

6 Exakte Linearisierung und Flachheit

Dieses Kapitel befasst sich mit den Grundlagen des Entwurfes von Zustandsrückführungen mithilfe von differentialgeometrischen Methoden. In einem ersten Schritt werden dabei die grundlegenden Ideen und Beziehungen auf Basis einer Darstellung in lokalen Koordinaten dargestellt. Eine genauere differentialgeometrische Deutung der Begriffe erfolgt anschließend im Anhang A.

6.1 Eingangs-Ausgangslinearisierung

Obwohl die hier dargestellte Theorie auch auf allgemeinere nichtlineare Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (6.1a)$$

$$y = h(\mathbf{x}, u) \quad (6.1b)$$

anwendbar ist, wollen wir uns der Einfachheit halber im Weiteren auf die Klasse der *nichtlinearen Systeme mit affinem Eingang* (englischsprachig affine input systems oder kurz AI-systems)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (6.2a)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (6.2b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$, dem Ausgang $y \in \mathbb{R}$, den glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sowie der glatten Funktion $h(\mathbf{x})$ beschränken.

Aufgabe 6.1. Zeigen Sie, dass die Parallelschaltung, die Hintereinanderschaltung, die Inversion und die Rückkopplung von AI-Systemen wiederum auf AI-Systeme führt.

Untersucht man nun die zeitliche Änderung von y entlang einer Lösungskurve von (6.2), so erhält man

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u. \quad (6.3)$$

In (6.3) beschreiben die Ausdrücke $L_{\mathbf{f}}h$ und $L_{\mathbf{g}}h$ die *Lie-Ableitung* der skalaren Funktion $h(\mathbf{x})$ entlang der Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Nimmt man nun an, dass gilt $L_{\mathbf{g}}h(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$, dann kann in einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $\bar{\mathbf{x}}$ das System (6.2) durch die Zustandsrückführung

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})} (-L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + v) \quad (6.4)$$

in ein lineares System erster Ordnung vom neuen Eingang v zum Ausgang y der Form

$$\dot{y} = v \quad (6.5)$$

überführt werden. Ist nun der Ausdruck $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$ von (6.3) identisch Null in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$, so errechnet sich die zeitliche Änderung von $\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ entlang einer Lösungskurve von (6.2) zu

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) = L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u . \quad (6.6)$$

Man beachte an dieser Stelle, dass $L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x})$, $k \in \mathbb{N}$ durch die Rekursion

$$L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{k-1}h(\mathbf{x})), \quad L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad (6.7)$$

definiert ist. Dies führt unmittelbar zur Definition des *relativen Grades* eines AI-Systems (6.2).

Definition 6.1 (Relativer Grad eines Eingrößensystems). Das System (6.2) hat den relativen Grad r an der Stelle $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$, wenn

- (A) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = 0$, $k = 0, \dots, r-2$ für alle \mathbf{x} in der Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ und
- (B) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$.

Man überzeugt sich nun leicht, dass der relative Grad r exakt der Anzahl an zeitlichen Differenzierungen entspricht, die auf den Ausgang y angewandt werden muss, damit erstmalig der Eingang u explizit erscheint. Dazu betrachte man nachfolgende Kette

$$\begin{aligned} y &= h(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})}_{=0} u \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})}_{=0} u \\ &\vdots \\ y^{(r-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-2}h(\mathbf{x})}_{=0} u \\ y^{(r)} &= L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x})u . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Offensichtlich führt das Zustandsregelgesetz

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x})} (-L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + v) \quad (6.9)$$

zu einem linearen Eingangs-Ausgangsverhalten in Form einer r -fachen Integratorkette

$$y^{(r)} = v . \quad (6.10)$$

Beispiel 6.1. Betrachtet man ein lineares zeitinvariantes Eingrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (6.11a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (6.11b)$$

mit einem relativen Grad r , so lauten die Bedingungen (A) und (B) von Definition 6.1

$$(A) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = \dots = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-2} \mathbf{b} = 0 \quad (6.12a)$$

$$(B) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} \neq 0. \quad (6.12b)$$

Da sich die zu (6.11) zugehörige Übertragungsfunktion in der Form

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{s} \right)^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{s} \right)^j \mathbf{b} \quad (6.13)$$

schreiben lässt, erkennt man sofort, dass der erste nichtverschwindende Term für $j = r - 1$ mit s^r im Nenner auftritt. Der relative Grad eines linearen zeitinvarianten Eingrößensystems entspricht also der Graddifferenz zwischen Nenner- und Zählerpolynom der zugehörigen Übertragungsfunktion.

Mit Hilfe eines (lokalen) *Diffeomorphismus* $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ kann das System (6.2) mit dem relativen Grad r auf die so genannte Byrnes-Isidori Normalform transformiert werden. Eine nichtlineare Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) \quad (6.14)$$

mit den Eigenschaften, dass (A) $\Phi(\mathbf{x})$ invertierbar ist für alle \mathbf{x} in einer offenen Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eines Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ (d.h., es existiert ein $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ so, dass gilt $\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$) und (B) sowohl $\Phi(\mathbf{x})$ als auch $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ glatte Abbildungen sind, nennt man lokalen Diffeomorphismus.

Lemma 6.1 (Zustandstransformation auf Byrnes-Isidori Normalform). *Angenommen, dass System (6.2) hat relativen Grad $r \leq n$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$. Wenn r echt kleiner als n*

ist, dann findet man immer $(n - r)$ Funktionen $\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ so, dass mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ gegeben ist. Im Weiteren ist es immer möglich, die Funktionen $\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ so zu wählen, dass gilt $L_{\mathbf{g}}\phi_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = r + 1, \dots, n$, für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

Der Beweis dieses Lemmas ist in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen.

Wendet man nun die nichtlineare Zustandstransformation (6.15) auf das System (6.2) an, dann erhält man unter Zuhilfenahme von (6.8) das transformierte System in *Byrnes-Isidori Normalform*

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = L_{\mathbf{f}}^r h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u = b(\mathbf{z}) + a(\mathbf{z}) u \end{cases} \quad (6.16a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{z}_{r+1} = L_{\mathbf{f}}\phi_{r+1}(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}\phi_{r+1}(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}_{=0} u = q_{r+1}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = L_{\mathbf{f}}\phi_n(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}\phi_n(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}_{=0} u = q_n(\mathbf{z}) . \end{cases} \quad (6.16b)$$

$$y = z_1 \quad (6.16c)$$

Satz 6.1 (Exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung). Angenommen, das System (6.2) hat relativen Grad $r \leq n$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$. Das Zustandsregelgesetz

$$u = \frac{1}{a(\mathbf{z})}(-b(\mathbf{z}) + v) = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x})}(-L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + v) \quad (6.17)$$

transformiert das System (6.2) bzw. (6.16) in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ in ein System mit einem linearen Eingangs-Ausgangsverhalten vom neuen Eingang v zum Ausgang y mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^r} . \quad (6.18)$$

Der Satz ist auf triviale Art und Weise durch Einsetzen von (6.17) in (6.16) zu zeigen. Man überzeugt sich im Weiteren einfach davon, dass durch die Wahl des neuen Eingangs v in der Form

$$v = - \sum_{j=1}^r a_{j-1} z_j + \tilde{v} = - \sum_{j=1}^r a_{j-1} L_{\mathbf{f}}^{j-1} h(\mathbf{x}) + \tilde{v} \quad (6.19)$$

das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ vom Eingang \tilde{v} zum Ausgang y ,

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (6.20)$$

über die Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, r - 1$ frei vorgegeben werden kann.

Beispiel 6.2. Für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ \cos(x_1) \cos(x_2) \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.21a)$$

$$y = x_3 \quad (6.21b)$$

berechne man ein Zustandsregelgesetz nach der Methode der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung. Der relative Grad von (6.21) errechnet sich gemäß

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} x_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} = 0, \quad L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = 1 \neq 0 \quad (6.22)$$

zu $r = 2$. Mit $\phi_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = x_3$ und $\phi_2(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = x_2$ sind die ersten beiden Komponenten der Zustandstransformation gemäß (6.15) auf Byrnes-Isidori Normalform festgelegt. Die dritte Komponente $\phi_3(\mathbf{x})$ wird so gewählt, dass $\Phi(\mathbf{x})$ ein (lokaler) Diffeomorphismus ist und gilt

$$L_{\mathbf{g}}\phi_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi_3(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \cos(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_3(\mathbf{x}) \cos(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_3(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.23)$$

Eine genauere Untersuchung der partiellen Differentialgleichung (6.23) zeigt, dass jede Funktion mit dem Argument $\sin(x_2) - x_1$ eine geeignete Lösung darstellt. Im Weiteren bestätigt die Jacobi-Matrix von $\Phi(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ \sin(x_2) - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \cos(x_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

dass $\Phi(\mathbf{x})$ ein Diffeomorphismus ist. Das System (6.21) in Byrnes-Isidori Normalform lautet

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_g L_f h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))u = b(\mathbf{z}) + a(\mathbf{z})u \end{cases} \quad (6.25a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{z}_3 &= L_f \phi_3(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) = q_3(\mathbf{z}) \end{cases} \quad (6.25b)$$

$$y = z_1 \quad (6.25c)$$

mit

$$L_f^2 h(\mathbf{x}) = \cos(x_1) \cos(x_2) , \quad (6.26a)$$

$$L_g L_f h(\mathbf{x}) = 1 , \quad (6.26b)$$

$$L_f \phi_3(\mathbf{x}) = x_1^3 + \cos(x_1)(\cos(x_2))^2 \quad (6.26c)$$

und der inversen Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \sin(z_2) - z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} . \quad (6.27)$$

Dementsprechend lautet (6.25)

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \cos(\sin(z_2) - z_3) \cos(z_2) + u \end{cases} \quad (6.28a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{z}_3 &= (\sin(z_2) - z_3)^3 + \cos(\sin(z_2) - z_3)(\cos(z_2))^2 . \end{cases} \quad (6.28b)$$

Man beachte, dass für die Berechnung des Zustandsregelgesetzes (6.17), (6.19) der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung die Transformation auf Byrnes-Isidori Normalform (6.28) nicht notwendig ist. Man kann mit (6.17), (6.19) direkt das Regelgesetz in den Originalkoordinaten \mathbf{x} berechnen

$$u = -\cos(x_1) \cos(x_2) - a_0 x_3 - a_1 x_2 + \tilde{v} . \quad (6.29)$$

Auffällig bei dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass für $r < n$ das Eingangs-Ausgangsverhalten des durch das Zustandsregelgesetz (6.17) rückgekoppelte System durch ein System niedrigerer Ordnung (nämlich r) als die Systemordnung n beschrieben wird, vergleiche (6.2) bzw. (6.16) mit (6.18) bzw. (6.20). Aus den Grundlagen der Regelungstheorie linearer Systeme weiß man, dass dieser Unterschied in der Dimension des Zustandsmodells und des Eingangs-Ausgangsmodells auf die Nichterreichbarkeit und/oder Nichtbeobachtbarkeit des Systems zurückzuführen ist. Im Weiteren ist bekannt, dass ein instabiles nichterreichbares und/oder nichtbeobachtbares Teilsystem dazu führt, dass die Regelstrecke mit der vorliegenden Aktor-Sensorkonfiguration

durch keinen wie auch immer entworfenen Regler stabilisiert werden kann. Offensichtlich führt das Zustandsregelgesetz (6.17), (6.19) nur dann zu einem stabilen geschlossenen Kreis, wenn das – wie sich im kommenden Abschnitt noch zeigen wird – nichtbeobachtbare Teilsystem Σ_2 gemäß (6.16) (asymptotisch) stabil ist.

6.2 Nullodynamik

Im ersten Schritt soll das so genannte *Output-Zeroing Problem* erläutert werden. Dabei stellt man sich die Frage, wie der Anfangszustand \mathbf{x}_0 und die Stellgröße $u(t)$ des Systems (6.2) aussehen müssen, damit der Ausgang $y(t)$ für alle Zeiten t identisch Null ist. Diese Frage kann sofort mit Hilfe der Byrnes-Isidori Normalform (6.16) beantwortet werden. Dazu fasst man zur kompakteren Schreibweise die Zustände des Teilsystems Σ_1 und Σ_2 in zwei Vektoren der Form

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

zusammen und schreibt das System (6.16) nochmals in einer etwas kompakteren Darstellung an

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \end{cases} \quad (6.31a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{cases} \quad (6.31b)$$

$$y = z_1 . \quad (6.31c)$$

Es ist nun unmittelbar einsichtig, dass aus $y(t) = h(\mathbf{x}) = z_1 \equiv 0$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = z_2 \equiv 0 , \\ \ddot{y} &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = z_3 \equiv 0 , \\ &\dots \\ y^{(r-1)} &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}) = z_r \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

für alle Zeiten t . Im Weiteren muss die Stellgröße $u(t)$ folgender Bedingung

$$b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) + a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})u = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}(t))}{a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}(t))} \quad (6.33)$$

genügen, damit auch $\dot{z}_r = \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) \equiv 0$ für alle Zeiten t gilt, siehe (6.31). Dabei ist mit $\boldsymbol{\eta}(t)$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) \quad (6.34)$$

für den Anfangszustand $\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0$ beliebig gemeint. Die Differentialgleichung (6.34) beschreibt nun jene so genannte *interne Dynamik* des Systems, die dadurch entsteht, dass der Anfangswert und die Eingangsgröße in (6.31) bzw. (6.2) so gewählt wurden, dass der Ausgang $y(t)$ für alle Zeiten t identisch verschwindet. Diese interne Dynamik (6.34) wird auch als *Nulldynamik* bezeichnet. Geometrisch lässt sich dies so interpretieren, dass die Trajektorien des Systems (6.2) für die Stellgröße $u(t)$ nach (6.33) für alle Zeiten auf der Mannigfaltigkeit $M_C = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \dots, L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) = 0 \}$ verbleiben, sofern der Anfangszustand \mathbf{x}_0 in M_C liegt.

Beispiel 6.3. Man betrachte das lineare zeitinvariante Eingrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (6.35a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (6.35b)$$

mit dem relativen Grad r und der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad b_{n-r} \neq 0. \quad (6.36)$$

Liegt das System in 1-ter Standardform (Steuerbarkeitsnormalform) vor, so lauten die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} und \mathbf{c}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Um nun das System (6.37) auf Byrnes-Isidori Normalform zu transformieren, führt man gemäß (6.15) folgende (lineare) Zustandstransformation ein

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{x} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Man überzeugt sich leicht, dass \mathbf{T} regulär ist, denn \mathbf{T} hat folgende Struktur

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} (**) \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n-r \text{ Spalten}} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{pmatrix} b_{n-r} & 0 & 0 & \dots \\ * & b_{n-r} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & b_{n-r} \end{pmatrix} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{r \text{ Spalten}} \end{matrix} \end{array} \right]. \quad (6.39)$$

Das System (6.35) im transformierten Zustand \mathbf{z} lautet demnach (Byrnes-Isidori Normalform)

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^r \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{b} u \end{cases} \quad (6.40a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (6.40b)$$

$$y = z_1. \quad (6.40c)$$

Aus (6.35) und (6.37) erkennt man sofort, dass für die Komponenten von $\boldsymbol{\eta}^T = [z_{r+1}, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_{n-r}]$ gilt

$$\dot{x}_j = x_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-r \quad (6.41)$$

und aus der Beziehung $z_1 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = b_0 x_1 + \dots + b_{n-r} x_{n-r+1}$ lässt sich x_{n-r+1} in der Form (man beachte $b_{n-r} \neq 0$ nach (6.36))

$$x_{n-r+1} = \frac{1}{b_{n-r}} (z_1 - b_0 x_1 - \dots - b_{n-r-1} x_{n-r}) \quad (6.42)$$

berechnen. Damit sind die Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{Q} des Teilsystems Σ_2 von (6.40) wie folgt

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{b_0}{b_{n-r}} & -\frac{b_1}{b_{n-r}} & \dots & -\frac{b_{n-r-2}}{b_{n-r}} & -\frac{b_{n-r-1}}{b_{n-r}} \end{bmatrix}, \quad (6.43a)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{b_{n-r}} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.43b)$$

gegeben. Gemäß (6.34) lautet die Nulldynamik des Systems (6.40)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \quad (6.44a)$$

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0, \quad (6.44b)$$

wobei das charakteristische Polynom der Matrix \mathbf{Q} wie folgt

$$b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + b_{n-r} s^{n-r} \quad (6.45)$$

aussieht. Man erkennt also, dass die Eigenwerte der Nulldynamik (6.44) für den Ausgang y identisch zu den Nullstellen der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ gemäß (6.36) sind.

