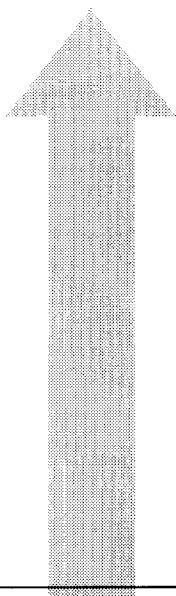
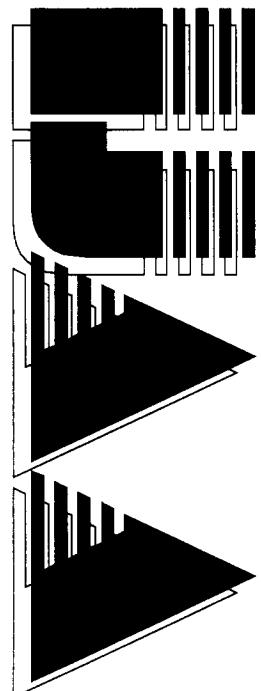


INTERNATIONAL JOURNAL

HEFT 1

Jg. 10, (2002)

AUTOMATION AUSTRIA



INHALT

	Seite
WEINMANN, A. Robust Dynamics and Control	1
KEHL, G. Simulative Ermittlung von Positionierzeiten lagegeregelter Vorschubachsen	66
SCHLAGLICHTER	75
BUCHBESPRECHUNG	80
DISSERTATIONSKURZFASSUNGEN	84
VERANSTALTUNGEN	86

Robust Dynamics and Control

Alexander Weinmann, ÖVE, Senior Member IEEE
 Vienna University of Technology, Institute of Automatic Control
 Gussausstrasse 27-29/375
 A-1040 Vienna / Austria
 Phone: +43 1 58801 37500, Fax: +43 1 58801 37599
 email: weinmann@iert.tuwien.ac.at

Summary: This survey paper addresses the most common methods and algorithms for analyzing dynamical systems with severe tolerances of their components. These uncertainties are asserted in time or frequency domain, oriented at the system parameters or merely at the input-output behaviour. In addition, the systems are augmented by robust controllers. They allow for optimum design of the over-all system dynamics in order to optimally cope with the uncertainties as far as stability and performance is concerned.

In more detail, methods based on H_∞ theory, the Michailow value set and Kharitonov's results are presented. Independent (rectangular) and spherical uncertainties are taken into consideration. Model predictive systems are extended to robust operation. Uncertainties are also modelled as fuzzy sets.

For illustration and easy understanding, numerous examples are included. Several MATLAB codes are presented as well to provide the reader with material to quickly recall or modify the results.

Kurzfassung: Dieser Übersichtsaufsatz spricht die häufigsten Methoden und Algorithmen an, die zur Analyse von dynamischen Systemen mit nennenswerten Systemtoleranzen existieren. Diese Unsicherheiten werden im Zeit- und Frequenzbereich angesetzt, bezogen auf die Systemparameter oder auf das Eingangs-Ausgangsverhalten. Diese unsicheren Systeme werden durch Regler oder andere dynamische Teilsysteme derart ergänzt, dass die Gesamtsysteme nur minimale Auswirkung der Unsicherheiten auf Stabilität und Güte aufweisen.

Im Detail werden Methoden basierend auf der H_∞ -Theory, den Michailow-Value-Sets und den Resultaten nach Kharitonov ausgeführt. Unabhängige (rechteckige) und sphärische Unsicherheiten werden betrachtet. Modell-prädiktive Systeme werden auf robustes Verhalten erweitert. Schließlich werden Unsicherheiten auch als unscharfe Mengen behandelt und als Smart Results präsentiert.

Eine Vielzahl von numerischen Beispielen ist eingeschlossen, um das Verständnis zu erleichtern. Darüber hinaus sind auch etliche MATLAB Codes angegeben, um dem Leser die Möglichkeit zu geben, die Ergebnisse rasch wiederherzustellen oder zu modifizieren.

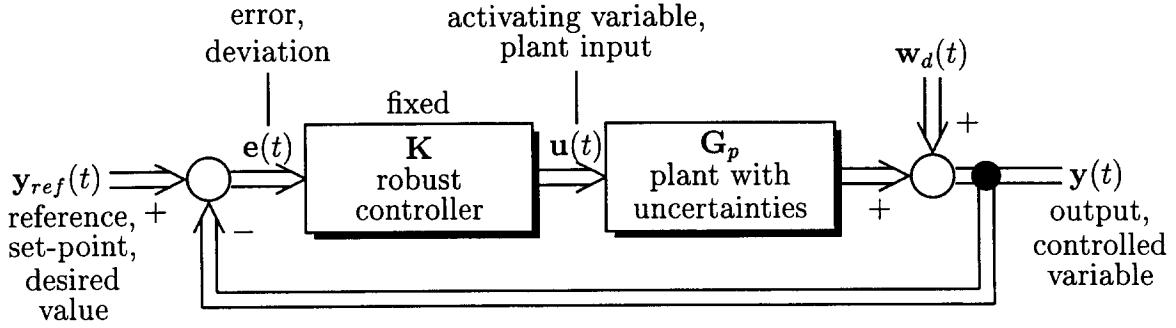


Figure 1: Robust control system

1 Introduction

What does control mean? The answer is: a part of a system (controller) should be designed such that the entire system (plant and controller) operates autonomously. What is robust control? This is a control system with serious uncertainties in the plant. The whole system tolerates these uncertainties. Find the controller K such that the properties of the closed-loop system are better than predetermined limits, in spite of these uncertainties.

We use a hypothesis for robustness: A family of fixed closed-loop linear time-invariant systems with controller and plant is considered, with plant uncertainty parameter obeying $p_l \leq p \leq p_h$. Robustness is stated if each member of the family satisfies given stability and/or performance.

Examples for performance properties are: stability margin, settling time, rise time of step response, integral of sum of squared errors of the closed-loop system.

The disturbance w_d is an influence (signal) from outside, uncertainties are a system property. Uncertainties (tolerances or perturbation) are characterized with index p . The quantities ΔG , Frobenius norm $\|\Delta A\|_F$ are unstructured uncertainties without details. Its detailed elements $\Delta a_1, \Delta a_3 \dots$ are structured uncertainties including all details.

Conservatism arises

- if you are forced (for the sake of easier calculation and simpler results) to include uncertainties which do not exist, then the controller synthesis is robust for existing and nonexisting uncertainties (which is not necessary), the result is not necessary but sufficient.
- Sufficiency for robust stability: If a sufficient condition holds then the original system is stable. If a sufficient condition does not hold then the original system might be stable or unstable.

Robust control is somewhat opposite to adaptive control. An accurate model is often very expensive to obtain. On top of this, robust controllers use a rough model of the system only, superscribing all the possible uncertainties by upper bounds. This is carried out in the initial design phase. Adaptive or learning systems try to put intelligence into the operation phase. Learning leads to more autonomy but it might be dangerous since delayed or wrong results from learning can cause instability.

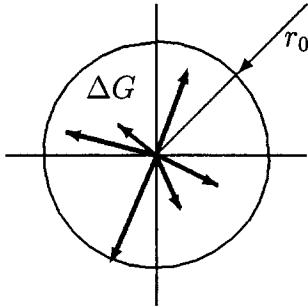


Figure 2: Unstructured uncertainty $\Delta G(j\omega)$ represented by complex arrows

2 Robust SISO System in Frequency Domain

Use scalar functions instead of vectors and matrices in Fig. 1 for single-input single-output (SISO) systems, first.

2.1 Stability Robustness for Additive Uncertainty

The unstructured uncertainty is only input/output oriented

$$G_p(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad \text{where } G(s) \dots \text{nominal, and} \quad (1)$$

$$\Delta G(s) \dots \text{uncertainty, e.g. for } s = j\omega \text{ any arrow in the disc of Fig. 2.} \quad (2)$$

$|\Delta G|(\omega) < r_0$ means: complex arrow ΔG with modulus smaller than r_0

$$\Delta G = re^{j\varphi_a}, \quad r < r_0, \quad \varphi_a \dots \text{arbitrary angle.} \quad (3)$$

For $\Delta G = \Delta G(j\omega)$ one has $|\Delta G| = |\Delta G|(\omega) < r_0(\omega)$.

The open-loop uncertainty for fixed $K(s)$ and $s = j\omega$ is

$$\Delta F_o(j\omega) = K(j\omega) \cdot \Delta G(j\omega) \quad (4)$$

$$|\Delta F_o| = |K \cdot \Delta G| = |K| \cdot |\Delta G| \leq |K(j\omega)| \cdot r_0(\omega) \triangleq R_0(\omega). \quad (5)$$

Now, let us assume stable G , K and ΔG and let us demand closed-loop system stability. Referring to details of the perturbed system and excluding zeros along the imaginary axis in Eq.(9), the denominator of the closed-loop system is

$$1 + K(s)G_p(s) = 0 \quad (6)$$

$$1 + K(s)[G(s) + \Delta G(s)] = 0 \rightsquigarrow s_i \mid \Re s_i < 0. \quad (7)$$

$$1 + K(s)G(s) + K(s) \cdot \Delta G(s)|_s = 0 \quad (8)$$

$$1 + K(s)G(s) + K(s) \cdot \Delta G(s)|_{s=j\omega} \neq 0 \quad \forall \omega \quad (9)$$

$$\text{unperturbed } 1 + K(s)G(s)|_{s=j\omega} \neq 0 \quad \forall \omega \quad (10)$$

$$\underbrace{(1 + KG)(1 + \frac{K}{1 + KG}\Delta G)}_{\neq 0} \neq 0 \quad \forall \omega \quad (11)$$

$$1 + \frac{K}{1 + KG}\Delta G \neq 0 \quad \forall \omega. \quad (12)$$

Use the transfer function $F_{uw_d}(s)$ from the disturbance w_d at the output of $G(s)$ to the input of $G(s)$, see Fig. 1,

$$1 + F_{uw_d}(j\omega)\Delta G(j\omega) \neq 0 \quad \forall\omega \quad (13)$$

$$F_{uw_d}(j\omega)\Delta G(j\omega) \neq -1 \quad \forall\omega. \quad (14)$$

Two possibilities are rendered, either

$$|F_{uw_d}(j\omega)\Delta G(j\omega)| \geq 1 \quad \forall\omega, \quad (15)$$

which cannot be satisfied for ΔG small or zero hence forget it; or

$$|F_{uw_d}(j\omega)\Delta G(j\omega)| < 1 \quad \forall\omega \quad (16)$$

$$\text{with the property of the modulus } |F_{uw_d}| |\Delta G| < 1 \quad \forall\omega \quad (17)$$

$$|F_{uw_d}| |r_0(j\omega)e^{j\varphi_{arb}}| < 1 \quad \forall\omega \quad (18)$$

$$|F_{uw_d}| r_0(\omega) < 1 \quad \forall\omega \quad (19)$$

$$\boxed{r_0(\omega) < 1/|F_{uw_d}(j\omega)| \quad \forall\omega}. \quad (20)$$

The MATLAB code for generating this result of robust stability in Fig. 3 is

```
% haf.m Controller for robust stability
clear
w=logspace(-2,2,100);
for i=1:length(w)
    s=j*w(i);
    K=10*(0.067*s+1)/s;
    G=3/((1+0.5*s)*(1+0.1*s)*(1+0.05*s)*(1+0.02*s));
    deltaG(i)=1.9/(1+abs(s)^2);
    invFuwd(i)=abs((1+K*G)/K);
    vecomega(i)=w(i);
    figure(1)
    semilogx(vecomega,invFuwd, vecomega,deltaG,'.');
    title('invFuwd and deltaG ("") /omega, haf.m figure(1), idh.wmf')
    xlabel('\omega')
    axis([min(abs(w)) max(abs(w)) 0 4])
    hold on
end
hold off
```

An alternative 1 for presenting the result¹ Eq.(19) is

$$\max_{\omega}\{|F_{uw_d}|\cdot r_0(\omega)\} < 1. \quad (21)$$

Separating the properties of individual functions of ω yields a sufficient result

$$\Leftarrow \max_{\omega}|F_{uw_d}|\cdot \max_{\omega}r_o(\omega) < 1 \quad (22)$$

¹Glossary of symbols: “leads to”: $x^2 = 4 \rightsquigarrow x = 2$, sometimes $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (since necessary). See e.g. Eqs.(242) and (243) for sufficient and necessary condition.

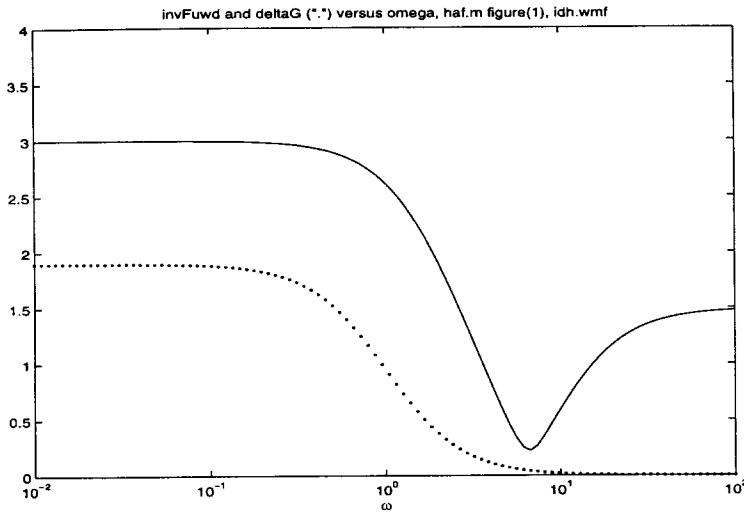


Figure 3: Frequency characteristic for checking a controller's robust stability

$$\max_{\omega} r_o(\omega) < \frac{1}{\max_{\omega} |F_{uw_d}(j\omega)|}. \quad (23)$$

Alternative 2, using smallest upper limit (“sup”):

$$\sup_{\omega} |\Delta G(j\omega)| \stackrel{\Delta}{=} \|\Delta G\|_{\infty} < \frac{1}{\sup_{\omega} |F_{uw_d}(j\omega)|}. \quad (24)$$

Alternative 3 provides

$$\frac{|1 + K(j\omega)G(j\omega)|}{|K(j\omega)|} > |\Delta G(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (25)$$

$$|1 + F_o(j\omega)| > |K(j\omega)| \cdot |\Delta G(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (26)$$

$$|1 + F_o(j\omega)| > R_0(\omega) \quad \forall \omega, \quad (27)$$

see Fig. 4. The distance of the Nyquist plot to the Nyquist point has to be larger than $R_0(\omega)$ for all ω . Alternatively, the Nyquist plot is extended to a Nyquist band, i.e., the union of all the discs with radius $R_0(\omega)$ around $F_0(j\omega)$.

2.2 H_{∞} Norm for Scalar Variables

Remember the circle in the (x, y) -plane

$$x^2 + y^2 = \stackrel{\Delta}{=} |x|^2 + |y|^2 = \text{constant}. \quad (28)$$

Rewriting $x = x_1$, $y = x_2$ and using the definition of the Frobenius vector norm

$$\|\mathbf{x}\|_F^2 = \sum |x_i|^2, \quad (29)$$

a circle results from $\|\mathbf{x}\|_F = \text{constant}$. The expression

$$|x|^{10} + |y|^{10} = \text{constant} \quad (30)$$

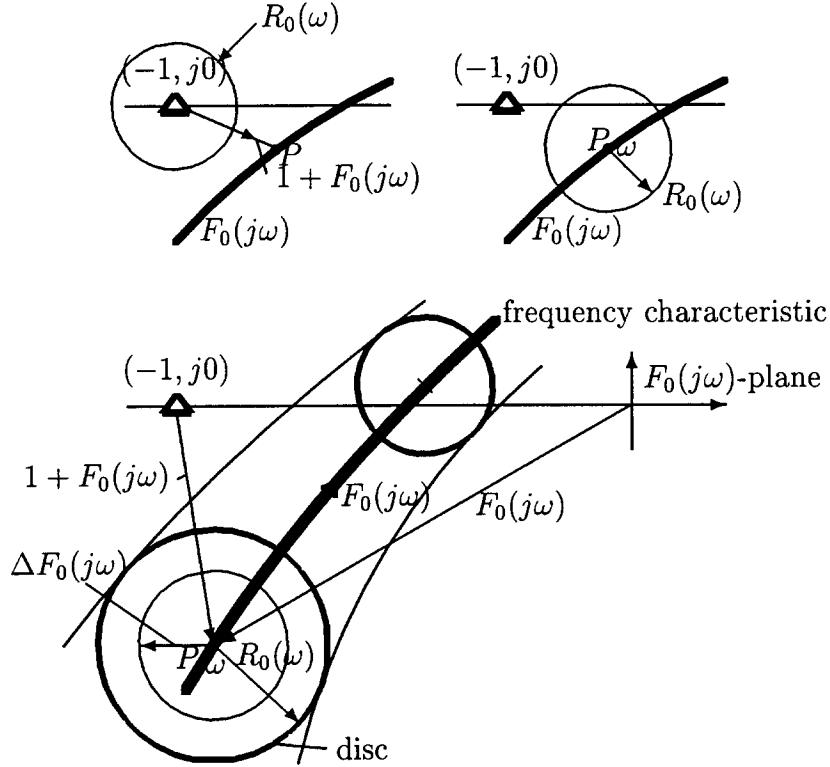


Figure 4: Frequency characteristic and frequency band for additive-type uncertainty

corresponds to a square with rounded-off corners. For infinity powers, x_i is insignificant for $x_i < 1$, only if it is equal to 1 it contributes to $\sum |x_i|^\infty$. Hence, a square or rectangle results from

$$|x|^\infty + |y|^\infty = \text{constant}. \quad (31)$$

The L_2 norm (H_2 norm) of a signal $u(t)$ is defined as a *function norm*

$$\|u(t)\|_2 \triangleq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

Replacing 2 by α , the larger α the more the large parts in $u(t)$ in Eq.(33) (for $\alpha < \infty$ yet) determine the result. For the power α approaching infinity one has

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^\alpha dt \right]^{\frac{1}{\alpha}} \triangleq \sup_t |u(t)|. \quad (33)$$

For comparison, $u^2(t)$ is the instantaneous power but $\|u(t)\|_2$ is the energy in the total signal.

Now, consider the signal $u(t)$ as the input of a linear stable system with transfer function $G(s)$, then the output $y(t)$ is of L_2 norm $\|y(t)\|_2$. There is an important relation: using $Y(s) = G(s)U(s)$ and Theorem of Parseval one has

$$\|y(t)\|_2 \triangleq \left[\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

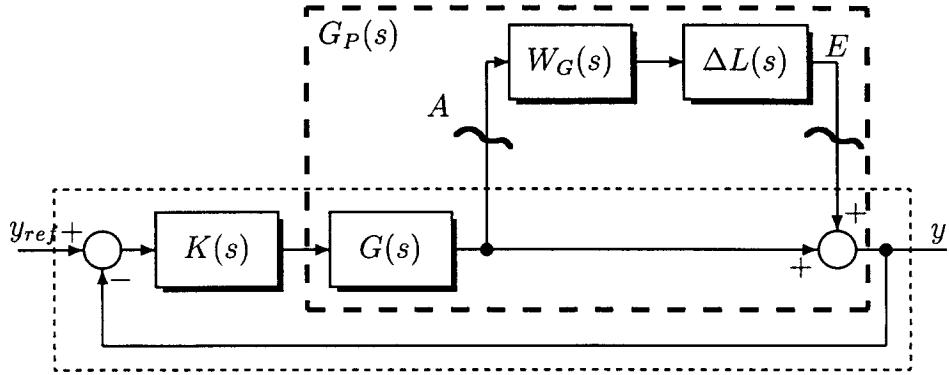


Figure 5: Control system with multiplicative-type uncertainty

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)Y(-j\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)U(j\omega)G(-j\omega)U(-j\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\max_{\omega} |G(j\omega)| |G(-j\omega)| \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)U(-j\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

$$\boxed{\|y(t)\|_2 \leq \|G(s)\|_{\infty} \|u(t)\|_2} \quad (38)$$

The important relation is

$$\boxed{\sup_u \{ \|y(t)\|_2 : \|u(t)\|_2 \leq 1 \} = \|G(s)\|_{\infty}}, \quad (39)$$

i.e., for all possible signals $u(t)$ with norm limited in energy via L_2 norm by 1, the energy of the output never exceeds the H_{∞} norm of the transfer function.

There is a remarkable difference: The H_{∞} norm contributes to the energy-associated consideration of the signal unlike spectral representation of the signal yielding momentaneous power associated with the signal.

2.3 Robustness in the Case of Multiplicative Uncertainty

2.3.1 Robust Stability

Consider

$$G_p(s) = [1 + \Delta L(s)W_G(s)]G(s) \quad (40)$$

and utilize the H_{∞} norm

$$\forall \Delta L(s) : \|\Delta L(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |\Delta L(j\omega)| \leq 1. \quad (41)$$

$W_G(s)$ is a weighting function, $\Delta L(s)$ a per-unit uncertainty with $|\Delta L(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$ or $\sup_{\omega} |\Delta L(j\omega)| \leq 1$.

The block diagram of Fig. 5 with controller $K(s)$ and perturbed plant $G_p(s)$ is restructured. According to Eq. (40) the control system is considered as a series interconnection of $W_G(s)\Delta L(s)$ and $-KG/(1+KG)$.

The expression $-KG/(1+KG)$ is a transfer function T_{AE} of the nominal system with input E an output A. One finds a relation to the well-known target transfer function $T(s)$, i.e., $T_{AE} = -T(s)$. Nyquist stability is guaranteed, if for stable $W_G(s)$, $\Delta L(s)$ and $T(s)$

$$|-T(j\omega)W_G(j\omega)\Delta L(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \quad (42)$$

$$\| -T(s)W_G(s)\Delta L(s) \|_\infty < 1 . \quad (43)$$

Using $\|\Delta L(s)\|_\infty \leq 1$ and owing to the submultiplicative property² of the H_∞ norm, the necessary and sufficient stability condition is

$$\boxed{\|W_G(s)T(s)\|_\infty < 1} \quad (44)$$

$$\boxed{|W_G(j\omega)F_o(j\omega)| < |1 + F_o(j\omega)| \quad \forall \omega} . \quad (45)$$

The Nyquist point must be located outside the band along the characteristic $F_0(j\omega)$. This band consists of discs for each ω with radius $|W_G(j\omega)F_0(j\omega)|$.

2.3.2 Nominal Performance

Assume a spectral weighting function $W_e(s)$ for the deviation $e(t)$. This function is used as a performance condition for approaching

$$y_{ref} - y = e \rightarrow 0 \quad (46)$$

desired for any input y_{ref} and employing the sensitivity function $S(s)$

$$S(s) = 1/(1+KG) \quad |S(s)| < g_e \quad |W_e S| = 1 \quad \forall \omega \quad (47)$$

$$\|W_e(s) S(s)\|_\infty < 1 . \quad (48)$$

2.3.3 Robust Performance

For the plant with uncertainty of Eq.(40)

$$S_p(s) \triangleq \frac{1}{1+K(s)G_p(s)} \quad (49)$$

$$= \frac{1}{1+[1+W_G(s)\Delta L(s)]F_0(s)} \quad (50)$$

$$= \frac{1}{(1+F_o)[1+\frac{W_G\Delta L F_o}{1+F_o}]} \quad (51)$$

$$= \frac{1}{1+W_G(s)T(s)\Delta L(s)} S(s) . \quad (52)$$

² $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ (for scalar and for matrix-valued \mathbf{A}, \mathbf{B})

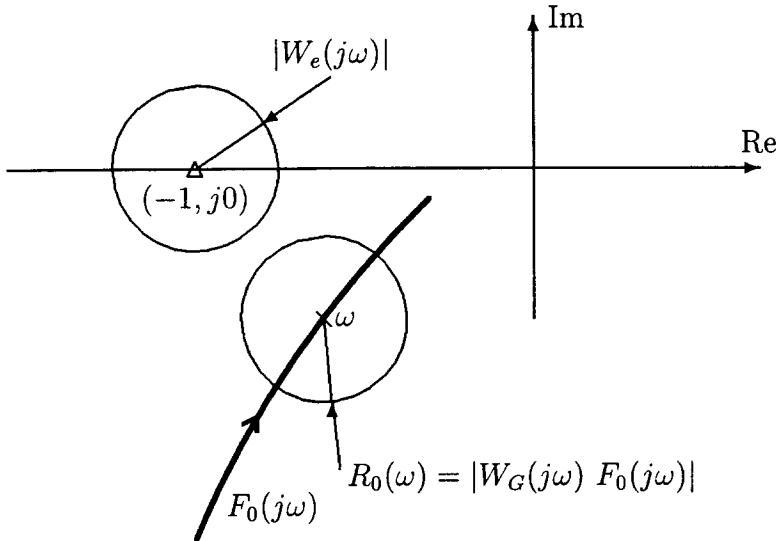


Figure 6: Nonintersecting circle for robust performance

For the robust performance from Eq.(48) one has

$$\|W_e(s)S_p(s)\|_\infty = \left\| \frac{W_e(s)}{1 + W_G(s)T(s)\Delta L(s)} S(s) \right\|_\infty < 1 \quad (53)$$

$$\forall \Delta L(s) : \|\Delta L(s)\|_\infty \leq 1 . \quad (54)$$

Restructuring leads to

$$|W_e(j\omega)S(j\omega)| < |1 + W_G(j\omega)T(j\omega)\Delta L(j\omega)| \quad \forall \omega, \Delta L . \quad (55)$$

The worst case is given for that case where the right-hand side is of smallest modulus. This occurs if $\Delta L(j\omega)$ is 1 with a phase such that $W_G(j\omega)T(j\omega)$ is negative real; then $\forall \omega$

$$|W_e(j\omega)S(j\omega)| < 1 - |W_G(j\omega)T(j\omega)| \quad (56)$$

$$|W_e(j\omega)S(j\omega)| + |W_G(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad (57)$$

$$\| |W_e(j\omega)S(j\omega)| + |W_G(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty < 1 \quad (58)$$

$$\boxed{|W_e(j\omega)| + |W_G(j\omega)F_o(j\omega)| \leq |1 + F_o(j\omega)| \quad \forall \omega} \quad (59)$$

which can be proved as necessary and sufficient. Eq.(58) includes Eq.(45); hence, Eq.(58) is the resulting condition for robust performance and stability.

The circles in Fig. 6 must not intersect. Each circle of the Nyquist band around a point ω with radius $|W_G(j\omega)F_o(j\omega)|$ has to be located outside the disc around the Nyquist point with radius $|W_e(j\omega)|$ (*Francis, B., 1991*).

Remember that F_o , W_e , W_G are nominal data.

For design purpose, separate conditions for small and large frequency can be used

$$|F_o(j\omega)| \gg 1 \quad \omega \ll 1 \quad |F_o| > \frac{|W_e|}{1 - |W_G|} \quad (60)$$

$$|F_o(j\omega)| \ll 1 \quad \omega \gg 1 \quad |F_o| > \frac{1 - |W_e|}{|W_G|} . \quad (61)$$

One has to fit $|F_o(j\omega)|$ into these regions, e.g. with the help of Bode plots.

Good and applicable results have been found. This was a significant method for derivations used in robust control, significant as far as mathematical operations and logical considerations are concerned.

3 Stability Robustness for Multivariable Systems

3.1 Norms of Vectors and Matrices. Singular-Value Correspondences

With the help of norms, a positive scalar is attributed to vectors and matrices.

Frobenius norm or Euler norm:

$$\|\mathbf{x}\|_F \triangleq +\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots |x_n|^2} \equiv +\sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \quad (62)$$

where $\mathbf{x}^H \triangleq [(\mathbf{x})^T]^*$ (conjugate transpose), $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n$ and

$$\|\mathbf{G}\|_F \triangleq +\sqrt{\sum_i \sum_j |G_{ij}|^2} \equiv +\sqrt{(\text{col } \mathbf{G})^H (\text{col } \mathbf{G})} \quad (63)$$

$$\equiv +\sqrt{\text{tr}[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \equiv +\sqrt{\sum_i \lambda_i[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} . \quad (64)$$

“col” is an operator restructuring a matrix $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^{n \times n}$ into a vector $\in \mathcal{C}^{n^2}$. The symbol “tr” is the trace; the superscript H means Hermite.

Induced norm (spectral norm or Hilbert norm)

$$\|\mathbf{G}\|_s \triangleq \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{x}\|_F}{\|\mathbf{x}\|_F} \equiv \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{G}\mathbf{x}\|_F . \quad (65)$$

Singular values of a matrix

$$\sigma_i[\mathbf{G}] \triangleq +\sqrt{\lambda_i[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n . \quad (66)$$

They exist for square and rectangular matrices. They are always real and positive. There are always n singular values for $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^{n \times n}$.

