dass die Struktur des mathematischen Modells (5.99) erhalten bleibt, wenn Sie als Eingangsgrößen eines Roboters nicht die generalisierten Momente $\boldsymbol{\tau}$ wählen, sondern annehmen, dass die Aktoren permanenterregte Gleichstrommaschinen sind und als Eingangsgröße die Ankerspannungen $u_{A,k}$, $k = 1, \dots, n$, gewählt wird.

Hinweis: Das mathematische Modell einer permanenterregten Gleichstrommaschine ist in (4.5) zu finden. Nutzen Sie zur Lösung der Aufgabe das zugehörige quasi-stationäre Modell (4.7).

Aufgabe 5.8. Bringen Sie die mathematischen Modelle von Aufgabe 1.6 und 1.7 auf die Struktur von (5.99).

Für die Stabilitätsbetrachtungen gilt nun folgender, für das Weitere wesentlicher, Satz:

Satz 5.3. Die Matrix

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.101)$$

ist schiefssymmetrisch, also

$$n_{jk}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -n_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) . \quad (5.102)$$

Beweis. Zum Beweis schreibe man die (j, k) -te Komponente der Matrix $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in der Form

$$\begin{aligned} n_{jk} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} d_{jk}(\mathbf{q}) - 2c_{ikj}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} d_{jk}(\mathbf{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} d_{jk}(\mathbf{q}) - \frac{\partial}{\partial q_k} d_{ji}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial q_j} d_{ik}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \end{aligned} \quad (5.103)$$

an, dann folgt

$$n_{jk} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial q_k} d_{ji}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial q_j} d_{ik}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \quad (5.104)$$

bzw. durch Vertauschen der Indizes j und k

$$n_{kj} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial q_j} d_{ki}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial q_k} d_{ij}(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_i \quad (5.105)$$

und unter Berücksichtigung der Symmetrie der Massenmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{q})$, d. h. $d_{ki}(\mathbf{q}) = d_{ik}(\mathbf{q})$, erhält man unmittelbar das Ergebnis $n_{jk} = -n_{kj}$. \square

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, wie man mit einem *PD-Regelgesetz* eine konstante Sollposition der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q}_{soll} asymptotisch stabilisieren kann. Dazu wird ein Regelgesetz der Form

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_P \underbrace{(\mathbf{q}_{soll} - \mathbf{q})}_{\mathbf{e}_q} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (5.106)$$

mit den positiv definiten Matrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D angesetzt, wobei die Kompensation der Potenzialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ garantiert, dass $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{soll}$ eine Ruhelage des geschlossenen Kreises ist. Mit der positiv definiten Funktion

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_q^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}_q \quad (5.107)$$

als Lyapunov-Funktion und deren zeitliche Ableitung entlang der Lösung des geschlossenen Kreises (5.99) und (5.106)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}_q^T \mathbf{K}_P \dot{\mathbf{e}}_q \\
 &= \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_P (\mathbf{q}_{soll} - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}_q^T \mathbf{K}_P \underbrace{\dot{\mathbf{e}}_q}_{-\dot{\mathbf{q}}} \\
 &= \dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right)}_{=0} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P (\mathbf{q}_{soll} - \mathbf{q}) - \underbrace{\mathbf{e}_q^T \mathbf{K}_P \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}}_{=0} \\
 &\leq 0
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

folgt unmittelbar aus dem Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle (siehe Satz 3.4) die asymptotische Stabilität der Sollposition \mathbf{q}_{soll} . Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass dieses PD-Regelgesetz (5.106) auch bei langsam veränderlichen Solltrajektorien $\mathbf{q}_{soll}(t)$ (also $\dot{\mathbf{q}}_{soll}(t) \ll$) zu sehr guten Ergebnissen führt.

Aufgabe 5.9. Entwerfen Sie für die mechanischen Systeme von Aufgabe 1.6 und 1.7 einen PD-Regler gemäß (5.106). Wählen Sie geeignete Parameter und führen Sie die Simulationen der geschlossenen Regelkreise in MATLAB/SIMULINK durch.