Aufgabe 6.2. Berechnen und analysieren Sie die Nulldynamik des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.46a)$$

$$y = x_1. \quad (6.46b)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei für das Weitere angenommen, dass $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ eine Ruhelage des Systems (6.2) für $u = u_R = 0$ ist, d.h. $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, und dass gilt $h(\mathbf{0}) = 0$. Die Ruhelage $\mathbf{z}_R = [\boldsymbol{\xi}_R^T, \boldsymbol{\eta}_R^T]^T = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_R)$ des zugehörigen Systems in Byrnes-Isidori Normalform (6.16) lautet dann $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ (vergl. (6.15), (6.30)) und $\boldsymbol{\eta}_R$ errechnet sich als Ruhelage der Nulldynamik (vergl. (6.34))

$$\mathbf{0} = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_R). \quad (6.47)$$

Definition 6.2 (Phasenminimales nichtlineares System). Man nennt nun das System (6.2) lokal asymptotisch (exponentiell) phasenminimal an $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, wenn die Ruhelage $\boldsymbol{\eta}_R$ der Nulldynamik (6.34) lokal asymptotisch (exponentiell) stabil ist.

Man beachte an dieser Stelle, dass gemäß Definition 6.2 die Eigenschaft der Phasenminimalität von der Ruhelage \mathbf{x}_R abhängt und sich somit für ein und dasselbe System von Ruhelage zu Ruhelage auch unterscheiden kann. Betrachtet man nun das System (6.2) in Byrnes-Isidori Normalform (6.31)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{6.48}$$

und setzt das Regelgesetz (6.17) und (6.19) mit $\tilde{v} = 0$ ein, also

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \left(-b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \sum_{j=1}^r a_{j-1} \xi_j \right) \\ &= \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x})} \left(-L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^r a_{j-1} L_{\mathbf{f}}^{j-1} h(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \tag{6.49}$$

so ergibt sich der geschlossene Kreis zu

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}_r \boldsymbol{\xi} \tag{6.50a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \tag{6.50b}$$

$$y = z_1 = \xi_1 \tag{6.50c}$$

mit

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_{r-2} & -a_{r-1} \end{bmatrix}. \tag{6.50d}$$

Man erkennt unmittelbar, dass das Teilsystem $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ über den Ausgang y *nicht beobachtbar* ist, denn der Zustand $\boldsymbol{\eta}$ hat auf die Ausgangsgröße y weder einen direkten Einfluss noch einen indirekten Einfluss über den Zustand $\boldsymbol{\xi}$. Wählt man nun die Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, r-1$ in (6.50) so, dass \mathbf{A}_r eine Hurwitzmatrix ist, und ist das System (6.2) gemäß Definition 6.2 lokal exponentiell phasenminimal an $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ (entspricht $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_R$), d.h. sämtliche Eigenwerte von $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_R)$ haben echt negativen

Realteil, dann ist auch die Dynamikmatrix des um die Ruhelage $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_R$ linearisierten geschlossenen Kreises (6.50)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\xi} \\ \Delta \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_R) & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\xi} \\ \Delta \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

eine Hurwitzmatrix.

Aufgabe 6.3. Zeigen Sie, dass die Dynamikmatrix von (6.51) eine Hurwitzmatrix ist, wenn \mathbf{A}_r und $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_R)$ Hurwitzmatrizen sind.

Nach Satz 3.8 ist damit die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ bzw. $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_R$ des geschlossenen Kreises (6.50) lokal asymptotisch (exponentiell) stabil.

Offensichtlich führt die Methode der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung für das System (6.2) nur dann zu einem stabilen geschlossenen Kreis, wenn das System asymptotisch (exponentiell) phasenminimal ist. Diese Eigenschaft kann nun sehr einfach mit Hilfe der indirekten Methode von Lyapunov nach Satz 3.8 ohne explizite Berechnung der Nulldynamik überprüft werden. Dazu schreibe man das um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, $u_R = 0$ linearisierte System (6.2) in der Form

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u \quad (6.52a)$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} \quad (6.52b)$$

mit

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_R) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_R) u_R, \quad (6.52c)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_R), \quad (6.52d)$$

$$\mathbf{c}^T = \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}_R) \quad (6.52e)$$

an. Die Eigenwerte der linearisierten Nulldynamik entsprechen nun gerade den Nullstellen der Übertragungsfunktion (siehe u.a. auch (6.36), (6.44) und (6.45))

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (6.53)$$

Nach Satz 3.8 ist das System lokal asymptotisch (exponentiell) phasenminimal an $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, $u_R = 0$, wenn sämtliche Nullstellen von $G(s)$ von (6.53) echt negativen Realteil haben und es ist lokal nicht phasenminimal an $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, $u_R = 0$, wenn zumindest eine Nullstelle von $G(s)$ in der rechten offenen komplexen Halbebene liegt.

6.3 Eingangs-Zustandslinearisierung

Das Problem der Nulldynamik tritt offensichtlich nicht auf, wenn der relative Grad $r = n$ ist. Angenommen, das System (6.2) mit dem Ausgang $y = h(\mathbf{x})$ hat den relativen Grad

$r = n$, dann lässt sich das System durch die Zustandstransformation (Diffeomorphismus) (vergl. dazu (6.15))

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

und die Stellgrößentransformation (vergl. dazu (6.17))

$$u = \frac{1}{a(\mathbf{z})}(-b(\mathbf{z}) + v) = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x})}(-L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}) + v) \quad (6.55)$$

auf ein im neuen Zustand \mathbf{z} exakt lineares System der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (6.56)$$

mit der neuen Eingangsgröße v transformieren. Man bezeichnet (6.56) oft auch als die *Brunovsky Normalform* und \mathbf{z} den *Brunovsky Zustand* des Systems (6.2).

Auch wenn die Ausgangsgröße $y = h(\mathbf{x})$ des Systems (6.2) einen relativen Grad $r < n$ hat, kann man sich die Frage stellen, ob eine fiktive Ausgangsgröße $y = \lambda(\mathbf{x})$ existiert, die einen relativen Grad $r = n$ besitzt. Nach Definition 6.1 muss $\lambda(\mathbf{x})$ folgenden Bedingungen genügen:

- (A) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x}) = 0$, $k = 0, \dots, n - 2$ für alle \mathbf{x} in der Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ und
- (B) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}\lambda(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$.

Wie man erkennt, muss $\lambda(\mathbf{x})$ mehrere *partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnung* erfüllen, da beispielsweise der Ausdruck $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ folgende Form

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \lambda(\mathbf{x}) \right) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (6.57)$$

hat. Man kann nun die partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung für $\lambda(\mathbf{x})$ in ein *System von partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung* vom so genannten *Frobenius-Typ* überführen. Dazu muss der Begriff der *Lie-Klammer* $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ bzw. der Lie-Ableitung $L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ eingeführt werden, welche in Koordinaten folgendermaßen definiert ist

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (6.58)$$

Analog zur k -fach wiederholten Lie-Ableitung einer skalaren Funktion (6.7) lässt sich auch die k -fache Lie-Klammer rekursiv in der Form

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}](\mathbf{x}), \quad \text{ad}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (6.59)$$

mit dem Operator ad definieren. Mit Hilfe der Beziehung

$$L_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}]} \lambda(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) \quad (6.60)$$

lassen sich die pDGlen höherer Ordnung

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ &\dots \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-2} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\bar{\mathbf{x}}) &\neq 0 \end{aligned} \quad (6.61)$$

in ein System von pDGlen erster Ordnung vom Frobenius-Typ

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ &\dots \\ L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x}) &= 0, \\ L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\bar{\mathbf{x}}) &\neq 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

umschreiben. Man erkennt unmittelbar, dass aus $L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = 0$ und $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) = 0$ folgt

$$L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} \underbrace{L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x})}_{=0} - \underbrace{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x})}_{=0} = 0. \quad (6.63)$$

Rekursive Anwendung von (6.60) zeigt, dass aus $L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = 0$, $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) = 0$ und $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 \lambda(\mathbf{x}) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x}) &= L_{[\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]} \lambda(\mathbf{x}) \\ &= L_{\mathbf{f}} \underbrace{L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x})}_{=0} - \underbrace{L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x})}_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})]} \\ &= - \left(L_{\mathbf{f}} \underbrace{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x})}_{=0} - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) \right) \\ &= \underbrace{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 \lambda(\mathbf{x})}_{=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Alle weiteren Beziehungen lassen sich auf analoge Art und Weise zeigen. Die Existenz einer Lösung $\lambda(\mathbf{x})$ des Systems von pDGlen erster Ordnung (6.62) kann nun mithilfe des folgenden Satzes überprüft werden.

Satz 6.2 (Existenz eines Ausgangs mit relativem Grad $r = n$). *Es existiert genau dann eine Lösung $\lambda(\mathbf{x})$ des Systems von pDGlen erster Ordnung (6.62) in einer Umgebung \mathcal{U} des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$, wenn*

- (A) die Matrix $[\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}](\bar{\mathbf{x}})$ den Rang n besitzt und
- (B) die Distribution $D = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$ in einer Umgebung \mathcal{U} des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv ist.

In diesem Fall nennt man das System auch *exakt eingangs-zustandslinearisierbar* in der Umgebung des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Theorem von Frobenius*, siehe Anhang A, und ist in der am Ende angeführten Literatur nachzulesen. Zur Erinnerung sei angemerkt, dass man eine Distribution D *involutiv* nennt, wenn für jedes Paar von Vektorfeldern $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \in D$ gilt $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2](\mathbf{x}) \in D$.

Beispiel 6.4. Als einfaches Beispiel betrachte man den flexiblen Roboterarm von Abbildung 6.1.

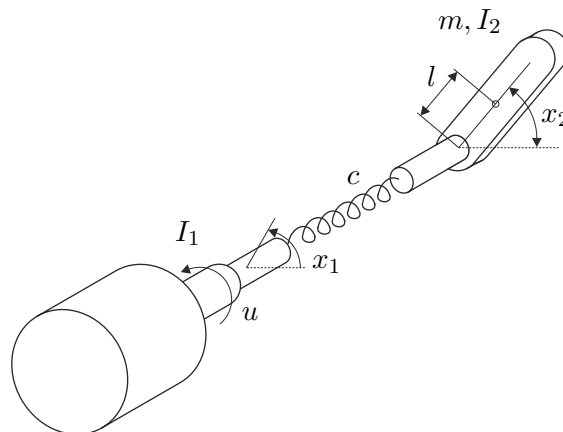


Abbildung 6.1: Einfacher elastisch gekoppelter Roboterarm.

Wählt man als Zustandsgrößen die Winkel x_1 und x_2 sowie die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{x}_1 = x_3$ und $\dot{x}_2 = x_4$ des Antriebsmotors und des Roboterarmes und als Eingangsgröße das Motormoment u , so erhält man die Bewegungsgleichungen in der

Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{c}{I_1}x_1 + \frac{c}{I_1}x_2 - \frac{d_1}{I_1}x_3 \\ \frac{c}{I_2}x_1 - \frac{c}{I_2}x_2 - \frac{mgl}{I_2}\cos(x_2) - \frac{d_2}{I_2}x_4 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{g}(\mathbf{x})} u. \quad (6.65)$$

Dabei bezeichnet c die lineare Steifigkeitskonstante der elastischen Kopplung, m die Masse des Roboterarmes, g die Gravitationskonstante, l den Abstand von der Antriebsachse zum Schwerpunkt des Roboterarmes und I_k bzw. d_k , $k = 1, 2$ beschreiben die Massenträgheitsmomente sowie die viskosen Reibungskonstanten des Antriebsmotors und des Roboterarmes.

Um nun zu untersuchen, ob das System (6.65) exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist, müssen die Bedingungen (A) und (B) von Satz 6.2 überprüft werden. Eine einfache Rechnung zeigt, dass gilt

$$\begin{aligned} \text{rang}\left(\left[\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}\right]\right) &= \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{I_1} & -\frac{d_1}{I_1^2} & \frac{c}{I_1^2} - \frac{d_1^2}{I_1^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{I_2 I_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{d_1}{I_1^2} & \frac{d_1^2}{I_1^3} - \frac{c}{I_1^2} & \frac{d_1^3}{I_1^4} - \frac{2cd_1}{I_1^3} \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_2 I_1} & \frac{c}{I_2 I_1} \left(\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2}\right) \end{bmatrix}\right) \\ &= 4 \end{aligned} \quad (6.66)$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Da sämtliche Vektorfelder \mathbf{g} , $\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$, $\text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}$ und $\text{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}$ unabhängig von \mathbf{x} sind, sind sämtliche Lie-Klammern identisch Null (vergl. (6.58)), weshalb die Distribution $D = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}\}$ sicherlich involutiv ist. Damit ist nach Satz 6.2 die Existenz einer Lösung $\lambda(\mathbf{x})$ des Systems von pDGlen erster Ordnung (vergl.

(6.62))

$$L_{\mathbf{g}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.67a)$$

$$L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x})}\lambda(\mathbf{x}) = -\frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\mathbf{x}) + \frac{d_1}{I_1^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.67b)$$

$$L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x})}\lambda(\mathbf{x}) = -\frac{d_1}{I_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\mathbf{x}) + \left(\frac{d_1^2}{I_1^3} - \frac{c}{I_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\mathbf{x}) + \frac{c}{I_2 I_1} \frac{\partial}{\partial x_4} \lambda(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.67c)$$

$$L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}(\mathbf{x})}\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{c}{I_1^2} - \frac{d_1^2}{I_1^3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\mathbf{x}) - \frac{c}{I_2 I_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda(\mathbf{x}) - \left(\frac{2cd_1}{I_1^3} - \frac{d_1^3}{I_1^4} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\mathbf{x}) + \frac{c}{I_2 I_1} \left(\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_4} \lambda(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \quad (6.67d)$$

für ein $\beta(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$ garantiert. Wählt man $\beta(\mathbf{x}) = -\frac{c}{I_2 I_1} \neq 0$, dann erhält man als Lösung von (6.67) $\lambda(\mathbf{x}) = x_2$. Diese Lösung kann man auch direkt aus den Bewegungsgleichungen (6.65) erraten, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass man jene Größe mit relativem Grad $r = n = 4$ sucht, die man $r = n = 4$ mal differenzieren muss, damit erstmalig die Eingangsgröße u explizit erscheint.