The spectrum (i.e., $\lambda_i[\mathbf{A}] \forall i$) of a Hermite matrix \mathbf{A} (i.e., $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$) is real. If \mathbf{A} is positive definite then $\lambda_i[\mathbf{A}]$ are real and positive. The eigenvalues of $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$ are also real and positive, they correspond to the singular values.

$$\sigma[\mathbf{G}] \triangleq +\sqrt{\lambda[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} ; \quad \sigma_{\max}[\mathbf{G}], \dots, \sigma_i[\mathbf{G}], \dots, \sigma_{\min}[\mathbf{G}] \quad (67)$$

$$\sigma_{\max}[\mathbf{G}] \triangleq +\sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \quad (68)$$

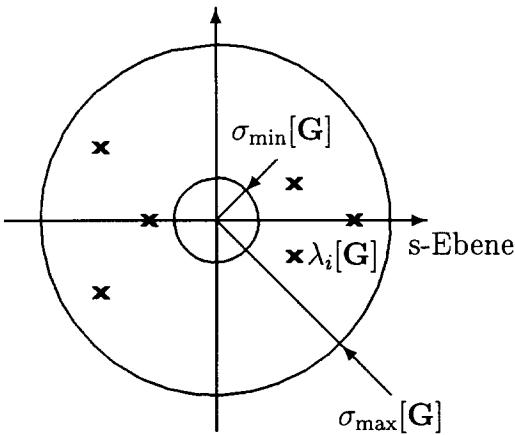


Figure 7: Bounding the location of eigenvalues by circles with maximum and minimum singular value

$$\sigma_{\min}[\mathbf{G}] \triangleq +\sqrt{\lambda_{\min}[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \quad (69)$$

The maximum singular value is a generalization of absolute value. Using MATLAB, the command is `max(svd(G))`.

The largest and the smallest singular values determine

$$\sigma_{\max}[\mathbf{G}(s)] \equiv \|\mathbf{G}(s)\|_s \geq \frac{\|\mathbf{G}(s)\mathbf{x}(s)\|_F}{\|\mathbf{x}(s)\|_F} \geq \sigma_{\min}[\mathbf{G}(s)], \quad (70)$$

they bound the gain of a multivariable system. The largest singular value is equivalent to the spectral norm.

The vectors of the input and the output of a dynamical system $\mathbf{y} = \mathbf{Gu}$ are limited by

$$\|\mathbf{y}(j\omega)\|_F \leq \|\mathbf{G}(j\omega)\|_s \|\mathbf{u}(j\omega)\|_F. \quad (71)$$

As shown in Fig. 7, the eigenvalues are included in

$$\sigma_{\min}[\mathbf{E}] \leq |\lambda_i[\mathbf{E}]| \leq \sigma_{\max}[\mathbf{E}] \quad \forall i = 1, 2 \dots n, \quad \mathbf{E} \in \mathcal{C}^{n \times n}. \quad (72)$$

There are a lot of very useful correspondences as follows

$$\sigma_{\min}[\mathbf{E} + \mathbf{F}] \geq \sigma_{\min}[\mathbf{E}] - \sigma_{\max}[\mathbf{F}], \quad (73)$$

$$\sigma_{\max}[\mathbf{E} + \mathbf{F}] \leq \sigma_{\max}[\mathbf{E}] + \sigma_{\max}[\mathbf{F}], \quad (74)$$

$$\sigma_{\min}[\mathbf{EF}] \geq \sigma_{\min}[\mathbf{E}] \sigma_{\min}[\mathbf{F}], \quad (75)$$

$$\sigma_{\max}[\mathbf{EF}] \leq \sigma_{\max}[\mathbf{E}] \sigma_{\max}[\mathbf{F}], \quad (76)$$

$$\sigma_{\max}^{-1}[\mathbf{M}] = \sigma_{\min}[\mathbf{M}^{-1}]. \quad (77)$$

Example. Scalar function:

$$\mathbf{G} = G = a + jb \quad G^H = a - jb \quad (78)$$

$$G^H G = a^2 + b^2 \quad \lambda[G^H G] = a^2 + b^2 \quad (79)$$

$$\sigma[G] = +\sqrt{\lambda[G^H G]} = +\sqrt{a^2 + b^2} = |a + jb| . \quad \square \quad (80)$$

Example:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} \\ a \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{x}\|_F = 1 . \quad (81)$$

a) Induced norm $\|\mathbf{G}\|_s$:

$$\|\mathbf{G}\|_s = \sup_{\|\mathbf{x}\|_F=1} \|\mathbf{Gx}\|_F \quad (82)$$

$$= \sup_{\|\mathbf{x}\|_F=1} \left\| \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} \\ a \end{pmatrix} \right\|_F \quad (83)$$

$$= \max_a 0.5 \sqrt{1+a^2 + 2a \sqrt{1-a^2}} \quad (84)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (1+a^2 + 2a \sqrt{1-a^2}) = 0 \quad (85)$$

$$a = \sqrt{0.5 + \sqrt{0.05}} = 0.850650 \quad (86)$$

$$\|\mathbf{G}\|_s = \left\| \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} \\ a \end{pmatrix} \right\| \Big|_{a=\sqrt{0.5+\sqrt{0.05}}} = 0.809017 . \quad (87)$$

b) Maximum singular value:

$$\sigma_{\max}[\mathbf{G}] = +\sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} = 0.809017 . \quad (88)$$

c) Frobenius matrix norm:

$$\|\mathbf{G}\|_F = +\sqrt{0.25 + 0.25 + 0.25} = 0.866025 . \quad \square \quad (89)$$

3.2 Stability Robustness and Low-Frequency Accuracy

Assume the control system of Fig. 1 characterized by a parallel (additive) uncertainty of the plant of the unstructured kind $\|\Delta \mathbf{G}(j\omega)\|_s \leq g_o(\omega)$. Find the stability conditions for the family of all the time-invariant control systems with uncertainty as given by the bounds above. The number of Nyquist encirclements of the origin of

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\{\mathbf{G}(s) + \Delta \mathbf{G}(s)\}] \quad (90)$$

for s orbiting the right s -half-plane has to be invariant for all the possible values of $\Delta \mathbf{G}$. The origin has to be excluded (Zero Exclusion Theorem). This is guaranteed if

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{K}(j\omega)\{\mathbf{G}(j\omega) + \Delta \mathbf{G}(j\omega)\}] \neq 0 \quad \forall \omega . \quad (91)$$

In other words, one has to avoid steady-state oscillations. The left-hand side of the equation is separated in order to include the stability condition of the nominal system

$$\underbrace{\det(\mathbf{I} + \mathbf{KG})}_{\neq 0} \underbrace{\det[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{K}\Delta \mathbf{G}]}_{\triangleq \mathbf{H}} \neq 0 \quad \forall \omega . \quad (92)$$

Now, utilize

$$\det \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i[\mathbf{V}] = 0, \quad (93)$$

recalling the definition $\det(\lambda_i[\mathbf{V}] - \mathbf{V}) = 0$. For $\det \mathbf{H} \neq 0$ the condition $\lambda_i[\mathbf{H}] \neq 0 \forall i$ is required, i.e., \mathbf{H} must not possess an eigenvalue at zero

$$\lambda_i[\mathbf{H}] \stackrel{\Delta}{=} \lambda_i[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{K}\Delta\mathbf{G}] \neq 0 \quad \forall \omega. \quad (94)$$

Using Eq.(72)

$$\sigma_{\min}[\mathbf{H}] = \sigma_{\min}[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{K}\Delta\mathbf{G}] > 0 \quad \forall \omega. \quad (95)$$

Referring to Eq.(73), $\mathbf{E} := \mathbf{I}$, $\mathbf{F} := (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{KG}$,

$$\Leftarrow \sigma_{\min}[\mathbf{I}] - \sigma_{\max}[(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{K}\Delta\mathbf{G}] > 0 \quad \forall \omega. \quad (96)$$

Using $\sigma_{\min}[\mathbf{I}] = 1$ and Eq.(76), then for all frequencies

$$\sigma_{\max}[(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}] \sigma_{\max}[\mathbf{K}] \sigma_{\max}[\Delta\mathbf{G}] < 1 \quad \forall \omega. \quad (97)$$

$$\frac{1}{\sigma_{\min}[\mathbf{I} + \mathbf{KG}]} \sigma_{\max}[\mathbf{K}] \sigma_{\max}[\Delta\mathbf{G}] < 1 \quad (98)$$

$$g_o(\omega) < \frac{\sigma_{\min}[\mathbf{I} + \mathbf{KG}]}{\sigma_{\max}[\mathbf{K}]} \quad \forall \omega. \quad (99)$$

Employing low gain \mathbf{K} enables $g_o(\omega)$ to be large but accuracy is expected low. Accuracy and robustness are somewhat in contradiction.

For a specific low-frequency accuracy, a condition for minimal gain has to be satisfied $\sigma_{\min}[\mathbf{I} + \mathbf{KG} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{G}] > p_o$. Then, for low frequencies or near steady state ($\omega \doteq 0$)

$$\Leftarrow \sigma_{\min}[\mathbf{I} + \mathbf{KG}] - \sigma_{\max}[\mathbf{K}\Delta\mathbf{G}] > p_o \quad (100)$$

$$\Leftarrow \sigma_{\min}[\mathbf{KG}] - 1 - \sigma_{\max}[\mathbf{K}]g_o(\omega) > p_o \quad (101)$$

$$g_o(\omega) < \frac{-(p_o + 1) + \sigma_{\min}[\mathbf{KG}]}{\sigma_{\max}[\mathbf{K}]} \quad \forall \omega \doteq 0. \quad (102)$$

Example. Robust stability and low-frequency performance: The results of Eqs.(99) and (102) are illustrated by the MATLAB file `har.m` and in Fig. 8. The solid line in Fig. 8 has to be below all the dashed-dotted ones for all frequencies owing to Eq.(99), and for all ω small to be smaller than the dashed line owing to Eq.(102).

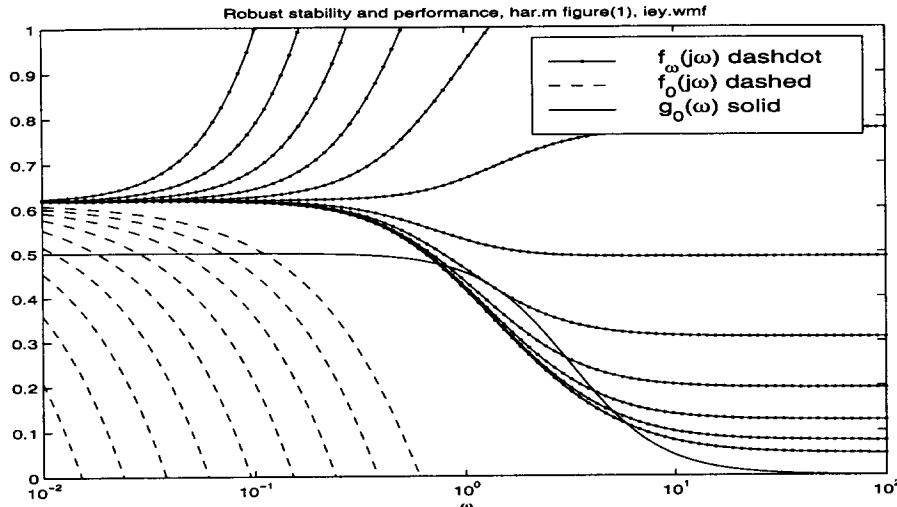


Figure 8: Robust stability and performance

```
w=j*logspace(-2,2,100); % omega from 10^-2 to 10^2 % har.m
T=0.05;
for n=1:12      % characteristics for 12 different values of T
    clear g s f1 f2
    po=20; T=T*10^(1/5);
    for i=1:length(w)
        s=w(i);
        G=[ s+1 -s ;
             -1 s+1 ] ./ (s^2+s+1); % ./ divide each element
        K=[ s+1 s ;
             1 s+1 ] ./ (s*T);
        I=eye(size(K*G));
        fomega(i)= min(svd(I+K*G)) / max(svd(K)); % robust stability
        fo(i)= (-(po+1) + min(svd(K*G))) /max(svd(K)); % performance
        go(i) = 0.5/(1+0.1*abs(s)^2); % upper bound of uncertainty
    end
    semilogx(abs(w),fomega,'- .');           % half logarithmic plot
    hold on
    semilogx(abs(w),fo,'--');
    hold on
    semilogx(abs(w),go);
end
axis([min(abs(w)) max(abs(w)) 0 1]);
figure(1)
drawnow;
title('Robust stability and performance, har.m figure(1), iey.wmf')
legend('f_\omega dashdot','f_0 dashed','g_0 solid');
xlabel('\omega');
hold off
```

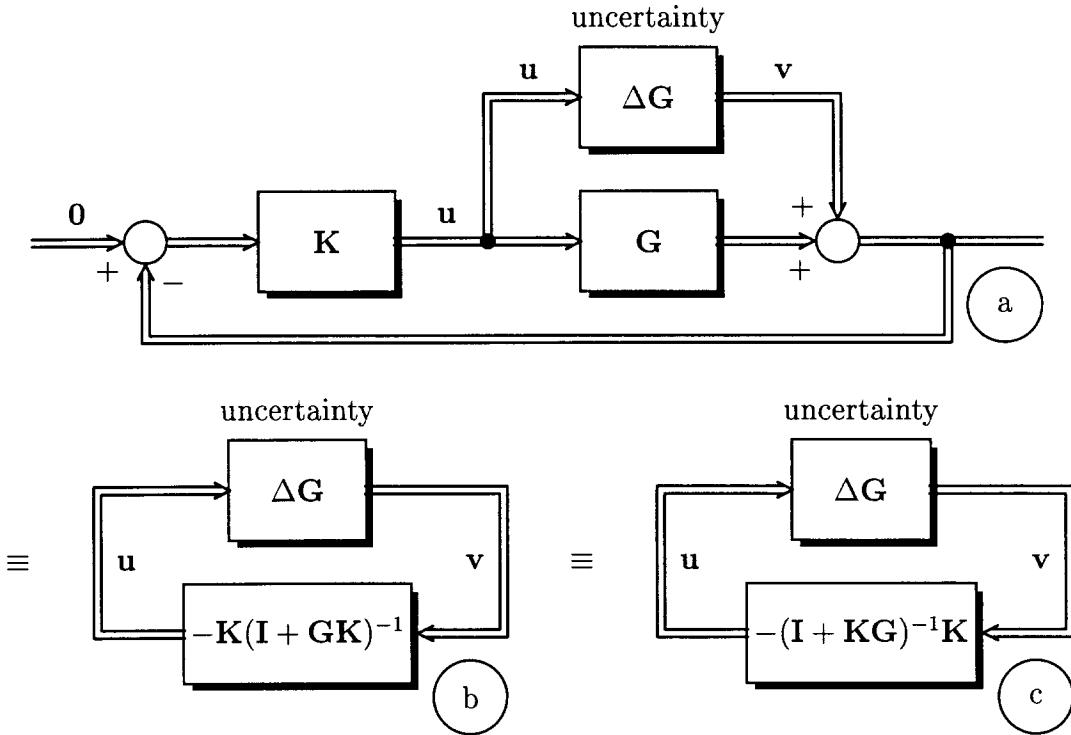


Figure 9: Control system from the viewpoint of the uncertainty

3.3 Restructuring the System for Additive Uncertainty

Derived from Fig. 1, in Fig. 9a the case of a MIMO systems is considered with additive (parallel) uncertainty ΔG . One finds

$$-K(Gu + v) = u \quad \leadsto \quad -(I + KG)^{-1}Kv = u , \quad (103)$$

and Fig. 9b or 9c if the identity $(I + KG)^{-1}K \equiv K(I + GK)^{-1}$ is applied.

The transfer matrix $-(I + KG)^{-1}K$ respresents the transfer function of that part of the control system which is seen from the viewpoint of the uncertainty, from v to u . Except the sign, this transfer function corresponds to a transfer function in the nominal case ($\Delta G \equiv 0$), if in Fig. 9a the input 0 is replaced by y_{ref} , from y_{ref} to the controlling variable u

$$(I + KG)^{-1}Ky_{ref} = u . \quad (104)$$

3.4 Robust Stability Using Small-Gain Theorem

Using Eq.(72), i.e., $|\lambda_i[\cdot]| < \sigma_{\max}[\cdot]$, and from the Small-Gain Theorem, stability is guaranteed if (in sufficient sense³)

$$\sigma_{\max} [\Delta G \cdot [-K(I + GK)^{-1}]] < 1 \quad (105)$$

³Note the submultiplicative property $\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \cdot \|H\|_\infty$. Other Hardy norms are not submultiplicative.

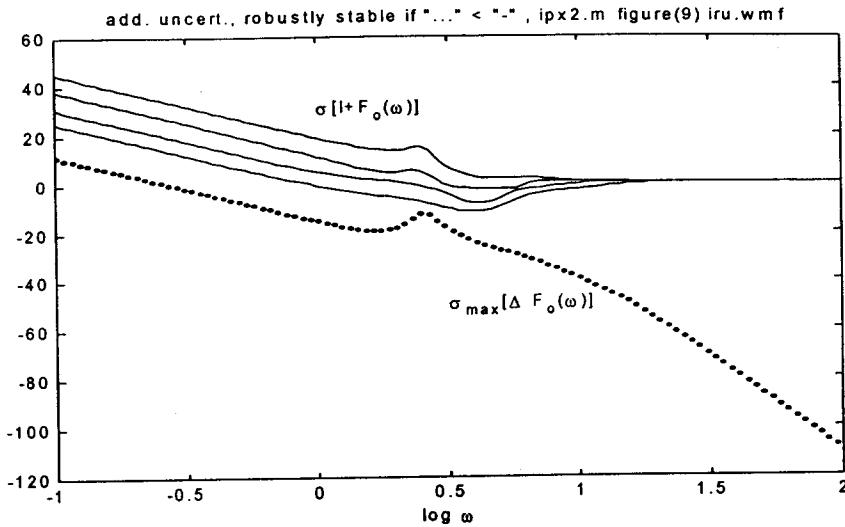


Figure 10: Bode plots of all the singular values $\sigma[I_4 + F_o(j\omega)]$ and $\sigma_{\max}[\Delta F_o(j\omega)]$ of the additive-type uncertainty for a hovering helicopter (where $F_o \stackrel{\Delta}{=} GK$)

$$\Leftrightarrow \sigma_{\max}[\Delta G] \sigma_{\max}[-K(I + GK)^{-1}] < 1 \quad \forall \omega \in \mathcal{R}. \quad (106)$$

Since $\sigma_{\max}[K^{-1}] \equiv 1/\sigma_{\min}[K]$, presupposing K^{-1} exists,

$$\sigma_{\max}[\Delta G] < \frac{1}{\sigma_{\max}[K(I + GK)^{-1}]} = \sigma_{\min}[(I + GK)K^{-1}] \quad \forall \omega \quad (107)$$

$$\sigma_{\max}[\Delta G] < \sigma_{\min}[K^{-1} + G] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \doteq \sigma_{\min}[G] & \omega \ll \omega_D \\ \doteq \frac{1}{\sigma_{\max}[K]} & \omega \gg \omega_D \end{array} \right. \quad (108)$$

where ω_D is the crossover frequency. For an entire relation see Fig. 10.

Those cases which allow for high extent of uncertainty while preserving stable operation can be recognized immediately

- (i) $\sigma_{\min}[G]$ close to $\sigma_{\max}[G]$ for low frequencies, i.e., well-conditioned plant;
- (ii) high $\sigma_{\max}^{-1}[K]$, i.e., low gain in the controller.

Hence, stable operation under high uncertainties and high accuracy are in contradiction.

3.5 Multiplicative Type Uncertainty

For multiplicative and output-associated uncertainty, it results $G_p = (I + \Delta L_o)G$ instead of $G_p = G + \Delta G$. The uncertainty matrix ΔG in Fig. 9a has to be replaced by $\Delta L_o \cdot G$. Then, ΔL_o is connected in series to $-GK(I + GK)^{-1}$ and one finds

$$\sigma_{\max}[\Delta L_o] < \frac{1}{\sigma_{\max}[GK(I + GK)^{-1}]} = \sigma_{\min}[(I + GK)(GK)^{-1}]. \quad (109)$$

As a consequence,

$$\sigma_{\max}[\Delta L_o] < \sigma_{\min}[I + (GK)^{-1}] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \doteq \sigma_{\min}[I] = 1 & \omega \ll \omega_D \\ \doteq \frac{1}{\sigma_{\max}[GK]} & \omega \gg \omega_D \end{array} \right. . \quad (110)$$

3.5.1 Introducing Closed-Loop Properties

When the sensitivity function $\mathbf{S}(s)$ or the complementary sensitivity function $\mathbf{T}(s)$ (target control function) should be involved, i.e.,

$$\mathbf{S}(s) \triangleq (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{e} = \mathbf{Sy}_{ref} \quad (111)$$

$$\mathbf{T}(s) \triangleq \mathbf{GK}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1} \equiv (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK} \quad (112)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ty}_{ref} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{y}_{ref}, \quad (113)$$

one has the result

$$\sigma_{\max}[\Delta\mathbf{L}_o] < \frac{1}{\sigma_{\max}[\mathbf{T}(s)]} \quad \forall\omega. \quad (114)$$

3.5.2 H_∞ Norm for Vector-Valued Variables

Being confronted with the H_∞ norm, recalling the meaning of the H_∞ norm seems adequate. In frequency domain, the multivariable system is characterized by the relations given by the matrix-valued transfer function $\mathbf{G}(s)$ and the vector-valued signals $\mathbf{u}(s)$ and $\mathbf{y}(s)$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s). \quad (115)$$

The definition

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{\max}[\mathbf{G}(s) |_{s=j\omega}] \quad (116)$$

is not the only one. An identical result for the H_∞ norm is based on the following relation using the H_2 norm $\|\cdot\|_2$

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty^2 = \sup_{\mathbf{u}} \frac{\|\mathbf{y}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{u}(t)\|_2^2} = \sup_{\mathbf{u}} \frac{\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt}{\int_0^\infty \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt}. \quad (117)$$

This expression represents the maximum gain for the signal energy, the maximum energy of the output for any input signal $\mathbf{u}(t)$ with limited energy unity. Hence, there is the illustrative relation as given in

$$\sup_{\mathbf{u}} \{\|\mathbf{y}(t)\|_2 : \|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq 1\} = \|\mathbf{G}(s)\|_\infty. \quad (118)$$

For any signal $\mathbf{u}(t)$ with H_2 norm unity, the energy of the output $\mathbf{y}(t)$ never exceeds the H_∞ norm of the transfer function $\|\mathbf{G}\|_\infty$. Using the H_∞ norm of the transfer function, the above arbitrary property of the signal \mathbf{u} is admissible, i.e., the details of the functional dependence of the signal are superfluous, the only property needed is the limited energy of the signal.

Using the H_∞ norm by referring to Eq.(116), the extension $\forall\omega$ above can be omitted and

$$\sup_{\omega} \sigma_{\max}[\Delta\mathbf{L}_o] \equiv \sup_{\omega} \|\Delta\mathbf{L}_o\|_s \triangleq \|\Delta\mathbf{L}_o\|_\infty < \frac{1}{\|\mathbf{T}(s)\|_\infty}. \quad (119)$$

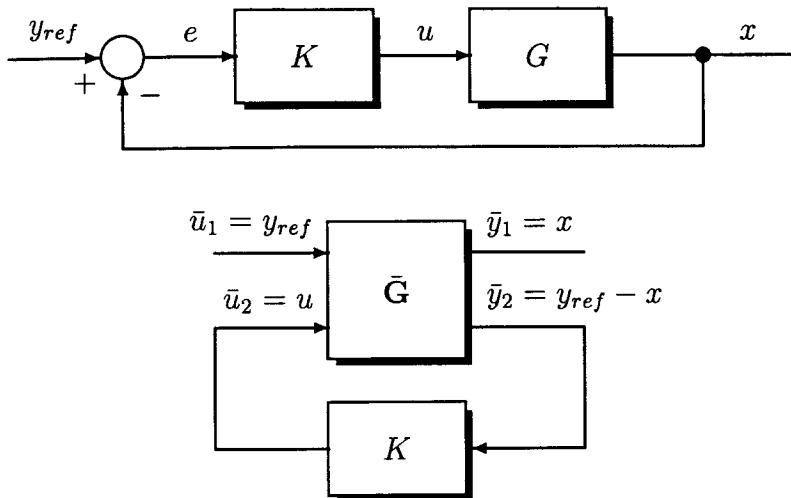


Figure 11: Basic control loop and its \bar{G}

3.6 Generalized Plant

The generalized plant is defined with the help of an example in what follows.

Example. H_∞ controller: Consider a standard control loop with the plant $G(s)$ given by

$$G(s) = \frac{13}{s - 0.5} = \frac{x(s)}{u(s)} \quad \dot{x} = 0.5 x + 13 u \quad (120)$$

(see Fig. 11). Find the H_∞ controller $K(s)$ with minimum H_∞ norm from y_{ref} to x versus the controller parameters.

From the basic equations

$$\dot{x} = 0.5 x + 0 \cdot y_{ref} + 13 u \quad (121)$$

$$\bar{y}_1 \triangleq x \quad (122)$$

$$\bar{y}_2 \triangleq -x + y_{ref}, \quad (123)$$

one has the generalized plant

$$\bar{G} = \left[\begin{array}{c|cc} 0.5 & 0 & 13 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (124)$$

We replace the actual $G(s)$ by a generalized plant written with overbarred $\bar{G}(s)$.

Using `hinfric` and `hinflmi` of the LMI Control Toolbox (*Gahinet, P., et al., 1995*), the results are an upper bound of the true H_∞ norm $\gamma_{opt} = \min_{a,b,c} \max_{\omega} |T(j\omega)|$ (an upper bound with respect to a,b,c of the target transfer function $T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}$)

$$\text{RIC } \gamma_{opt} = 1,0088 \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} -29716 & 7 \\ \hline 17662 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ c & 0 \end{array} \right] \quad (125)$$

$$\text{LMI } \gamma_{opt} = 1,003 \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} -58152 & -273 \\ \hline -5312 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ c & 0 \end{array} \right]. \quad (126)$$

3.7 Generalizing from the Viewpoint of the Uncertainty

Recalling Eq.(107), we designate \mathbf{M} as $\mathbf{M} \triangleq -\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}$.

Generalization in Eqs.(107) and (109), using Δ and \mathbf{M} , leads to Fig. 12. The important fact is that the uncertainties Δ_i associated with \mathbf{G}_{pi} are of block-diagonal structure. The collection of uncertainties is pulled out from the perturbed system Δ . This yields

$$\sigma_{\max}[\Delta] < \frac{1}{\sigma_{\max}[\mathbf{M}]} \quad \forall \omega \quad (127)$$

$$\boxed{\|\Delta\|_\infty \cdot \|\mathbf{M}\|_\infty < 1} \quad (128)$$

where \mathbf{M} is the transfer matrix of the nominal system as seen from the viewpoint of the uncertainty, in all cases of additive, multiplicative and other uncertainty and Δ is the uncertainty $\Delta\mathbf{G}$ or $\Delta\mathbf{L}_o$. The uncertainties are only located in the main diagonal. The uncertainties Δ_i in various parts \mathbf{G}_{pi} of the plant are uncoupled, i.e., Δ is a block-diagonal matrix $\text{diag}\{\Delta_i\}$. Utilize the fact of block structure in order to save sufficiency.