Aufgabe 5.10. Abbildung 5.2 zeigt einen Roboter mit drei Freiheitsgraden mit den Stabmassen m_i , den Stablängen l_i , den Entfernungen vom Stabanfang zum Massenmittelpunkt l_{ci} sowie den Trägheitsmomenten $I_{xxi}, I_{yyi}, I_{zzz}$ (alle Deviationsmomente werden zu Null angenommen) im körperfesten Koordinatensystem (x_i, y_i, z_i) für $i = 1, 2, 3$. Am Ende des dritten Stabes ist eine Masse m_{Last} befestigt. Die drei Freiheitsgrade des Roboters sind die Drehung um die z_1 -Achse des Stabes 1, die Drehung um die x_2 -Achse des Stabes 2 und die Drehung um die x_3 -Achse des Stabes 3. Die Wirkung der Aktoren wird idealisiert als Moment τ_i in den Verbindungsgelenken modelliert.

Entwerfen Sie einen PD-Regler zur Stabilisierung einer vorgegebenen Sollposition und simulieren Sie den Regelkreis in MATLAB/SIMULINK. Verwenden Sie dazu folgende Zahlenwerte $m_1, m_2, m_3, m_{Last} = 1$ kg, $l_{c1}, l_{c2}, l_{c3} = 1/2$ m, $l_1, l_2, l_3 = 1$ m, $I_{xx1} = I_{yy1} = I_{xx2} = I_{zz2} = I_{xx3} = I_{zz3} = 0.1$ m⁴ und $I_{zz1} = I_{yy2} = I_{yy3} = 0.02$ m⁴.

5.5 Inverse Dynamik (Computed-Torque)

Da die Trägheitsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ in (5.99) positiv definit ist, kann sie auch invertiert werden und demnach führt das *Regelgesetz der inversen Dynamik (Computed-Torque)*

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{5.109}$$

zu einem geschlossenen Kreis der Form

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \tag{5.110}$$

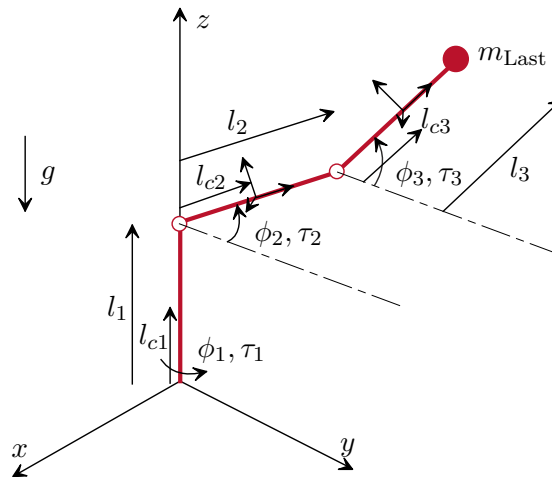


Abbildung 5.2: Roboter mit drei Freiheitsgraden.

mit dem neuen Stelleingang \mathbf{v} . Man kann nun für \mathbf{v} einen Regler so angeben, dass das Fehlersystem zu einer zweifach stetig differenzierbaren Solltrajektorie $\mathbf{q}_{soll}(t)$ global asymptotisch stabil ist. Dazu wird \mathbf{v} in der Form

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_{soll} - \mathbf{K}_0 \underbrace{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{soll})}_{\mathbf{e}_q} - \mathbf{K}_1 \underbrace{(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{soll})}_{\dot{\mathbf{e}}_q} \quad (5.111)$$

mit geeigneten positiv definiten Diagonalmatrizen \mathbf{K}_0 und \mathbf{K}_1 vorgegeben, und die Fehlerdynamik lautet dann

$$\ddot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_q = \mathbf{0} . \quad (5.112)$$

Mit der Wahl der Matrizen \mathbf{K}_0 und \mathbf{K}_1 kann die Fehlerdynamik gezielt eingestellt werden.