Aufgabe 6.4. Zeigen Sie, dass das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.68)$$

exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist und berechnen Sie alle möglichen Ausgänge mit dem relativen Grad $r = n = 3$.

Für das Folgende nehme man an, dass der Ausgang $y = h(\mathbf{x})$ des Systems (6.2) den relativen Grad $r = n$ hat. Gemäß (6.8) lassen sich dann die Ausgangsgröße y und deren zeitliche Ableitungen wie folgt anschreiben

$$\begin{aligned} y &= h(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \\ y^{(n)} &= L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x})u. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Da die Zustandstransformation (6.54) regulär ist, kann damit der gesamte Zustand \mathbf{x} durch die Ausgangsgröße y und deren zeitliche Ableitungen bis zur Ordnung $(n - 1)$

parametriert werden, d.h.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]. \quad (6.70)$$

Im Weiteren lässt sich aus der letzten Zeile von (6.69) die Eingangsgröße u ebenfalls durch die Ausgangsgröße y in der Form

$$u = \boldsymbol{\psi}_2(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = \frac{y^{(n)} - \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^n h(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))}{\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))}, \quad \mathbf{z}^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}] \quad (6.71)$$

parametrieren.

Ein dynamisches System der Form (6.2), deren Systemgrößen (Zustände und Eingangsgrößen) sich alle durch eine Ausgangsgröße y und deren zeitliche Ableitungen parametrieren lassen, wird als *differenziell flach* bezeichnet. Den Ausgang y nennt man in diesem Zusammenhang auch *flachen Ausgang*. Eine genauere Definition flacher Systeme wird noch im späteren Teil dieses Kapitels gegeben. Aus dem bisher Gesagten ist aber bereits unmittelbar nachvollziehbar, dass im Eingrößenfall ein exakt eingangs-zustandslinearisierbares System der Form (6.2) auch differenziell flach ist und jeder Ausgang mit relativem Grad $r = n$ einem flachen Ausgang des Systems entspricht. Satz 6.2 gibt somit notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass das Eingrößensystem (6.2) differenziell flach ist und durch (6.70) und (6.71) ist die Parametrierung der Systemgrößen als Funktion des flachen Ausgangs und dessen Zeitableitungen bis zur Ordnung n gegeben.

6.4 Trajektorienfolgeregelung

Im ersten Schritt nehme man an, dass der Ausgang $y \in \mathbb{R}$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.72a)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (6.72b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$, den glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sowie der glatten Funktion $h(\mathbf{x})$ den relativen Grad $r = n$ besitzt und somit einen flachen Ausgang des Systems repräsentiert. Die zu lösende Trajektorienfolgeregelungsaufgabe besteht nun darin, einen Regler so zu entwerfen, dass der Ausgang y einer vorgegebenen, hinreichend oft stetig differenzierbaren (zumindest n -fach) Solltrajektorie $y_d(t)$ folgt. Gemäß Lemma 6.1 lässt sich das System (6.72) auf Byrnes-Isidori-Normalform

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^n h(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})) + \mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))u \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (6.73)$$

mit dem neuen Zustand

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

transformieren.

Unter der Voraussetzung, dass der gesamte Zustand \mathbf{x} messtechnisch erfasst werden kann, führt das Regelgesetz

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} \left(y_d^{(n)}(t) - L_f^n h(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n a_{j-1} \left(\underbrace{L_f^{j-1} h(\mathbf{x})}_{\substack{(6.69) \\ = y^{(j-1)}}} - y_d^{(j-1)}(t) \right) \right) \quad (6.75)$$

für geeignet gewählte Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n-1$ zu einer exponentiell stabilen Fehlerdynamik. Setzt man nämlich das Regelgesetz (6.75) in (6.73) ein, dann lautet die Dynamik des Trajektorienfehlers $z_{1e} = y - y_d$ unter Verwendung von (6.74)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_{1e} \\ \vdots \\ \dot{z}_{ne} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} z_{1e} \\ \vdots \\ z_{ne} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_e}, \quad (6.76)$$

wobei a_j , $j = 0, \dots, n-1$ die frei wählbaren Koeffizienten der Fehlerdynamikmatrix \mathbf{A}_e darstellen.

In den meisten praktischen Anwendungen steht nicht der gesamte Zustand messtechnisch zur Verfügung. Im Folgenden werden daher zwei Verfahren vorgestellt, wie dieses Problem gelöst werden kann.

6.4.1 Exakte Feedforwardlinearisierung mit Ausgangsstabilisierung

Für den Fall, dass überhaupt keine Messung vorliegt, kann auf Basis der flachheitsbasierten Parametrierung von (6.70) und (6.71) eine *flachheitsbasierte Steuerung* $u_d(t)$ in der Form

$$\mathbf{x}_d = \psi_1(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}) = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_d), \quad \mathbf{z}_d^T = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}] \quad (6.77a)$$

$$u_d = \psi_2(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n)}) = \frac{y_d^{(n)} - L_f^n h(\mathbf{x}_d)}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x}_d)} \quad (6.77b)$$

entworfen werden. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 6.3 (Exakte Feedforwardlinearisierung). Wenn die gewünschte Solltrajektorie $y_d(t)$ konsistent mit den Anfangsbedingungen \mathbf{x}_0 des Systems (6.72) ist, d.h. $\mathbf{x}_0 = \psi_1(y_d(0), \dot{y}_d(0), \dots, y_d^{(n-1)}(0)) = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_0)$, das mathematische Modell der Strecke exakt ist, keine Parameterschwankungen auftreten und keine Störungen auf das System wirken, dann führt die flachheitsbasierte Steuerung $u = u_d(t)$ gemäß (6.77) angewandt auf das System (6.72) für alle Zeiten $t \geq 0$ über die Zustandstransformation $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ zu einem identischen Verhalten wie das System

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.78a)$$

$$\dot{z}_n = y_d^{(n)} \quad (6.78b)$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \Phi(\mathbf{x}_0)$. Die flachheitsbasierte Steuerung $u = u_d(t)$ wird auch als exakte Feedforwardlinearisierung bezeichnet. Sind die Anfangsbedingungen nicht konsistent, aber \mathbf{x}_0 ist hinreichend nahe bei $\Phi^{-1}(\mathbf{z}_0)$, und weichen die Modellparameter von den Streckenparametern nur hinreichend wenig ab, dann hat das System (flachheitsbasierte Steuerung (6.77) angewandt auf (6.72))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \frac{y_d^{(n)} - \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}_d)}{\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}_d)}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.79)$$

für ein finites Zeitintervall eine eindeutige Lösung und bleibt hinreichend nahe an der Lösung von (6.78).

Für den Beweis dieses Satzes wird auf die am Ende angeführte Literatur verwiesen.

Um nun Modellungenauigkeiten sowie auf das System wirkende Störungen unterdrücken zu können, wird die flachheitsbasierte Steuerung um eine Regelung erweitert. Dazu wird die Stellgröße u in der Form

$$u = u_d + u_e \quad (6.80)$$

mit dem Steuerungsanteil u_d und dem Regleranteil u_e angesetzt. Nimmt man nun an, dass die Größe

$$w = l(\mathbf{x}) \quad (6.81)$$

messtechnisch zur Verfügung steht, dann kann man versuchen, das Trajektorienfehlersystem beispielsweise durch einen PI-Regler der Form

$$u_e = k_p w_e + k_i \int w_e dt, \quad w_e = w_d - w, \quad w_d = l(\mathbf{x}_d) \quad (6.82)$$

mit geeigneten Reglerparametern k_p und k_i sowie $\mathbf{x}_d = \psi_1(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)})$ gemäß (6.77) zu stabilisieren. Die zugehörige Regelkreisstruktur ist in Abbildung 6.2 in Form eines Blockschaltbildes dargestellt. Diese wird in der Literatur häufig auch als *Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur* bezeichnet.

Diese Vorgehensweise wird in der Praxis häufig angewandt und kann dadurch gerechtfertigt werden, dass die flachheitsbasierte Steuerung $u_d(t)$ bereits bewirkt, dass sich die

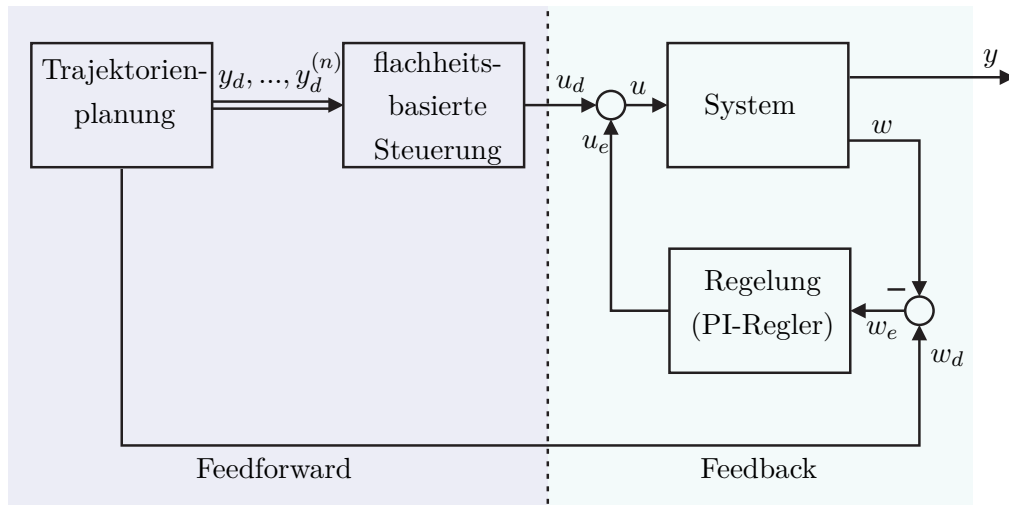


Abbildung 6.2: Blockschaltbild der Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur.

Systemtrajektorien $\mathbf{x}(t)$ (und damit auch $w = l(\mathbf{x}(t))$) hinreichend nahe an den Solltrajektorien $\mathbf{x}_d(t)$ (und damit auch $w_d = l(\mathbf{x}_d(t))$) befinden und damit ein linearer Regler ausreicht, um das Fehlersystem zu stabilisieren. Durch Einsetzen von (6.77) und (6.82) in (6.80) und anschließend in (6.73) erkennt man unmittelbar, dass das Trajektorienfehlersystem

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{1e} &= z_{2e} \\
 \dot{z}_{2e} &= z_{3e} \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{ne} &= \mathbf{L}_f^n h(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \left(\frac{y_d^{(n)} - \mathbf{L}_f^n h(\mathbf{x}_d)}{\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} h(\mathbf{x}_d)} + k_p (l(\mathbf{x}_d) - l(\mathbf{x})) + k_i w_{eI} \right) - y_d^{(n)} \\
 \dot{w}_{eI} &= l(\mathbf{x}_d) - l(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

mit $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_e + \mathbf{z}_d)$, $\mathbf{x}_d = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_d)$, $z_{je} = z_j - y_d^{(j-1)}(t)$, $j = 1, \dots, n$, nichtlinear und zeitvariant ist. Die Stabilitätsuntersuchung des Systems (6.83) erweist sich im Allgemeinen als äußerst schwierig. Eine mögliche, nicht wesentlich einfachere Variante, welche auch zur Auslegung der Reglerparameter k_p und k_i herangezogen werden kann, besteht darin, das System (6.83) um die gewünschte Ruhelage $\mathbf{z}_e = \mathbf{0}$ zu linearisieren und die Stabilität des resultierenden linearen, zeitvarianten Systems zu untersuchen.

Beispiel 6.5. Als Anwendungsbeispiel betrachte man die Querdynamikregelung (ESP) eines Personenkraftwagens. Die Regelungsstrategie baut dabei auf dem so genannten nichtlinearen Einspurmodell nach Abbildung 6.3 auf.

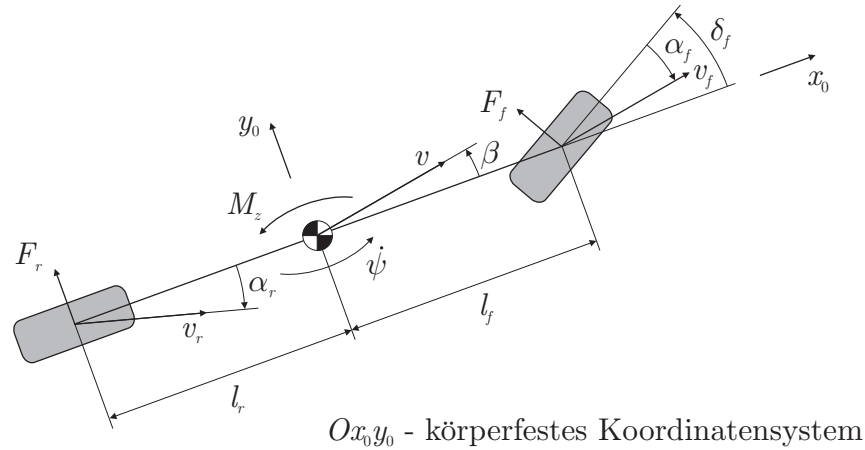


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung des Einspurmodells.

Man nimmt dabei an, dass der Schwerpunkt des Fahrzeugs in Fahrbahnhöhe liegt und somit die am Schwerpunkt angreifenden Kräfte die Radlasten nicht ändern, was dazu führt, dass man die beiden Räder an Vorder- und Hinterachse zu je einem Einzelrad zusammenfassen kann. Im Weiteren wird das gesamte Fahrzeug als Starrkörper betrachtet, es werden keine Nick- und Wankbewegungen berücksichtigt sowie die Vertikaldynamik des Fahrzeugs und die Raddynamik werden vernachlässigt. Bezeichnet man mit v_x und v_y die Komponenten der Fahrzeuggeschwindigkeit v bezüglich des körperfesten Koordinatensystems $0x_0y_0$ und mit $\dot{\psi}$ die Gierrate (Drehwinkelgeschwindigkeit um die Hochachse des Fahrzeugs), so errechnen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\frac{d}{dt}v_y = \frac{1}{m}(F_f(\alpha_f)\cos(\delta_f) + F_r(\alpha_r)) - v_x\dot{\psi} \quad (6.84a)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\psi} = \frac{1}{I_z}(F_f(\alpha_f)l_f\cos(\delta_f) - F_r(\alpha_r)l_r + M_z). \quad (6.84b)$$

Dabei sind mit m die Gesamtmasse des Fahrzeugs, mit I_z das Massenträgheitsmoment um die Hochachse und mit l_f bzw. l_r die Abstände zwischen Schwerpunkt und Vorder- bzw. Hinterachse gegeben. Durch die Gas- und Bremspedalstellung stellt der Fahrer die Fahrzeuglängsgeschwindigkeit v_x ein, welche für die Querdynamikregelung in weiterer Folge als konstant angenommen wird. Im Weiteren wird durch den vom Fahrer vorgegebenen und der Messung zugänglichen Lenkwinkel über die Lenkinematik der Vorderradeinschlag δ_f festgelegt. Die auf die Reifen wirkenden Seitenkräfte F_f und F_r bewirken, dass die Reifen nicht gerade aus sondern seitlich weg rollen. Der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Reifens und der Fahrzeugbewegung wird als *Schräglaufwinkel* bezeichnet und berechnet sich für Vorder- und Hinterachse zu

$$\alpha_f = \arctan\left(\frac{v_y + \dot{\psi}l_f}{v_x}\right) - \delta_f \quad \text{und} \quad \alpha_r = \arctan\left(\frac{v_y - \dot{\psi}l_r}{v_x}\right). \quad (6.85)$$

Die Seitenkräfte F_f und F_r sind nun nichtlineare Funktionen der Schräglaufwinkel α_f und α_r , deren Verlauf stark mit den Verhältnissen des Untergrunds variiert, siehe dazu Abbildung 6.4.