For general stability considerations, the rationale for equating the result on Small-Gain Theorem and Nyquist criterion goes as follows. Including weights into $\mathbf{M}(s)$, the generalized transfer function $\bar{\mathbf{T}}(s)$ results. The open-loop transfer matrix $\mathbf{F}_o(s)$ as used in general multivariable control theory corresponds to the unperturbed system $\bar{\mathbf{T}}$ and is presupposed stable as the property of the unperturbed system. The plot $\det[\mathbf{I} + \mathbf{F}_o(j\omega)]$ must not encircle the origin, or the sum of encirclements of $\lambda_i[\mathbf{F}_o]$ must not encircle $(-1, j0)$. Finally, no encirclements occur if

$$\max_i |\lambda_i[\mathbf{F}_o]| < 1 \quad \forall \omega \quad \text{or} \quad \sigma_{\max}[\bar{\mathbf{T}}(s)] < 1 \quad \forall \omega. \quad (129)$$

3.8 Block-Diagonal Orientation and Diagonal Scaling

As depicted in an example in Fig. 12, according to appropriate transposing operations of the uncertainties Δ_i , the uncertainty is block oriented. The maximum singular value without block structure would admit uncertainties in matrix positions where uncertainties do not take place in reality. Neglecting the block structure would cause too conservative results. Hence, improved bounds can be provided by the restriction to diagonal uncertainty

$$\Delta = \text{block diag } \{\Delta_i\}. \quad (130)$$

An additional improvement results from scaling, i.e., from replacing \mathbf{M} by \mathbf{DMD}^{-1} in Fig. 12. Originally, from Eq.(128) and considering $\mathbf{DD}^{-1} = \mathbf{I}$,

$$\sigma_{\max}[\Delta] = \sigma_{\max}[\text{block diag } \{\Delta_i\}] < \frac{1}{\sigma_{\max}[\mathbf{M}]} \quad \forall \omega. \quad (131)$$

Referring to the identity transformation of Fig. 13 and using an arbitrary block diagonal matrix $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_{bd}$,

$$\sigma_{\max}[\mathbf{D} [\text{block diag } \{\Delta_i\}] \mathbf{D}^{-1}] < \frac{1}{\sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}]} \quad \forall \omega \quad (132)$$

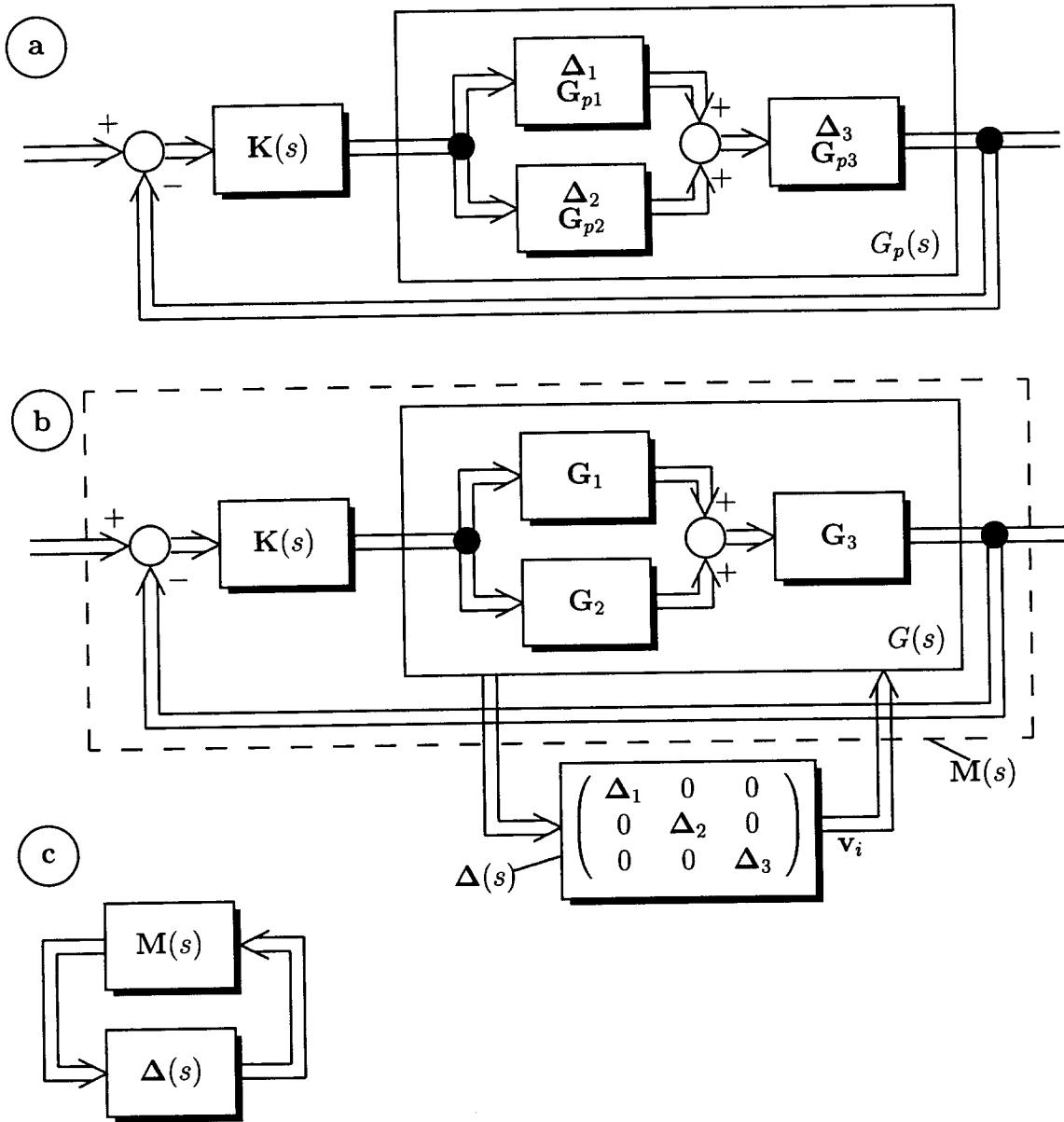


Figure 12: Control system with uncertainties of block-diagonal structure

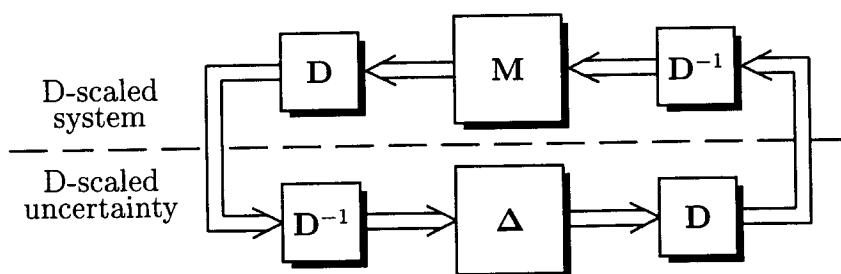


Figure 13:
Diagonal scaling

and, finally,

$$\boxed{\sigma_{\max}[\text{block diag}\{\Delta_i\}] < \frac{1}{\inf_{\mathbf{D}} \sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}]} \quad \forall \omega} . \quad (133)$$

This process is denoted as diagonal scaling (D-scaling). It is an interesting improvement if varying of \mathbf{D} yields a smaller $\sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}]$. The aim is to find \mathbf{D} such that the uncertainty may be maximum. This permits the search of $\inf_{\mathbf{D}}$ in the denominator.

4 μ Analysis

In proceeding within Eq.(106), some sufficiency is included, resulting in an inaccuracy and conservatism. A precise formulation is given by structured singular value $\mu_D[\mathbf{M}]$ due to *Doyle, J.C., 1982*

$$\mu_D[\mathbf{M}] \triangleq \left[\inf_{\Delta \in \Delta_{bd}} \{ \sigma_{\max}[\Delta] \mid \begin{array}{l} \text{subject to} \\ \det(\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \Delta) = 0 \end{array} \} \right]^{-1} \quad (134)$$

$$\mu_D[\mathbf{M}] \triangleq 0 \quad \text{if no solution above exists .} \quad (135)$$

Selection of the minimum versus Δ_{bd} is required to attain maximum inverse which leads to maximum and hence sufficient $\mu_D[\mathbf{M}]$.

The inverse $\frac{1}{\mu_D[\mathbf{M}]}$ is that singular value of the uncertainty which corresponds to the smallest destabilizing block diagonal uncertainty. A similar result is due to *Safonov, M.G., 1982*.

Since Δ is block diagonal, $\sigma_{\max}[\Delta] = \max_i \sigma_{\max}[\Delta_i]$, i.e., $\sigma_{\max}[\Delta]$ is given by the largest singular value within the block diagonal structure.

The relation

$$\mu_D[\mathbf{M}] \leq \inf_{\mathbf{D} \in \mathbf{D}_{bd}} \sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}] \quad (136)$$

means $<$ in general, in the case of three blocks in the uncertainty or fewer one has $=$.

Keep in mind that μ_D is an improvement of $\sigma_{\max}[\cdot]$ valuating the block-diagonal structure of the uncertainty. Now, for the uncertainty limit Δ , the result turns out as

$$\sigma_{\max}[\Delta] < \frac{1}{\mu_D[\mathbf{M}]} \quad \forall \omega \quad \text{or} \quad \|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\sup_{\omega} \mu_D[\mathbf{M}]} \quad (137)$$

$$\boxed{\|\Delta\|_{\infty} \cdot \sup_{\omega} \mu_D[\mathbf{M}] < 1} . \quad (138)$$

We refer the reader to the MATLAB Toolboxes μ Analysis and Robust Control.

4.1 Uncertainty Scaling

By uncertainty scaling

$$\Delta = \mathbf{L}^{-1}(s)\Theta(s)\mathbf{R}(s) , \quad (139)$$

the weighting matrices \mathbf{L} and \mathbf{R} can be drawn into and included in the so-called generalized plant, hence $\sigma_{\max}[\Theta(s)] = \|\Theta(s)\|_s \leq 1 \quad \forall \omega$ can be assumed. Therefore, from Eq.(138) and after having applied uncertainty scaling, one has

$$\sigma_{\max}[\Theta] \sup_{\omega} \mu_D[\bar{\mathbf{T}}] < 1 \quad (140)$$

$$\Leftarrow \boxed{\sup_{\omega} \mu_D[\bar{\mathbf{T}}(s)] < 1} . \quad (141)$$

In short, $\bar{\mathbf{T}}$ is \mathbf{M} including weights.

4.2 Bounds for the μ_D Norm

Considering an unitary matrix (satisfying the relation $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$) and the set of unitary matrices \mathcal{U} , an important lower and upper bound exists as follows: The property

$$\max_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} \rho_s[\mathbf{U}\mathbf{M}] = \mu_D[\mathbf{M}] \leq \inf_{\mathbf{D} \in \mathcal{D}} \sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}] \quad (142)$$

can be used to estimate $\mu_D[\mathbf{M}]$ where ρ_s is the spectral radius (i.e., the maximum modulus of the eigenvalues).

Since the stability condition is $\sup_{\omega} \mu_D[\mathbf{M}(j\omega)] < 1$ it must be avoided that an estimate relation “ $\hat{\mu}_D$ smaller than μ_D ” is obtained. If $\hat{\mu}_D > \mu_D$ is obtained, then $\hat{\mu}_D[\mathbf{M}(j\omega)] < 1$ is sufficient for the true solution Eq.(141). The left-hand side maximization with respect to the unitary matrix \mathbf{U} is likely to achieve *local* maxima and to fail the global maximum. Hence, the right-hand inequality in Eq.(142) is a safer estimate than the left-hand equality.

The right-hand inequality in Eq.(142) becomes an equality if there are only three or fewer blocks ($n_D \leq 3$) and if, in addition, the blocks are not repeated ($m_j = 1 \quad \forall j = [1, n_D]$). It can be shown that the minimization problem involved is always convex. The minimization has to be taken with respect to $n_D - 1$ parameters d_j in \mathbf{D} , only, irrespective of the block size.

Hence, a sufficient and adequate robust stability condition is

$$\|\Delta\|_{\infty} \cdot \inf_{\mathbf{D} \in \mathcal{D}} \sup_{\omega} \sigma_{\max}[\mathbf{DMD}^{-1}] < 1 \quad (143)$$

$$\|\Delta\|_{\infty} \cdot \inf_{\mathbf{D} \in \mathcal{D}} \|[\mathbf{DMD}^{-1}]\|_{\infty} < 1 . \quad (144)$$

5 \mathbf{H}_{∞} Loop Shaping

Shaping is a method of including elements in the control loop which neither influence the stability of the closed-loop system nor the internal dynamic behaviour e.g. robustness properties. What is changed is the influence of disturbance and noise on the system output. What else can be seen is which disturbance or noise has worst or least influence on the closed-loop system output. In Fig. 14, introduce $\mathbf{W}_i(s)$ and $\mathbf{W}_o(s)$ at the input and output of $\mathbf{G}(s)$, see Eq.(154), and, simultaneously, $\mathbf{W}_o^{-1}(s)$ and $\mathbf{W}_i^{-1}(s)$ at the input and output of $\mathbf{K}(s)$.

This section is devoted to the problem of comparing simple PID controller design with the very powerful but complicated H_∞ robust control framework.

The simple PID controller is often preferred for industrial applications and should be modified to include H_∞ facilities. The controller parameters should be selected such that robustness properties of H_∞ controllers are achieved.

A PID controller $K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$ enhances both low and high frequencies. The resulting weight W of Eq.(171) has the same properties.

In the SISO case $W_o = 1$, $W_i = W$. Hence $\bar{n}_r = W_o^{-1}n_r$; the transformed \bar{n}_r and the real-world noise n_r are the same.

Design should select $K(s)$ such that the appropriate γ contour is not touched which means that the selected robustness property is attained. For γ see Eq.(153). From Eq.(171) those disturbance $w_d = W^{-1}\bar{w}_d$ can be obtained for which the transfer function Γ results in minimum γ .

From Fig. 14

$$-\mathbf{K}(\mathbf{Gv} + \mathbf{n}_r) + \mathbf{w}_d = \mathbf{v} \quad (145)$$

and

$$\mathbf{v} = -(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{Kn}_r + (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{w}_d \quad (146)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Gv} = -\mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{Kn}_r + \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1}\mathbf{w}_d \quad (147)$$

is achieved. Rewriting yields

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{n}_r \\ \mathbf{w}_d \end{pmatrix} \quad (148)$$

where

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{S} (-\mathbf{K} : \mathbf{I}) \quad (149)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} (-\mathbf{SK} : \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{GSK} & \mathbf{GS} \\ -\mathbf{SK} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (150)$$

and

$$\mathbf{S}(s) \triangleq (\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1} \quad (151)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{KG})^{-1} \equiv (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{G}. \quad (152)$$

An adequate design variable is

$$\gamma = \|\boldsymbol{\Gamma}\|_\infty. \quad (153)$$

To emphasize the response at a specific frequency, the following replacements are introduced

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{W}_o \mathbf{G} \mathbf{W}_i \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{K} \mathbf{W}_o^{-1} \quad (154)$$

where \mathbf{W}_i and \mathbf{W}_o are frequency-dependent input and output weighting matrices. They do not influence the closed-loop behaviour.

This is equivalent as if the original system had been designed with respect to $\bar{\mathbf{w}}_d = \mathbf{W}_i \mathbf{w}_d$ and $\bar{\mathbf{n}}_r = \mathbf{W}_o^{-1} \mathbf{n}_r$.

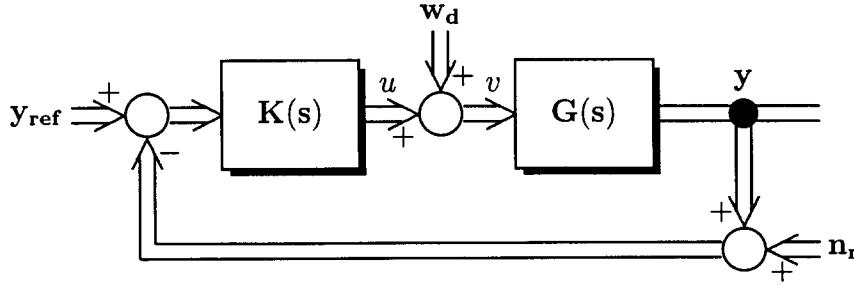


Figure 14: Multivariable control system with disturbance w_d and noise n_r

The set point response is recovered using a two-degrees-of-freedom structure (i.e., a prefilter for the set point).

In any case, it is necessary to implement weighting functions, which weight the noise at $\omega=0$ low; otherwise $T(s)$ itself is reduced and tracking quality is lost.

In the SISO case one has

$$\Gamma(s) = \frac{1}{1+KG} \begin{pmatrix} -KG & G \\ -K & 1 \end{pmatrix}. \quad (155)$$

Following Eq.(68)

$$\sigma_{\max}(\Gamma) = \frac{\sqrt{(1+KK^*)(1+GG^*)}}{|1+KG|} \quad (156)$$

$$\gamma = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(\Gamma). \quad (157)$$

There are the following transfer functions in the main diagonal of $\Gamma(s)$

$$T(s) = \frac{KG}{1+KG} \quad S(s) = \frac{1}{1+KG} \quad (158)$$

$$\max_{\omega} \left| \frac{KG}{1+KG} \right| \triangleq M_P \quad \max_{\omega} \left| \frac{1}{1+KG} \right| \triangleq M_S. \quad (159)$$

The following robustness measures are addressed:

a) Sensitivity

$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| = \|(1+GK)^{-1}\|_{\infty} \quad (160)$$

resulting for a circle center $C_S = -1$ and radius $R_S = 1/M_S$.

b) Robustness versus multiplicative uncertainty in the plant

$$M_P = \max_{\omega} |T(j\omega)| = \|GK(1+GK)^{-1}\|_{\infty} \quad (161)$$

for a circle with center $C_P = -M_P^2/(M_P^2 - 1)$ and radius $R_P = |M_P/(M_P^2 - 1)|$.

c) Combined circle for combined constraint, i.e. for both sensitivity and complementary sensitivity less than $M_P = M_S = M$

$$C = -(M_P - 0.5 + 0.5(1 - M_P)/M_S)/(M_P - 1) = -(M - 1 + 0.5/M)/(M - 1) \quad (162)$$

$$R = 0.5(1 + (M_P - 1)/M_S)(M_P - 1) = (1 - 0.5/M)(M - 1) \quad (163)$$

Usually $M_S = 1.2 \div 2.0$ and $M_P = 1 \div 1.5$ are asserted as targets (Aström, K.J., et.al., 1998; Panagopoulos, H., and Aström, K.J. 1999; McFarlane, D., and Glover, K., 1992; Panagopoulos, H., 2000).

The Nyquist plot must avoid these circles, based on the distance $|1 + KG|$ between the Nyquist plot and point $(-1, j0)$.

From

$$\gamma = \max_{\omega} [|S(j\omega)| + |T(j\omega)|] \quad (164)$$

$$\text{one finds } \gamma \leq \max |S(j\omega)| + \max |T(j\omega)| = 2M \quad (165)$$

$$\gamma \geq \max(2|S(j\omega)| - 1) = 2M - 1 \quad (166)$$

or $2M - 1 \leq \gamma \leq 2M$.

In detail, the γ -curve, which will be defined later, is inside the M-circle if

$$M(\gamma) = \frac{0.5\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{1 + \sqrt{\gamma^2 - 1}} \text{ or } \gamma(M) = \sqrt{4M(M - 1) + 2}. \quad (167)$$

Introducing one weight W only ($W_i = W$, $W_o = 1$),

$$\Gamma(s) = \frac{1}{1 + KG} \begin{pmatrix} -GK & GW \\ -KW^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (168)$$

leads to

$$\gamma^2 = \sup_{\omega} \frac{(1 + KK^*W^{-1}W^{-1,*})(1 + GG^*WW^*)}{|1 + KG|^2}. \quad (169)$$

Minimization of the numerator with respect to WW^* yields (* complex conjugate)

$$(WW^*)_{opt} = \sqrt{\frac{KK^*}{GG^*}} \quad (170)$$

$$W_{opt} = \sqrt[4]{\frac{KK^*}{GG^*}}. \quad (171)$$

Then

$$\gamma = \sup_{\omega} \frac{(1 + |KG|)}{|1 + KG|} = \sup_{\omega} \frac{1 + |F_0(j\omega)|}{|1 + F_0(j\omega)|}. \quad (172)$$

This is only true for the most favorable frequency weighting.

The robustness measure $\gamma \leq \gamma_0$ should be fulfilled. If

$$C_{\gamma} \triangleq \frac{1 + |KG|}{|1 + KG|} = \gamma_0 \quad (173)$$

is satisfied and the Nyquist plot lies outside the contour C_{γ} then the system is robust. The loci of C_{γ} are termed gamma contours and can be preplotted for various γ_0

Example. Suppose

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)} \quad K(s) = K_P(1 + \frac{1}{sT_N}) \quad (174)$$

with $K_P = 0.56$ and $T_N = 4$. Then the weight $|W_{opt}|$ of Eq.(171) is a monotonically increasing function. Selecting $\gamma = 3.25$ and $M = 2.04$, the resulting Nyquist plot $G(j\omega)K(j\omega)$ is given in Fig. 15. It neither intersects the γ -curve nor the M-circle.

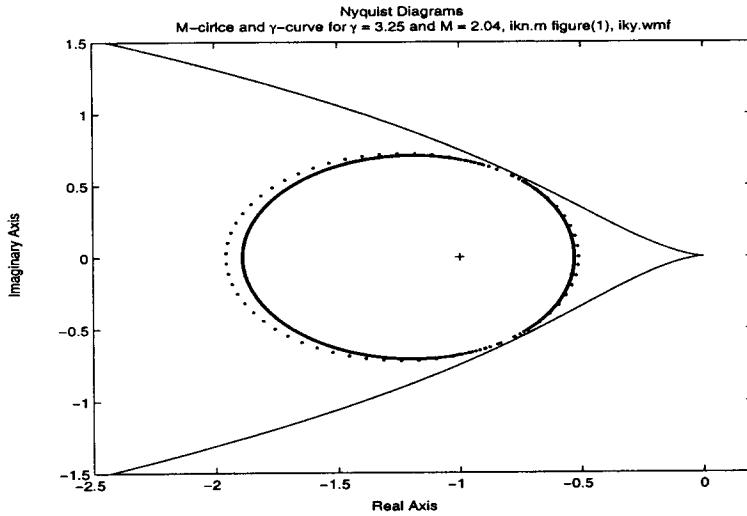


Figure 15: Nyquist plot, γ -curve (“solid”) and M-circle (“dotted”)

6 Rectangular Uncertainties. Kharitonov Theorem

6.1 Kharitonov Polynomials

The family of polynomials

$$\mathcal{P} = \{p(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\} \quad (175)$$

is a set of polynomials $p(s, \mathbf{q})$ such that the uncertainty parameter \mathbf{q} is an element of the uncertainty space Q . For a (rectangular) box Q , the family is an interval polynomial family

$$\sum_{i=0}^n p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \triangleq \sum_{i=0}^n [l_i, h_i] s^i \quad (176)$$

where $a_i = [l_i, h_i]$ is an interval with an infinit set of a_i regarding $l_i < a_i < h_i$. (Unlike the interval set above, $a'_i = \{l_i, h_i\}$ is the set of extremes, i.e., a'_i is only a member of a set of two elements l_i, h_i , as used e.g. in the weak Kharitonov theorem).

6.2 Kharitonov Theorem

Consider the polynomial of the nominal closed-loop system

$$p_{cl}(s) = a_{0,nom} + a_{1,nom}s + \dots + a_{n,nom}s^n = \sum_{i=0}^n a_{i,nom}s^i \quad (177)$$

and a family of perturbed closed-loop systems, a family with infinite number of members

$$p_{cl,p}(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n = \sum_{i=0}^n a_i s^i. \quad (178)$$

Each a_i varies within the limits $0 < l_i \leq a_i \leq h_i \quad \forall i = [0, n]$, see Fig. 17. This is the case of structured uncertainty. The uncertainty can be traced back to the coefficients of the corresponding differential equation. This means that more than the input

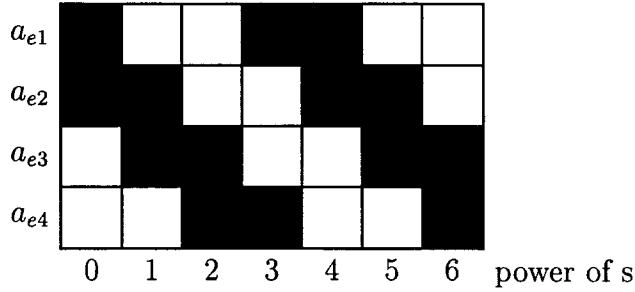


Figure 16: Arrangement of the coefficients of the Kharitonov polynomials with respect to upper (“black”) and lower bounds (“blanc”)

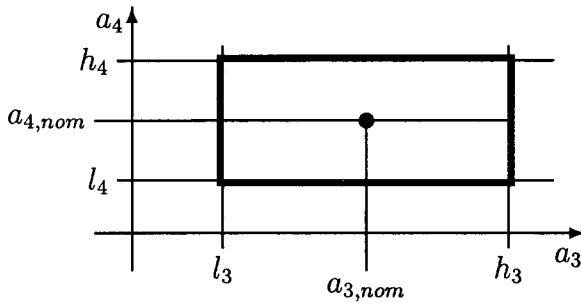


Figure 17: Uncertainties of parameters in a rectangle

output behaviour is known about the uncertainty. In general it is hyperrectangle in multi-dimensional parameter space. The polynomial $p_{cl,p}(s)$ is an interval polynomial.

The strong version of the Theorem of *Kharitonov*, V.L., 1979, states that the entire family of polynomials is Hurwitz stable (Routh stable) if and only if four so-called extreme polynomials are Hurwitz stable. A polynomial is Hurwitz stable if all solutions are located in the left-half open s -plane which is checked with the help of Routh criterion (Routh scheme) usually⁴.

The extreme polynomials of Kharitonov are given by

$$a_{e1}(s) \triangleq h_o + l_1 s + l_2 s^2 + h_3 s^3 + h_4 s^4 + l_5 s^5 + l_6 s^6 + \dots \quad (179)$$

$$a_{e2}(s) \triangleq h_o + h_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3 + h_4 s^4 + h_5 s^5 + l_6 s^6 + \dots \quad (180)$$

$$a_{e3}(s) \triangleq l_o + h_1 s + h_2 s^2 + l_3 s^3 + l_4 s^4 + h_5 s^5 + h_6 s^6 + \dots \quad (181)$$

$$a_{e4}(s) \triangleq l_o + l_1 s + h_2 s^2 + h_3 s^3 + l_4 s^4 + l_5 s^5 + h_6 s^6 + \dots \quad . \quad (182)$$

The polynomials may be changed in their order. In Fig. 16 the distribution of the coefficients versus high or low is depicted where black and blanc means high and low, respectively.

If the order of the system is less than six then fewer extreme polynomials (Kharitonov polynomials) suffice.

⁴Remark: 1862 Routh, 1895 Hurwitz, 1978 Kharitonov

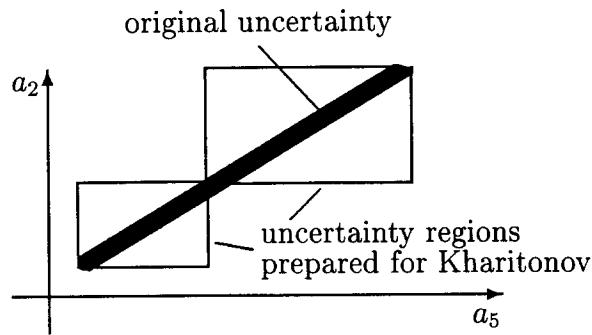


Figure 18: Replacing the original uncertainty line by two rectangles in the parameter plane

The weak theorem of Kharitonov states that it is sufficient if all the corner polynomials are stable. The corner polynomials are achieved by considering only the corners of the polytope of polynomials, i.e., if the coefficients of the polynomial are selected regarding $a_i \in \{l_i, h_i\} \forall i$. The number of corner polynomials is 2^{n+1} .

Example: For a system with $n = 6$, systematic search with 100 values per interval of parameters would require stability checking of $100^{(6+1)}$ polynomials of degree six. Using the weak theorem requires $2^{(6+1)}$ polynomials, the strong theorem only four. \square

Although the theorem of Kharitonov is necessary and sufficient, the application to control problems in most cases leads to only sufficient conditions. The reason is as follows:

- If the uncertain parameters are located in a region of a triangle, a disc or only a line then this region must be superscribed by a rectangle in order to use Kharitonov. Kharitonov is only valid for a rectangular region of uncertainties. Superscribing includes parameter constellations which do not occur in reality of the current system. Artificial points are included. Hence the result is only sufficient.
- Utilizing Kharitonov for control systems then only the plant has to be considered perturbed, the controller in nominal. Combining the transfer behaviour of the plant and the controller in their polynomials, then even a rectangular region of plant uncertainties is not mapped into closed-loop parameter uncertainties located in a rectangle. The resulting non-rectangular region again has to be superscribed by a rectangle yielding sufficiency of the results.

The conservatism of the Kharitonov result in control systems can be reduced if the real parameter region is not superscribed by a single rectangle but by two or more. In such a case, fewer superfluous values in the parameter space are included and “sufficiency is less”. In Fig. 18 the actual uncertainty region given by the thick line is superscribed by two rectangles. Then the original problem is subdivided into two problems. Both parts given by the rectangles have to be checked.

6.3 Sixteen-Plant Theorem

Consider four extreme (Kharitonov) polynomials $n_{e\nu}(s)$ and additionally four Kharitonov polynomials $d_{e\mu}(s)$. Using all the combinations of $n_{e\nu}(s)$ and $d_{e\mu}(s)$ as nominator and denominator polynomial, respectively, sixteen plants with transfer functions

$$G_{\nu\mu}(s) = \frac{n_{e\nu}(s)}{d_{e\mu}(s)} \quad \nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (183)$$

are achieved.

For a first-order controller $K(s) = k \frac{s-z}{s-p}$ there are sixteen closed-loop polynomials

$$p_{cl,\nu\mu}(s) = k(s-z)n_{e\nu}(s) + (s-p)d_{e\mu}(s) . \quad (184)$$

The Sixteen-Plant Theorem (*Barmish, B.R., et al., 1992; Barmish, B.R., 1994*) is provided as follows: Consider an interval plant family \mathcal{G} and $K(s)$. The controller $K(s)$ robustly stabilizes \mathcal{G} if and only if it stabilizes each of the sixteen Kharitonov plants $G_{\nu\mu}(s)$ or iff $p_{cl,\nu\mu}(s)$ is Hurwitz $\forall \nu, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$.

7 Maximum Distance from Routh Stability

Consider a dynamical system with the general perturbed polynomial $p_p(s, \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ where $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{q})$ is the vector-valued polynomial coefficient. The vector \mathbf{q} represents an uncertainty vector. What is the minimal distance of a given nominal polynomial from the Routh stability boundary?

The unperturbed system for $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ is preassumed stable. Increasing \mathbf{q} , there are three possibilities for the solutions of the polynomial to become unstable:

- A real zero passes the imaginary axis in the origin at $s = 0, \omega = 0$,
- A pair of conjugate complex zeros passes the imaginary axis at $s = \pm j\omega$.
- A real zero enters the right half-plane via infinity (degree-dropping boundary). A zero at infinity arises if the coefficient a_n vanishes, i.e., the coefficient becomes zero for a particular choice of the uncertainty. This item is overskipped in what follows.