Aufgabe 5.11. Entwerfen Sie für die mechanischen Systeme von Aufgabe 1.6 und 1.7 einen Regler nach der Computed-Torque Methode gemäß (5.109) und (5.111). Wählen Sie geeignete Parameter und führen Sie die Simulationen der geschlossenen Regelkreise in MATLAB/SIMULINK durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 5.9.

Nun ist es bekannt, dass die Systemparameter wie Massen, Trägheitsmomente, etc. im Allgemeinen nicht exakt bekannt sind und deshalb auch nicht, wie in (5.109) gezeigt, ideal kompensiert werden können. Die Systeme (5.99) weisen jedoch die Eigenschaft auf, dass man einen Parametervektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ immer so finden kann, dass dieser *linear* in den Bewegungsgleichungen auftritt, es gilt also

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Y}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.113)$$

mit einer aus bekannten Funktionen bestehenden (n, m) -Matrix $\mathbf{Y}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ und einem Vektor $\mathbf{Y}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. Man beachte, dass die Einträge des Parametervektors \mathbf{p} selbst sehr

wohl nichtlinear von den Massen, Längen etc. abhängen können. Setzt man nun in das Regelgesetz (5.109) einen Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ des Parametervektors \mathbf{p} ein, dann lautet das Regelgesetz (5.109) und (5.111)

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_{soll} - \mathbf{K}_0\mathbf{e}_q - \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{e}}_q) + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (5.114)$$

und das Fehlersystem (5.112) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_0\mathbf{e}_q + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{e}}_q) &= \underbrace{\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})}_{\mathbf{Y}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Y}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}} \\ &- \left(\underbrace{\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})}_{\mathbf{Y}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Y}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{p}} \right). \end{aligned} \quad (5.115)$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich die Größen \mathbf{D} und $\hat{\mathbf{D}}$, \mathbf{C} und $\hat{\mathbf{C}}$ sowie \mathbf{g} und $\hat{\mathbf{g}}$ nur insofern unterscheiden, als der Parametervektor \mathbf{p} durch $\hat{\mathbf{p}}$ ersetzt wird, deren Einträge aber funktional gleich bleiben. Unter der Annahme der Invertierbarkeit von $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$ kann man schlussendlich (5.115) in der Form

$$\ddot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_0\mathbf{e}_q + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{e}}_q = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{Y}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{p}} \quad (5.116)$$

bzw. als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{E}_{n,n} \\ -\mathbf{K}_0 & -\mathbf{K}_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{E}_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{p}} \quad (5.117)$$

mit $\tilde{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ und der Einheitsmatrix \mathbf{E} umschreiben. Da die Matrizen \mathbf{K}_0 und \mathbf{K}_1 so vorgegeben wurden, dass das Fehlersystem asymptotisch stabil ist, ist die Matrix \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix und es existiert nach Satz 3.7 zu jeder positiv definiten Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ eine eindeutige positiv definite Lösung \mathbf{P} der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}. \quad (5.118)$$

Um nun für den Schätzwert $\hat{\mathbf{p}}$ des Parameters \mathbf{p} ein *Adaptionsgesetz* zu entwickeln, wird eine Lyapunov-Funktion der Form

$$V(\mathbf{e}_q, \dot{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q^T & \dot{\mathbf{e}}_q^T \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\mathbf{p}} \quad (5.119)$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ angesetzt und deren zeitliche Ableitung entlang einer Lösung berechnet

$$\frac{d}{dt}V = - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q^T & \dot{\mathbf{e}}_q^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} + 2\tilde{\mathbf{p}}^T \left(\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Gamma} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{p}} \right). \quad (5.120)$$

Wird nun angenommen, dass der Parametervektor \mathbf{p} konstant ist (bzw. in der Praxis sich nur hinreichend langsam im Vergleich zur Systemdynamik ändert), dann bedingt das Adaptionsgesetz

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix}, \quad (5.121)$$

dass sich (5.120) zu

$$\frac{d}{dt}V = -\begin{bmatrix} \mathbf{e}_q^T & \dot{\mathbf{e}}_q^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.122)$$

ergibt. Damit ist aber unmittelbar die Stabilität der Ruhelage des Fehlersystems $\mathbf{e}_{q,R} = \dot{\mathbf{e}}_{q,R} = \mathbf{0}$ gezeigt.