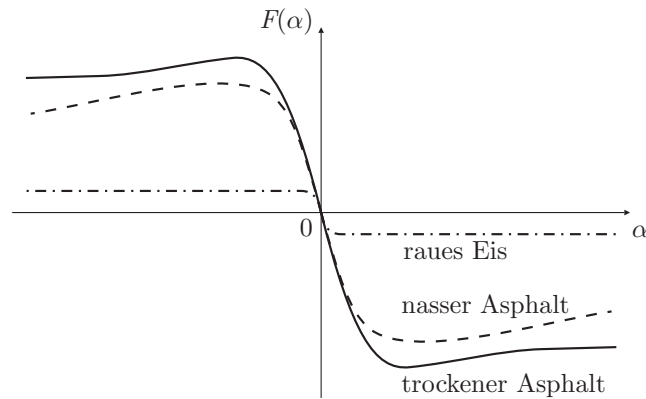


Abbildung 6.4: Achskennlinien (Seitenkraft des Reifens als Funktion des Schräglaufwinkels) für verschiedene Bodenverhältnisse.

Als fiktive Eingangsgröße in das System dient das Giermoment M_z , welches durch gezieltes Abbremsen einzelner Räder realisiert werden kann. In kommerziellen Querdynamikregelungssystemen stehen typischerweise neben dem Lenkwinkel die Gierrate $\dot{\psi}$ und die Querbeschleunigung

$$a_y = \frac{d}{dt}v_y + v_x\dot{\psi} \quad (6.86)$$

als Messgrößen zur Verfügung.

Man kann sich nun einfach davon überzeugen, dass die Quergeschwindigkeit $y = v_y$ einen möglichen flachen Ausgang des Systems (6.84) repräsentiert und damit sämtliche Systemgrößen durch y und dessen Zeitableitungen parametrierbar sind. Nimmt man an, dass der Lenkwinkel δ_f eine hinreichend oft stetig differenzierbare bekannte Zeitfunktion ist, dann lässt sich die Gierrate $\dot{\psi}$ gemäß (6.84) aus der impliziten Gleichung

$$m\dot{y} - F_f\left(\arctan\left(\frac{y + \dot{\psi}l_f}{v_x}\right) - \delta_f\right)\cos(\delta_f) - F_r\left(\arctan\left(\frac{y - \dot{\psi}l_r}{v_x}\right)\right) + mv_x\dot{\psi} = 0 \quad (6.87)$$

bestimmen. Man beachte, dass diese implizite Gleichung nicht analytisch gelöst werden kann. Da, wie in Abbildung 6.4 zu sehen ist, die Achskennlinien nicht monoton steigende Funktionen der Schräglaufwinkel sind, ist die Lösung der impliziten Gleichung (6.87) nach der Gierrate $\dot{\psi}$ außerhalb des linearen Bereiches nicht mehr eindeutig. Dies stellt aber insofern kein Problem dar, als man immer die richtige Lösung (numerisch) bestimmen kann. Um dies zu zeigen, betrachte man vorerst den linearen Bereich der

Achskennlinien, d.h.

$$F_f(\alpha_f) = -c_f \left(\left(\frac{y + \dot{\psi} l_f}{v_x} \right) - \delta_f \right) \quad \text{und} \quad F_r(\alpha_r) = -c_r \left(\frac{y - \dot{\psi} l_r}{v_x} \right) \quad (6.88)$$

mit den Steifigkeitskoeffizienten $c_f, c_r > 0$ mit kleinen Lenkwinkeln δ_f . Setzt man (6.88) in (6.87) ein, dann erhält man mit $\cos(\delta_f) \approx 1$ als eindeutige Lösung für $\dot{\psi}$ im linearen Bereich

$$\dot{\psi} = \frac{v_x \delta_f c_f - (c_f + c_r) y - m \dot{y} v_x}{c_f l_f - c_r l_r + m v_x^2}. \quad (6.89)$$

Da sowohl der Lenkwinkel δ_f als auch y und \dot{y} stetig sind, muss auch $\dot{\psi}$ stetig sein. Im Weiteren ist bekannt, dass am Anfang jeder Fahrt sich das Fahrzeug im linearen Bereich der Achskennlinien befindet, weshalb eine eindeutige Lösung, siehe (6.89), vorliegt. Diese Punkte motivieren nun folgende Strategie anzuwenden. Die implizite Gleichung (6.87) wird in jedem Abtastschritt gelöst und bei mehrfachen Lösungen wird immer jene Lösung herangezogen, die möglichst nahe an der Lösung des vorherigen Abtastschritts ist. Damit ist gezeigt, dass eine Parametrierung der Gierrate in der Form $\dot{\psi} = \chi_1(y, \dot{y}, \delta_f)$ gegeben ist. Die Parametrierung der Stellgröße M_z erhält man aus der zweiten Gleichung von (6.84)

$$M_z = I_z \ddot{\psi} - (F_f(\alpha_f) l_f \cos(\delta_f) - F_r(\alpha_r) l_r) \quad (6.90)$$

und durch Berechnung von $\ddot{\psi} = \chi_2(y, \dot{y}, \ddot{y}, \delta_f, \dot{\delta}_f) = \chi_{2N}/\chi_{2D}$ aus der nach der Zeit differenzierten Gleichung (6.87)

$$\begin{aligned} m \ddot{y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_f} F_f(\alpha_f) \left(\frac{(\dot{y} + \ddot{\psi} l_f) v_x}{v_x^2 + (y + \dot{\psi} l_f)^2} - \dot{\delta}_f \right) \cos(\delta_f) + F_f(\alpha_f) \sin(\delta_f) \dot{\delta}_f \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} F_r(\alpha_r) \left(\frac{(\dot{y} - \ddot{\psi} l_r) v_x}{v_x^2 + (y - \dot{\psi} l_r)^2} \right) + m v_x \ddot{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (6.91a)$$

mit

$$\begin{aligned} \chi_{2N} = & \frac{\partial}{\partial \alpha_f} F_f(\alpha_f) \left(\dot{\delta}_f - \frac{\dot{y}v_x}{v_x^2 + (y + \dot{\psi}l_f)^2} \right) \cos(\delta_f) + m\ddot{y} \\ & + F_f(\alpha_f) \sin(\delta_f) \dot{\delta}_f - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} F_r(\alpha_r) \left(\frac{\dot{y}v_x}{v_x^2 + (y - \dot{\psi}l_r)^2} \right), \end{aligned} \quad (6.91b)$$

$$\begin{aligned} \chi_{2D} = & \frac{\partial}{\partial \alpha_f} F_f(\alpha_f) \left(\frac{l_f v_x}{v_x^2 + (y + \dot{\psi}l_f)^2} \right) \cos(\delta_f) \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_r} F_r(\alpha_r) \left(\frac{l_r v_x}{v_x^2 + (y - \dot{\psi}l_r)^2} \right) - m v_x. \end{aligned} \quad (6.91c)$$

Dieses Beispiel zeigt sehr schön, dass es beim flachheitsbasierten Steuerungsentwurf nicht unbedingt erforderlich ist, die Parametrierung explizit angeben zu können.

Das Regelungskonzept beruht nun auf der Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur von Abbildung 6.2. In einem Referenzmodell wird aus den Vorgaben des Fahrers ein zumindest zweifach stetig differenzierbarer gewünschter Sollverlauf $y_d = v_{y,d}$ der Quergeschwindigkeit $y = v_y$ errechnet. Auf Basis der flachheitsbasierten Parametrierung der Stellgröße (6.90) - (6.91) wird dann eine Steuerung der Form

$$M_{z,d} = I_z \underbrace{\chi_2(y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, \delta_f, \dot{\delta}_f)}_{\dot{\psi}_d} - (F_f(\alpha_{f,d})l_f \cos(\delta_f) - F_r(\alpha_{r,d})l_r) \quad (6.92a)$$

mit

$$\alpha_{f,d} = \arctan \left(\frac{y_d + \overbrace{\chi_1(y_d, \dot{y}_d, \delta_f)}^{\dot{\psi}_d} l_f}{v_x} \right), \quad (6.92b)$$

$$\alpha_{r,d} = \arctan \left(\frac{y_d - \overbrace{\chi_1(y_d, \dot{y}_d, \delta_f)}^{\dot{\psi}_d} l_r}{v_x} \right) \quad (6.92c)$$

bestimmt. Die Stabilisierung des Trajektorienfehlersystems erfolgt über die Zeitableitung der Quergeschwindigkeit

$$\dot{v}_y = a_y - v_x \dot{\psi}, \quad (6.93)$$

da diese direkt aus den Messgrößen Querbeschleunigung a_y und Gierrate $\dot{\psi}$ berechnet werden kann.

Im vorliegenden Fall wird ein einfacher PI-Regler der Form

$$M_{z,e} = k_p(\dot{y}_y - \dot{y}_{y,d}) + k_i \int (\dot{y}_y - \dot{y}_{y,d}) dt \quad (6.94)$$

mit geeignet zu wählenden Reglerparametern k_p und k_i verwendet. Das für die Querdynamikregelung zu realisierende Gierrmoment M_z setzt sich nun aus den beiden Anteilen $M_{z,d}$ nach (6.92a) und $M_{z,e}$ nach (6.94) additiv zusammen, d.h. $M_z = M_{z,d} + M_{z,e}$.

6.4.2 Exakte Eingangs-Zustandslinearisierung mit Beobachter

Eine zweite Möglichkeit, das Problem der nicht vollständig der Messung zugänglichen Zustandsinformation zu umgehen, besteht darin, einen *Zustandsbeobachter* für die nichtmessbaren Zustände aufzubauen. Nimmt man an, dass mit $w = l(\mathbf{x})$ die einzige Messinformation zur Verfügung steht, dann kann für das System

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.95a)$$

$$w = l(\mathbf{x}) \quad (6.95b)$$

die Regelung in Form eines Zustandsbeobachters

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})u - \hat{\mathbf{k}}(t)(w - \hat{w}), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (6.96a)$$

$$\hat{w} = l(\hat{\mathbf{x}}) \quad (6.96b)$$

mit dem geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ und der noch zu bestimmenden zeitvarianten Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ und eines Zustandsreglers gemäß (6.75) mit \mathbf{x} ersetzt durch $\hat{\mathbf{x}}$

$$u = \hat{u} = \frac{1}{\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\hat{\mathbf{x}})} \left(y_d^{(n)}(t) - \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^n h(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^n a_{j-1} \left(\mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{j-1} h(\hat{\mathbf{x}}) - y_d^{(j-1)}(t) \right) \right). \quad (6.97)$$

implementiert werden. Aus (6.95) und (6.96) erkennt man sofort, dass sich die Beobachterfehlerdynamik $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}))u + \hat{\mathbf{k}}(t)(l(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - l(\hat{\mathbf{x}})), \\ \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (6.98)$$

mit $u = \hat{u}(t, \hat{\mathbf{x}})$ aus (6.97) errechnet. Unter der Annahme, dass der Zustand \mathbf{x} und der geschätzte Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ nahe an der Solltrajektorie \mathbf{x}_d (siehe auch (6.77)) liegen, kann man das System (6.96) - (6.98) um $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d$ linearisieren

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{d}{dt} \Delta \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & -\hat{\mathbf{k}}(t) \mathbf{c}^T(t) \\ \underbrace{\mathbf{A}_{21}(t)}_{=\mathbf{0}} & \mathbf{A}_{22}(t) + \hat{\mathbf{k}}(t) \mathbf{c}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (6.99a)$$

mit

$$\mathbf{A}_{11}(t) = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})\hat{u}) \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d} - \hat{\mathbf{k}}(t) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} l(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} l(\hat{\mathbf{x}}) \right)}_{=0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}}, \quad (6.99b)$$

$$\mathbf{c}^T(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} l(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}}, \quad (6.99c)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21}(t) &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) \right)}_{=0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})) \right)}_{=0} \hat{u} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}} \\ &\quad + \underbrace{(\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})) \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \hat{u}}_{=0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}} \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}(t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} (l(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) - l(\hat{\mathbf{x}}))}_{=0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (6.99d)$$

$$= \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_{22}(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}})\hat{u}) \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_d, \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}}. \quad (6.99e)$$

Wie man erkennt, weist der linearisierte geschlossene Kreis (6.99a) eine Dreiecksstruktur auf. Wie am Beginn dieses Abschnitts (vergl. (6.72) - (6.76)) gezeigt wurde, führt das Regelgesetz $u = \hat{u}$ gemäß (6.97) angewandt auf das System

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})u \quad (6.100)$$

zu einem exponentiell stabilen Trajektorienfehlersystem für $\hat{\mathbf{x}}_e = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d$. Man beachte, dass man einfach in den Herleitungen von (6.72) - (6.76) \mathbf{x} durch $\hat{\mathbf{x}}$ und u durch \hat{u} ersetzen muss. Daraus kann man schließen, dass das Teilsystem

$$\frac{d}{dt} \Delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{11}(t) \Delta \hat{\mathbf{x}} \quad (6.101)$$

des linearisierten Systems (6.99a) ebenfalls exponentiell stabil ist.

Für das Teilsystem

$$\frac{d}{dt} \Delta \tilde{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}_{22}(t) + \hat{\mathbf{k}}(t) \mathbf{c}^T(t) \right) \Delta \tilde{\mathbf{x}} \quad (6.102)$$

kann unter der Voraussetzung, dass das Paar $(\mathbf{c}^T(t), \mathbf{A}_{22}(t))$ beobachtbar ist, die zeitvariante Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ beispielsweise mithilfe der *Formel von Ackermann für*

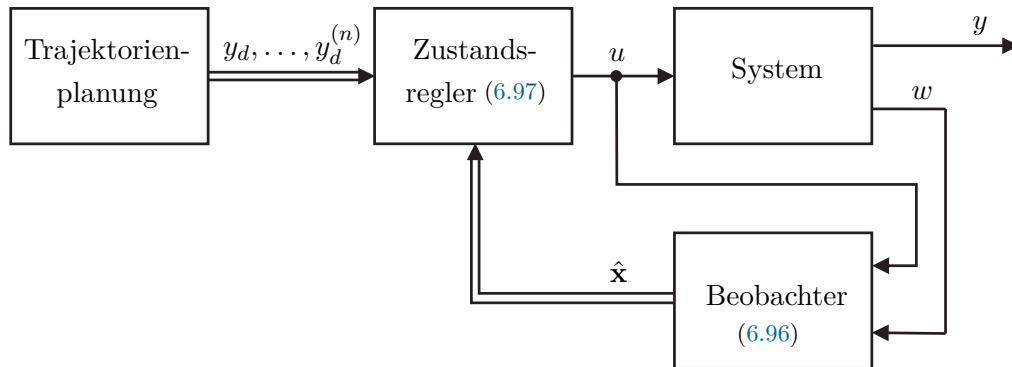


Abbildung 6.5: Blockschaltbild der exakten Eingangs-Zustandslinearisierung mit Regler-Beobachterstruktur.

lineare zeitvariante Systeme so gewählt werden, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A}_{22}(t) + \hat{\mathbf{k}}(t)\mathbf{c}^T(t)$ an vorgegebenen Stellen zu liegen kommen. Zur Berechnung von Beobachtern für lineare zeitvariante Systeme sei auf den Anhang B verwiesen. Abbildung 6.5 zeigt ein Strukturschaltbild der exakten Eingangs-Zustandslinearisierung mit Regler-Beobachterstruktur.