The perturbed parameter is termed \mathbf{a}_p and assumed as $\mathbf{a}_p = \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}$. For $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ the system is unperturbed. Find $\mathbf{q}_{\min} = \arg \min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{q}\|_F$ such that $p_p(s, \mathbf{a}_p)$ is stable. The minimum distance is termed $r = \|\mathbf{q}_{\min}\|_F$. The polynomial is Hurwitz if the actual \mathbf{q} satisfies $\|\mathbf{q}\|_F < r$ (*Kaesbauer, D., and Ackermann, J., 1990; Sohn, Y.C., and Evans, R.J., 1988*). In a control application, $p_p(s, \mathbf{a}_p)$ is the closed-loop polynomial $p_{cl,p}(s, \mathbf{a}_p)$.

First, root boundaries $s = 0$ and $s = j\omega$ are considered, \mathbf{F} is selected $\mathbf{F} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{pmatrix}$, and $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$.

For the real root boundary one has $s = 0$ and

$$p_{cl,p}(0, \mathbf{a}_p) = p_{cl}(0, \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q})_o = 0 \quad \rightsquigarrow \quad a_o + (\mathbf{F}\mathbf{q})_o = 0 . \quad (185)$$

When $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{pmatrix}$ there results $a_o + q_o = 0$ and the real root boundary is $q_{R\min} = q_o = -a_o$ and $r_R = a_o$.

For the complex root boundary

$$p_{cl,p}(j\omega, \mathbf{a}_p) = p_{cl}(j\omega, \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n (\mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q})_i (j\omega)^i = 0 . \quad (186)$$

The real and imaginary part of $p_{cl,p}(j\omega, \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}) = 0$ is restructured

$$\mathbf{D}(\mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \text{where} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 & \omega^4 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times (n+1)} . \quad (187)$$

Defining $\mathbf{DF} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \end{pmatrix}$, one has the problem of finding $\min \|\mathbf{q}\|_F$ such that

$$\mathbf{D}\mathbf{a} + \mathbf{DF}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.,} \quad \mathbf{d}_1^T \mathbf{a} + \mathbf{g}_1^T \mathbf{q} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{d}_2^T \mathbf{a} + \mathbf{g}_2^T \mathbf{q} = 0 . \quad (188)$$

For the specific case of $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 & \dots \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times n} \quad (189)$$

is achieved. In view of this, \mathbf{g}_1 and \mathbf{g}_2 are orthogonal. Since \mathbf{D} depends on ω , the result is $r_C = \min_{\omega} \|\mathbf{q}_{C\min}(\omega)\|_F$.

The final result is

$$\rho_H = \min\{r_R, r_C\} . \quad (190)$$

Example 1: The largest hypersphere with the center in the origin and touching the hyperplane $a_1q_1 + a_2q_2 + \dots + a_l q_l + e_o = 0$ in the q -space is given by solving

$$\|\mathbf{q}\|_F^2 + \mu \left(\sum_{i=0}^{l_q} a_i q_i + e_o \right) \triangleq \mathbf{q}^T \mathbf{q} + \mu(\mathbf{a}^T \mathbf{q} + e_o) \rightarrow \min_{\mathbf{q}} \quad (191)$$

$$\text{for } \mu = \frac{2e_o}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}, \quad \mathbf{q}_{\min} = -\frac{\mu}{2} \mathbf{a}, \quad \mathbf{q}_{\min}^T \mathbf{q}_{\min} = \|\mathbf{q}_{\min}\|_F^2 = \frac{e_o^2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} . \quad \square \quad (192)$$

Example 2: Find $\min \|\mathbf{q}\|_F$ subject to $\mathbf{D}\mathbf{a} + \mathbf{DF}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Referring to the definitions given in Eq.(187) and $\mathbf{DF} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \end{pmatrix}$, the vectors \mathbf{g}_1 and \mathbf{g}_2 are orthogonal. The problem leads to

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} + \mu_1 (\mathbf{d}_1^T \mathbf{a} + \mathbf{g}_1^T \mathbf{q}) + \mu_2 (\mathbf{d}_2^T \mathbf{a} + \mathbf{g}_2^T \mathbf{q}) \rightarrow \min_{\mathbf{q}} \quad (193)$$

where μ_1 and μ_2 are Lagrange multipliers. Differentiating with respect to \mathbf{q} , μ_1, μ_2 yields

$$\mathbf{q}_{\min} = -\frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{a}}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} \mathbf{g}_1 - \frac{\mathbf{d}_2^T \mathbf{a}}{\mathbf{g}_2^T \mathbf{g}_2} \mathbf{g}_2 \quad \text{and} \quad \|\mathbf{q}_{\min}\|_F = \sqrt{\frac{(\mathbf{d}_1^T \mathbf{a})^2}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} + \frac{(\mathbf{d}_2^T \mathbf{a})^2}{\mathbf{g}_2^T \mathbf{g}_2}} . \quad \square \quad (194)$$

Example 3. Second-order system: Consider $n = 2$ and $s^2 + 0.03s + 0.2$ for $a_0 + a_1 s + a_2 s^2$. Then⁵,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.03 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (195)$$

⁵Do not mix up: As an analytic expression, the polynomial is written with increasing powers. MATLAB requires the order of decreasing powers. Finally, a_0 in the analytical designation corresponds to the first element $\mathbf{a}(1)$ of the parameter vector in MATLAB.

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q} = \mathbf{a} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}, \quad (196)$$

i.e.,

$$a_{p0} = a_0 + q_1 \quad (197)$$

$$a_{p1} = a_1 + q_2 \quad (198)$$

$$a_{p2} = a_2 + 0 \quad (199)$$

$$\mathbf{d}_1^T = (1 \ 0 \ -\omega^2), \quad \mathbf{g}_1^T = (1 \ 0) \quad (200)$$

$$\mathbf{d}_2^T = (0 \ 1 \ 0), \quad \mathbf{g}_2^T = (0 \ 1) \quad (201)$$

$$\|\mathbf{q}_{\min}\|_F(\omega) = \sqrt{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + a_1^2}. \quad (202)$$

$\frac{\partial}{\partial\omega}$ yields $\omega^* = \sqrt{a_0/a_2} = \sqrt{0.2} = 0.447$ and $\|\mathbf{q}_{\min}^*\|_F = a_1 = 0.03$.

This ω^* coincides with the crossover frequency versus imaginary axis for the perturbed polynomial at the stability boundary

$$0.20 + 0s + s^2 = (s + j0.447)(s - j0.447). \quad (203)$$

$$\mathbf{q}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.03 \end{pmatrix} \quad (204)$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{q}_{\min} = \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (205)$$

The appropriate MATLAB code is `ihq.m`.

```
% ihq.m minimum distance to Hurwitz stability, n=2
a=[.2 .03 1]';
F=[eye(2); [0 0]];
for ii=1:1000
w=0.001*ii; % frequency omega
d1=[1 0 -w^2]';
d2=[0 1 0]';
g1=[1 0]';
g2=[0 1]';
qminf=sqrt((d1'*a)^2/(g1'*g1)+(d2'*a)^2/(g2'*g2));
vecqminf(ii)=qminf;
vecw(ii)=w;
end
figure(1)
plot(vecw ,vecqminf)
title(' ihq.m figure(1), ihr.wmf')
xlabel('frequency \omega')
ylabel('Frobenius norm of frequency-dependent q')

[qmin,iif]=min(vecqminf)
wf=0.001*iif % frequency at imaginary axis
d1f=[1 0 -wf^2]';
d2f=[0 1 0]';
qmin=-d1f'*a*g1/(g1'*g1) - d2f'*a*g2/(g2'*g2)
qminff=norm(qmin,'fro')
ap=a+F*qmin
```

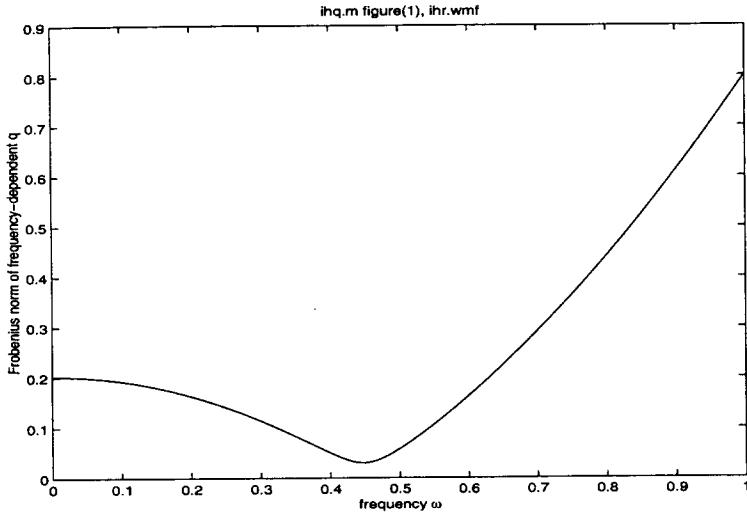


Figure 19: Complex root boundary versus ω

Real root boundary: $r_R = a_0 = 0.2$

Complex root boundary: $\|\mathbf{q}_{\min}\|_F$ as a function of ω see Fig. 19, it reaches its minimum $r_C = 0.03$ at $\omega = 0.447$.

The degree-dropping root boundary is $r_D = a_2 = 1$ and can be omitted in this example.

The final result is $\rho_H = \min\{r_R, r_C, r_D\} = \min\{0.2, 0.03, 1\} = r_C = 0.03$.

8 Edge Theorem

We consider a polytope of polynomials, first. This polytope is derived from perturbed polynomials. Based on these, the Edge Theorem is stated.

8.1 Linear Affine Polynomials

A polytope is a convex hull of an finite set of points in the Euclidian space. Using the perturbed polynomial $p_{cl,p}(s; \mathbf{q})$, the perturbation polynomials $f_j(s)$ are derived from

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) \cdot s^i \quad \mathbf{q} \in \mathcal{R}^m \quad (206)$$

where

$$a_i(\mathbf{q}) = a_{i0} + a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{im}q_m = \sum_{j=1}^m a_{ij}q_j \quad (207)$$

and q_j are the uncertainty parameters with $0 \leq q_j \leq q_{j,\max}, j = 1 \dots m$. Rearranging yields

$$\begin{aligned} p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = & a_{00} + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 + a_{03}q_3 + \dots \\ & + a_{10}s + a_{11}q_1s + a_{12}q_2s + a_{13}q_3s + \dots \\ & + a_{20}s^2 + a_{21}q_1s^2 + a_{22}q_2s^2 + a_{23}q_3s^2 + \dots \end{aligned} \quad (208)$$

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = g_o(s) + q_1g_1(s) + q_2g_2(s) + q_3g_3(s) + \dots \quad (209)$$

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = g_o(s) + \mu_1 q_{1\max} g_1(s) + \mu_2 q_{2\max} g_2(s) + \dots \quad (210)$$

For $q_i = 0 \ \forall i$, the polynomial $g_o(s)$ is obtained which is the nominal closed-loop polynomial $p_{cl}(s)$. Using the definitions

$$g_o(s) \triangleq f_o(s), \quad q_j \max g_j(s) \triangleq f_j(s) \quad \text{and } \mu_o = 1, \quad 0 \leq \mu_j \leq 1, \quad j = 1 \dots m \quad (211)$$

the rewritten result is

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = \sum_{j=0}^m \mu_j f_j(s) \quad (212)$$

where $f_j(s)$ are the perturbation polynomials.

An uncertain polynomial $p_p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i$ has an affine linear uncertainty structure if

$$a_i(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_i^T \mathbf{q} + g_i. \quad (213)$$

A transfer function of affine linear uncertainty structure consists of a numerator and denominator polynomial like Eq.(213). Note that a constant linear feedback controller yields an affine linear uncertainty structure for the closed-loop system.

The uncertain polynomial is of multilinear uncertainty structure for the uncertainty coefficient $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^m$ if each coefficient $a_i(\mathbf{q})$ is multilinear. The coefficient is multilinear in q_j if for q_k fixed $\forall k$ except $k = j$ the a_i is affine linear in the remaining component q_j .

Otherwise the polynomial is of polynomic uncertainty structure.

8.2 Robust Dynamics with Edge Theorem

We use a general polytope of polynomials

$$p_{cl,p}(s) = f_o(s) + \sum_{j=1}^m \mu_j f_j(s) \quad 0 \leq \mu_j \leq 1 \quad j = 1, 2 \dots m, \quad (214)$$

then for only one single $\mu_j = 1$ and all the other $\mu_{k \neq j} = 0$, $p_{cl,j} \triangleq p_{cl}(s) + f_j(s) \quad j = 1, 2 \dots m$ are the corner polynomials. We consider the family of polynomials the coefficients of which are given by the convex hull of the corner polynomials $p_{cl,1}(s)$ to $p_{cl,m}(s)$. Varying λ in what follows, an edge polynomial is obtained. The edge polynomials are defined by

$$p_{ik}(s) = f_i(s) + \lambda[f_k(s) - f_i(s)] = (1 - \lambda)f_i(s) + \lambda f_k(s) \quad \forall i, \quad k > i, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (215)$$

The factor λ points in the direction from f_i to f_k when moving between 0 and 1.

Which region of the s -plane is the region of all the solutions of $p_{cl,p}(s) = 0$?

Are all the solutions in a given region Γ stable? Γ -stability is given if the roots of $p_{cl,p}$ are entirely located inside Γ .

Exposed sets are defined as those sets of the polytope of coefficients which are elements of a nontrivial supporting hyperplane. Exposed *edges* and *faces* are one-dimensional and two-dimensional exposed sets, respectively (Fig. 21). The exposed edges of the polytope of polynomials completely guarantee the roots of every member of the polynomial set. The exposed edges can be parametrized in only one single variable, see λ below.

The Edge Theorem of *Bartlett, A.C., Hollot, C.V., and Lin, H., 1987* states that a polytope of polynomials of order n is Γ -stable (all the roots are located in the region Γ of the complex plane), if all the exposed edges are Γ stable (Fig. 20).

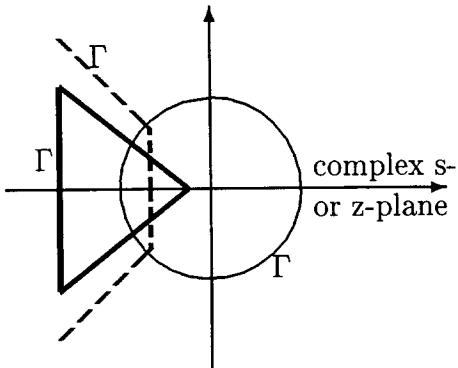


Figure 20: Various Γ -regions in the complex plane (s -plane or z -plane)

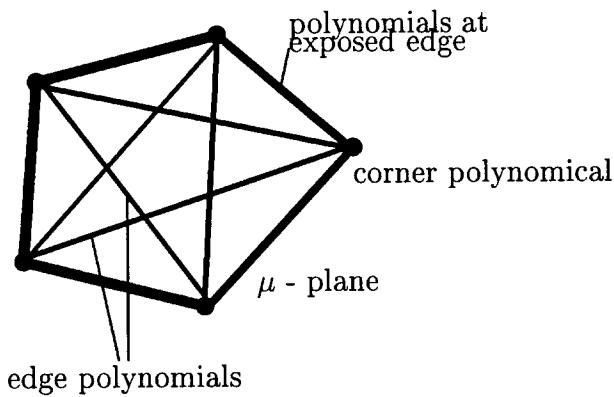


Figure 21: Illustrating edge and corner polynomials

As a consequence of the one-dimensional dependence on λ , the computational effort is low. Linear dependence of polynomial coefficients and, in addition, arbitrarily connected regions Γ in the complex plane are admissible. Dependent coefficient variations are arising often in practical control problems, e.g., control systems with a fixed controller and a plant with uncertain parameters. Since the result of the Edge Theorem is given in terms of root locations, it is applicable to *both* continuous-time and discrete-time systems. Moreover, it can be used to determine system stability and system performance.

The result of the Edge Theorem is executed in most cases by using the root locus method (Kraus, F.J., und Mansour, M., 1987). The root locus is generated by

$$f_i(s) + [\lambda/(1 - \lambda)] f_k(s) = f_i(s) + v f_k(s) , \quad (216)$$

as

$$1 + v f_k(s)/f_i(s) = 1 + v F_{o,ik} = 0 . \quad (217)$$

$F_{o,ik}$ is a hypothetical open-loop transfer function. One has to check if all the root loci $F_{o,ik}$ are inside Γ , varying v from 0 to ∞ .

When Γ is the open left half-plane then the v -sweep stability test can be replaced by a one-shot test (Fu, M., and Barmish, B.R., 1988).

9 Michailov Value Set

9.1 Cremer-Leonhard-Michailow Stability Criterion

The polynomial $p(s)$ of degree n is stable if the characteristic $p(j\omega)$ does not include the origin but encircles the origin n times in the counterclock direction with monotonically increasing phase for ω running from 0 to ∞ . It suffices to observe the intersection points with the real and imaginary axis.

Proof: For stable $p(s)$ all the zeros s_i are located in the open left-half s -plane. Using $p(s) = \prod_i (s - s_i)$, then $p(j\omega) = \prod_i (j\omega - s_i)$ is a product of complex numbers $j\omega - s_i$ which correspond to arrows from s_i to $j\omega$. The sum of arguments obviously increases monotonically iff $\Re s_i < 0 \forall i$.

9.2 Value Set

The value set is defined as the set of values given by the characteristic polynomial

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) \Big|_{s=j\omega} \quad (218)$$

of the perturbed closed-loop control system for $s = j\omega$. The frontier of the set is given by extreme values given for some combination of the parameter \mathbf{q}

$$q_1 \in \{q_{1l}, q_{1h}\}, \quad q_2 \in \{q_{2l}, q_{2h}\} \text{ etc.} \quad (219)$$

The origin must not be part of the set since in such a case $s = j\omega$ would be a solution of the characteristic polynomial yielding a steady-state oscillation, i.e., an unstable solution. This is termed as the Zero-Exclusion Theorem.

In other words,

$$0 \notin p_{cl,p}(j\omega, Q) \quad (220)$$

where Q is the set of all \mathbf{q} vectors.

For comparison purpose, Routh criterion determines the solutions of $p_{cl}(s) = 0$ with respect to s whether all of them are in the left-half s -plane.

Michailov's criterion requires that a solution of $p_{cl}(j\omega, \mathbf{q}) = 0$ with respect to ω does not exist, i.e. varying ω the characteristic $p_{cl}(j\omega, \mathbf{q})$ must not touch the origin.

Example. Value Set: For an uncertain plant

$$G(s) = \frac{h_1}{h_2 s + 1} \quad (221)$$

with two uncertain parameters h_1 and h_2 , and the controller

$$K(s) = \frac{-s + 1}{8 + 4s + s^2 + 0.3s^3}, \quad (222)$$

the region of uncertain parameters h_1 and h_2 is depicted in Fig. 22. The value set is evaluated by MATLAB `iie.m`. The system is stable, since in Fig. 23 the origin is excluded.

```
% iie.m Value set with general plant and controller
clear
alpha=0.2;          % factor for frequency range
M=10;              % number of interpolation at each edge
F=18;              % number of separate frequencies omega
n=4;               % predetermine the closed-loop system order in advance
V=[ -3   3   3   0  -3;... % abscissa of parameter corner
    1   1   2   4   3];    % ordinate of parameter corner
[a,P]=size(V); V=[V  V(:,1)];
figure(1);
for i=1:P
    K=[V(:,i) V(:,i+1)]; plot(K(1,:),K(2,:))
    axis([min(V(1,:))-1 max(V(1,:))+1 min(V(2,:))-1 max(V(2,:))+1]);
    title('uncertainty in parameter space, iie.m figure(1), iif.wmf')
    xlabel('parameter h1'); ylabel('parameter h2');
    hold on; end; hold off
for ww=1:F           % number of selected frequencies
    for ii=1:P
        for mm=1:M+1
            h1= V(1,ii)+(mm-1)*( V(1,ii+1)-V(1,ii) )/M;
            h2= V(2,ii)+(mm-1)*( V(2,ii+1)-V(2,ii) )/M;
            omega=alpha*ww; om=[1];
            for oo=1:n
                om=[(-j*omega)^oo om]; % minus because om'
                % is the conjugate transpose
            end %oo % contd. next page
            numK=[-1   1]; % controller numerator
            denK=[0.3  1  4  8]; % controller denominator
            numG=[h1]; % plant numerator
            denG=[h2   1]; % plant denominator
            pnum=conv(numG,numK); [bel, n1]=size(pnum);
            for uu=1:(n-n1+1) % add the coeff of appropr power of s
                pnum=[0  pnum]; end
            c=conv(denG,denK)+pnum;
            pcl((ii-1)*M + mm) = c*om';
        end; end
    figure(2);
    plot(real(pcl),imag(pcl))
    title('value set iie.m figure(2), iig.wmf')
    hold on; plot (0,0,'^'); end; hold off
```

If the factor 0.3 in the denominator of $K(s)$ is increased to 0.5, then the closed-loop system is unstable, see value set in Fig. 24 with nearly hidden Nyquist point triangle.

9.3 Edge Theorem for an r -th Order Hypercube

Consider the n -th order polynomial

$$p_{cl,p}(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n . \quad (223)$$

There are (at maximum) $r = n+1$ parameters $l_i \leq a_i \leq h_i$ and 2^r corners of the hypercube of uncertainties. Each corner is the intersection of r exposed edges. The number of exposed edges is $0.5r2^r = r \cdot 2^{r-1}$.

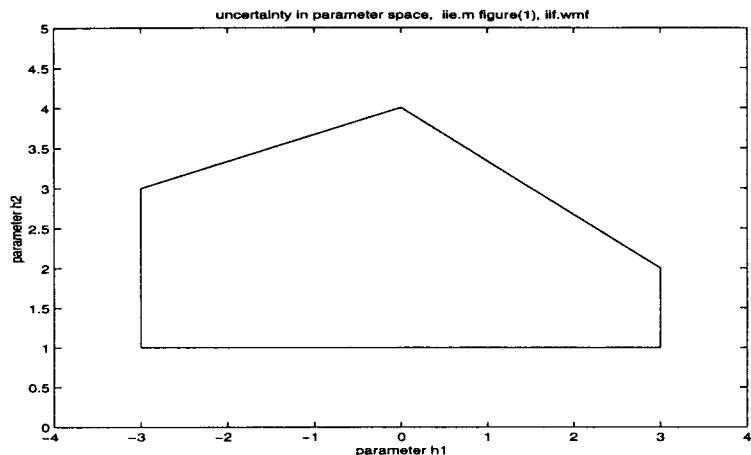


Figure 22: Region of uncertain parameters

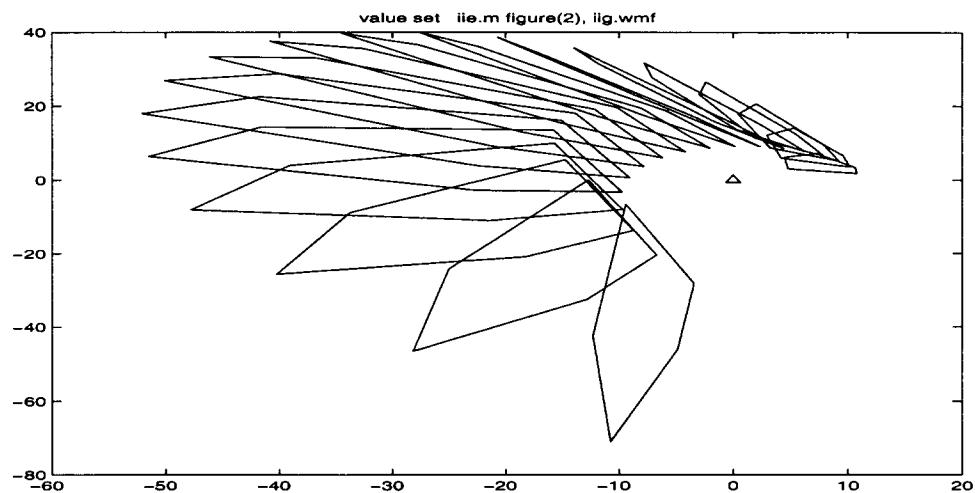


Figure 23: Value set for the stable system with denominator parameter 0.3 in the controller

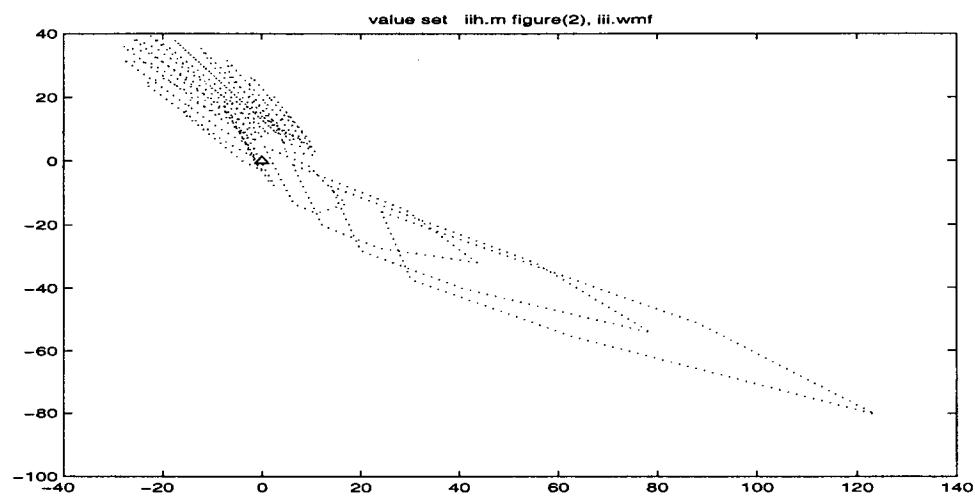


Figure 24: Value set for an unstable system with denominator parameter 0.5 in the controller

Along each of the exposed edges a number $npkt$ of points is selected, for $s = j\omega$, $p_{cl,p}(s)$ is computed and depicted on the complex plane. Such an edge is characterized by only one dimension being changed versus a parameter interpolating the coordinates of two corners.

For six uncertain parameters of a passive network, Fig. 25 shows the map of the 64 corners and 192 edges on the complex plane, circumventing the origin.

The list of MATLAB code `iol.m` in what follows produces 15 maps for the same example (*Sienel, W., 1996*).

```

iol.m Edge Theorem
clear
r=7; n=r-1; nm=2^n; % number of corners
npkt=10; % number of points at each edge
a0=1; % fixed parameter
lh=[1 3; 2 5; 1 2; 2 4; .5 2; .5 2]; % corner points
% corner points arrangement, 1/2.lower/upper parameter bound:
m=zeros(nm,n);
for k=0:nm-1
    m1=k;
    for l=n-1 : -1 : 0
        if m1>=2^l
            m(k+1,l+1)=2; m1=m1-2^l;
        else
            m(k+1,l+1)=1;
        end; end; end
for om=0.1 : 0.1 : 1.4 % omega values
    s=j*om;
    figure(1); clf;
    axis([-15 15 -15 15]); grid on; hold on
    for ii=1:nm % nm corner points
        for nn=1:n
            for in=1:n % n selected values of the parameter
                a(in)=lh(in,m(ii,in));
            end
            for pp=0:npkt; % npkt points each edge
                a(nn)=lh(nn,1)+pp*((lh(nn,2)-lh(nn,1))/npkt);
            pcl(pp+1)=(a(1)*s^2+a(5)*s+a(3)+a0)*(a(2)*s^2+a(6)*s+a(4)+1)-1;
            end
            plot(real(pcl),imag(pcl));
            hold on
            plot(0,0,'^')
        end; end; pause(0.1); end; hold off
    
```

10 Systems with Spherical Uncertainty. Soh-Berger-Dabke Theorem

For independent uncertainty parameters in \mathbf{q} a box of \mathbf{q} is advisable. In most systems in control engineering, the uncertainties are independent but the relation $a_i(\mathbf{q})$ might be

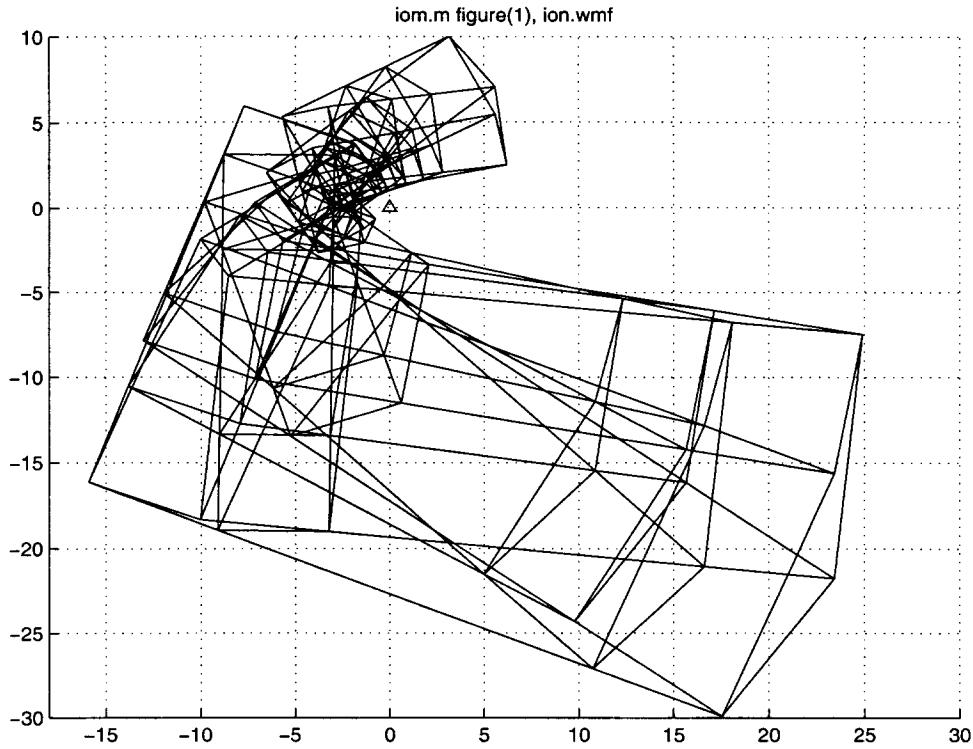


Figure 25: Map of 192 edges for the example `iol.m`, for $\omega = 0.9$ only

nonlinear.

