4 Lösung von Optimalsteuerungsproblemen mit indirekten Verfahren

Indirekte Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen basieren auf der Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung. Diese ergeben sich (sofern keine Zustandsbeschränkungen im Optimierungshorizont $[t_0, t_1]$ vorliegen) zu Zweipunktrandwertproblemen mit algebraischen Nebenbedingungen. Für die numerische Lösung dieser Zweipunktrandwertprobleme bieten sich in MATLAB die Funktionen `bvp4c` bzw. `bvp5c` an.

In dieser Übung soll wieder das Wagen-Pendel-System aus Übung 3 mit den Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ s\\ v\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\omega\\ \frac{mga\sin(\theta)-d\omega+ma\cos(\theta)u}{J+ma^2}\\ v\\ u\end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t,\mathbf{x},u)} \tag{4.1}$$

betrachtet werden. Das zu lösende Optimalsteuerungsproblem lautet

$$\min_{u(\cdot)} \quad J(u(\cdot)) = \varphi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} l(t, \mathbf{x}(t), u(t))\ \mathrm{d}t \tag{4.2a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{4.2b}$$

$$\boldsymbol{\psi}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{0} \tag{4.2c}$$

mit

$$\varphi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_1) \qquad \mathbf{S} \geq \mathbf{0} \tag{4.3a}$$

$$l(t, \mathbf{x}, u) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2\Big), \quad \mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad R > 0\ , \tag{4.3b}$$

den Systemgleichungen gemäß (4.1) und den partiellen Endbedingungen

$$\boldsymbol{\psi}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \begin{bmatrix}x_1(t_1) - \bar{x}_1\\ x_2(t_1) - \bar{x}_2\\ x_4(t_1) - \bar{x}_4\end{bmatrix}\ . \tag{4.3c}$$

Die numerischen Parameter des Systems sind das Massenträgheitsmoment $J = 0.0361\,\mathrm{kg\,m^2}$, der Schwerpunktsabstand $a = 0.42\,\mathrm{m}$, die Masse $m = 0.3553\,\mathrm{kg}$ des Pendelstabes, die Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ und der Reibungskoeffizient $d = 0.005\,\mathrm{N\,m\,s}$. Die Parameter des Optimalsteuerungsproblems sind durch

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = 0.1 \tag{4.4a}$$

$$\bar{x}_1 = 0 \qquad \bar{x}_2 = 0 \qquad \bar{x}_4 = 0 \tag{4.4b}$$

$$t_0 = 0\,\mathrm{s} \qquad t_1 = 4\,\mathrm{s} \tag{4.4c}$$

gegeben. Der Anfangszustand des Systems lautet $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

<u>Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben als Vorbereitung für die Übungseinheit:</u>

1. Lesen Sie sich die Theorie zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen durch. Beachten Sie hierbei vor allem die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung und das Minimumsprinzip von Pontryagin.

2. Machen Sie sich mit der MATLAB-Routine `bvp4c` vertraut. Lösen Sie hierfür das Zweipunktrandwertproblem

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1(x_3 - x_1)}{2x_2} \tag{4.5a}$$

$$\dot{x}_2 = -0.5(x_3 - x_1) \tag{4.5b}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{0.9 - 1000(x_3 - x_5) - 0.5x_3(x_3 - x_1)}{x_4} \tag{4.5c}$$

$$\dot{x}_4 = 0.5(x_3 - x_1) \tag{4.5d}$$

$$\dot{x}_5 = -100(x_5 - x_3) \tag{4.5e}$$

für das Zeitintervall $t \in [0, 1]$ mit den Randbedingungen

$$x_1(0) = 1 \qquad x_3(1) = x_5(1) \tag{4.5f}$$

$$x_2(0) = 1 \tag{4.5g}$$

$$x_3(0) = 1 \tag{4.5h}$$

$$x_4(0) = -10\ . \tag{4.5i}$$

Verwenden Sie

$$x_1(t) = 1 \tag{4.6a}$$

$$x_2(t) = 1 \tag{4.6b}$$

$$x_3(t) = -4.5t^2 + 8.91t + 1 \tag{4.6c}$$

$$x_4(t) = -10 \tag{4.6d}$$

$$x_5(t) = -4.5t^2 + 9t + 0.91 \tag{4.6e}$$

als Startlösung. Um die Korrektheit Ihrer Lösung zu überprüfen können Sie sie mit Abbildung 4.1 vergleichen.

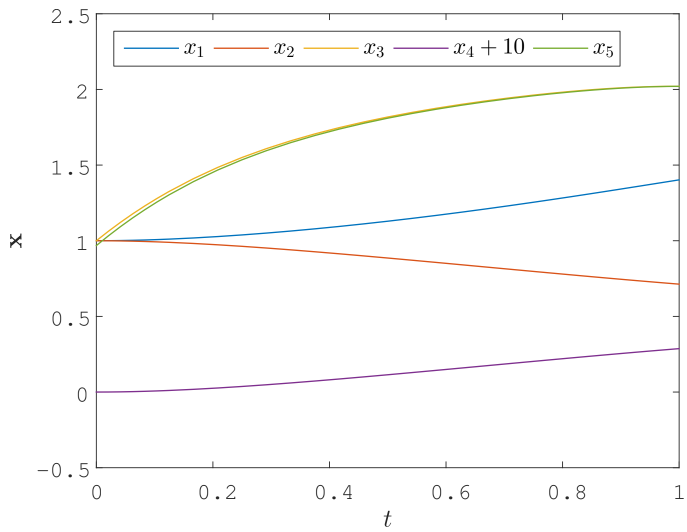

Abbildung 4.1: Lösung des Zweipunktrandwertproblems (4.5).

Die folgenden Aufgaben sind in der Übungseinheit zu lösen:

1. Formulieren Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Optimalsteuerungsproblem (4.2) in Form eines Zweipunktrandwertproblems.

   > **Hinweis:** Formulieren Sie das Problem allgemein mit den Funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u)$, $l(t, \mathbf{x}, u)$ und $\varphi(t, \mathbf{x})$ sowie den dazugehörigen Jacobimatrizen.

2. Lösen Sie das Zweipunktrandwertproblem mit der MATLAB-Funktion `bvp4c`. Stellen Sie die gefundenen Lösungen für $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ und $\boldsymbol{\lambda}(t)$ grafisch dar.

3. Berücksichtigen Sie zusätzlich die Stellgrößenbeschränkung

$$-12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \leq u(t) \leq 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \ . \tag{4.7}$$

   Adaptieren Sie dazu die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Aufgabe 1. und lösen Sie das geänderte Zweipunktrandwertproblem mit `bvp4c`.