Beispiel 6.6. Abbildung 6.6 zeigt ein einfaches Beispiel einer magnetischen Lagerung.

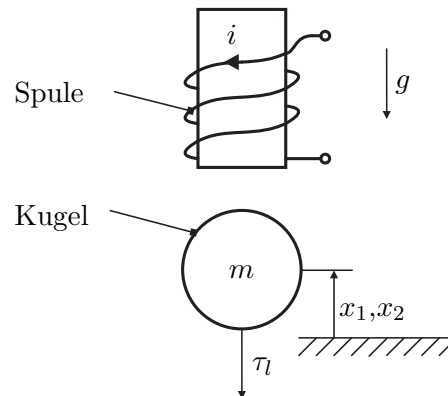


Abbildung 6.6: Schematische Darstellung der Magnetlagerung.

Das zugehörige mathematische Modell lautet

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (6.103a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_1}{m} \left(\frac{i}{k_2 - x_1} \right)^2 - g - \frac{\tau_l}{m} \quad (6.103b)$$

mit den beiden Zustandsgrößen Position x_1 und Geschwindigkeit x_2 des beweglichen Starrkörpers mit der Masse m , der Gravitationskonstanten g und einer äußeren Störkraft τ_l .

Im Weiteren wird angenommen, dass die Eingangsgröße i dem durch einen unterlagerten Regler eingepprägten Spulenstrom entspricht und k_1 und k_2 konstante positive

Parameter zur Modellierung der Magnetkraft sind. Die Regelungsaufgabe besteht nun darin, einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Solltrajektorie $x_d(t)$ in der Position x_1 zu folgen.

Aufgabe 6.5. Zeigen Sie, dass die Position x_1 der Masse m einen flachen Ausgang $y = h(\mathbf{x}) = x_1$ des Systems repräsentiert.

Aufgabe 6.6. Zeigen Sie, dass sich für $\tau_l = 0$ die Systemgrößen (Zustand und Eingang) in der Form

$$x_1 = y \quad (6.104a)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (6.104b)$$

$$i = (k_2 - y) \sqrt{\frac{m}{k_1}} (\ddot{y} + g) \quad (6.104c)$$

durch den flachen Ausgang y und dessen Zeitableitungen parametrieren lassen.

Als Messgröße w steht lediglich die Position x_1 zur Verfügung und es wird angenommen, dass die Geschwindigkeit x_2 aufgrund des stark verrauschten Positionsmesssignals nicht durch näherungsweise Differenzieren sinnvoll ermittelt werden kann. Für den Reglerentwurf wird die Störkraft τ_l als unbekannter aber konstanter Parameter aufgefasst, der der Differentialgleichung (Störmodell)

$$\frac{d}{dt} \tau_l = 0 \quad (6.105)$$

genügt. Führt man als neue Eingangsgröße

$$u = i^2 \quad (6.106)$$

ein, dann kann man direkt das Regelgesetz (6.97) für

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -g - \frac{\tau_l}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m(k_2 - x_1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.107a)$$

$$y = h(\mathbf{x}) = x_1 \quad (6.107b)$$

$$w = l(\mathbf{x}) = x_1 \quad (6.107c)$$

anwenden und man erhält

$$\begin{aligned} u = \hat{u} &= \frac{1}{\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^2 h(\hat{\mathbf{x}})} \left(\ddot{y}_d(t) - \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^2 h(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^2 a_{j-1} \left(\mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{j-1} h(\hat{\mathbf{x}}) - y_d^{(j-1)}(t) \right) \right) \\ &= \frac{m(k_2 - \hat{x}_1)^2}{k_1} \left(\ddot{y}_d(t) + g + \frac{\hat{\tau}_l}{m} - a_0(\hat{x}_1 - y_d) - a_1(\hat{x}_2 - \dot{y}_d) \right) \end{aligned} \quad (6.108)$$

mit geeignet zu wählenden Reglerparametern a_0 und a_1 sowie den Schätzwerten $\hat{\tau}_l$, \hat{x}_1 und \hat{x}_2 von τ_l , x_1 und x_2 . Man beachte, dass unter Berücksichtigung von (6.106) die eigentliche Stellgröße i sich zu $i = \sqrt{u}$ ergibt. Der Zustandsbeobachter zum System (6.107) erweitert um das Störmodell (6.105) lautet gemäß (6.96)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{\tau}_l \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ -g - \frac{\hat{\tau}_l}{m} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_a(\hat{\mathbf{x}}_a)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m(k_2 - \hat{x}_1)^2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_a(\hat{\mathbf{x}}_a)} \hat{u} - \hat{\mathbf{k}}(t)(x_1 - \hat{x}_1) \quad (6.109a)$$

$$\hat{y} = h_a(\hat{\mathbf{x}}_a) = \hat{x}_1 \quad (6.109b)$$

$$\hat{w} = l_a(\hat{\mathbf{x}}_a) = \hat{x}_1 \quad (6.109c)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(0) &= \hat{x}_{10} \\ \hat{x}_2(0) &= \hat{x}_{20} \\ \hat{\tau}_l(0) &= \hat{\tau}_{l0} \end{aligned} \quad (6.109d)$$

mit dem um den Zustand $\hat{\tau}_l$ erweiterten Zustandsvektor \mathbf{x}_a . Für den Entwurf der zeitvariablen Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ wird die Formel von Ackermann für lineare zeitvariante Systeme nach Satz B.2 verwendet. Dazu wird gemäß (6.98) - (6.99) eine Linearisierung um die Solltrajektorie $x_{1d} = y_d$, $x_{2d} = \dot{y}_d$ und $\tau_{ld} = 0$ (siehe 6.104) durchgeführt und man erhält die für den Beobachterentwurf relevanten Größen (vergl. (6.102)) zu

$$\mathbf{A}_{a,22}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_a} (\mathbf{f}_a(\tilde{\mathbf{x}}_a + \hat{\mathbf{x}}_a) + \mathbf{g}_a(\tilde{\mathbf{x}}_a + \hat{\mathbf{x}}_a)\hat{u}) \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_a = \mathbf{x}_{a,d}, \tilde{\mathbf{x}}_a = \mathbf{0}} \quad (6.110a)$$

$$\mathbf{c}_a^T(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_a} l_a(\tilde{\mathbf{x}}_a + \hat{\mathbf{x}}_a) \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_a = \mathbf{x}_{a,d}, \tilde{\mathbf{x}}_a = \mathbf{0}} \quad (6.110b)$$

mit

$$\mathbf{A}_{a,22}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{(k_2 - y_d)}(\ddot{y}_d(t) + g) & 0 & \frac{-1}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_a(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.110c)$$

Man überzeugt sich leicht, dass das Paar $(\mathbf{c}_a^T(t), \mathbf{A}_{a,22}(t))$ nach Definition B.2 gleichmäßig beobachtbar ist, denn der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O}(\mathbf{c}_a^T(t), \mathbf{A}_{a,22}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{(k_2 - y_d)}(\ddot{y}_d(t) + g) & 0 & \frac{-1}{m} \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

ist für alle Zeiten $t \geq t_0$ gleich 3. Die zeitvariable Beobacherverstärkung $\hat{\mathbf{k}}(t)$ folgt dann direkt aus der Formel von Ackermann nach Satz B.2 für ein geeignet gewähltes charakteristisches Polynom $s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$.

Aufgabe 6.7. Die bisher vorgestellte Theorie soll an dem Laborversuch Ball-on-Wheel von Abbildung 6.7 angewandt werden. Dieser Laborversuch besteht im Wesentlichen aus einem Rad (Radius r_w , Trägheitsmoment um die z -Achse I_w , Drehwinkel φ_w , Drehwinkelgeschwindigkeit ω_w) auf dem ein Ball (Radius r_b , Masse m_b , Trägheitsmoment um die z -Achse I_b , Drehwinkel φ_b , Drehwinkelgeschwindigkeit ω_b) balanciert wird. Der Stelleingang des Systems ist dabei das Moment M am Rad.

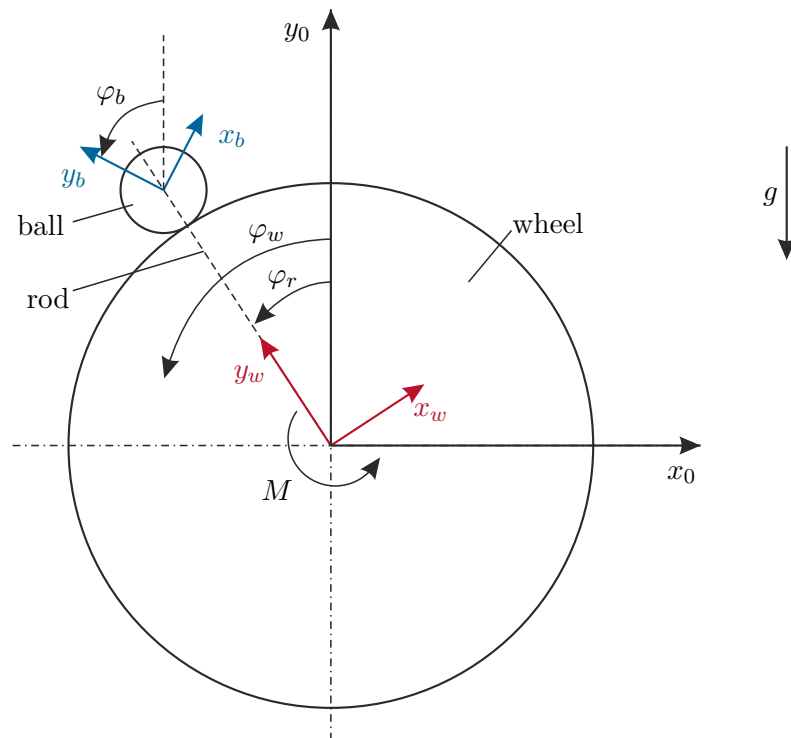


Abbildung 6.7: Schematische Darstellung des Laborversuchs Ball-on-Wheel.

Nehmen Sie bei der Modellierung des Balls an, dass dieser in Form einer Vollkugel mit Radius r_b und Masse m_b gegeben ist, d.h. es gilt

$$I_b = \frac{2}{5} m_b r_b^2 \quad (6.112)$$

Lösen Sie nachfolgende Teilaufgaben:

- Berechnen Sie das mathematische Modell dieses Systems mithilfe des Lagrange-

Formalismus. Geben Sie anschließend das System in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (6.113)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\varphi_w, \varphi_r, \omega_w, \omega_r]^T$ und dem Eingang $u = M$ an. Implementieren Sie das System (in Form einer s-function) in MATLAB/SIMULINK.

- Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems und linearisieren Sie das System um eine physikalisch sinnvolle Ruhelage. Welche Aussagen können Sie über die Stabilität und die Erreichbarkeit des linearisierten Systems treffen?
- Berechnen Sie den relativen Grad der Ausgänge $y_1 = \varphi_w$, $y_2 = \varphi_r$, $y_3 = \omega_w$ und $y_4 = \omega_r$. Prüfen Sie anschließend, ob für dieses System eine exakte Eingangs-Zustandslinearisierung durchführbar ist.
- Zeigen Sie, dass das System differenziell flach ist und berechnen Sie allgemein einen flachen Ausgang y .

Benennung	Wert	
Radius Wheel	r_w	269 mm
Radius Ball	r_b	68.3 mm
Trägheitsmoment Wheel	I_w	0.156 kgm ²
Masse Ball	m_b	0.197 kg
Gravitationskonstante	g	9.81 m/s ²

Tabelle 6.1: Parameter des Laborversuchs Ball-on-Wheel.

Wählen Sie für den flachen Ausgang

$$y = \varphi_w - \frac{1}{2} \frac{7(r_w + r_b)\varphi_r}{r_w} \quad (6.114)$$

und berechnen Sie die Zustands- und Stellgrößentransformation auf Brunovsky-Normalform. Erweitern Sie anschließend das Stellgesetz um geeignete Terme, so dass die Eigenwerte des geschlossenen transformierten Kreises bei $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ zu liegen kommen. Wählen Sie geeignete Eigenwerte und testen Sie den so entworfenen nichtlinearen Regler durch Simulation in MATLAB/SIMULINK mithilfe der Parameter von Tabelle 6.1.

6.4.3 Trajektorienfolgeregelung für einen nichtflachen Ausgang

Im ersten Schritt betrachte man das System (6.95) und man nehme an, dass y einen flachen Ausgang des Systems repräsentiert. Gemäß (6.70) und (6.71) ist es dann möglich, sämtliche Systemgrößen (Zustand \mathbf{x} und Eingang u) durch den flachen Ausgang y und

dessen Zeitableitungen zu parametrieren, nämlich

$$\mathbf{x} = \psi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = \Phi^{-1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}] \quad (6.115a)$$

$$u = \psi_2(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = \frac{y^{(n)} - \mathbf{L}_f^n h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}{\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}. \quad (6.115b)$$

Im Folgenden nimmt man nun an, dass die Trajektorienfolgeregelung nicht für den flachen Ausgang y sondern für eine Größe

$$\chi = m(\mathbf{x}), \quad (6.116)$$

die den relativen Grad $r < n$ besitzt, entworfen werden soll. Zuzufolge von (6.115) ist es naheliegend, dass auch χ durch den flachen Ausgang y parametrieren werden kann. Man überzeugt sich nun leicht, dass die Parametrierung von χ nur Ableitungen von y bis zur Ordnung $(n - r)$ beinhaltet, d.h.

$$\chi = \psi_3(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-r)}). \quad (6.117)$$

Der Grund dafür liegt darin, dass χ den relativen Grad $r < n$ und der flache Ausgang y den relativen Grad n besitzt. Ruft man sich in Erinnerung, dass der relative Grad exakt der Anzahl an zeitlichen Differenzierungen entspricht, die auf die jeweilige Größe angewandt werden muss, damit erstmalig der Eingang u explizit erscheint, dann erkennt man aus (6.117), dass r -faches Differenzieren von χ erstmalig $y^{(n)}$ und damit u erscheinen lässt. Würde χ bis zu einer höheren (niedrigeren) Ableitung von y abhängen, dann müsste χ weniger oft (öfter) als r differenziert werden, damit erstmalig $y^{(n)}$ und u erscheint, was einem anderen relativen Grad entsprechen würde.

Wenn man nun eine Solltrajektorie $\chi_d(t)$ für χ vorgibt, dann müsste man die Differenzialgleichung (6.117) nach y lösen, um die zugehörige Solltrajektorie $y_d(t)$ des flachen Ausgangs zu bekommen. Man kann nun zeigen, dass die Differenzialgleichung (6.117) gerade der Nulldynamik bzw. internen Dynamik (6.34) des Systems (6.95) bezüglich des Ausgangs χ von (6.116) entspricht. Dabei unterscheidet man folgende Fälle:

- Wenn die *Nulldynamik stabil* ist (phasenminimales System nach Definition 6.2), dann kann die Solltrajektorie $y_d(t)$ des flachen Ausgangs direkt aus der Vorgabe einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Solltrajektorie $\chi_d(t)$ für den gewünschten Ausgang $\chi = m(\mathbf{x})$ durch numerische Integration der internen Dynamik

$$\chi_d = \psi_3(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-r)}) \quad (6.118)$$

für die Anfangswerte $y_d(0), \dot{y}_d(0), \dots, y_d^{(n-r)}(0)$ bestimmt werden.