A control system with the closed-loop polynomial

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n (a_i + q_i)s^i = \sum_{i=0}^n [a_i - q_i, a_i + q_i]s^i \quad (224)$$

is called member of spherical family if the uncertainties are included in a sphere $\|\mathbf{q}\|_F < r$.

Following *Soh, C.B., Berger, C.S., and Dabke, K.P., 1985*, the system is robustly stable iff (1) $p_{cl,p}(s, 0)$ is stable (2) $|a_0| > r$ and (3)

$$g(\omega) \triangleq \frac{[\Re p_{cl,p}(j\omega, 0)]^2}{\sum_{i \text{ even}} \omega^{2i}} + \frac{[\Im p_{cl,p}(j\omega, 0)]^2}{\sum_{i \text{ odd}} \omega^{2i}} > r^2 \quad \forall \omega. \quad (225)$$

(The degree n must be invariant and ≥ 1 .)

The parameter r can be understood as a robustness margin r_{\max} , i.e., $\sup\{r\}$ such that $p_{cl,p}$ is robustly stable. The result is

$$r_{\max} = \min\{|a_0|, |a_n|, \inf_{\omega>0} \sqrt{g(\omega)}\}. \quad (226)$$

Due to the simplicity of the theorems above, they are applicable to box or nonspherical uncertainties via overbounding. But overbounding may cause conservative results.

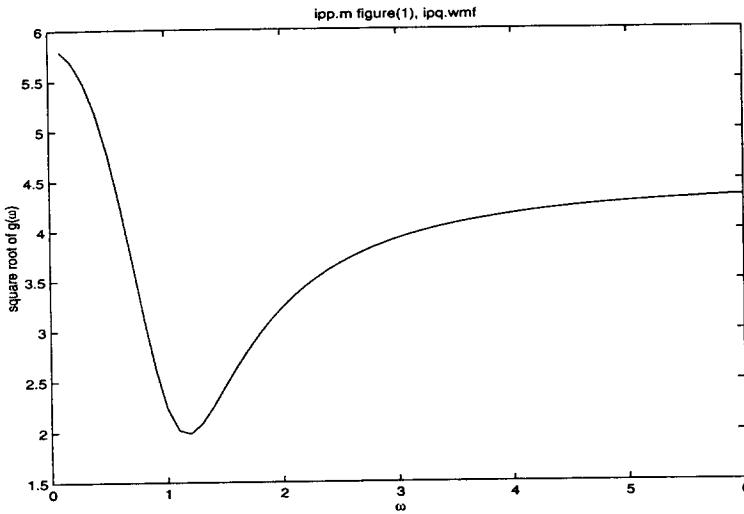


Figure 26: Square root of $g(\omega)$ with minimum of 1.985 at $\omega_{\min} = 1.2$

For a spherical family of plants with linear controllers, the results above were extended by *Biernacki, R.M., Hwang, H., and Bhattacharyya, S.P., 1987*.

Example: Consider the perturbed system

$$p_{cl,p}(s, \mathbf{q}) = (a_3 + q_3)s^3 + (a_2 + q_2)s^2 + (a_1 + q_1)s + (a_0 + q_0) \quad (227)$$

and the nominal one $\sum_1^3 a_i s^i$. Then

$$g(\omega) = \frac{(a_0 - a_2\omega^2)^2}{1 + \omega^4} + \frac{(a_1\omega - a_3\omega^3)^2}{\omega^2 + \omega^6} = \frac{(a_0^2 + a_1^2) - 2(a_0a_2 + a_1a_3)\omega^2 + (a_2^2 + a_3^2)\omega^4}{1 + \omega^4} \quad (228)$$

$$= \frac{(a_0^2 + a_1^2) - 2(a_0a_2 + a_1a_3)\omega^2 + (a_2^2 + a_3^2)\omega^4}{1 + \omega^4} \quad (229)$$

with the result

$$r_{\max} = \min\{|a_0|, |a_3|, \inf_{\omega > 0} \sqrt{g(\omega)}\}. \quad (230)$$

For special values $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$

$$g(\omega) = \frac{34 - 44\omega^2 + 20\omega^4}{1 + \omega^4}. \quad (231)$$

From Fig. 26, the final result for the admissible special uncertainty is $r_{\max} = \min\{3, 2, 1.985\} = 1.985$. That is, the uncertainty vector \mathbf{q} has to obey $\|\mathbf{q}\|_F < 1.985$.

11 Robust Stability in the Presence of Time-Varying Perturbations

Considerations are carried out in time domain, not frequency domain.

11.1 Open-Loop Robust Stability

Consider a system given with nominal matrix \mathbf{A} and a time-varying uncertainty $\Delta\mathbf{A}(t)$. We use $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, a nonlinear time-varying additive-type influence, generalizing $\Delta\mathbf{A}$. The solution is based on a Lyapunov equation with a Lyapunov matrix \mathbf{P} . Suppose the perturbed

system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n \quad (232)$$

with $\mathbf{g}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \ \forall t$ and Lyapunov function $V(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, e.g., $x_1^2 + 3x_2^2$. Then $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ is required⁶ for stability of the nominal system ($\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$), or negative definiteness of $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} < 0 \quad (234)$$

$$\dot{V} \triangleq -2\mathbf{Q} \quad \text{where} \quad \mathbf{Q} > 0. \quad (235)$$

Linear matrix inequality (LMI) techniques are recommended.

For the perturbed system $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ one has

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (236)$$

$$= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (237)$$

If \mathbf{P} is the positive definite solution of the Lyapunov equation

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\mathbf{Q} \quad \text{with} \quad \mathbf{Q} > 0 \quad (238)$$

then $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ requires⁷

$$2\mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (239)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\min}[\mathbf{Q}] \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (240)$$

where the Rayleigh principle

$$\lambda_{\min}[\mathbf{A}] \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}[\mathbf{A}] \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}^H} \quad (241)$$

was used.

As a sufficient⁷ condition we have

$$\Leftrightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|_F \|\mathbf{P}\|_s \|\mathbf{x}\|_F \equiv \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|_F \lambda_{\max}[\mathbf{P}] \|\mathbf{x}\|_F \leq \lambda_{\min}[\mathbf{Q}] \|\mathbf{x}\|_F^2 \quad (244)$$

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|_F}{\|\mathbf{x}(t)\|_F} \leq \frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{\lambda_{\max}[\mathbf{P}]} \quad (245)$$

(Patel, R.V., and Toda, M., 1980; Wilson, R.F., et al. 1992).

⁶Note that

$\dot{V} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}$ (only $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ is sensible). (233)

$\mathbf{P} > 0$ denotes positive definiteness, i.e., $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ is always positiv $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Positive definiteness $\mathbf{P} > 0$ is given if $\det \mathbf{P} > 0$ and all the northwest subdeterminants are positive.

⁷Sufficiency and necessity:

$$\alpha < 4 \Leftarrow \alpha < 3 \text{ i.e., } \alpha < 3 \text{ is sufficient for (implies) } \alpha < 4 \quad (242)$$

$$\alpha < 4 \Rightarrow \alpha < 6, \text{i.e., } \alpha < 6 \text{ is necessary for } \alpha < 4. \quad (243)$$

Without proof: Highest limit is achieved for $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Then $\lambda_{\min}[\mathbf{Q}] = 1$.
Now consider $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \Delta \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$ as a special case of $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{x}(t) \quad (246)$$

yielding

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|_F \leq \|\Delta \mathbf{A}(t)\|_s \|\mathbf{x}(t)\|_F \quad (247)$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta \mathbf{A}(t)\|_s \leq \frac{1}{\lambda_{\max}[\mathbf{P}]} = \frac{1}{\sigma_{\max}[\mathbf{P}]} = \|\mathbf{P}\|_s^{-1}. \quad (248)$$

The stability condition is

$$\|\Delta \mathbf{A}(t)\|_s \leq \|\mathbf{P}\|_s^{-1} \Leftrightarrow \|\Delta \mathbf{A}(t)\|_F \leq \|\mathbf{P}\|_s^{-1} \quad (249)$$

or

$$\Leftrightarrow n \max_{i,j} \{ |\Delta A_{ij}| \} \leq \|\mathbf{P}\|_s^{-1}. \quad (250)$$

Example. Stability margin: For

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \quad (251)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\mathbf{I}. \quad (252)$$

Since $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ in this example,

$$2\mathbf{A}\mathbf{P} = -2\mathbf{I} \quad (253)$$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_{\max}[\mathbf{P}] = 0, 1 \quad (254)$$

$$\|\Delta \mathbf{A}\|_s < \frac{1}{\lambda_{\max}[\mathbf{P}]} = 10. \quad (255)$$

Now calculate $\|\Delta \mathbf{A}\|_s$ from

$$\Delta \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 2a & 5 \end{pmatrix} \quad (256)$$

$$\lambda[\Delta \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{A}] \text{ from } \det \begin{pmatrix} \lambda - a^2 & -2a \\ -2a & \lambda - 5 \end{pmatrix} = 0 \quad (257)$$

$$\sigma[\Delta \mathbf{A}] = \sqrt{\lambda[\Delta \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{A}]} = \|\Delta \mathbf{A}\|_s \quad (258)$$

$$\lambda_{12} = \frac{a^2 + 5}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 5)^2}{4} - a^2} \quad (259)$$

and $\lambda_{\max} = \lambda_1$ with plus sign. Then

$$\|\Delta \mathbf{A}\|_s = \sqrt{\lambda_1} < \frac{1}{\lambda_{\max}[\mathbf{P}]} = 10 \rightsquigarrow a < \sqrt{\frac{9500}{99}} \doteq 10. \quad (260)$$

11.2 Closed-Loop Robust Stability

For the closed loop the relations are

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \Delta\mathbf{A} \rightsquigarrow \Delta\mathbf{A}_{cl} = \Delta\mathbf{A} \quad (261)$$

$$\mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P}_{cl} + \mathbf{P}_{cl} \mathbf{A}_{cl} = -2\mathbf{I} \quad (262)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{cl} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{cl} + \mathbf{P}_{cl} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{cl} \mathbf{B} \mathbf{K} = -2\mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{P}_{cl} . \quad (263)$$

The controller design requires: find \mathbf{K} such that for given \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\Delta\mathbf{A}$

$$\|\Delta\mathbf{A}\|_s < \|\mathbf{P}_{cl}\|_s^{-1} . \quad (264)$$

11.3 Robustification

Robustification provides finding out the largest dilatation of the parameters of the system where stability holds. Given \mathbf{A} , \mathbf{B} , find \mathbf{K} such that $\|\Delta\mathbf{A}\|_s$ is maximized, i.e. that $\|\mathbf{P}_{cl}\|_s$ is minimized. Usually \mathbf{K} has to be subject to bounds.

12 Sliding Mode Control

12.1 Range Space. Null Space. Projectors

The range space of a linear map $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ is the set of all linear combinations of the columns of the matrix \mathbf{H} and is termed range space $\mathcal{R}[\mathbf{H}]$, see Fig. 27. The range space of \mathbf{H} is the set of all vectors $\mathbf{H}\mathbf{x}$ where $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \in \mathcal{R}^n$

$$\mathcal{R}[\mathbf{H}] \triangleq \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}\} \subset \mathcal{Y} \quad \mathbf{H} \in \mathcal{R}^{m \times n} . \quad (265)$$

The null space $\mathcal{N}[\mathbf{H}]$ of a matrix \mathbf{H} is defined as a subspace

$$\mathcal{N}[\mathbf{H}] \triangleq \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ where } \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathcal{X} \quad (266)$$

Roughly speaking, if $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, then \mathbf{x} belongs to the null space of \mathbf{H} , i.e., $\mathbf{x} \in \mathcal{N}[\mathbf{H}]$, see Figs. 27.

The matrix \mathbf{P}_r is a projector if it projects $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ on the range space $\mathcal{R}[\mathbf{P}_r]$ of \mathbf{P}_r along the null space $\mathcal{N}[\mathbf{P}_r]$ of \mathbf{P}_r . A matrix is a projector if it is idempotent, i.e. $\mathbf{P}_r^2 = \mathbf{P}_r$. A projector \mathbf{P}_r requires that it makes sense to demand

$$\mathbf{P}_r \mathbf{x} = \mathbf{x} . \quad (267)$$

Considering the same vector \mathbf{x} to be projected by another projector $\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r$ the projection result

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (268)$$

is the null space.

Note that $\text{rank } \mathbf{P}_r = \text{tr } \mathbf{P}_r$ and $\text{rank } (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r) = n - \text{rank } \mathbf{P}_r$.

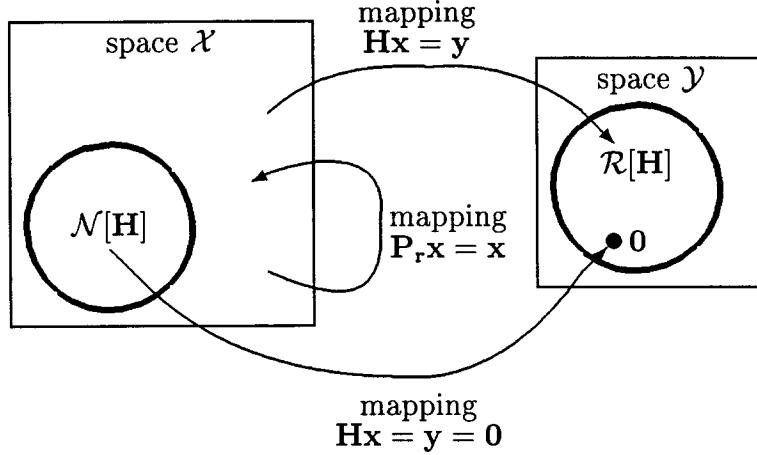


Figure 27: Range space $\mathcal{R}[\mathbf{H}]$, null space $\mathcal{N}[\mathbf{H}]$ and projector

If the matrices $\mathbf{B}, \mathbf{K}, \mathbf{H}, \mathbf{C}$ have full rank, the following relations are true

$$\mathcal{R}[\mathbf{B}\mathbf{K}] = \mathcal{R}[\mathbf{B}] \quad \text{and} \quad \mathcal{N}[\mathbf{H}\mathbf{C}] = \mathcal{N}[\mathbf{C}] \quad (269)$$

which is often used in sliding mode control.

Examples for range space, null space, and projector:

a) Null space $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$

$$\text{e.g., } \mathbf{H} := \mathbf{P}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (270)$$

$$\mathcal{N}[\mathbf{P}_r] = \text{planes } 2x_1 + x_2 = 0 \text{ and } x_3 = 0 \quad (271)$$

$$\text{since } \mathbf{P}_r \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 . \quad (272)$$

b) Range space $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\text{e.g. } \mathbf{H} := \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (273)$$

$$\mathcal{R}[\mathbf{Q}] = \text{planes } 2y_1 + y_2 = 0 \text{ and } y_3 = 0 \quad (274)$$

$$\text{since } \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (275)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (276)$$

$$-2y_1 = y_2 \rightsquigarrow 2y_1 + y_2 = 0 \quad (277)$$

$$0 = y_3 \rightsquigarrow y_3 = 0 . \quad (278)$$

The result $\mathcal{R}[\mathbf{Q}] = \mathcal{N}[\mathbf{P}_r]$ is true because $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_r$.

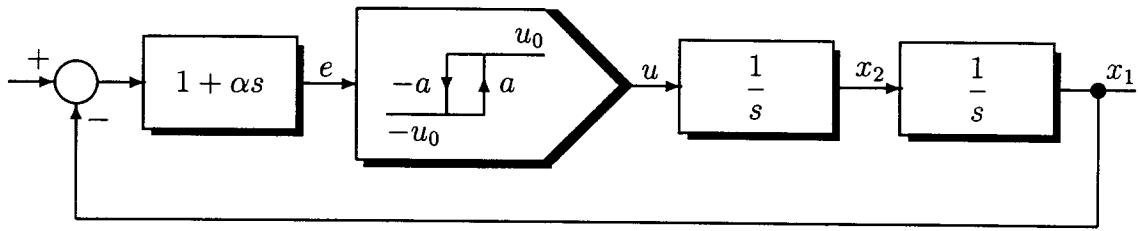


Figure 28: Second-order control system with on-off control and hysteresis

c) Null space $\mathcal{N}[\mathbf{Q}] = \text{plane } x_1 = 0$

$$\text{since } \mathbf{Q}\mathbf{x} = 0 \text{ using Eq.(273)} \quad (279)$$

$$x_1 = 0 \quad (280)$$

x_2 and x_3 undetermined. (281)

d) Range space $\mathcal{R}[\mathbf{P}_r] = \text{plane } y_1 = 0$

$$\mathbf{P}_r\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ using Eq.(270)} \quad (282)$$

$$0 = y_1 \quad (283)$$

$$2x_1 + x_2 = y_2 \quad (284)$$

$$x_3 = y_3 \quad y_3 \text{ undetermined.} \quad (285)$$

e) Projector $\mathbf{P}_r\mathbf{x} = \mathbf{x}$ using Eq.(270)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (286)$$

$x_1 = 0$, x_2 and x_3 undetermined.

\mathbf{P} projects \mathcal{X} into the plane $x_1 = 0$.

12.2 Introductory Comments and Example

The matrices corresponding to Figs. 28 through 31 are

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_s = (1 \ \alpha), \mathbf{A}_{cl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{K}_{eq} = -(0 \ \alpha^{-1}). \quad (287)$$

The actuating variable is

$$u = \mathbf{K}_{eq}\mathbf{x} = -\alpha^{-1}x_2 \dots \text{on sliding surface} \quad (288)$$

$$u = \text{sign}[-(x_1 + \alpha x_2)] \dots \text{in the vicinity of the surface.} \quad (289)$$

Keeping S at zero is a first-order stabilization problem. The sliding condition is an invariant set.

In Fig. 29, trajectories are depicted as dotted and solid lines, corresponding to special regions of the switching element in Fig. 30.

Small α correspond to a steep switching line S_1 and S_2 . For the hysteresis $a \neq 0$, a stable oscillation between switching surfaces S_1 and S_2 occurs, specifically imperfect

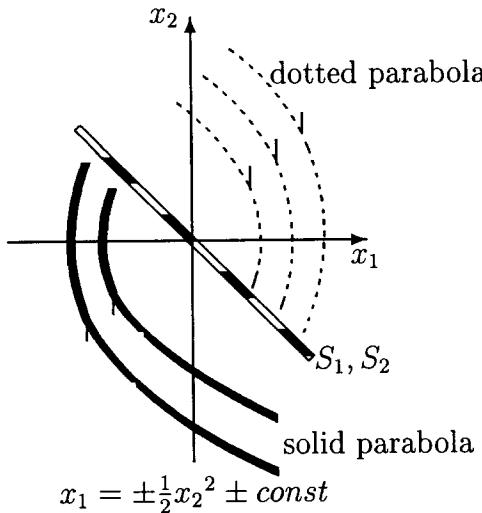


Figure 29: Two classes of trajectories

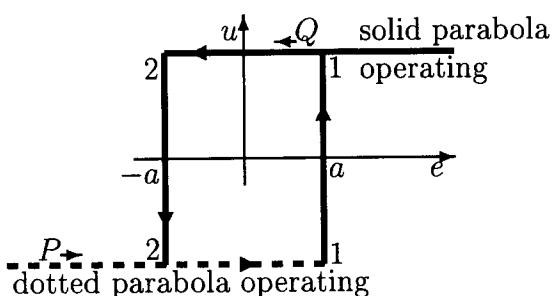


Figure 30: Switching characteristic of the on-off controller

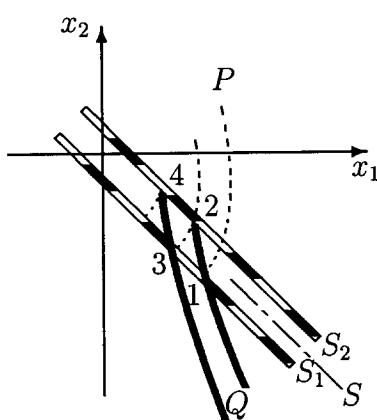


Figure 31: Switching between surfaces S_1 and S_2 , sliding mode for S_1 and $S_2 \rightarrow S$.

switching (chattering) takes place. Sliding mode takes place if the switching lines S_1 and S_2 converge to each other, see S in Fig. 31. For $a \rightarrow 0$ perfect switching, i.e., sliding mode occurs, and $S_1 = S_2 = S$. Oscillations take place if the switching surface is flatter than the trajectory. Then the trajectories of both classes point to the switching line. Since $e = -(x_1 + \alpha dx_1/dt)$, for $a = 0$ and $u = \text{sign } e$, switching takes place, corresponding to $e = -(x_1 + \alpha x_2) = 0$. Sliding mode corresponds to consecutive points 1,2,3,4 etc. Sliding mode is a motion along a surface which is not a trajectory of any of the structures. P and Q are possible initial points in (x_1, x_2) .

Due to unmodelled dynamics, the system will pass over the sliding surface a small piece before the motion is driven back along one of the trajectories of concern.

Trajectories of the control system must be oriented towards the sliding surface along the complete sliding motion. The system can neither leave the sliding surface nor reach a steady state at the sliding surface.

Even in a case of unstable trajectories (results of unstable system's motion), the resulting motion is caught by the sliding surface and a stable sliding mode is obtained.

The actuator is stressed unless it is a high-frequency switch element as used e.g. in power electronics.

Sliding Control: To get the state \mathbf{x} to track \mathbf{x}_s then

$$s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0 \quad (290)$$

for $\lambda > 0$ must be fulfilled. Satisfying Eq.(290) determines the surface to be an invariant set⁸.

12.3 Sliding Mode

Sliding mode control is a variable structure control system. It is characterized by switching on one or more manifolds in the state space. During sliding motion the system state continuously intersects the switching hyperplane in different directions (*Utkin, V.I., 1992*). The system changes its structure when crossing the switching surface.

Operating along the switching manifolds, the motion is constrained to a certain subspace of the full state space. This subspace has lower order. The nominal plant is given by

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m. \quad (291)$$

The state feedback controller usually is state dependent $u_j(\mathbf{x})$. On the switching surface S , which is a hyperplane, the control variable is switching

$$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{C}_s \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}\}. \quad (292)$$

The intersection S is a subspace and equals the null space or kernel of \mathbf{C}_s . If \mathbf{C}_s is chosen to a certain matrix, then the combination Eqs.(291) and (292) yields solutions $\mathbf{u}(t)$ such that both the plant equation and the condition $s_w \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{C}_s \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ are satisfied

$$\mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_s \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}_s \mathbf{B}\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}. \quad (293)$$

⁸An invariant set is characterized by the property that all the trajectories starting inside this invariant set remain inside for all future, e.g. attraction region, equilibrium points, limit cycles.

Defining the equivalent controller \mathbf{K}_{eq} in the sliding mode as $\mathbf{u}_{eq} = \mathbf{K}_{eq}\mathbf{x}$, it results

$$\mathbf{C}_s\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}_s\mathbf{B}\mathbf{K}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{C}_s(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{eq})\mathbf{x} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_s\mathbf{F}_{eq}\mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \quad (294)$$

$$\mathbf{K}_{eq} = -(\mathbf{C}_s\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}_s\mathbf{A} \quad (295)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{eq}\mathbf{x} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{F}_{eq}\mathbf{x} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{C}_s\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}_s]\mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (296)$$

The invertability of $\mathbf{C}_s\mathbf{B}$ requires $\mathbf{C}_s \in \mathcal{R}^{m \times n}$. The sliding motion is determined by Eq.(296) and depends only on the choice of \mathbf{C}_s , irrespective of the actual \mathbf{u} . The non-singularity of $\mathbf{C}_s\mathbf{B}$ implies that $[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}_s\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}_s]$ can be considered a projector of \mathbf{A} into a subspace. Note that $[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}_s\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}_s]$ is an idempotent matrix.

The control signals operate in the range space $\mathcal{R}[\mathbf{B}]$ of \mathbf{B} . The sliding mode lies completely within the null space $\mathcal{N}[\mathbf{C}_s]$ of \mathbf{C}_s . Owing to the fact that the range space of \mathbf{B} and the null space of \mathbf{C}_s are complementary (with intersection $\{\emptyset\}$), sliding motion and control action do not interfere. The function of the controlling variable \mathbf{u} is to force the motion into S and to keep it there.

12.4 Disturbance Rejection

Consider the system augmented by a disturbance \mathbf{Gw}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w}. \quad (297)$$

The effect of the projector $\mathbf{P}_r = \mathbf{B}(\mathbf{C}_s\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}_s$ during sliding mode is similar to Eq.(296)

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r]\mathbf{A}\mathbf{x} + [\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r]\mathbf{G}\mathbf{w}. \quad (298)$$

If $[\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r]\mathbf{G} = \mathbf{0}$ is satisfied, robustness with respect to \mathbf{w} is achieved. Then the disturbances are completely rejected. Referring to Eqs.(267) and (268), the relations

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{P}_r\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}[\mathbf{P}_r] \quad (299)$$

require that all columns of \mathbf{G} must lie in range space $\mathcal{R}[\mathbf{P}_r]$.

12.5 Robustness to Plant Parameter Variations

Since Eq.(296), one has $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_r)\mathbf{A}\mathbf{x}$ and all the columns of \mathbf{A} have to obey to

$$(\mathbf{A})_{.i} \in \mathcal{R}[\mathbf{P}_r] = \mathcal{R}[\mathbf{B}] \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (300)$$

If the matrices \mathbf{A}, \mathbf{B} are structured such that all the uncertain parameters of \mathbf{A} are located in $\mathcal{R}[\mathbf{B}]$, then $\mathbf{x}(t)$ becomes independent of them.

12.6 Controlling Variable During Sliding Mode

With the help of variable structure control and a specific controlling variable \mathbf{u} , the system is forced into a motion given by s_w in the subspace S . The hyperplane $s_w \triangleq \mathbf{C}_s \mathbf{x} = 0$ is given by Eq.(292). To keep the sliding motion within the subspace S , it is necessary to provide negative derivative \dot{s}_w when s_w is positive and positive derivative \dot{s}_w when s_w is negative. Thus,

$$s_w \dot{s}_w < 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} \frac{ds_w^2}{dt} < 0 \quad \text{or} \quad s_w \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (301)$$

$$s_w (\mathbf{C}_s \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}_s \mathbf{B} \mathbf{u}) < 0. \quad (302)$$

By assertion of a so-called unit vector control

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{x} + \rho \operatorname{sign}\{\mathcal{N}[\mathbf{C}_s]\}, \quad (303)$$

sliding mode control is achieved.

Example. Robust Control: Using Eq.(303)

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{x} + \rho \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(2x_1 + x_2) \\ \operatorname{sign} x_3 \end{pmatrix} \quad (304)$$

and the set-up

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ a_{33} & 0.2 & -0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (305)$$

and $\rho = 5$, $k = 20$, $a_{33} = [1, 2]$, the results are

$$\mathcal{N}(\mathbf{C}_s) \text{ is represented by } 2x_1 + x_2 = 0 \text{ and } x_3 = 0 \quad (306)$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{B}(\mathbf{C}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (307)$$

$$\mathbf{F}_{eq} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}_s] \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (308)$$

The following plots are taken for $a_{33} = 2$. In the following figures Fig.32 through Fig.35 the results are depicted. The system is partly sliding for $0.5 < t < 1.5$, and completely sliding for $t > 1.5$.

13 Robustness with Respect to Uncertain Disturbances

Performance robustness with respect to uncertain disturbances w_d is addressed. The output variance of a complex plant is used as an index of performance, the uncertain disturbance w_d is modelled by an uncertain filter $L(s)$ excited by white noise w , see Fig. 36. The plant of concern is an aircraft and its altitude control (Gökcze, C., et al., 1999).