Um die asymptotische Stabilität nachzuweisen, bedient man sich des Lemmas von Barbalat (siehe Satz 3.14). Aus der Tatsache, dass $V(\mathbf{e}_q, \dot{\mathbf{e}}_q, \tilde{\mathbf{p}})$ von (5.119) positiv definit und $\frac{d}{dt}V$ von (5.122) negativ semidefinit ist, folgt direkt die Beschränktheit von \mathbf{e}_q , $\dot{\mathbf{e}}_q$ und $\tilde{\mathbf{p}}$. Garantiert man weiters, dass durch die Parameterschätzung die Matrix $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$ positiv definit und damit invertierbar bleibt, dann sind auch die Einträge von $\mathbf{\Phi}$ in (5.116) beschränkt. Aus (5.116) und (5.121) erkennt man dann unmittelbar, dass $\ddot{\mathbf{e}}_q$ und $\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{p}}$ beschränkt sind. Damit ist aber $\frac{d^2}{dt^2}V$ beschränkt und zufolge dessen gilt nach Satz 3.13, dass $\frac{d}{dt}V$ gleichmäßig stetig ist. Dies gestattet die Anwendung des Lemmas von Barbalat und man erhält

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}V = 0 \quad (5.123a)$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_q = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}_q = \mathbf{0}. \quad (5.123b)$$

Nachteilig bei diesem Verfahren ist, dass zur Berechnung von \mathbf{Y} aus (5.113) bzw. $\mathbf{\Phi}$ (5.116) entweder die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{q}}$ gemessen oder durch näherungsweise Differenzieren der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}$ ermittelt werden muss. In der Praxis wird häufig $\ddot{\mathbf{q}}$ einfach durch $\ddot{\mathbf{q}}_{soll}$ ersetzt.

Aufgabe 5.12. Entwerfen Sie für die mechanischen Systeme von Aufgabe 1.6 und 1.7 einen Regler nach der Computed-Torque Methode mit Parameteradaption gemäß (5.114) und (5.121). Wählen Sie eine Abweichung von den gewählten nominellen Parametern um +15% und führen Sie die Simulationen der geschlossenen Regelkreise in MATLAB/SIMULINK durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 5.11, wenn dort die tatsächlichen Parameter um +15% von den nominellen Werten abweichen.

Aufgabe 5.13. Entwerfen Sie für den Roboter mit drei Freiheitsgraden von Abbildung 5.2 einen Trajektorienfolgeregler nach der Computed-Torque Methode und führen Sie für die Endmasse m_{Last} eine Adaption gemäß (5.121) durch. Simulieren Sie den geschlossenen Kreis in MATLAB/SIMULINK für eine Endmasse $m_{Last} = 20$ kg.

Beachten Sie, dass für den nominellen Wert der Endmasse gilt $\hat{m}_{Last} = 1$ kg.

Aufgabe 5.14. Zeigen Sie, dass der Regler nach Slotine und Li

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}_{soll} - \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{soll}) \quad (5.124)$$

und einer positiv definiten Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ zu einem asymptotisch stabilen Fehler-system für $\mathbf{e}_q = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{soll}$ führt.

Hinweis: Führen Sie als Hilfsgröße den verallgemeinerten Regelfehler

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}}_q + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}_q \quad (5.125)$$

ein und setzen Sie als Lyapunov-Funktion

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{s} \quad (5.126)$$

an.

5.6 Literatur

- [5.1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [5.2] M. Krstić, I. Kanellakopoulos und P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [5.3] E. Slotine und W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [5.4] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory (2nd Edition)*. New York: Springer, 1998.
- [5.5] M. W. Spong, *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [5.6] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.