- Im Fall, dass die *Nulldynamik instabil* (nicht-phasenminimales System nach Definition 6.2) ist, kann die Differenzialgleichung (6.118) mithilfe spezieller Integrationsalgorithmen stabil gelöst werden. Für nähere Details dazu sei auf die am Ende des Kapitels angeführte Literatur verwiesen.

- Wenn man lediglich an einem *Arbeitspunktwechsel* interessiert und der genaue Verlauf der Trajektorie zwischen den beiden Arbeitspunkten nicht relevant ist, dann kann die Trajektorienplanung immer direkt im flachen Ausgang unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den stationären Werten von y und χ für die jeweiligen Arbeitspunkte vorgenommen werden.

Ist die Trajektorienplanung abgeschlossen und liegt eine flachheitsbasierte Parametrierung der Systemgrößen vor, dann können sämtliche bisher in diesem Abschnitt besprochenen Methoden der Trajektorienfolgeregelung direkt angewandt werden. Natürlich kann die vorgestellte Theorie auch dann noch für den Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung herangezogen werden, wenn das System nicht differenziell flach ist. Um dies zu zeigen, soll im Folgenden eine Steuerung im Sinne des exakten Feedforward-Entwurfes von Abschnitt 6.4.1 für das System (vergl.(6.72))

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.119)$$

entworfen werden. Dazu sei angenommen, dass das System (6.119) nicht differenziell flach ist und die Regelgröße für den Trajektorienfolgereglentwurf $\chi = m(\mathbf{x})$ nach (6.116) den relativen Grad $r < n$ besitzt. Transformiert man das System (6.119), (6.116) auf Byrnes-Isidori Normalform gemäß (6.31) und Lemma 6.1, so erhält man

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = \underbrace{L_{\mathbf{f}}^r m(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}_{b(\xi, \eta)} + \underbrace{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} m(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}_{a(\xi, \eta)} u \end{cases} \quad (6.120a)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{cases} \quad (6.120b)$$

$$\chi = m(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) = z_1 \quad (6.120c)$$

mit dem neuen Zustand

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} m(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r-1} m(\mathbf{x}) \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi \\ \dot{\chi} \\ \vdots \\ \chi^{(r-1)} \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (6.121)$$

Gibt man nun eine Solltrajektorie $\chi_d(t)$ für den gewünschten Ausgang hinreichend oft stetig differenzierbar vor, so lautet die Steuerung im Sinne des exakten Feedforward-Entwurfes

(vergl. (6.77)) auf Basis des Teilsystems Σ_1 von (6.120)

$$u_d(t) = \frac{\chi_d^{(r)}(t) - b(\boldsymbol{\xi}_d(t), \boldsymbol{\eta}_d(t))}{a(\boldsymbol{\xi}_d(t), \boldsymbol{\eta}_d(t))} \quad (6.122)$$

mit

$$\boldsymbol{\xi}_d^T(t) = [\chi_d(t) \quad \dot{\chi}_d(t) \quad \dots \quad \chi_d^{(r-2)}(t) \quad \chi_d^{(r-1)}(t)] \quad (6.123)$$

und $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems (Teilsystems Σ_2 von (6.120))

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_d = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}_d, \boldsymbol{\eta}_d) \quad (6.124)$$

mit der Eingangsgröße $\boldsymbol{\xi}_d(t)$ zufolge von (6.123) und dem Anfangswert $\boldsymbol{\eta}_d(0) = \boldsymbol{\eta}_{d,0}$ aus der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{d,0} \\ \boldsymbol{\eta}_{d,0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_0), \quad \boldsymbol{\xi}_{d,0} = \begin{bmatrix} \chi_d(0) \\ \dot{\chi}_d(0) \\ \vdots \\ \chi_d^{(r-1)}(0) \end{bmatrix}. \quad (6.125)$$

Man beachte, dass das Differenzialgleichungssystem (6.124) der internen Dynamik bzw. Nulldynamik von (6.120) mit dem Zustand $\boldsymbol{\eta}_d$ und dem Eingang $\boldsymbol{\xi}_d$ entspricht und dementsprechend die zuvor getätigten Aussagen bezüglich stabiler und instabiler Nulldynamik sowie Arbeitspunktwechsel auch hier zutreffen.

Aufgabe 6.8. Überlegen Sie, wie Sie die Methode der exakten Eingangs-Zustands-linearisierung mit Regler-Beobachterstruktur von Abschnitt 6.4.2 auf die Trajektorienfolgeregelung von nicht flachen Eingrößensystemen übertragen können.

Hinweis: Verwenden Sie als Grundlage das Regelgesetz von (6.49).

Beispiel 6.7. Als Beispiel betrachte man ein Teilsystem einer eigenversorgten verstellbaren Axialkolbenpumpe in Schrägscheibenbauweise nach Abbildung 6.8 mit dem hydraulischen Ersatzschaltbild nach Abbildung 6.9. Das zu untersuchende System wird dabei durch die beiden Differenzialgleichungen

$$\dot{\phi} = -\frac{q_{PA}}{A_{PA} r_{PA}} \quad (6.126a)$$

$$\dot{p}_L = \frac{\beta}{V_L} \left(k_P \phi - q_{PA} - \underbrace{k_L \sqrt{p_L}}_{q_L} \right) \quad (6.126b)$$

mit dem Winkel der Schwenkscheibe ϕ und dem Lastdruck p_L als Zustandsgrößen sowie dem Volumenstrom q_{PA} in den Verstellzylinder der Schwenkscheibe als Eingangsgröße beschrieben.

Die Größen A_{PA} und r_{PA} bezeichnen die Kolbenfläche und den effektiven Hebelarm des Verstellzylinders, β ist der Kompressionsmodul von Öl, $k_P \phi$ der Fördervolumen-

strom der Pumpe, V_L das Lastvolumen und k_L der Drosselkoeffizient der Last. Im Weiteren soll eine Trajektorienfolgeregelung für den Lastdruck p_L entworfen werden.

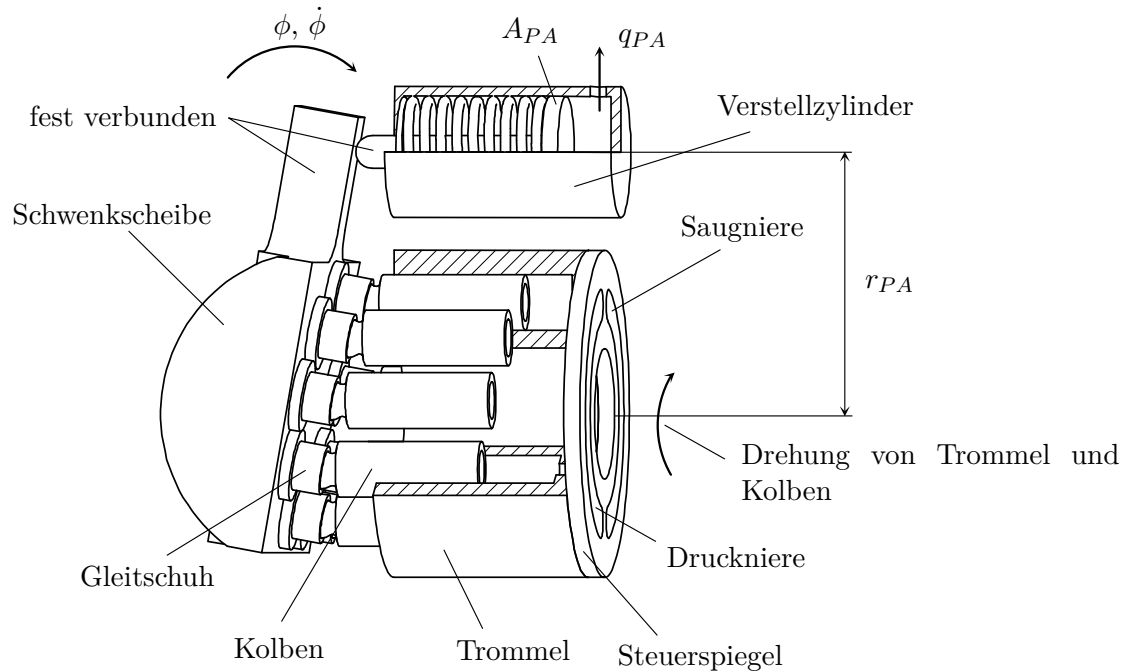


Abbildung 6.8: Schematische Darstellung des grundsätzlichen Aufbaus einer Axialkolbenpumpe in Schrägscheibenbauweise.

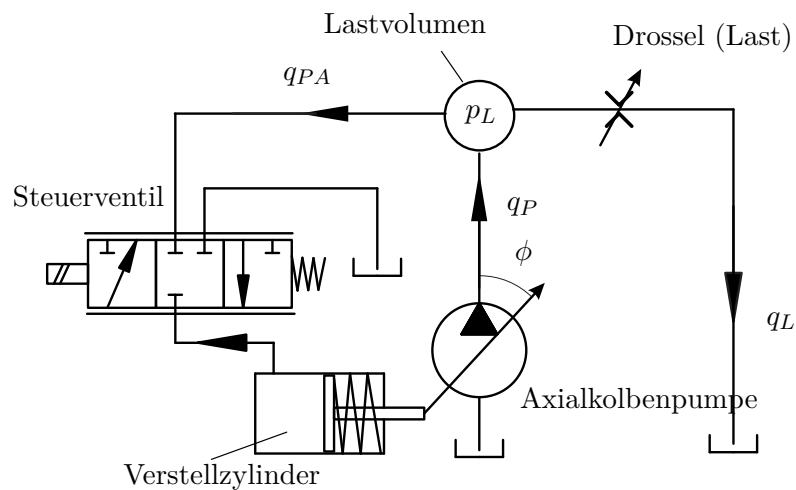


Abbildung 6.9: Hydraulisches Ersatzschaltbild der Axialkolbenpumpe mit Last.

Aufgabe 6.9. Zeigen Sie, dass das System (6.126) differenziell flach ist und bestimmen Sie einen flachen Ausgang. Zeigen Sie, dass der Lastdruck p_L einen relativen Grad $r = 1$ hat.

Um nun das System (6.126) auf Byrnes-Isidori Normalform (6.120) zu transformieren, führt man folgende Zustandstransformation gemäß (6.121)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_L \\ \phi A_{PA} r_{PA} - \frac{V_L}{\beta} p_L \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

durch. Die Byrnes-Isidori Normalform von (6.126) lautet dann

$$\Sigma_1 : \left\{ \dot{z}_1 = \frac{\beta}{V_L} \left(\frac{k_P}{A_{PA} r_{PA}} \left(z_2 + \frac{V_L}{\beta} z_1 \right) - q_{PA} - k_L \sqrt{z_1} \right) \right. \quad (6.128a)$$

$$\Sigma_2 : \left\{ \dot{z}_2 = -\frac{k_P}{A_{PA} r_{PA}} \left(z_2 + \frac{V_L}{\beta} z_1 \right) + k_L \sqrt{z_1} \right. \quad (6.128b)$$

$$\chi = p_L = z_1 \quad (6.128c)$$

Man erkennt, dass die Nulldynamik (Teilsystem Σ_2 für $z_1 = 0$)

$$\dot{z}_2 = -\frac{k_P}{A_{PA} r_{PA}} z_2 \quad (6.129)$$

stabil ist. Gibt man eine zumindest einfach stetig differenzierbare Solltrajektorie $z_{1,d}(t) = p_{L,d}(t)$ vor, dann errechnen sich die Solltrajektorien für z_2 bzw. ϕ aus der Differenzialgleichung

$$\dot{z}_{2,d} = -\frac{k_P}{A_{PA} r_{PA}} \left(z_{2,d} + \frac{V_L}{\beta} p_{L,d}(t) \right) + k_L \sqrt{p_{L,d}(t)} \quad (6.130a)$$

$$\dot{\phi}_d = \frac{1}{A_{PA} r_{PA}} \left(z_{2,d} + \frac{V_L}{\beta} p_{L,d} \right) \quad (6.130b)$$

mit dem Anfangswert $z_{2,d}(0) = \phi(0) A_{PA} r_{PA} - \frac{V_L}{\beta} p_{L,d}(0)$. Eine Steuerung im Sinne des exakten Feedforward-Entwurfes nach (6.122) lautet dann

$$q_{PA,d}(t) = -\frac{V_L}{\beta} \dot{z}_{1,d} + \frac{k_P}{A_{PA} r_{PA}} \left(z_{2,d} + \frac{V_L}{\beta} z_{1,d} \right) - k_L \sqrt{z_{1,d}}. \quad (6.131)$$

Aufgabe 6.10. Erweitern Sie die Steuerung (6.131) um einen Regelungsanteil im Sinne der Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur nach Abschnitt 6.4.1.

Aufgabe 6.11. Entwerfen Sie für das System (6.126) einen Trajektorienfolgeregler mit Regler-Beobachterstruktur nach Abschnitt 6.4.2.

6.5 Mehrgrößenfall

6.5.1 Exakte Linearisierung

Für das Folgende betrachte man das AI(affine input)-Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{6.132}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u}^T = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\mathbf{y}^T = [y_1, \dots, y_m] \in \mathbb{R}^m$, den glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$ sowie den glatten Funktionen $h_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$. Analog zu Definition 6.1 lässt sich nun für das Mehrgrößensystem (6.132) ein *vektorieller relativer Grad* $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ mit $r = \sum_{j=1}^m r_j \leq n$ definieren:

Definition 6.3 (Relativer Grad eines Mehrgrößensystems). Das System (6.132) hat den vektoriiellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ mit $r = \sum_{j=1}^m r_j \leq n$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$, wenn

- (A) $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, r_i - 2$ für alle \mathbf{x} in der Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ und
- (B) die $(m \times m)$ -Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{6.133}$$

für $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ regulär ist.