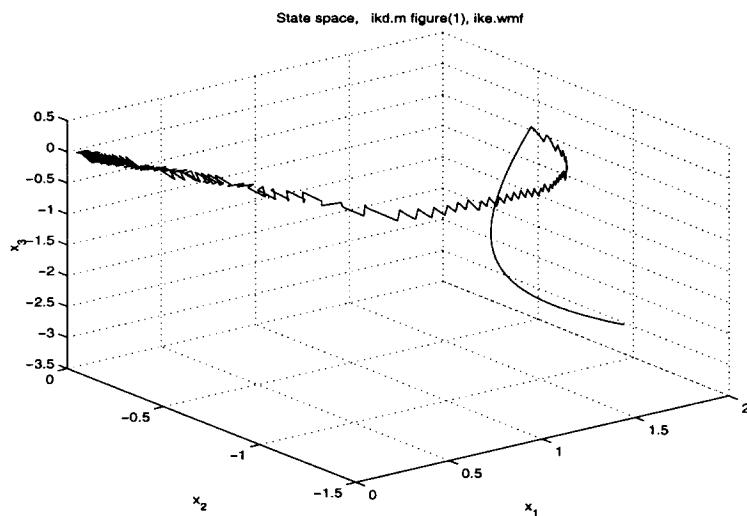


Figure 32:
Three-dimensional state
space and sliding motion

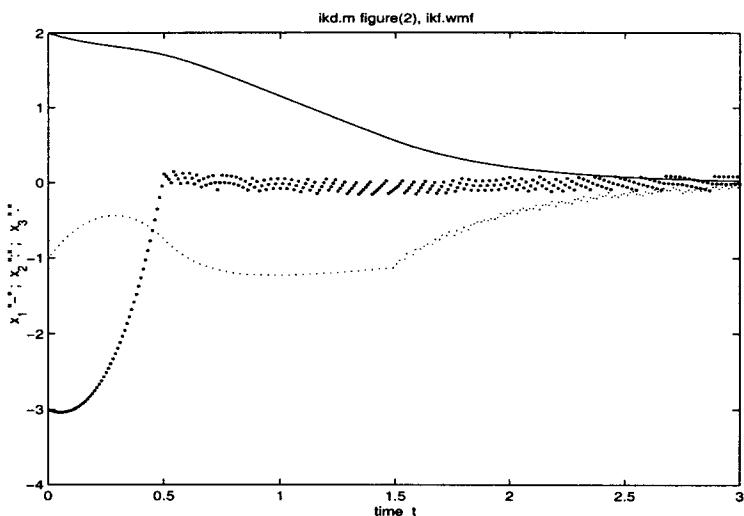


Figure 33: $x(t)$ versus time

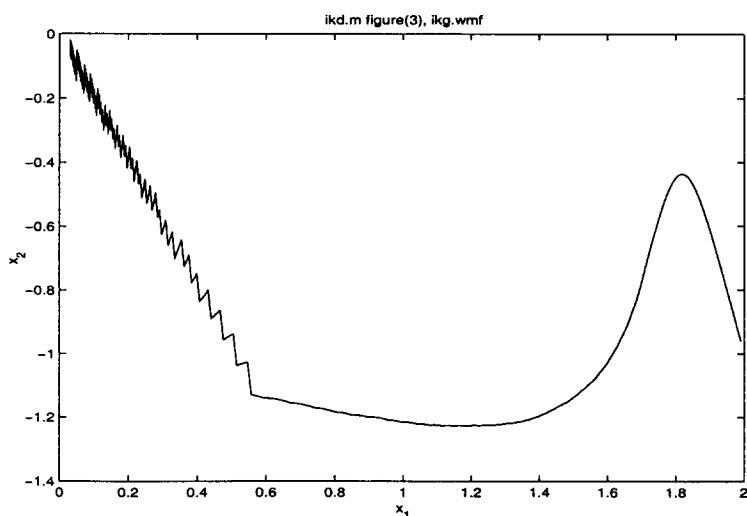


Figure 34: State variables
 x_2 versus x_1

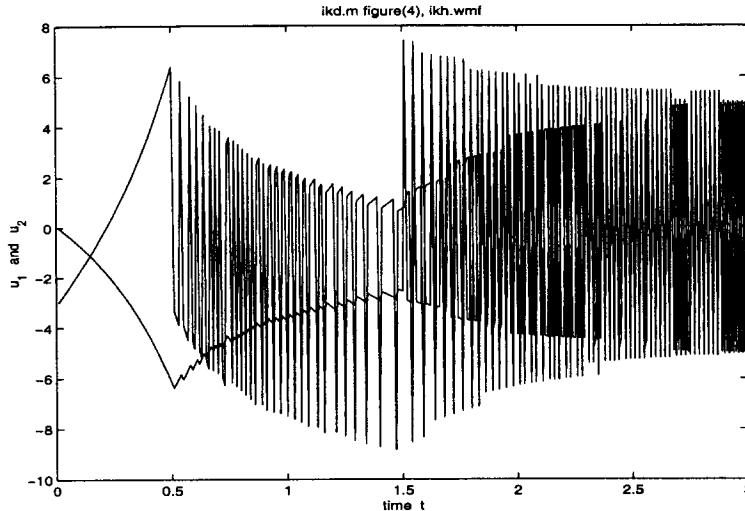


Figure 35: Actuating variable $u(t)$ in sliding mode versus time

The disturbance uncertainty model is located in the open loop, i.e., outside the feedback. Examples are wind turbulence in an aircraft, road roughness in a car etc. whereas the aircraft or car themselves are usually precisely modeled by deterministic equations.

The autopilot should be designed for the altitude. Discomfort for passengers arises for a variance σ_e^2 of the vertical acceleration $e(t)$ in the aircraft greater than $3[m^2/s^4]$. Hence, $e(t) = \ddot{y}(t)$ is used as a supplement.

The disturbance model is the power spectral density $S_{w_d w_d}$ of w_d which is part of the set-up. From it the filter $L(s)$ is derived⁹

$$S_{w_d w_d}(\omega) = L(-j\omega)L(j\omega) \cdot 1 = |L(j\omega)|^2 \quad (310)$$

resulting from white noise w with $S_{ww} = 1$.

Hence, the filter (*Elliott, J.R., 1977*) $L(s)$

$$L(s) = \mu \frac{\sqrt{\lambda}}{s + \lambda} \quad (311)$$

is asserted. The parameter μ is the turbulence intensity, λ the turbulence bandwidth. Both are uncertain but only λ is considered in the region $0.2 < \lambda < 2$ in what follows.

The variance σ_e^2 of $e(t)$ directly corresponds (*Weinmann, A., 1991, Eq.(31.47)*) to

$$\sigma_e^2 = \|L(j\omega)F_{ew_d}(j\omega)\|_2^2 \quad (312)$$

where from Fig. 36

$$F_{ew}(s) = L(s)F_{ew_d}(s) = L(s)G_1(s) \frac{1}{1 + K(s)G_2(s)} s^2 \quad (313)$$

⁹Employ the relation: For single-input single-output systems, $y(s) = G(s)u(s)$, with input power spectral density $S_{uu}(\omega)$ the expectation of the squared output is

$$E\{y^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) d\omega . \quad (309)$$

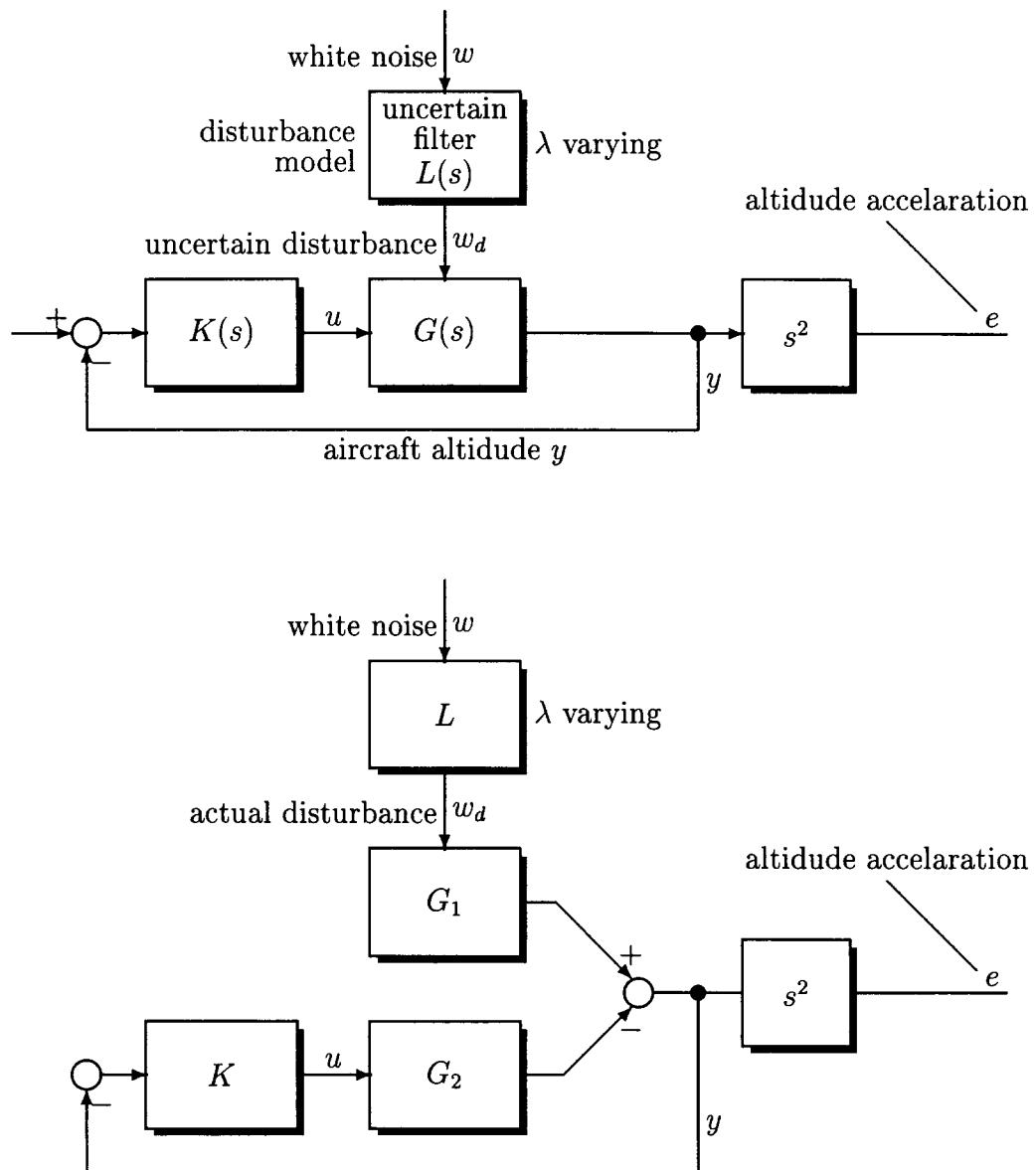


Figure 36: Control system with uncertain disturbance

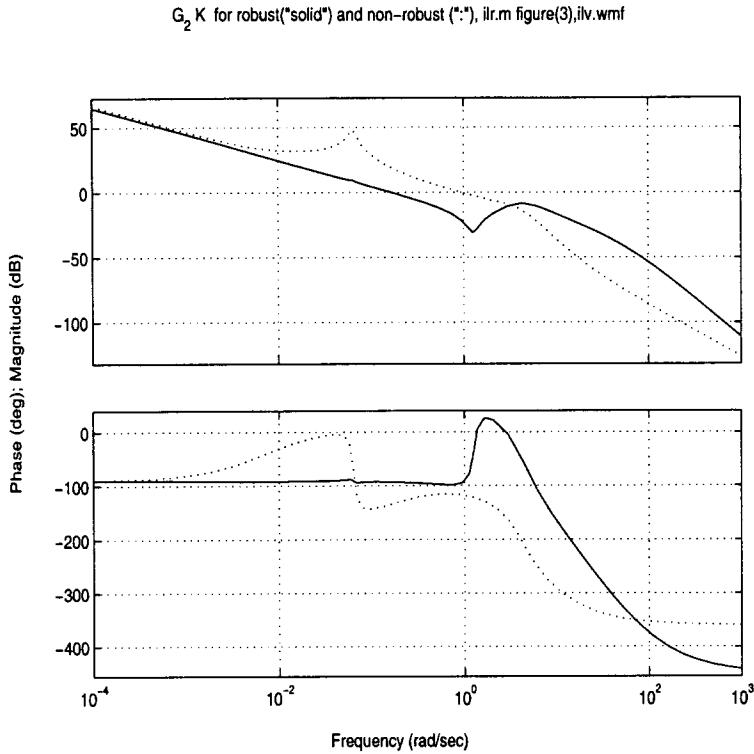


Figure 37: Open-loop frequency characteristic

In Gökcze, C., et.al, 1999 the problem is solved as an inverse factorization problem and as a synthesis problem as well, here the function-2-norm of MATLAB normh2 is used.

The open-loop transfer function is given by $G_2(s)$ and $K(s)$, and depicted as Bode-Diagramm in Fig. 37 with two types of controller $K(s)$. In Fig. 38 the closed-loop transfer functions $|F_{ew_d}(j\omega)|$ and $|L(j\omega)|$ are shown. Fig. 39 portrays σ_e^2 for robust and non-robust controller.

14 Model-Based and Generalized Predictive Control

14.1 Basic Predictive Control

Generalized predictive control (GPC) is a useful and simple strategy especially if future reference values are known and an extrapolation of the plant behaviour is introduced. These future outputs are predicted based on the model of the plant and in a determined horizon N .

The output of the plant in discrete time $y(t + k|t)$ is calculated for $t = kT$ with $k = 1 \dots N$, based on the known values at t and the past.

The term $y(t + j)$ is an abbreviation of $y(kT + jT)$ where $t = kT$ is the present time instant and T is the sampling period. The future controlling signals $u(t + k|t)$, $k = 0 \dots N - 1$ are precalculated but only $u(t|t)$ is used at time instant t whilst $u(t + 1|t + 1)$ is calculated after the new information $y(t + 1)$ is available. Hence $u(t + 1|t + 1) \neq u(t + 1|t)$.

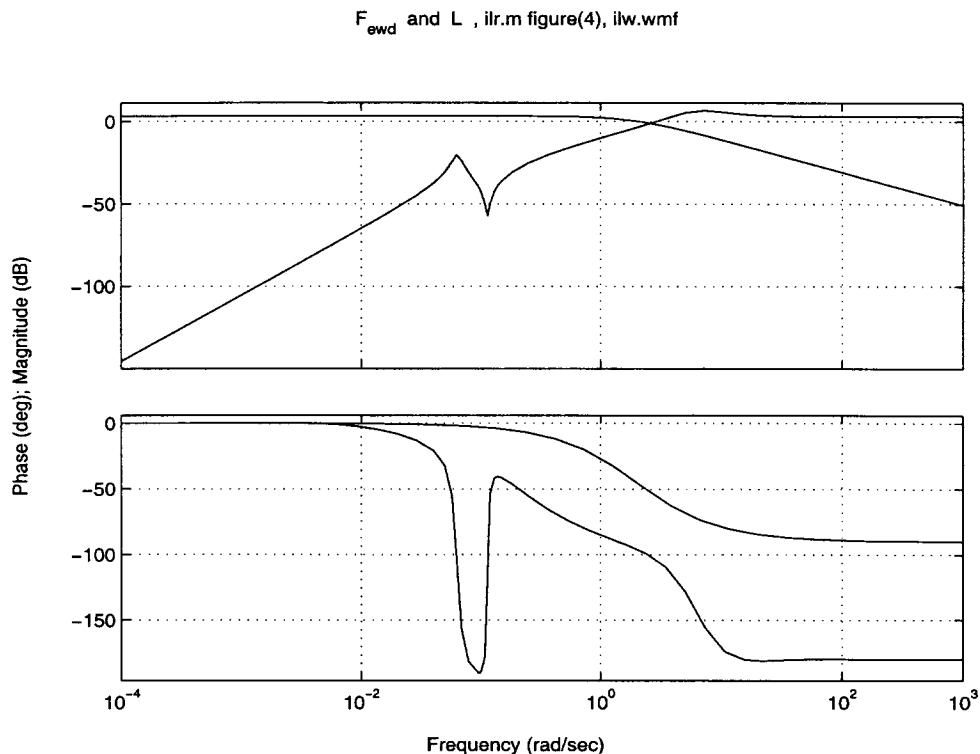


Figure 38: Closed-loop altitude transfer function from disturbance w_d to vertical acceleration e

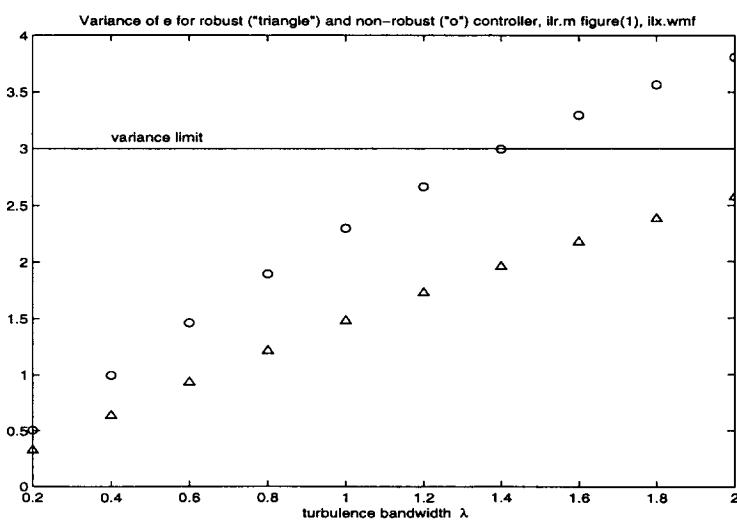


Figure 39: Variance σ_e^2 versus turbulence bandwidth

A model is used to predict y , taking into account constraints occasionally. The model must be accurate (*Camacho, E.F., and Bordons, C., 1999; Clarke, D.W., et al., 1987; Demircioglu, H., and Karasu, E., 2000; Bordeneuve-Guibé, J., and Vaucoret, C., 2001*).

The impulse and step response model is

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t-1} p(i)u(t-i) \quad (314)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Delta g_i \cdot u(t-i) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (315)$$

$$= y_0 + g_1 \Delta u(t-1) + g_2 \Delta u(t-2) + \dots \quad (316)$$

$$= y_0 + g_1 u(t-1) - g_1 u(t-2) + g_2 u(t-2) - g_2 u(t-3) + \dots \quad (317)$$

$$= y_0 + g_1 u(t-1) + (g_2 - g_1) u(t-2) + (g_3 - g_2) u(t-3) + \dots \quad (318)$$

$$\text{with } g_2 - g_1 = p_2 \quad g_3 - g_2 = p_3 \quad (319)$$

$$= p_0 u(t) + p_1 u(t-1) + \dots \quad (320)$$

where $p(\tau)$ is the impulse response (weighting function) and $g(\tau)$ the step response.

For the sake of introduction, consider a first-order system. Following

$$(1 + a_1 z^{-1})y(t) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(t-1), \quad (321)$$

which is the usual writing for $y(t)$ in terms of $u(t-1)$, the step response for $u(t) = 1$, $t \geq 0$ and $y(0) = 0$ is

$$t = 1 : \quad y(t) + a_1 y(t-1) = b_0 u(t-1) + b_1 u(t-2) \quad (322)$$

$$y(1) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = b_0 = g_0 \quad (323)$$

$$t = 2 : \quad y(2) + a_1 y(1) = b_0 + b_1 \rightsquigarrow y(2) = b_0 + b_1 - a_1 b_0 = g_1 \quad (324)$$

$$t = 3 : \quad y(3) + a_1 y(2) = b_0 + b_1 \rightsquigarrow y(3) = b_0 + b_1 - a_1(b_0 + b_1 - a_1 b_0). \quad (325)$$

Hence,

$$(g_0 \quad g_1 \quad g_2) = (y(1) \quad y(2) \quad y(3)). \quad (326)$$

Following higher-order assumptions, the model is presumed with the following relations using the polynomials $a(z^{-1})$ and $b(z^{-1})$

$$a(z^{-1})y(kT) = z^{-d}b(z^{-1})u(kT - T) \quad (327)$$

$$\hat{y} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{y}(kT + dT + T|kT) \\ \hat{y}(kT + dT + 2T|kT) \\ \vdots \\ \hat{y}(kT + dT + NT|kT) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{ref} \triangleq \begin{pmatrix} y_{ref}(kT + dT + T) \\ \vdots \\ y_{ref}(kT + dT + NT) \end{pmatrix}, \quad (328)$$

the predicted increments

$$\Delta \mathbf{u} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta u(kT) \\ \Delta u(kT + T) \\ \vdots \\ \Delta u(kT + NT - T) \end{pmatrix} \quad (329)$$

and the dynamic triangular matrix

$$\mathbf{G}_T \triangleq \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{pmatrix}. \quad (330)$$

The vector $(g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots)$ corresponds to the step response model.

14.2 Optimal Predictor

Several auxiliary polynomials e_j and f_j are defined corresponding to the Diophantine equation

$$1 = e_j a \cdot (1 - z^{-1}) + z^{-j} f_j. \quad (331)$$

For abbreviation, the polynomials are termed $a(z^{-1}) = a$, $b(z^{-1}) = b$, $e_j(z^{-1}) = e_j$ and $f_j(z^{-1}) = f_j$ in what follows. This relation Eq.(331) is used to step from Eq. (333) to (334). The difference equation of the plant is multiplied by $(1 - z^{-1})e_j z^j$

$$ay(t) = bz^{-d}u(t-1) + \cdot (1 - z^{-1})e_j z^j \quad (332)$$

$$a \cdot (1 - z^{-1})e_j y(t+j) = e_j b \cdot u(t-1-d+j)(1 - z^{-1}) \quad (333)$$

$$(1 - z^{-j} f_j)y(t+j) = e_j b \cdot u(t-1-d+j)(1 - z^{-1}) \quad (334)$$

$$y(t+j) = f_j y(t) + e_j b \cdot u(t-1-d+j)(1 - z^{-1}) \quad (335)$$

$$\hat{y}(t+j|t) = f_j y(t) + e_j b \cdot (1 - z^{-1})u(t+j-d-1). \quad (336)$$

Rewriting and assuming $d = 0$, subsequent inserting $i = 1, 2$ etc. yields the optimal predictions

$$\hat{y}(t+1|t) = e_1 b \cdot (1 - z^{-1})u(t) + f_1 y(t) \quad (337)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = e_2 b \cdot (1 - z^{-1})u(t+1) + f_2 y(t) \quad (338)$$

$$\hat{y}(t+N|t) = e_N b \cdot (1 - z^{-1})u(t+N-1) + f_N y(t). \quad (339)$$

As an abbreviation, we use

$$\Delta u(t) \triangleq u(t) - u(t-1) = (1 - z^{-1})u(t). \quad (340)$$

The symbols Δ can be understood both as an operator for the difference and as a factor $(1 - z^{-1})$. Furthermore $\Delta u(t) \equiv z\Delta u(t-1)$.

Adding and subtracting the equal terms $g_0 \Delta u(t)$ and $g_0 z \Delta u(t-1)$ in the expression $\hat{y}(t+1|t)$, and continuing these considerations, one has

$$\hat{y}(t+1|t) = g_0 \Delta u(t) + e_1 b z \Delta u(t-1) - g_0 z \Delta u(t-1) + f_1 y(t) \quad (341)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = g_1 \Delta u(t) + g_0 \Delta u(t+1) + e_2 b z^2 \Delta u(t-1) \quad (342)$$

$$-g_1 z \Delta u(t-1) - g_0 z^2 \Delta u(t-1) + f_2 y(t). \quad (343)$$

Employing the definitions Eq.(330) and, furthermore,

$$\mathbf{g}_T \triangleq \begin{pmatrix} (e_1 b - g_0)z \\ (e_2 b - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 \\ (e_3 b - g_0 - g_1 z^{-1} - g_3 z^{-3})z^3 \\ \vdots \\ (e_N b - \dots) \dots z^{-N} \end{pmatrix} \quad (344)$$

$$\Delta \mathbf{u} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} \triangleq \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad (345)$$

Eqs. (341), (343) etc. can be rewritten

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} y(t) + \mathbf{g}_T \Delta u(t-1). \quad (346)$$

Note that \mathbf{G}_T is constant and \mathbf{g}_T is free of the shift operator z^{-1} , \mathbf{f} depends on z^{-1} . The expression $\mathbf{f} y(t) + \mathbf{g}_T \Delta u(t-1)$ is a vector of signals, which only depends on the past.

Assume a multi-stage cost function

$$\begin{aligned} I(N_1, N_2, N_u) &= \sum_{j=N_1}^{N_2} w_y(j)[\hat{y}(kT + jT|kT) - y_{ref}(kT + jT)]^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_u} w_u(j)\Delta u^2(kT + jT - T). \end{aligned} \quad (347)$$

The signal $\hat{y}(kT + jT|kT)$ is the optimum j -step ahead prediction of the output based on data up to kT ; N_1 and N_2 define the minimum and maximum prediction horizon, N_u is the control horizon, $w_y(j)$ and $w_u(j)$ are weighting sequences. For simplicity, select $w_y = 1$ and $w_u = w = \text{constant}$. Rewriting yields

$$I = w_y(\mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} y(t) + \mathbf{g}_T \Delta u(t-1) - \mathbf{y}_{ref})^T \times \quad (348)$$

$$\times (\mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} y(t) + \mathbf{g}_T \Delta u(t-1) - \mathbf{y}_{ref}) + w_u \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u}. \quad (349)$$

$$\text{Using } \mathbf{f}_0 \triangleq \mathbf{f} y(t) + \mathbf{g}_T \Delta u(t-1) - \mathbf{y}_{ref}, \quad (350)$$

$$I = (\mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_0)^T (\mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_0) + w \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \quad (351)$$

$$I = \Delta \mathbf{u}^T (\mathbf{G}_T^T \mathbf{G}_T + w \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u} + 2 \mathbf{f}_0^T \mathbf{G}_T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}. \quad (352)$$

The target $\min_{\mathbf{u}} I$ requires

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta \mathbf{u}} = 2(\mathbf{G}_T^T \mathbf{G}_T + w \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u} + 2 \mathbf{G}_T^T \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad (353)$$

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}_T^T \mathbf{G}_T + w \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}_T^T [\mathbf{y}_{ref} - \mathbf{f} y(t) - \mathbf{g}_T \Delta u(t-1)]. \quad (354)$$

Since only the first element of $\Delta \mathbf{u}$ is the current actuating variable, only the first row of $(\mathbf{G}_T^T \mathbf{G}_T + w\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}_T^T$ will be used. In addition, \mathbf{u} is used for calculating \mathbf{f} for the next step.

$$(\Delta \mathbf{u})_1 = \Delta u_1 = \Delta u(t) = \{\text{first row of } (\mathbf{G}_T^T \mathbf{G}_T + w\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}_T^T\}(\mathbf{y}_{ref} - \mathbf{f}_0) \quad (355)$$

$$\triangleq \mathbf{h}_1^T(\mathbf{y}_{ref} - \mathbf{f}_0) \quad (356)$$

$$\Delta u(t) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{y}_{ref} - \mathbf{h}_1^T \mathbf{f} y(t) - \mathbf{h}_1^T \mathbf{g}_T \Delta u(t-1). \quad (357)$$

Using $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$

$$u(t) = (1 - \mathbf{h}_1^T \mathbf{g}_T)u(t-1) + \mathbf{h}_1^T \mathbf{g}_T u(t-2) - \mathbf{h}_1^T \mathbf{f} y(t) + \mathbf{h}_1^T \mathbf{y}_{ref}, \quad (358)$$

see Fig. 40, where

$$\mathbf{y}_{ref} = \begin{pmatrix} y_{ref}(t+1) \\ y_{ref}(t+2) \\ y_{ref}(t+3) \end{pmatrix}. \quad (359)$$

Note that \mathbf{h}_1 and \mathbf{g}_T are constant vectors. However, \mathbf{f} depends on z^{-1} , see Eq.(376).

The algorithms follows a receding horizon strategy. At each instant only the first control signal is used, the horizon is shifted into the future one step ahead.