Besitzt das System (6.132) den vektoriiellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, dann folgt

für die zeitliche Ableitung des Ausgangs $y_j = h_j(\mathbf{x})$ in einer Umgebung von $\bar{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}
 y_j &= h_j(\mathbf{x}) \\
 \dot{y}_j &= \mathbf{L}_f h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_1 + \dots + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_m \\
 \ddot{y}_j &= \mathbf{L}_f^2 h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_f h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_1 + \dots + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_f h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_m \\
 &\vdots \\
 y_j^{(r_j-1)} &= \mathbf{L}_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x}) + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_f^{r_j-2} h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_1 + \dots + \underbrace{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_f^{r_j-2} h_j(\mathbf{x})}_{=0} u_m \\
 y_j^{(r_j)} &= \mathbf{L}_f^{r_j} h_j(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{L}_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x}) u_1 + \dots + \mathbf{L}_{\mathbf{g}_m} \mathbf{L}_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x}) u_m .
 \end{aligned} \tag{6.134}$$

Führt man dies für alle Ausgänge $y_j = h_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$, durch, so erhält man

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_{m-1}^{(r_{m-1})} \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{r_{m-1}} h_{m-1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} . \tag{6.135}$$

Offensichtlich kann man zumindest in einer Umgebung von $\bar{\mathbf{x}}$ mit Hilfe des Zustandsregelgesetzes

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x})) \tag{6.136}$$

ein *exakt lineares Eingangs-Ausgangsverhalten* vom neuen Eingang $\mathbf{v}^T = [v_1, \dots, v_m]$ zum Ausgang $\mathbf{y}^T = [y_1, \dots, y_m]$ in Form von m Integratorketten der Länge r_j , $j = 1, \dots, m$, erzeugen

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_{m-1}^{(r_{m-1})} \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} . \tag{6.137}$$

Man erkennt, dass im Vergleich zum Eingrößenfall im Mehrgrößenfall zusätzlich die Bedingung der Regularität der Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ von (6.133) eine entscheidende Rolle spielt. Durch die Wahl von v_j in der Form

$$v_j = - \sum_{i=1}^{r_j} a_{j,i-1} \mathbf{L}_f^{i-1} h_j(\mathbf{x}) + \tilde{v}_j \tag{6.138}$$

mit den geeignet zu wählenden Koeffizienten $a_{j,i}$, $j = 1, \dots, m$, $i = 0, \dots, r_j - 1$, erhält man m entkoppelte Übertragungsfunktionen $\tilde{G}_j(s)$ vom neuen Eingang \tilde{v}_j zum Ausgang y_j

$$\tilde{G}_j(s) = \frac{1}{s^{r_j} + a_{j,r_j-1}s^{r_j-1} + \dots + a_{j,1}s + a_{j,0}}. \quad (6.139)$$

Analog zu Lemma 6.1 kann man unter der Annahme, dass das System (6.132) den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ mit $r = \sum_{j=1}^m r_j < n$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$ besitzt, zeigen, dass immer $(n - r)$ Funktionen $\boldsymbol{\eta}^T = [\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})]$ so existieren, dass mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{1,2} \\ \vdots \\ \xi_{1,r_1} \\ \xi_{2,1} \\ \vdots \\ \xi_{2,r_2} \\ \vdots \\ \xi_{m,1} \\ \vdots \\ \xi_{m,r_m} \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.140)$$

ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ gegeben ist. Im Gegensatz zum Eingrößenfall können die Funktionen $\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ im Allgemeinen *nicht* so gewählt werden, dass gilt $\mathbf{L}_{\mathbf{g}_j} \phi_k(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$, $k = r+1, \dots, n$, für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, es sei denn die Distribution

$$G_0 = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\} \quad (6.141)$$

ist in einer Umgebung \mathcal{U} des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv. Wendet man die Zustandstransformation (6.140) auf das System (6.132) an, dann erhält man das transformierte System in *Byrnes-Isidori Normalform* (vergl. (6.16))

$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{1,1} = \xi_{1,2} \\ \dot{\xi}_{1,2} = \xi_{1,3} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{1,r_1} = \tilde{b}_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m \tilde{D}_{1,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_j \\ \dot{\xi}_{2,1} = \xi_{2,2} \\ \dot{\xi}_{2,2} = \xi_{2,3} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{2,r_2} = \tilde{b}_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m \tilde{D}_{2,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_j \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{m,1} = \xi_{m,2} \\ \dot{\xi}_{m,2} = \xi_{m,3} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{m,r_m} = \tilde{b}_m(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m \tilde{D}_{m,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_j \end{array} \right. \quad (6.142a)$$

$$\Sigma_2 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = q_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m P_{1,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_j \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} = q_{n-r}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m P_{n-r,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_j \end{array} \right. \quad (6.142b)$$

mit dem Ausgang

$$\mathbf{y}^T = [\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \dots, \xi_{m,1}] \quad (6.142c)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{b}_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= b_j(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) = \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{r_j} h_j(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})), \quad j = 1, \dots, m \\ \tilde{D}_{l,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= D_{l,j}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) = \mathbf{L}_{\mathbf{g}_j} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{r_l-1} h_l(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})), \quad j, l = 1, \dots, m \\ q_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}} \phi_{r+i}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})), \quad i = 1, \dots, n-r \\ P_{i,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{L}_{\mathbf{g}_j} \phi_{r+i}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})), \quad i = 1, \dots, n-r, l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.142d)$$

Die Methode der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung gemäß (6.136), (6.138)

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) (-\tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{v}) \quad (6.143)$$

führt für das Mehrgrößensystem (6.132) analog zum Eingrößenfall nur dann zu einem stabilen geschlossenen Kreis, wenn die *Nullodynamik*

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{P}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) (-\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})) \quad (6.144)$$

asymptotisch bzw. exponentiell stabil also phasenminimal ist, vergl. Definition 6.2. Man beachte, dass die Komponenten von $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, \mathbf{q} und \mathbf{P} bereits in (6.142d) definiert wurden.

Offensichtlich ist die Dimension der Nulldynamik gleich Null, wenn der vektorielle relative Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ die Bedingung $r = \sum_{j=1}^m r_j = n$ erfüllt. Der nachfolgende Satz gibt nun *notwendige und hinreichende Bedingungen* dafür an, dass man für das System (6.132) (fiktive) Ausgangsgrößen $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_m(\mathbf{x})$ so finden kann, dass für den zugehörigen vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ gilt $r = \sum_{j=1}^m r_j = n$. Gemäß Definition 6.3 muss dann eine Lösung des Systems von partiellen Differenzialgleichungen

$$L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k \lambda_i(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r_i - 2 \quad (6.145)$$

mit einer regulären Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ nach (6.133) und der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^m r_j = n$ existieren.

Aufgabe 6.12. Zeigen Sie, dass das System von partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung (6.145) äquivalent zum System von partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung vom Frobenius-Typ

$$L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}_j(\mathbf{x})} \lambda_i(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r_i - 2 \quad (6.146)$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen (6.59) und (6.60).

Satz 6.4 (Existenz von Ausgangsgrößen mit vektoriellem relativen Grad $r = n$). *Es existiert in einer Umgebung \mathcal{U} des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ genau dann eine Lösung $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_m(\mathbf{x})$ des Systems von pDGlen erster Ordnung (6.146) mit den Nebenbedingungen, dass die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})$ nach (6.133) regulär ist und für den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ gilt $r = \sum_{j=1}^m r_j = n$, wenn die Distributionen*

$$G_i(\mathbf{x}) = \text{span} \left\{ \text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m \right\} \quad (6.147)$$

folgende Bedingungen erfüllen:

- (A) $G_0(\bar{\mathbf{x}})$ hat den Rang m ,
- (B) $G_i(\mathbf{x})$ hat konstanten Rang in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ für alle $i = 1, \dots, n - 1$
- (C) $G_{n-1}(\bar{\mathbf{x}})$ hat den Rang n und
- (D) $G_i(\mathbf{x})$ ist involutiv in einer Umgebung \mathcal{U} von $\bar{\mathbf{x}}$ für alle $i = 0, \dots, n - 2$.

In diesem Fall nennt man das System (6.132) auch exakt eingangs-zustands-linearisierbar in der Umgebung des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$.

Der vektorielle relative Grad $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ errechnet sich dann, indem man zuerst die Größen

$$\delta_i = \text{rang}(G_i(\bar{\mathbf{x}})) - \text{rang}(G_{i-1}(\bar{\mathbf{x}})), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6.148)$$

mit der Eigenschaft $0 \leq \delta_{i+1} \leq \delta_i$ konstruiert. Die Komponente r_j , $j = 1, \dots, m$, des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ergibt sich als die um 1 erhöhte Anzahl der Größen δ_i , $i = 1, \dots, n-1$, die größer oder gleich j sind. Die Reihenfolge der r_j ist zwar prinzipiell willkürlich, doch bedingt die obige Definition, dass immer gilt $r_j \geq r_{j+1}$ und $\sum_{j=1}^m r_j = n$.

Der Beweis dieses Satzes kann in der am Ende angeführten Literatur nachgelesen werden.

Ist das System (6.132) exakt eingangs-zustandslinearisierbar, dann gilt für die Zustands-Transformation (6.140) $\dim(\boldsymbol{\eta}) = 0$ und man nennt den transformierten Zustand $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$ den *Brunovsky Zustand* des Systems (6.132). Mit Hilfe der Zustandstransformation (6.140) und der Stellgrößentransformation (6.143) wird das System (6.132) im neuen Zustand \mathbf{z} mit der neuen Eingangsgröße \mathbf{v} in ein exakt lineares System bestehend aus m Integratorketten der Länge $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ überführt. Dieses transformierte System ist auch unter dem Namen *Brunovsky Normalform* bekannt (vergl. (6.54)-(6.56)) und die Komponenten r_j des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ werden in diesem Zusammenhang auch als *Kronecker-Indizes* bezeichnet.

Beispiel 6.8. Als Beispiel betrachte man das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})} u_2. \quad (6.149)$$

Die Distribution $G_0(\mathbf{x})$ gemäß (6.147) lautet

$$G_0(\mathbf{x}) = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})} \right\}. \quad (6.150)$$

Man überzeugt sich leicht, dass an einem generischen Punkt $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ der Rang von $G_0(\mathbf{x})$ gleich 2 ist und wegen $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ die Distribution $G_0(\mathbf{x})$ in einer Umgebung von $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv ist.

Analog dazu kann man zeigen, dass die Distribution

$$G_1(\mathbf{x}) = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(x_1 - x_5) \\ -\sin(x_1 - x_5)x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ad}_f \mathbf{g}_1(\mathbf{x})}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -x_1 + x_5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ad}_f \mathbf{g}_2(\mathbf{x})} \right\} \quad (6.151)$$

an einem generischen Punkt $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ den Rang 4 hat und in einer Umgebung von $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv ist, da gilt

$$[\mathbf{g}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_1](\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (6.152a)$$

$$[\mathbf{g}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (6.152b)$$

$$[\mathbf{g}_2, \text{ad}_f \mathbf{g}_1](\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (6.152c)$$

$$[\mathbf{g}_2, \text{ad}_f \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (6.152d)$$

$$[\text{ad}_f \mathbf{g}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = [0, 0, -\sin(x_1 - x_5), 0, 0]^T = -\tan(x_1 - x_5) \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) . \quad (6.152e)$$

Ohne die Distributionen $G_2(\mathbf{x})$, $G_3(\mathbf{x})$ und $G_4(\mathbf{x})$ explizit zu berechnen, sei erwähnt, dass diese den Rang $n = 5$ haben und dementsprechend auch involutiv sind. Somit sind die Bedingungen (A) - (D) von Satz 6.4 erfüllt und das System (6.149) ist exakt eingangs-zustandslinearisierbar. Die Hilfsgrößen δ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, gemäß (6.148) lauten

$$\delta_1 = \text{rang}(G_1(\mathbf{x})) - \text{rang}(G_0(\mathbf{x})) = 4 - 2 = 2 \quad (6.153a)$$

$$\delta_2 = \text{rang}(G_2(\mathbf{x})) - \text{rang}(G_1(\mathbf{x})) = 5 - 4 = 1 \quad (6.153b)$$

$$\delta_3 = \text{rang}(G_3(\mathbf{x})) - \text{rang}(G_2(\mathbf{x})) = 5 - 5 = 0 \quad (6.153c)$$

$$\delta_4 = \text{rang}(G_4(\mathbf{x})) - \text{rang}(G_3(\mathbf{x})) = 5 - 5 = 0 , \quad (6.153d)$$

woraus sich unmittelbar der vektorielle relative Grad zu $\{r_1, r_2\} = \{3, 2\}$ ergibt. Um nun die zugehörigen Ausgangsgrößen $\lambda_1(\mathbf{x})$ und $\lambda_2(\mathbf{x})$ zu bestimmen, müssen die pDGlen erster Ordnung vom Frobenius-Typ (siehe (6.146))

$$L_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})} \lambda_1(\mathbf{x}) = 0 , \quad (6.154a)$$

$$L_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})} \lambda_1(\mathbf{x}) = 0 , \quad (6.154b)$$

$$L_{\text{ad}_f \mathbf{g}_1(\mathbf{x})} \lambda_1(\mathbf{x}) = 0 , \quad (6.154c)$$

$$L_{\text{ad}_f \mathbf{g}_2(\mathbf{x})} \lambda_1(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.154d)$$

sowie

$$L_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})}\lambda_2(\mathbf{x}) = 0, \quad (6.154e)$$

$$L_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})}\lambda_2(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.154f)$$

für funktional unabhängige $\lambda_1(\mathbf{x})$ und $\lambda_2(\mathbf{x})$ gelöst werden. Offensichtlich liegt $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\lambda_1(\mathbf{x})$ im Kern von $G_1(\mathbf{x})$ und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\lambda_2(\mathbf{x})$ im Kern von $G_0(\mathbf{x})$. Da sich der Kern von $G_1(\mathbf{x})$ in der Form $[-1, 0, 0, 0, 1]$ errechnet, folgt unmittelbar eine mögliche Lösung für $\lambda_1(\mathbf{x})$ zu

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_5. \quad (6.155)$$

Analog kann man zeigen, dass

$$\lambda_2(\mathbf{x}) = x_2 \quad \text{oder} \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = x_4 \quad (6.156)$$

mögliche Ausgänge mit relativem Grad $r_2 = 2$ sind.

Aufgabe 6.13. Zeigen Sie, dass die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ nach (6.133) bei der Wahl $\lambda_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_5$ und $\lambda_2(\mathbf{x}) = x_2$ singular und für $\lambda_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_5$ und $\lambda_2(\mathbf{x}) = x_4$ regulär ist.

Sämtliche für den Eingrößenfall diskutierten Methoden der Trajektorienfolgeregelung lassen sich nun direkt auf den Mehrgrößenfall übertragen.

Beispiel 6.9. Als weiteres Beispiel betrachte man den Laborhelikopter nach Abbildung 6.10.

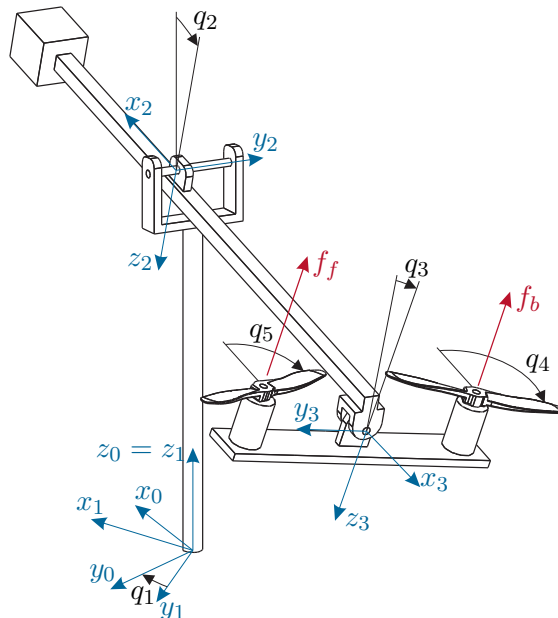


Abbildung 6.10: Schematische Darstellung des Laborhelikopters.

Der Helikopter besteht aus dem Mast, welcher sich um den Winkel q_1 frei drehen kann, dem Arm mit der Drehung um den Winkel q_2 und der Aufhängung mit der Drehung um den Winkel q_3 . An den beiden Enden dieser Aufhängung sind zwei Rotoren angebracht, die durch Gleichstrommotoren angetrieben werden. Durch Anlegen einer elektrischen Spannung an die Motoren ergibt sich eine Drehung der Rotorblätter, die dadurch entstehenden Auftriebskräfte F_f und F_b dienen als Stellgrößen für das System. Mit Hilfe dieser beiden Stellgrößen sollen nun die drei Freiheitsgrade q_1 , q_2 und q_3 geregelt werden. In der englischsprachigen Literatur werden solche mechanische Systeme, die weniger Stelleingänge als Freiheitsgrade besitzen, auch als „underactuated mechanical systems“ bezeichnet. Es ist hinlänglich bekannt, dass die nichtlineare Regelung dieser Klasse mechanischer Starrkörpersysteme um Größenordnungen schwieriger ist verglichen mit dem Fall, dass für jeden Freiheitsgrad ein Stelleingang zur Verfügung steht. Unter der Annahme, dass die Reibungen in den Drehachsen vernachlässigbar sind und $\sin(q_2) \approx 0$ gilt, lässt sich das mathematische Modell in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \frac{\alpha_1}{d_{22}} \sin(q_2) + \frac{\alpha_2}{d_{22}} \cos(q_2) \\ v_3 \\ -\frac{\alpha_3}{d_{33}} \cos(q_2) \sin(q_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a_{23}^x}{d_{11}} \sin(q_3) \cos(q_2) \\ 0 \\ -\frac{a_{23}^x}{d_{22}} \cos(q_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_{34}^y}{d_{33}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_2(\mathbf{x})} u_2 \quad (6.157)$$

mit den konstanten masse- und geometrieabhängigen Parametern α_1 , α_2 und α_3 , den konstanten Einträgen der Massenmatrix d_{11} , d_{22} und d_{33} , den Abständen a_{23}^x und a_{34}^y sowie den transformierten Eingangsgrößen $u_1 = F_b + F_f$ und $u_2 = F_b - F_f$ darstellen.

Aufgabe 6.14. Leiten Sie das mathematische Modell des Laborhelikopters von Abbildung 6.10 mithilfe des Lagrange-Formalismus her.

Hinweis: Nehmen Sie sich hierzu etwas Zeit!

Im Folgenden besteht die Aufgabe nun darin, eine Trajektorienfolgeregelung für den Laborhelikopter zu entwickeln. Berechnet man für das vereinfachte mathematische Modell des Laborhelikopters (6.157) mit $y_1 = q_1$ und $y_2 = q_2$ als Ausgangsgrößen den vektoriellen relativen Grad gemäß Definition 6.3, so stellt man fest, dass die Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{a_{23}^x}{d_{11}} \sin(q_3) \cos(q_2) & 0 \\ -\frac{a_{23}^x}{d_{22}} \cos(q_3) & 0 \end{bmatrix} \quad (6.158)$$

an einem generischen Punkt singulär ist. Offensichtlich kann damit das Zustandsregelgesetz nach (6.136), (6.138) nicht realisiert werden. Ohne darauf näher einzugehen, sei an dieser Stelle lediglich erwähnt, dass zur Lösung dieses Problems in der Literatur unter anderem der so genannte *Dynamic Extension Algorithmus* vorgeschlagen wird.

Betrachtet man andererseits das System (6.157) etwas genauer, dann erkennt man, dass sämtliche Systemgrößen (Zustands- und Stellgrößen) durch den Ausgang $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2] = [q_1, q_2]$ und dessen zeitliche Ableitungen parametrisiert werden können. Multipliziert man die zweite Zeile von (6.157) mit $-\frac{1}{d_{22}}$ und die vierte Zeile von (6.157) mit $\frac{1}{d_{11}} \cos(q_2) \tan(q_3)$, $q_3 \neq 0$, und addiert diese, so erhält man

$$-\ddot{q}_1 \frac{1}{d_{22}} + \left(\ddot{q}_2 - \frac{\alpha_1}{d_{22}} \sin(q_2) - \frac{\alpha_2}{d_{22}} \cos(q_2) \right) \frac{1}{d_{11}} \cos(q_2) \tan(q_3) = 0 \quad (6.159)$$

und damit unmittelbar die Parametrierung von q_3

$$q_3 = \arctan \left(\frac{d_{11} \ddot{q}_1}{d_{22} \left(\ddot{q}_2 - \frac{\alpha_1}{d_{22}} \sin(q_2) - \frac{\alpha_2}{d_{22}} \cos(q_2) \right) \cos(q_2)} \right). \quad (6.160)$$

Man überzeugt sich leicht, dass (6.160) auch für $q_3 = 0$ gültig ist. Im Weiteren folgt die Parametrierung der Stellgrößen u_1 und u_2 direkt aus der zweiten und letzten Zeile von (6.157) in der Form

$$u_1 = \frac{-d_{11} \ddot{q}_1}{a_{23}^x \sin(q_3) \cos(q_2)} \quad (6.161a)$$

$$u_2 = \frac{d_{33} \ddot{q}_3 + \alpha_3 \cos(q_2) \sin(q_3)}{a_{34}^y} \quad (6.161b)$$

mit q_3 gemäß (6.160).

Aufgabe 6.15. Zeigen Sie, dass die parametrisierte Stellgröße u_1 von (6.161) für $q_3 \rightarrow 0$ einen endlichen Wert annimmt.

Diese flachheitsbasierte Parametrierung erlaubt es nun, auf einfache Art und Weise eine Trajektorienfolgeregelung nach Abschnitt 6.4.1 bzw. Abschnitt 6.4.2 aufzubauen. Die flachheitsbasierte Steuerung $\mathbf{u}_d^T(t) = [u_{1,d}(t), u_{2,d}(t)]$ beispielsweise ergibt sich direkt durch Einsetzen der hinreichend oft stetig differenzierbaren Solltrajektorien $\mathbf{y}_d^T(t) = [y_{1,d}(t), y_{2,d}(t)] = [q_{1,d}(t), q_{2,d}(t)]$ in (6.160), (6.161).

Anhand des vorigen Beispiels erkennt man sehr schön, dass das System zwar nicht exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist (singuläre Entkopplungsmatrix), aber sehr wohl eine flachheitsbasierte Parametrierung sämtlicher Systemgrößen (Zustands- und Stellgrößen) existiert. In der Tat gilt im Mehrgrößenfall lediglich die Umkehrung, nämlich ein exakt eingangs-zustandslinearisierbares System ist auch differenziell flach, d.h. die notwendige und hinreichende Bedingung für die exakte Eingangs-Zustandslinearisierbarkeit von Satz 6.4 ist lediglich eine hinreichende Bedingung für die Flachheit des Systems. Im Folgenden soll der Begriff der differentiellen Flachheit etwas detaillierter formuliert werden.

6.5.2 Flachheit

Zur Definition der differentiellen Flachheit betrachte man eine möglichst allgemeine Darstellung eines finit-dimensionalen dynamischen Systems der Form

$$E_i(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \dots, \mathbf{w}^{(\rho)}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.162)$$

wobei in $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^s$ sämtliche Systemgrößen (Zustands- und Deskriptorgrößen, Eingangsgrößen, Stellgrößen) zusammengefasst werden.

Definition 6.4 (Flachheit). Man nennt das System (6.162) differenziell flach, wenn Funktionen $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ der Systemgrößen $w_j, j = 1, \dots, s$ und deren zeitlichen Ableitungen, d.h.

$$y_k = \phi_k(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \dots, \mathbf{w}^{(\mu_k)}), \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.163)$$

so existieren, dass nachfolgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (A) Die Funktionen y_1, y_2, \dots, y_m sind differenziell unabhängig, d.h. es existiert keine Differenzialgleichung der Form

$$\chi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(v)}) = 0. \quad (6.164)$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass für ein System mit m linear unabhängigen Stellgrößen m funktional unabhängige Größen $y_j, j = 1, \dots, m$ gefunden werden können.

- (B) Sämtliche Systemgrößen \mathbf{w} lassen sich zumindest lokal durch \mathbf{y} und deren zeitliche Ableitungen parametrieren, d.h.

$$w_j = \psi_j(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\sigma_j)}), \quad j = 1, \dots, s. \quad (6.165)$$

In diesem Fall wird \mathbf{y} als flacher Ausgang bezeichnet.

Beispiel 6.10. Als Beispiel betrachte man den Brückenkran von Abbildung 6.11.

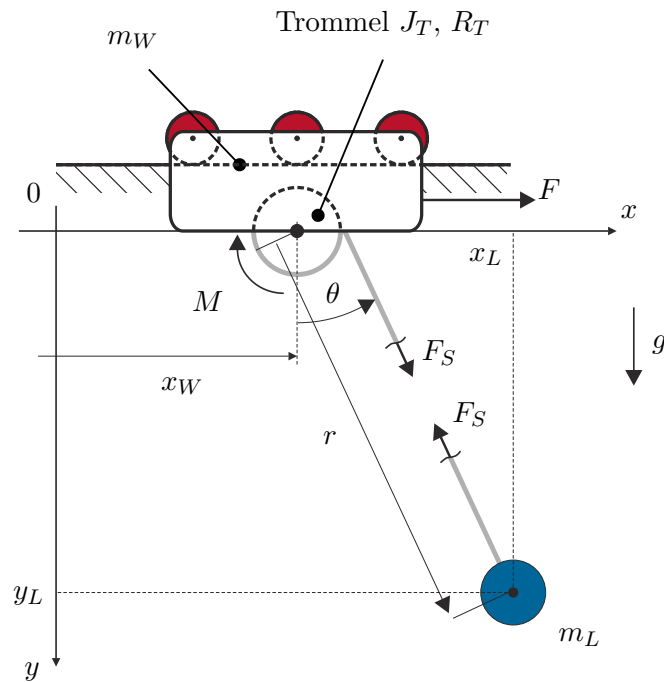


Abbildung 6.11: Schematische Darstellung eines Brückenkrans.

Es wird angenommen, dass das Seil masselos und undeformierbar ist und während der Bewegung stets vollständig gerade bleibt. Bezeichnet man mit F_S die Seilkraft und mit θ den Winkel des Seiles bezüglich der y -Achse, dann lautet der Impulserhaltungssatz für den Wagen

$$m_W \ddot{x}_W = F - d_W \dot{x}_W + F_S \sin(\theta) \quad (6.166)$$

mit der Wagenmasse m_W , der geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft $d_W \dot{x}_W$ und der externen Kraft F als Stellgröße. Die Dynamik der Last mit der Masse m_L errechnet sich ebenfalls aus dem Impulserhaltungssatz in x - und y -Richtung zu

$$m_L \ddot{x}_L = -F_S \sin(\theta) \quad (6.167a)$$

$$m_L \ddot{y}_L = -F_S \cos(\theta) + m_L g \quad (6.167b)$$

Die Last kann nun über eine Trommel mit dem Trägheitsmoment J_T aufgewickelt werden. Unter der Annahme, dass sich weder der Trommelradius R_T noch das Trägheitsmoment J_T durch das Aufwickeln des Seiles ändern, lautet die Bewegungsgleichung

$$J_T \frac{\ddot{r}}{R_T} = M - d_T \frac{\dot{r}}{R_T} + F_S R_T \quad (6.168)$$

mit dem durch einen Motor aufgebrauchten Drehmoment M als Stellgröße und dem drehwinkelgeschwindigkeitsproportionalen Reibungskoeffizienten d_T . Zusätzlich zu den Differenzialgleichungen (6.166) - (6.168) gelten noch folgende algebraische Restriktionsgleichungen

$$x_L = r \sin(\theta) + x_W \quad (6.169a)$$

und

$$y_L = r \cos(\theta) . \quad (6.169b)$$

Das mathematische Modell des Brückenkrans (6.166) - (6.169) liegt somit in der Form von (6.162) mit den Systemgrößen $\mathbf{w}^T = [x_W, x_L, y_L, r, \theta, F_S, F, M]$ vor.

Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass sich sämtliche Systemgrößen \mathbf{w} durch den flachen Ausgang $\mathbf{y}^T = [x_L, y_L]$ (Position der Last) parametrieren lassen. Aus (6.167) errechnen sich F_S und θ zu

$$F_S = m_L \sqrt{\ddot{x}_L^2 + (\ddot{y}_L - g)^2} \quad (6.170a)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\ddot{x}_L}{\ddot{y}_L - g}\right) \quad (6.170b)$$

und aus (6.169) folgt die Parametrierung von r und x_W zu

$$r = \frac{y_L}{\cos(\theta)} = \frac{y_L \sqrt{\ddot{x}_L^2 + (\ddot{y}_L - g)^2}}{g - \ddot{y}_L} \quad (6.171a)$$

$$x_W = x_L - r \sin(\theta) = x_L - y_L \frac{\ddot{x}_L}{\ddot{y}_L - g} . \quad (6.171b)$$

Die verbleibende Parametrierung der beiden Stellgrößen F und M erhält man direkt aus (6.166) und (6.168) in der Form

$$F = m_W \ddot{x}_W + d_W \dot{x}_W - F_S \sin(\theta) \quad (6.172a)$$

$$M = J_T \frac{\ddot{\theta}}{R_T} + d_T \frac{\dot{\theta}}{R_T} - F_S R_T \quad (6.172b)$$

mit r , x_W , F_S und θ gemäß (6.170) und (6.171). Auf Basis dieser flachheitsbasierten Parametrierung ist es nun relativ einfach möglich, eine flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung für die Last aufzubauen.

Man beachte, dass im soeben gezeigten Beispiel die flachheitsbasierte Analyse ohne explizite Herleitung einer Zustandsdarstellung des mathematischen Modells durchgeführt wurde. In vielen Fällen führt dies zu einer drastischen Vereinfachung der Berechnung des (nichtlinearen) Regelgesetzes. Abschließend sei noch angemerkt, dass die Theorie der flachheitsbasierten Regelung in den letzten Jahren erfolgreich auf gewisse Klassen verteilt-parametrischer Systeme, also Systeme beschrieben durch partielle Differenzialgleichungen, erweitert werden konnte.

6.6 Literatur

- [6.1] S. Antonov, A. Fehn und A. Kugi, „A new flatness-based control of lateral vehicle dynamics,“ *Vehicle System Dynamics*, Jg. 46, Nr. 9, S. 789–801, 2008.
- [6.2] E. Delaleau und J. Rudolph, „Control of flat systems by quasi-static feedback of generalized states,“ *Int. J. Control*, Jg. 71, S. 745–765, 1998.
- [6.3] C. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon, „Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples,“ *Int. J. Control*, Jg. 61, S. 1327–1361, 1995.
- [6.4] F. Fuchshumer, W. Kemmetmüller und A. Kugi, „Nichtlineare Regelung von verstellbaren eigenversorgten Axialkolbenpumpen,“ *Vehicle System Dynamics*, Jg. 55, Nr. 2, S. 58–68, 2007.
- [6.5] V. Hagenmeyer, *Robust nonlinear tracking control based on differential flatness*. Düsseldorf: Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 978, VDI Verlag, 2003.
- [6.6] V. Hagenmeyer und M. Zeitz, „Internal dynamics of nonlinear flat systems with respect to a non-flat output: a flatness representation,“ *System and Control Letters*, Jg. 52, S. 323–327, 2004.
- [6.7] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems (3rd Edition)*. London: Springer, 1995.
- [6.8] T. Kiefer, A. Kugi und W. Kemmetmüller, „Modeling and Flatness-based Control of a 3DOF Helicopter Laboratory Experiment,“ in *CD.-Proc. IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2004*, Stuttgart, Germany, 31.08.–03.09.2004 2004.
- [6.9] P. Martin, R. Murray und P. Rouchon, „Flat systems,“ *Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference (ECC), Brussels, Belgium*, S. 211–264, 1997.
- [6.10] J. Rudolph, *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Aachen: Shaker Verlag, 2003.
- [6.11] R. Rothfuß, *Anwendung flachheitsbasierter Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Düsseldorf: Fortschrittsberichte VDI, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 664, VDI Verlag, 1997.
- [6.12] S. Sastry, *Nonlinear Systems (Analysis, Stability, and Control)*. New York: Springer, 1999.
- [6.13] H. Sira-Ramírez und S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*. New-York Basel: Marcel Dekker, 2004.
- [6.14] E. Slotine und W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [6.15] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory (2nd Edition)*. New York: Springer, 1998.
- [6.16] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.