14.3 Example for a First-Order System

Consider $N_u = 3$ and $N_2 = N_1 = 1$. The Diophantine equation for e_j and f_j is

$$1 = e_j a(1 - z^{-1}) + z^{-1} f_j. \quad (360)$$

For $a = 1 + a_1 z^{-1}$, $b = b_0 + b_1 z^{-1}$ of the plant, there results

$$a \cdot (1 - z^{-1}) = 1 + (a_1 - 1)z^{-1} - a_1 z^{-2}. \quad (361)$$

Long division yields

$$1 : [1 + (a_1 - 1)z^{-1} - a_1 z^{-2}] = 1 - (a_1 - 1)z^{-1} + (a_1^2 - a_1 + 1)z^{-2}. \quad (362)$$

Diophantine 1:

$$e_1 = 1 \text{ (first term of long division)}$$

$$1 = e_1 a(1 - z^{-1}) + z^{-1} f_1 \rightsquigarrow f_1 = -(a_1 - 1) + a_1 z^{-1} \quad (363)$$

Diophantine 2:

$$1 = e_2(1 + a_1 z^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-2} f_2 \quad (364)$$

$$e_2 = 1 - (a_1 - 1)z^{-1} \text{ (first two terms of long division)} \quad (365)$$

$$f_2 = -(a_1 - 1) + a_1^2 - a_1(a_1 - 1)z^{-1} \quad (366)$$

Diophantine 3:

$$1 = e_3(1 + a_1 z^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-3} f_3 \quad (367)$$

$$e_3 = 1 - (a_1 - 1)z^{-1} + (a_1^2 - a_1 + 1)z^{-2} \text{ (all the terms of long division)} \quad (368)$$

$$f_3 = -(a_1^2 - a_1 + 1)(a_1 - 1) - a_1^2 + a_1 + a_1(a_1^2 - a_1 + 1)z^{-1}. \quad (369)$$

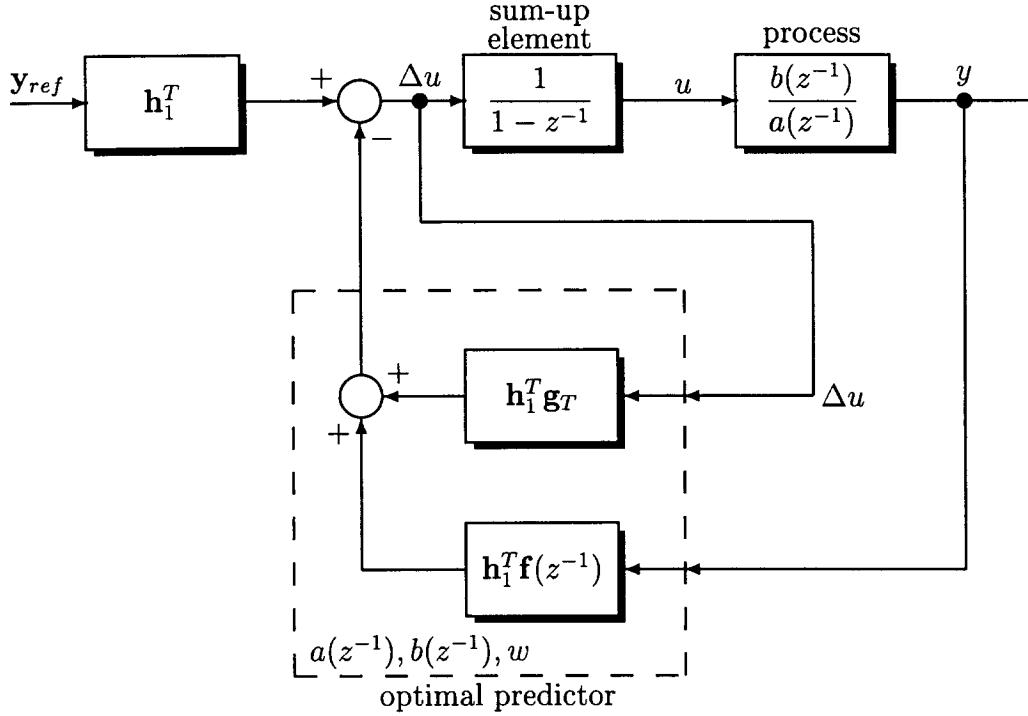


Figure 40: Control system consisting of a discrete-time process and an optimal predictor

$$g_{T1} = (e_1 b - g_0)z = \dots = b_1 \quad (370)$$

$$g_{T2} = (e_2 b - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 = \dots = -(a_1 - 1)b_1 \quad (371)$$

$$g_{T3} = (e_3 b - g_0 - g_1 z^{-1} - g_2 z^{-2})z^3 = \dots = b_1(a_1^2 - a_1 + 1) \quad (372)$$

$$f_1 = -(a_1 - 1) + a_1 z^{-1} \quad (373)$$

$$f_2 = -(a_1 - 1) + a_1^2 - a_1(a_1 - 1)z^{-1} \quad (374)$$

$$f_3 = -a_1^3 + a_1^2 - a_1 + 1 + a_1(a_1^2 - a_1 + 1)z^{-1}. \quad (375)$$

The coefficients are separated with regard to

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_z z^{-1}. \quad (376)$$

Numerical evaluation of the example is carried out in MATLAB `ims.m`.

```
% ims.m Generalized predictive controller
clear
for ww=1:8
    w=0.1*ww;
    a1=-0.7; b0=0.3; b1=0.5;
    GT=[b0 0 0;... ...
        b0+b1-a1*b0 b0 0;...
        b0+b1-a1*(b0+b1-a1*b0) b0+b1-a1*b0 b0];
    gT=[b1 -(a1-1)*b1 b1*(a1^2-a1+1)];;
    fc=[-(a1-1) -(a1-1)+a1^2 -a1^3+a1^2-a1+1];;
    fz=[a1 -a1*(a1-1) a1*(a1^2-a1+1)];;
    h1=([1 0 0]*inv(GT'*GT+w*eye(3))*GT)';
    yref=[1 1 1]';
    yt_1=0; yt=0; ut_2=0; ut_1=0;
    for ii=1:7 % ii=1 corresponds to t=0
        yt=-a1*yt_1+b0*ut_1+b1*ut_2;
        ut=(1-h1'*gT)*ut_1+h1'*(gT*ut_2-fc*yt-fz*yt_1+yref);
        ut_1=ut; ut_2=ut_1; yt_1=yt;
        u(ii)=ut; y(ii)=yt; vect(ii)=ii-1;
    end
    figure(1)
    plot(vect,y, vect,u,:')
    title('y(t) and u(t) ("dotted") , ims.m figure(1), imu.wmf')
    hold on
end
hold off
```

The smaller w the more $y(t)$ and $u(t)$ turn out oscillating, see Fig. 41.
Direct calculation of the free response is demonstrated in what follows

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_0 u(t-1) + b_1 u(t-2) \quad (377)$$

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-1). \quad (378)$$

Subtracting Eq.(377) from (378) yields

$$y(t+1) = (1 - a_1)y(t) + a_1 y(t-1) + b_0 \Delta u(t) + b_1 \Delta u(t-1). \quad (379)$$

The free response is that part which results without the influence of $\Delta u(t)$, i.e.

$$f(t+1) = y(t+1) \Big|_{\Delta u(t)=0} = (1 - a_1)y(t) + a_1 y(t-1) + b_1 \Delta u(t-1). \quad (380)$$

Similarly, consider

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-1) \quad (381)$$

$$y(t+2) = -a_1 y(t+1) + b_0 u(t+1) + b_1 u(t) \quad (382)$$

$$y(t+2) = y(t+1) + a_1 y(t) - b_1 u(t-1) - a_1 y(t+1) \quad (383)$$

$$y(t+2) = (1 - a_1)y(t+1) + a_1 y(t) - b_1 u(t-1) \quad (384)$$

$$= (1 - a_1)[(1 - a_1)y(t) + a_1 y(t-1) + b_0 \Delta u(t)] \quad (385)$$

$$b_1 \Delta u(t-1)] + a_1 y(t) + b_1 \Delta u(t) + b_0 \Delta u(t-1) \quad (386)$$

$$f(t+2) = y(t+2) \Big|_{\Delta u(t)=0, \Delta u(t+1)=0} \quad (387)$$

$$f(t+2) = [(1 - a_1)^2 + a_1]y(t) + (1 - a_1)a_1 y(t-1) + (1 - a_1)b_1 \Delta u(t-1). \quad (388)$$

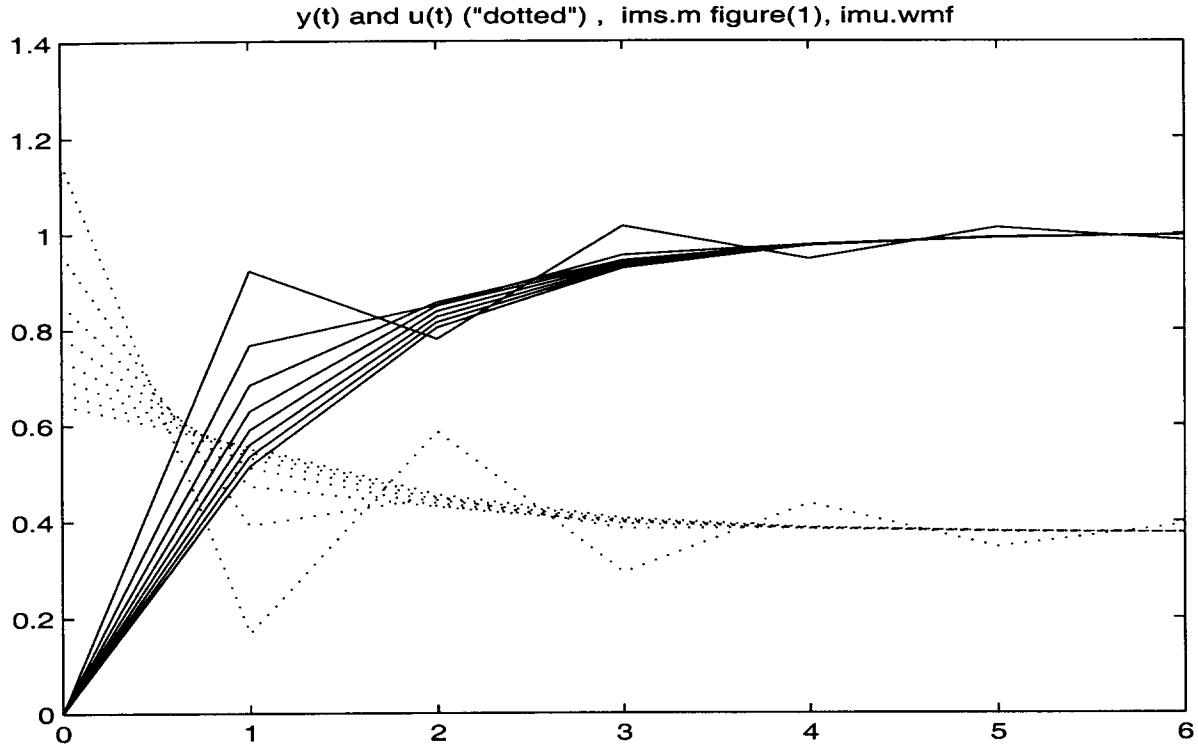


Figure 41: $y(t)$ and $u(t)$ versus time for the GPC

14.4 Robust GPC Controller for an Uncertain Plant

Consider an uncertain plant

$$I = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{G}_q\mathbf{q} + \mathbf{f}_0)^T(\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{G}_q\mathbf{q} + \mathbf{f}_0)^T + w\Delta\mathbf{u}^T\Delta\mathbf{u} \quad (389)$$

where \mathbf{q} is a vector of $q(kT + T)$, $q(kT + 2T)$ etc. representing the influence of the uncertainty. Find $\min_{\mathbf{u}}\{\max_{\mathbf{q}} I(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{q})\}$; specifically, which of the vertices of the polytope Q produces $\max_{\mathbf{q}} I(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{q})$ for a predetermined $\Delta\mathbf{u}$.

15 Robust Control Problems Based on LMIs

Linear matrix inequalities (LMI) are often favoured because they provide exact solutions by convex optimization algorithms. The optimization problems are supported by excellent toolboxes although they are characterized by higher computational complexity.

15.1 Quadratic H_∞ Performance of a MIMO Plant

Consider a bounded input energy $\int_0^\infty \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt$ and the associated output energy $\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt$ and assume that γ_{qp} exists referring to

$$\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt < \gamma_{qp} \int_0^\infty \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \quad (390)$$

for zero initial state and for the worst-case excitation $\mathbf{u}(t)$ of the MIMO plant. A sufficient condition for Eq.(390) is

$$\iff \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) < \gamma_{qp}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t) . \quad (391)$$

Assuming a Lyapunov function $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, stability is guaranteed for

$$\dot{V} < 0 . \quad (392)$$

Combining Eqs.(391) and (392), a sufficient condition is

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \gamma \mathbf{u}^T \mathbf{u} < 0 . \quad (393)$$

The appropriate LMI solution is given by

$$\gamma_{qp} = \min_{\mathbf{P}} \gamma \in \left\{ \gamma : \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{P} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 , \quad \mathbf{P} > 0 \right\} . \quad (394)$$

The smallest γ in Eq.(394) for which a solution exists is termed quadratic H_∞ performance γ_{qp} . For time-varying systems with affine parameter model and time-varying parameters $p_i(t)$, or polytopic model with time-varying q_i , γ_{qp} is an upper bound on the true H_∞ gain and relates also to arbitrarily fast changes of p_i or q_i (*Anderson, B.D.O., and Vongpanitlerd, S., 1973; Willems, J.C., 1971*).

15.2 Linear Differential Inclusion of a Control System

The linear differential inclusion problem is given by the differential equation system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{cl,p}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \quad (395)$$

where $\mathbf{A}_{cl,p}(\mathbf{q})$ varies in the so-called convex envelope of a set of models

$$\mathbf{A}_{cl,p}(\mathbf{q}) \in \left\{ \sum_i q_i \mathbf{A}_{cl,i} : q_i \geq 0, \sum_i q_i = 1 \right\} . \quad (396)$$

In this multi-model representation of $\mathbf{A}_{cl,p}$, the matrices $\mathbf{A}_{cl,i}$ represent the corner (vertex) systems, q_i the polytopic coordinates of $\mathbf{A}_{cl,p}$.

Asymptotic stability is true if the feasibility with respect to \mathbf{P} can be proved, i.e., if a matrix \mathbf{P} can be found such that

$$\mathbf{A}_{cl,i}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{cl,i} < 0 \quad \forall i, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{I} \quad (397)$$

(*Boyd, S.L., et al., 1994*).

The feasible set is the solution for which the LMI is satisfied. The LMI is a convex constraint. Since $\mathbf{P}_i < 0 \forall i \Leftrightarrow \text{block diag } \{\mathbf{P}_i\} < 0$, multiple LMI are solvable in the same way under convexity.

The multi-model case extends the LMI methods to polytopic models of the plant, i.e., the plant including uncertainty or time-varying parameters is within the convex envelope (all plants in the polytope). The problem is to find a controller \mathbf{K} such that $\mathbf{A}_{cl,i} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B} \mathbf{K}$ satisfy Eq.(397).

15.3 Multi-Objective LMI Synthesis

Multi-objective H_∞ synthesis is the solution of problems where (1) ordinary H_∞ synthesis is only oriented on the closed-loop stability, (2) noise and random-disturbance rejection is expressed in LQG terms and (3) constraints on closed-loop pole placement is included.

Multi-objective synthesis is performed by the definition of specific artificial system output signals, \mathbf{y}_∞ , \mathbf{y}_2 . On top of this, the matrices \mathbf{T}_∞ and \mathbf{T}_2 are the closed-loop transfer functions from the input (disturbance, measurement noise etc.) to \mathbf{y}_∞ and \mathbf{y}_2 . H_∞ and H_2 performance is satisfied by demanding $\|\mathbf{T}_\infty\|_\infty < \gamma$, $\|\mathbf{T}_2\|_2 < \gamma_2$. This design demand is addressed by LMI techniques; via matrices structured similarly as that in Eq.(394), \mathbf{A} being replaced by $\mathbf{A}_{cl,p}$.

16 Fuzziness of Uncertainties as a Basis of Performance

The plant parameters and their uncertainties are considered independent. Since large uncertainties in all the parameters at once are possible but rare, the membership functions of the uncertainties are used as a basis of resulting occurrence.

As a general target, the optimality of closed-loop performance is oriented on the resulting membership function of the closed-loop parameter effected by the membership function of all the open-loop parameter uncertainties.

Stability robustness has to be guaranteed in any case, even for rare parameter combination.

Consider the disturbance transfer $\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_{St}\mathbf{w}_d(s)$

$$\mathbf{F}_{St}(s) \triangleq \mathbf{F}_1[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1}\mathbf{F}_2 \quad (398)$$

with an uncertain plant coefficient matrix $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, and the problem of disturbance feedforward where \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 determine transfer details from the disturbance \mathbf{w}_d to the output \mathbf{y} focusing on a specified frequency $s = j\omega_B$. The problem is subject to the state controller Frobenius norm $\|\mathbf{K}\|_F$ with the help of a Lagrange multiplier μ_1

$$\left\| \mathbf{F}_{St}(s) \right\|_{s=j\omega_B}^2 + \mu_1 \|\mathbf{K}\|_F^2 \rightarrow \min_{\mathbf{K}} . \quad (399)$$

From differentiation with respect to \mathbf{K} and abbreviating

$$\Phi \triangleq [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1} \quad (400)$$

one finds an interim result \mathbf{K}_{intm} from

$$2\mathbf{B}^T \Re \{ \Phi^H \mathbf{F}_1^H \mathbf{F}_1 \Phi \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_2^H \Phi^H \} + 2\mu_1 \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (401)$$

(Weinmann, A., 2001a). The interim result depends on \mathbf{q} .

Now, assume a fuzzy relationship of the uncertainty \mathbf{q} , i.e., $m(q_i)$ is a relation that an arbitrary number q_i belongs to the set of uncertainty and determine a robust controller \mathbf{K}^* which satisfies the following targets:

(i) Minimization of the difference $\mathbf{K}^* - \mathbf{K}_{intm}(\mathbf{q})$ in norm sense in the presence of the dependence given by the resulting joint membership function $\min\{m(q_i)\}$.

(ii) The minimization is subject to a hard stability limit, e.g. the maximum real part of the closed-loop eigenvalues

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i[\mathbf{A}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{K}^*]. \quad (402)$$

Referring to the dependence on \mathbf{q} and combining leads to

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{q_i} \|\mathbf{K}^* - \mathbf{K}_{intm}(\mathbf{q})\|_F^2 \cdot \min\{m(q_i)\} \cdot dq_i \\ & + \mu_2 \max_{q_i} \{- \max_i \operatorname{Re} \lambda_i[\mathbf{A}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{K}^*]\} \rightarrow \min_{\mathbf{K}^*}. \end{aligned} \quad (403)$$

A second Lagrange multiplier μ_2 was introduced. The robust controller \mathbf{K}^* weights the uncertainty referring to its resulting membership function, limits its difference in norm and guarantees a specified stability condition (*Weinmann, A., 2001*).

17 Conclusion

Robustness concerning stability and performance are the main targets in the field of robust dynamics. An overview over numerous methods in time and frequency domain is presented, emphasizing their properties and advantages. Providing a deep insight into the methods and their mathematical background was the aim for preparing this paper.

On the one hand, the reader should be enabled to use this comprehensive basis for his activities in research and industrial application. In most cases, studying the broad literature can be omitted. On the other hand, this article presents an introduction to the very specialized and partly very demanding original papers.

Acknowledgements:

The help in programming of a few parts of this article is gratefully acknowledged: Fig. 8 (har.m) W. Prechelmacher; Fig. 15 H.P. Rothwangl; Fig. 39 H.P. Rothwangl and N. Hofbauer; Fig. 25 F. Babler; typing in LATEX J. Heinrich; drawing of many pictures: N. Hofbauer.

References:

- Anderson, B.D.O., and Vongpanitlerd, S., 1973, Network Analysis (Englewood Cliffs, Prentice Hall)*
- Aström, K.J., Panagopoulos, H., and Häggblund, T., 1988, Design of PI controllers based on non-convex optimization, Automatica 34, pp. 585-601*
- Barmish, B.R., 1994, New Tools for Robustness of Linear Systems (MacMillan Publishing Company, New York)*
- Barmish, B.R., Hollot, C.V., Kraus, F.J., and Tempo, R., 1982, Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first-order compensators, IEEE-Trans. AC-37, pp. 707-714*
- Biernacki, R.M., Hwang, H., and Bhattacharyya, S.P., 1987, Robust stability with structured real parameter perturbations, IEEE Trans. AC-32, pp. 495-506*
- Bordeneuve-Guibé, J., and Vaucoret, C., 2001, Robust multivariable predictive control, IEEE Control Systems Magazine 21, No.2, pp. 54-65*
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., 1994, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, SIAM Books*

- Camacho, E.F., and Bordons, C., 1999, Model Predictive Control (London, Springer)*
- Clarke, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P.S., 1987, Generalized predictive control, *Automatica* **23**, pp. 137-160*
- Demircioglu, H., and Karasu, E., 2000, Generalized predictive control, *IEEE Control Systems Magazine* **20**, No. 5, pp. 36-47*
- Doyle, J.C., 1982, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc. Part D* **129**, pp. 242-250*
- Elliott, J.R., 1977, NASA's advanced control law program for the F-8 digital fly-by-wire aircraft, *IEEE-Trans. AC-22*, pp. 753-757*
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J., and Chilali, M., 1995, LMI Control Toolbox for Use with MATLAB (The MATHWORKS, Natick Mass.)*
- Gökczek, C., Davison, D.E., Kabamba, P.T., and Meerkov, S.M., 1999, Robustness of control systems with respect to disturbance model uncertainty, *14th IFAC Triennial World Congress, Beijing*, G-2e-13-3, pp. 289-294*
- Kharitonov, V.L., 1979, Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Differential Equations* **14**, pp. 1483-1485*
- McFarlane, D., and Glover, K., 1992, A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis, *IEEE-Trans. AC-37*, pp. 759-769*
- Panagopoulos, H., 2000, PID Control, Design, Extension, Application, *Lund Institute of Technology, Dept.of Automatic Control**
- Panagopoulos, H., and Astrom, K.J., 1999, PID control design and H_∞ loop shaping. *IEEE Conference on Control Applications, Hawaii**
- Safonov, M.G., 1982, Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems, *Proc.IEE Part D* **129**, pp. 251-256*
- Sienel, W., 1996, On the computation of stability profiles, In: *Jeltsch, R., and Mansour, M., (Eds.) , Stability Theory, Hurwitz Centenary Conference 1995*, pp. 151-162 (Basel, Birkhäuser)*
- Soh, C.B., Berger, C.S., and Dabke, K.P., 1985 , On the stabiltiy properties of polynomials with perturbed coefficients, *IEEE Trans. AC-30*, pp.1033-1036*
- Utkin, V.I., 1992, Sliding Modes in Control Optimization (Berlin, Springer)*
- Weinmann, A., 1991, Uncertain Models and Robust Control (Wien NewYork, Springer)*
- Weinmann, A., 1995, Regelungen, Analyse und technischer Entwurf, 3. Auflage (Wien NewYork, Springer)*
- Weinmann, A., 1997, H_∞ Controllers: Hamilton versus LMI Approach, Tagungsband des 10. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung 1997, S. 32-53*
- Weinmann, A., 2001, Smart robustness based on the fuzziness of uncertainties, *IEEE Conf. on Control Applications, Mexico City*, pp. 305-310*
- Weinmann, A., 2001a: Gradients of norms, traces and determinants for automatic control applications, *Int. J. Automation Austria* **9**, H.1/2, pp. 36-50*
- Willems, J.C., 1971, Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation, *IEEE-Transactions AC-16*, pp. 621-634*

Simulative Ermittlung von Positionierzeiten lagegeregelter Vorschubachsen

G. Kehl

Gebr. HELLER Maschinenfabrik GmbH
Postfach 1428
D-72604 Nürtingen
Email: keg@hnt.heller-machines.com

21. August 2001

Kurzfassung

Bei Fertigungsprozessen werden immer höhere Ansprüche an die Maschinendynamik gestellt. Eng verknüpft mit den dynamischen Eigenschaften der Maschine sind die Positionierzeiten der Vorschubachsen. Sind sie bekannt, so ist auch der Zeitbedarf für komplexe Fertigungsabläufe besser vorhersagbar.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der simulativen Ermittlung von Positionierzeiten anhand vereinfachter Modelle, die sowohl die Führungsgrößenerzeugung in der Maschinensteuerung als auch die Lageeinstellung durch die geregelten Antriebssysteme nachbilden. Die kinematischen und Regelungstechnischen Einflußgrößen auf die Positionierzeiten werden identifiziert und deren Einfluß bewertet.

1 Einleitung

Die Positionierzeit ist diejenige Zeit, welche die Bahnsteuerung benötigt, um vom Anfangspunkt eines Bahnelementes zu dessen Endpunkt zu gelangen. Der Positionierungsvorgang beginnt und endet dabei mit positionsgenauem Stillstand (N.N.: *VDI-Richtlinie, 1988*).

Dementsprechend soll bei der Lageeinstellung von Vorschubachsen die Istlage x_{ist} der Sollage x möglichst verzögerungsfrei folgen. Hierzu werden die Lagesollwerte so gefiltert, daß die durch die Antriebs-, Meß- und Übertragungssysteme begrenzten Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Rücke nicht überschritten werden.

Es wird im folgenden angenommen, daß der geschwindigkeitsgeregelte Antrieb mit seiner unterlagerten Stromregelungskaskade ideales Übertragungsverhalten besitzt, so daß gilt

$$\dot{x}_{ist} = v_{soll}. \quad (1)$$

Für ein günstiges Führungsverhalten können die Geschwindigkeit und zusätzlich die Beschleunigung vorgesteuert werden, wobei sich die hierzu notwendige Differenzierung der Lagesollwerte in der Praxis als schwierig erweist, da das resultierende Signal eine höhere Quantisierung aufweist als der ursprüngliche Lagesollwert. Somit unterliegt das gesamte Antriebssystem einer höheren Beanspruchung, die beispielsweise in den Motorströmen sichtbar wird und schwach gedämpfte Systeme zu Schwingungen anregen kann. Abhilfe kann hier

nur durch aktive Bedämpfung mittels Zustandsregler und den Einsatz von Bandsperrfiltern im Signalpfad der Vorsteuerung erreicht werden (Pritschow, G. u.a., 1992).

Insgesamt ergibt sich die einfache Regelkreisstruktur einer lagegeregelten Vorschubachse entsprechend Abb. 1.

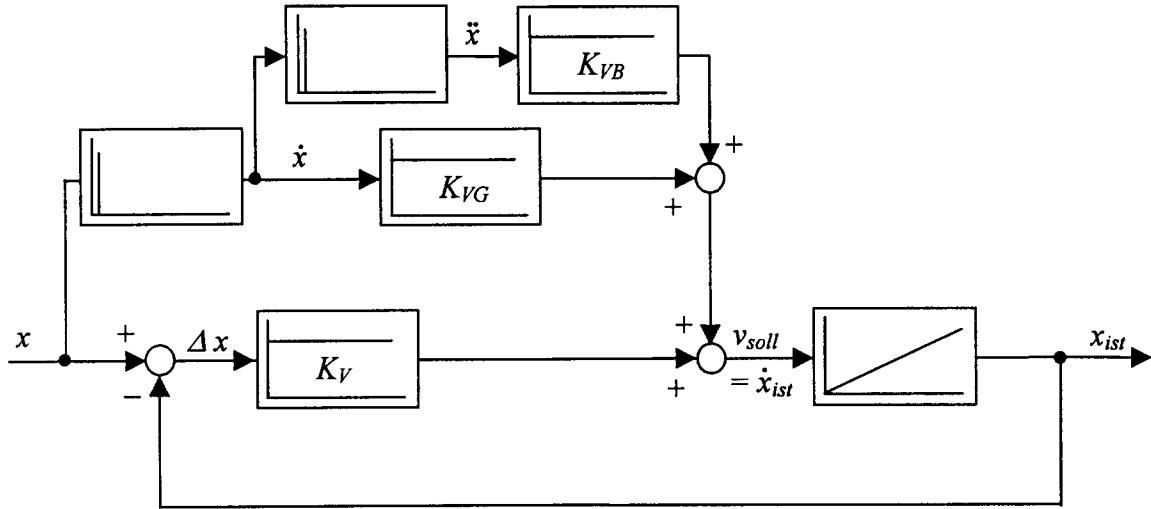


Abb. 1: Einfaches Modell eines lagegeregelten Vorschubantriebs

Die *kausale Geschwindigkeitsvorsteuerung* wird derzeit in zahlreichen Antriebssystemen zur zum mindest teilweisen Kompensation des Schleppabstandes bei konstanter Geschwindigkeit verwendet. Ihre Funktion beruht auf der Addition des mit K_{VG} gewichteten Geschwindigkeitssollwertes entweder zum Lagesollwert der Steuerung oder zur Sollgeschwindigkeit. Da beide Möglichkeiten ineinander überführbar sind, wird hier nur die zweite Möglichkeit behandelt.

Eine *kausale Beschleunigungsvorsteuerung* kann zur Kompensation des Schleppabstandes bei konstanter Beschleunigung dienen und wird durch die zusätzliche Beaufschlagung des Lagesollwertes bzw. der Sollgeschwindigkeit mit durch K_{VB} gewichteten Beschleunigungssollwerten erreicht. Dadurch ist im Idealfall nur bei Beschleunigungsänderung ein Schleppabstand zu beobachten, der beispielsweise durch *prädiktive Vorsteuerverfahren* verringert werden kann, die die in der Steuerung abgelegten zukünftige Lagesollwerte nutzen. Bei gleichem Prädiktionshorizont mehrerer Achsen wird das Bahnverhalten hierdurch jedoch nicht verbessert, da es nicht von der gemeinsamen zeitlichen Verschiebung der Lagewerte, sondern nur von deren Zusammenspiel abhängt (Kosiedowski, U., 1996).

Im einfachsten Fall, wenn Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvorsteuerung entfallen ($K_{VB} = 0$, $K_{VG} = 0$), kann das Gesamtsystem des lagegeregelten Antriebssystems lediglich durch ein PT₁-Glied mit der Zeitkonstanten $1/K_V$ dargestellt werden. Somit ist die Geschwindigkeitsverstärkung K_V ein Maß für die Bandbreite des lagegeregelten Antriebs. Die Problematik der Begrenzung von K_V durch schwach gedämpfte, niedrige mechanische Eigenfrequenzen kann der Literatur entnommen werden (Weck, M. u.a., 1997, Pritschow, G., 1996). Um bei Bahnbewegungen mit mehreren Achsen geringe Bahnverzerrungen zu gewährleisten,

werden die Geschwindigkeitsverstärkungen K_V aller Vorschubachsen einer Maschine üblicherweise gleich eingestellt (N.N.: *VDI-Richtlinie, 1988*).

Bezüglich der Führungsgrößenvorgabe ist bekannt, daß eine Begrenzung des Rucks mit Eigenwerten deutlich unterhalb der dominanten mechanischen Eigenfrequenz eine Verminde rung der Schwingungsanregung zur Folge hat (Kehl, G. u.a., 1998, Fauser, M., 1997).

2 Positionierzeit

Für Vorschubbewegungen an Maschinen ist die Positionierzeit zwischen zwei definierten Positionen maßgeblich. Sie wird bestimmt durch die in der Maschinensteuerung abgelegten kinematischen Größen bei der Führungsgrößenerzeugung

- Weg x
- Geschwindigkeit v
- Beschleunigung a
- Ruck $j (= da/dt)$

sowie den Kenngrößen des lagegeregelten Antriebssystems

- Geschwindigkeitsverstärkung K_V
- Geschwindigkeitsvorsteuerung K_{VG}
- Beschleunigungs vorsteuerung K_{VB} .

Demnach setzt sich die Positionierzeit t_{Pos} aus dem durch die Führungsgrößen bestimmten *kinematischen Anteil* $t_{Pos, kin}$ und dem *regelungsdynamischen Anteil* $t_{Pos, reg}$ zusammen:

$$t_{Pos} = t_{Pos, kin} + t_{Pos, reg}. \quad (2)$$

3 Kinematischer Anteil an der Positionierzeit

Eine rückbegrenzte Positionierbewegung stellt im allgemeinen einen weg- und zeitsymmetrischen Vorgang dar, der aus sieben Phasen gebildet wird:

I	Beschleunigungsaufbau in der Zeit t_j
II	konstante Beschleunigung in der Zeit t_a
III	Beschleunigungsabbau in der Zeit t_j
IV	konstante Geschwindigkeit in der Zeit t_v
V	Beschleunigungsaufbau in der Zeit t_j
VI	konstante Beschleunigung in der Zeit t_a
VII	Beschleunigungsabbau in der Zeit t_j

Die Bewegungszustände am Ende jeder Phase können Tab. 1 entnommen werden.

Abb. 2 zeigt einen Führungsgrößenverlauf, bei dem alle genannten Phasen (I bis VII) deutlich erkennbar sind.

Phase \ j	Bewegungszustände am Ende der Phase			
	j	a	v	x
I	j	$j t_j$	$\frac{1}{2} j t_j^2$	$\frac{1}{6} j t_j^3$
II	0	a_I	$v_I + a_I t_a$	$x_I + v_I t_a + \frac{1}{2} a_I t_a^2$
III	-j	$a_{II} - j t_j$	$v_{II} + a_{II} t_j - \frac{1}{2} j t_j^2$	$x_{II} + v_{II} t_j + \frac{1}{2} a_{II} t_j^2 - \frac{1}{6} j t_j^3$
IV	0	0	v_{III}	$x_{III} + v_{III} t_v$
V	-j	$-j t_j$	$v_{IV} - \frac{1}{2} j t_j^2$	$x_{IV} + v_{IV} t_j - \frac{1}{6} j t_j^3$
VI	0	a_V	$v_V + a_V t_a$	$x_V + v_V t_a + \frac{1}{2} a_V t_a^2$
VII	j	$a_{VI} + j t_j$	$v_{VI} + a_{VI} t_j + \frac{1}{2} j t_j^2$	$x_{VI} + v_{VI} t_j + \frac{1}{2} a_{VI} t_j^2 + \frac{1}{6} j t_j^3$

Tab. 1: Bewegungszustände

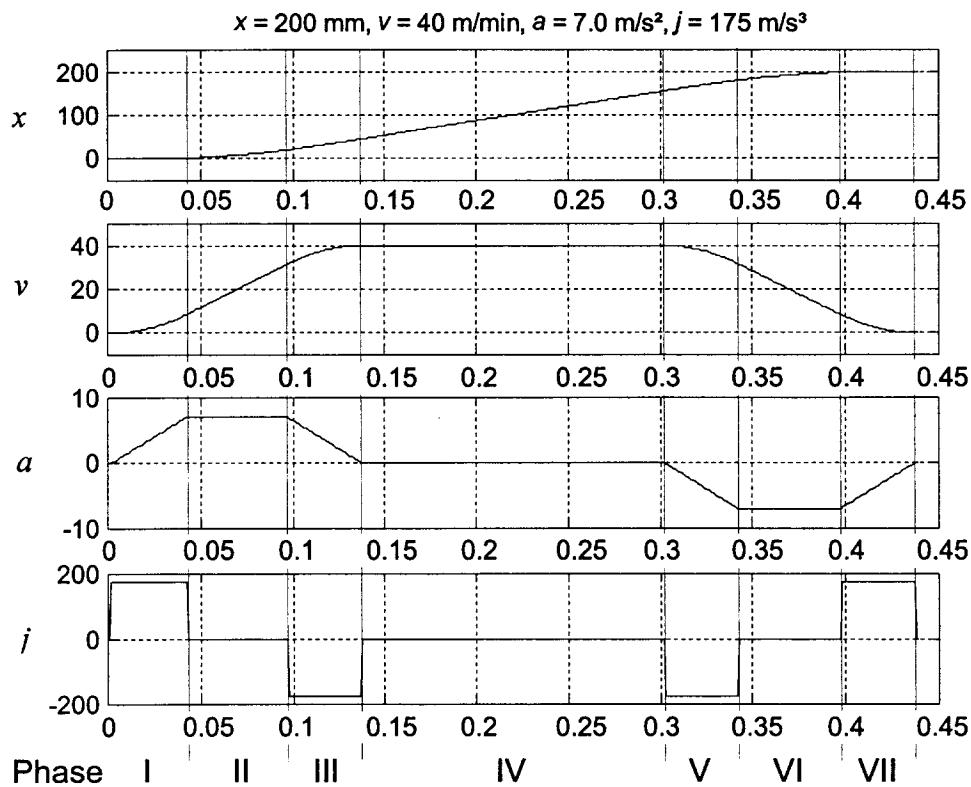


Abb. 2: Sollwertverlauf bei ruckbegrenzter Bewegung

Je nach Wahl der Bewegungsgrößen sind drei praxisrelevante Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1** → max. Beschleunigung und max. Geschwindigkeit werden nicht erreicht
Fall 2 → max. Beschleunigung wird erreicht, max. Geschwindigkeit wird nicht erreicht
Fall 3 → max. Beschleunigung und max. Geschwindigkeit werden erreicht

Unter Berücksichtigung der Fallunterscheidungen und mittels Tabelle 1 können die kinematischen Anteile an der Positionierzeit $t_{Pos, kin}$ ermittelt werden, so daß sich ähnliche Darstellungen wie in Abb. 3 ergeben. Da die Zeiten von vier kinematischen Parametern (j, a, v, x) abhängen, wurden hierbei aus Gründen der Darstellung j und x jeweils konstant gehalten. Aus Abb. 3 wird ersichtlich, daß bei kurzen Positionierwegen die Beschleunigung dominanten Einfluß hat, während für lange Positionierwege die Geschwindigkeit an Relevanz gewinnt (Laika, A., 2001).

Trägt man den kinematischen Anteil an der Positionierzeit über dem Positionierweg auf und berücksichtigt gängige Werte aus dem Werkzeugmaschinenbau, so erkennt man insbesondere die Wege, die zum Erreichen der Beschleunigung bzw. der Geschwindigkeit mindestens erforderlich sind (Abb. 4). Hier spielt beispielsweise die mit dem Antriebssystem realisierbare Geschwindigkeit für Positionierwege unter 100 mm keinerlei Rolle.

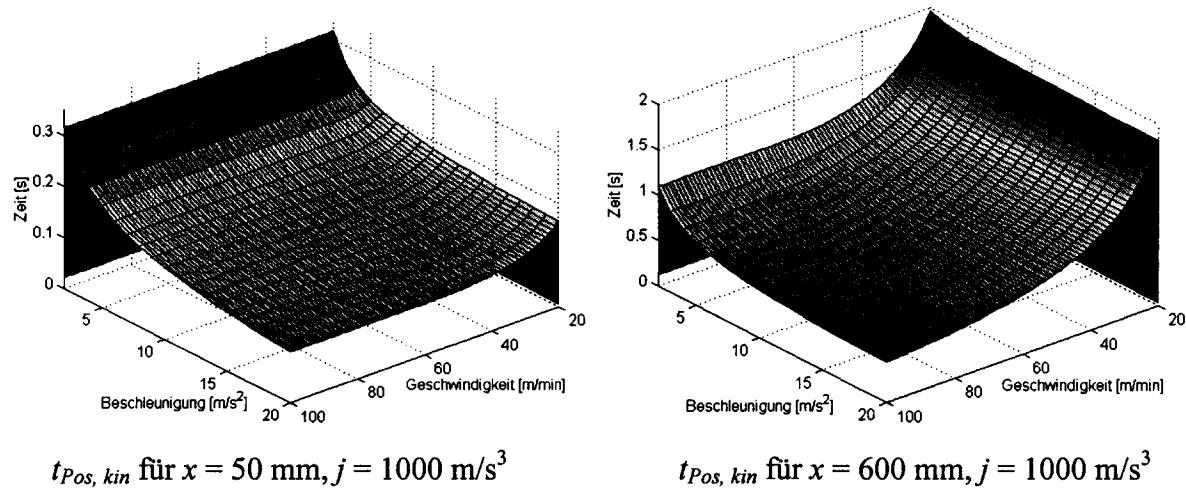


Abb. 3: Kinematischer Anteil an der Positionierzeit für zwei verschiedene Positionierwege

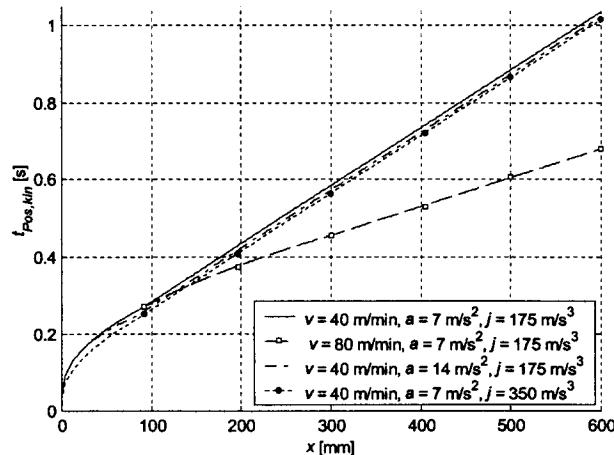


Abb. 4: Kinematischer Anteil an der Positionierzeit

4 Regelungsdynamischer Anteil an der Positionierzeit

Die Geschwindigkeitsverstärkung K_V ist das Verhältnis der Istgeschwindigkeit zum Schleppabstand im Beharrungszustand (Pritschow, G., 1996, N.N.: VDI-Richtlinie, 1988). Dennoch können auch die Zweige der kausalen Vorsteuerung in Abb. 1 in einem Gesamt- K_V zusammengeführt werden, um ein reduziertes Modell entsprechend Abb. 5 zu gewinnen.

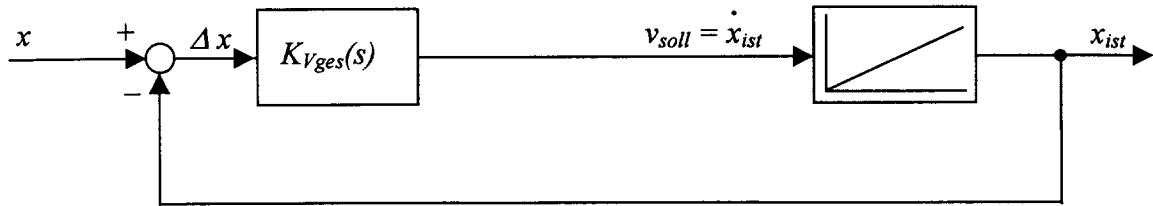


Abb. 5: Reduziertes Modell eines lagegeregelten Vorschubantriebs

Dabei muß der Gesamt- K_V als reiner Führungs- K_V interpretiert werden, dessen Höhe keinerlei Aussage mehr über die dynamische Störsteifigkeit des lagegeregelten Antriebs erlaubt.

Abb. 6 zeigt bei einer ruckbegrenzten Bewegung das Verhalten des lagegeregelten Antriebsystems anhand der Soll- und Istlage, des Schleppfehlers und des Gesamt- K_V .

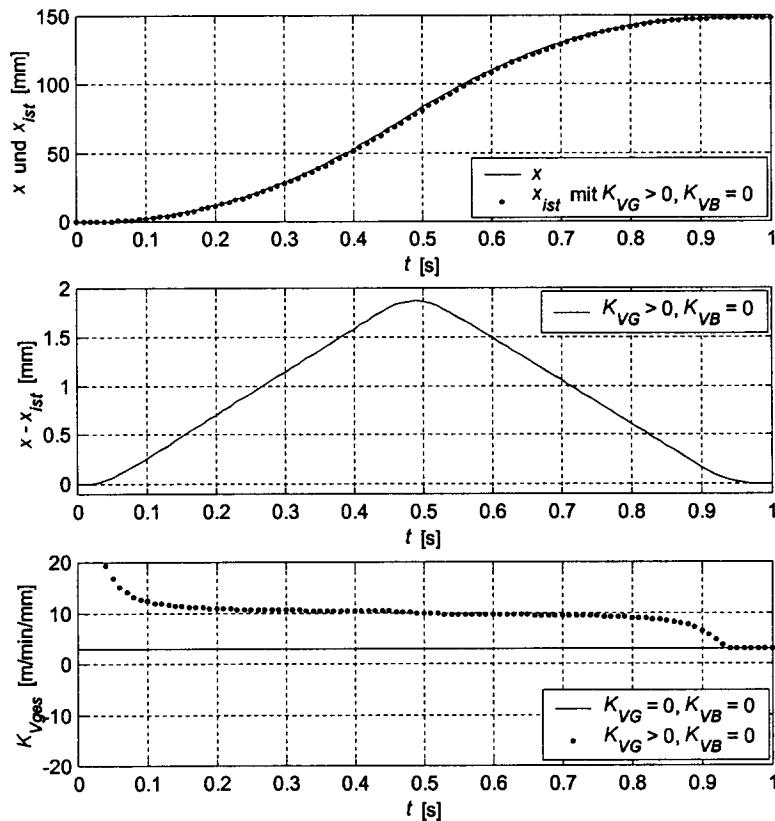


Abb. 6: Sollage, Istlage und K_{Vges}

Der Gesamt- K_V entsprechend Abb. 5 stellt sich dar als

$$K_{V_{ges}}(s) = \frac{K_{VB}s^2 + K_{VG}s + K_V}{-K_{VB}s + 1 - K_{VG}}. \quad (3)$$

Um den regelungsdynamischen Anteil an der Positionierzeit zu ermitteln, ist es sinnvoll, die Übertragungsfunktion zwischen Lagesollwert x und Schleppfehler Δx aufzustellen:

$$G_S(s) = \frac{\Delta x(s)}{x(s)} = \frac{x(s) - x_{ist}(s)}{x(s)} = \frac{-\frac{K_{VB}}{K_V}s^2 + \frac{1-K_{VG}}{K_V}s}{\frac{1}{K_V}s + 1}. \quad (4)$$

Beispielhaft wird im folgenden der Schleppfehlerverlauf beim Beschleunigungsaufbau (Phase I + II) analysiert, wenn der Lagesollwertverlauf durch

$$x(t) = \frac{1}{6}jt^3 + \frac{1}{2}at^2 + vt + x_0 \quad \text{mit } j = \text{const.} \quad (5)$$

gegeben ist. Der Schleppfehlerverlauf im Zeitbereich $\Delta x(t)$ ergibt sich damit als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{K_V} \cdot \dot{\Delta x}(t) + \Delta x(t) = -\frac{K_{VB}}{K_V} \cdot (jt + a) + \frac{1-K_{VG}}{K_V} \cdot \left(\frac{1}{2}jt^2 + at + v \right). \quad (6)$$

Analog hierzu müssen auch für alle anderen Phasen der Bewegung die Schleppfehlerverläufe ermittelt werden. Der am Ende von Phase VII (bei Abschluß der Sollbewegung) vorliegende Schleppfehler Δx_{VII} muß im Anschluß an Phase VII noch durch die Lageregelung abgebaut werden (Abb. 7). Die hierzu notwendige Zeit kann als regelungsdynamischer Anteil an der Positionierzeit durch

$$t_{Pos, reg} = -\frac{\ln\left(\frac{\Delta x_{Tol}}{\Delta x_{VII}}\right)}{K_V} \quad (7)$$

ermittelt werden.

In den Abbau des Schleppfehlers gehen die Vorsteuerzweige nicht ein. Δx_{Tol} stellt die Lagetoleranz dar, die das Ende des Positionierungsvorgangs markiert, da die Endposition ausreichend genau erreicht wurde. Durch die Betrachtungsweise im einfachen Modell nach Abb. 1 wird die Sollage asymptotisch angenähert. Bei Vorgabe einer aus der Praxis abgeleiteten Lagetoleranz von z.B. 32 µm bildet das Modell die Wirklichkeit lagegeregelter Vorschubachsen ausreichend genau ab und kann zur simulativen Ermittlung von Positionierzeiten bzw. zur Stückzeitermittlung in Fertigungsprozessen eingesetzt werden.

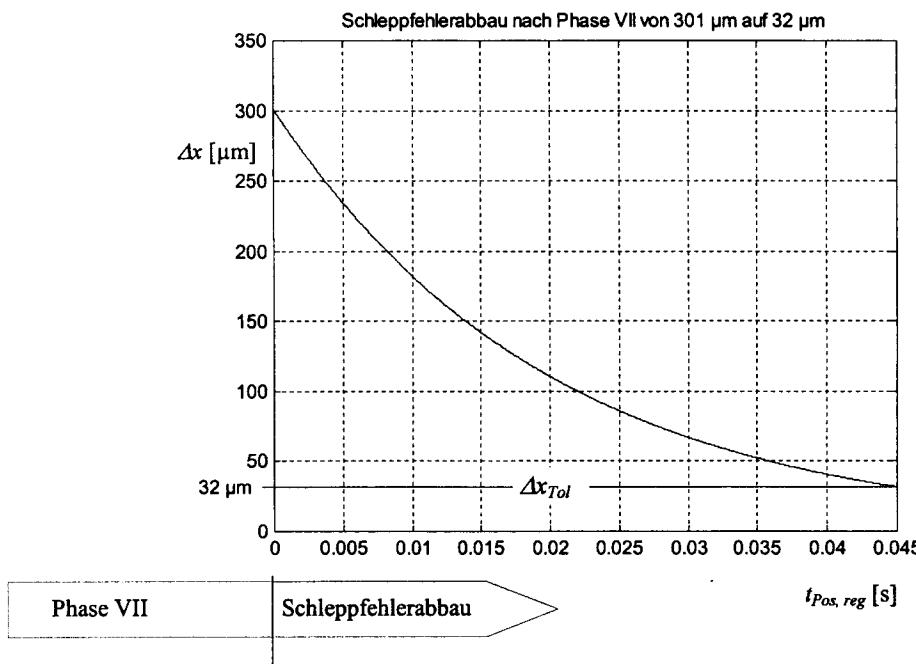


Abb. 7: Schleppfehlerverlauf nach Ende von Phase VII

5 Zusammenfassung

Positionierzeiten von Vorschubachsen setzen sich aus einem kinematischen Anteil und einem regelungsdynamischen Anteil zusammen. Der kinematische Anteil bildet die Sollbewegung ab, während der regelungsdynamische Anteil die Verzögerung durch den Lageregelkreis repräsentiert. Hierbei können die Signalpfade der Vorsteuerung in eine Gesamt-Geschwindigkeitsverstärkung einfließen, die dann die Verzögerung des Lageregelkreises beim Positionieren bestimmt.

Bei kurzen Positionierwegen hat der Ruck, die Beschleunigung und die Gesamt-Geschwindigkeitsverstärkung großen Einfluß auf die Positionierzeit, während bei langen Positionierwegen die Geschwindigkeit den größten Einfluß besitzt.

6 Literatur

- Fauser, M., 1997* Steuerungstechnische Maßnahmen für die Hochgeschwindigkeits-Bearbeitung. Aachen: Shaker-Verlag, 1997.
- Kosiedowski, U., 1996* Prädiktive Vorsteuerverfahren für Servoantriebe an Werkzeugmaschinen. In: Moderne Regelungs- und Antriebstechnik in Theorie und Praxis. Stuttgart, 1996.
- N.N., 1988* VDI-Richtlinie 3427 Blatt 2: Dynamisches Verhalten von numerischen Bahnsteuerungen an Werkzeugmaschinen - Kenngrößen, 1988.
- Pritschow, G. u.a., 1992* Research on the Efficiency of Feed Forward Controllers in Direct Drives. In: Annals of the CIRP 41 (1992) 1.
- Pritschow, G., 1996* Zum Einfluß der Geschwindigkeitsverstärkung auf die dynamischen Bahnabweichungen. In: wt – Produktion und Management 86 (1996) 337-341.
- Kehl, G. u.a., 1998* Drive Dimension and Path Preparation for Parallel Manipulators. In: Proceedings of the 6th UK Mechatronics Forum International Conference: Mechatronics '98. Skövde/Sweden, 1998.
- Weck, M. u.a., 1997* Statische und dynamische Steifigkeit von linearen Direktantrieben. In: antriebstechnik 36 (1997) 12.
- Laika, A. u.a., 2001* Positionierzeiten bei unterschiedlichen Beschleunigungsprofilen. In: antriebstechnik 40 (2001) 8.

Der Autor dieses Beitrags

Dr.-Ing. Gerhard Kehl, geboren 1966, studierte von 1988 bis 1994 an der FHT Esslingen und der Ruhr-Universität Bochum Maschinenbau. Anschließend arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent bei Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c.mult. G. Pritschow am Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen (ISW) der Universität Stuttgart und promovierte dort. Seit 1999 ist er tätig im Bereich Strukturmechanik bei der Gebr. HELLER Maschinenfabrik GmbH in Nürtingen.

8. IFAC/IFIP/IFORS/IEA-Symposium on “Analysis, Design, and Evaluation of Human-Machine Systems”

Kassel, Deutschland

18. - 20. September 2001

Der Themenkreis reichte von kulturellen Einflüssen, Aufmerksamkeit und Vertrauen bis zu den Anwendungsgebieten der Industrie, Energieerzeugung, Medizin, Verkehr und elektronischem Handel. Das bereits beim Vorgänger-Symposium in Kyoto stark betonte Thema der Gefühlerregung wurde auch diesmal behandelt. Obwohl auch das Österreichische Forschungsinstitut für Artificial Intelligence unter Prof. Robert Trappel sehr intensiv auf diesem Gebiet tätig ist, war bei dieser Tagung kein österreichischer Beitrag über Emotionen. Durch den Vorsitz von Prof. Gunnar Johannsen beim Internationalen Programmkomitee war es naheliegend, dass die Informationsübermittlung mittels Musik nicht nur bei der Tagung selbst ein Schwerpunkt war, sondern auch im Begleitprogramm Berücksichtigung fand. Das Forschungsthema von Prof. Johannsen während seiner Gastprofessur am Institut für Handhabungs- und Robotertechnik an der Technischen Hochschule in Wien war: Die Musik als Medium für Mensch-Maschine-Systeme.

Das Lernen von der Erfahrung der Filmindustrie scheint vielversprechend. Als Anwendung wurde die Informationspräsentation auf der Kontrollbrücke eines Schiffes gezeigt. Den Wust von Informationen könnte man mit dem Ansatz von Prof. Peter F. Elzer von der Fachhochschule Clausthal besser für den Menschen in den Griff bekommen. Die Darstellung des Vorkommens von Informationen in Dokumenten oder Datenspeichern und deren Beziehungen werden nach Art von Sternhaufen des Himmels und zusätzlich mittels dreidimensionaler Veranschaulichung der Häufigkeit des Vorkommens der Verknüpfungen usw. bildlich dargestellt. Als Beispiel diente die Wissenspräsentation in einer Prozeßwarthe. Der Ansatz mit dem Sternhimmel wurde auch bei der ersten International Conference on Knowledge Management 2001 in Graz von Jim Thomas vom Pacific Northwest National Laboratory, USA, für das Entdecken von Wissen im Rahmen von Wissensmanagement gezeigt.

Es wurden keine besonderen Umwälzungen präsentiert. Der Ansatz mit objektorientierten formalen Verfahren kam fast nicht vor. Auf die Wichtigkeit einer weltweiten Normung für Mensch-Maschine-Schnittstellen wurde wieder besonders hingewiesen.

Trotz der Nähe zum 11. September 2001 wurden auch aus Übersee fast alle Beiträge präsentiert. Der Veranstalter rechnete mit 220 Teilnehmern, leider kamen nur etwa 140. Vor allem aus Deutschland wurden eigentlich viel mehr Teilnehmer erwartet. Aus Österreich nahm nur der Berichterstatter teil.

Robert Genser

Bericht über das International IARP Workshop über Unterwasserroboter für Meeresforschung und Umweltmonitoring

1.-3. Oktober 2001, Rio de Janeiro

Der IFAC-Beirat Österreich vertritt seit Jahren die österreichischen Interessen im International Advanced Robotics Program (IARP). Hauptaufgabe von IARP ist es zukünftige Entwicklungen – Zeithorizont 10 Jahre – aufzuzeigen und möglichst frühzeitig Wissenschaftler und Anwender auf diesen zukunftsträchtigen Fachgebieten zusammenzubringen.

Auf den früheren Workshops über Unterwasserroboter wurden hauptsächlich Arbeiten über manuell geführte Teleoperatoren, welche von einem Mutterschiff über Kabel von Menschen gegebene Befehle ausführten, diskutiert. Es war überraschend festzustellen, dass von diesen ROVs (Remotely Operated Vehicles) nur 4 Papers präsentiert wurden. Offensichtlich sind die Probleme weitgehend gelöst und solche Geräte stehen in genügender Anzahl für die verschiedensten Aufgaben zur Verfügung. Der Rest der Paper behandelte autonome Unterwasserfahrzeuge (Autonomous Underwater Vehicles – AUVs), welche durch künstliche Intelligenz und externe Sensoren in der Lage sind, die ihnen gestellten Aufgaben selbsttätig auszuführen. Einer der großen Vorteile besteht darin, dass diese kein Mutterschiff benötigen, was die Kosten wesentlich reduziert. Da Forschungen auf diesem Gebiet relativ zeit- und kostenaufwendig sind, wurden im wesentlichen Ergebnisse von langfristigen Forschungsprojekten präsentiert. An konkreten Anwendungsbeispielen wurde die Überprüfung der Wasserqualität im japanischen Shiva-Lake, die Erforschung eines Unterwasservulkans in Japan, der „Gesang“ der Buckelwale sowie als neues Projekt die Erforschung von heißen Quellen am Meeresboden nahe Okinawa und im Mariannengraben berichtet. Vielversprechende Ansätze zum Einsatz solcher Geräte bieten sich in der Ölindustrie, wie beispielsweise zur Exploration von Ölfeldern in Tiefen von mehr als 3000 m, Überprüfung von Unterwasserpipelines sowie Bohrinseln.

Diese Anwendungen sind aber eher noch als Pilotprojekte anzusehen, da es von der theoretischen Seite noch eine Menge ungelöster Probleme gibt. Solche sind beispielsweise die Lageregelung unter Einfluss extremer Störgrößen in drei Dimensionen, die Entwicklung geeigneter Sensoren sowie eine effiziente Sensordatenverarbeitung, die Kommunikation dieser autonomen Unterwasserfahrzeuge mit einer zentralen Überwachungsstation sowie die Energieversorgung. Ein neuer Begriff sind e-Robots, ein Unterwasser-Roboterschwarm, der mittels Internet kommunizieren kann. Solche Roboter sind derzeit in der Fertigungsautomatisierung als MAS (Multi-Agent-System) bereits verfügbar.

In einer abschließenden Paneldiscussion wurde übereinstimmend festgestellt, dass in den nächsten Jahren autonome Unterwasserroboter von der Phase der Pilotprojekte heraus zu richtigen praktischen Anwendungen treten werden. Dies war auch die übereinstimmende Meinung, der mehr als 50 Teilnehmer.

P. Kopacek

1. österreichisch-argentinischer Automatisierungstag

Buenos Aires

9. November 2001

Dieser 1. österreichisch-argentinische Automatisierungstag wurde von österreichischer Seite von der ÖGMA, dem IFAC Beirat Österreich und dem IHRT (Institut für Handhabungsgeräte und Robotertechnik) der TU Wien und von argentinischer Seite von der AADECA (Asociacion Argentina de Control Automatico), der Universidad Nacional de Lomas de Zamora sowie der Universidad Nacional de Quilmes organisiert. Die Veranstaltung stand unter dem Ehrenschutz der österreichischen Botschaft in Argentinien sowie der autonomen Stadtregierung von Buenos Aires.

Hauptzweck dieses bilateralen Automatisierungstages war es einige spezielle Gebiete der Automatisierungstechnik, welche für die Industrien und die Forschung beider Länder derzeit von Interesse sind und zukünftig von Interesse sein werden, in Kurzvorträgen vorzustellen. Die Veranstaltung wurde vom österreichischen Botschafter in Argentinien, Y. Stadenat, und vom Präsidenten der AADECA, J. Paiuk, unter Anwesenheit des österreichischen Handelsdelegierten in Argentinien, E. Dix, eröffnet. Von österreichischer Seite wurden in zwei Übersichtsvorträgen von P.H. Osanna neueste Trends in der Messtechnik sowie von P. Kopacek ein Überblick über Fertigungsaufmatisierung in Österreich gegeben. Sodann gab L. Buresti einen Überblick über kommerzielle und industrielle Aktivitäten auf dem Gebiet der Automation in Argentinien und J. P. Weisz versuchte einen Eindruck über die Beziehungen zwischen Industrie und Forschung in Argentinien darzustellen. Einen sehr interessanten Überblick über die Forschungslandschaft auf dem Gebiet der Automatisierungstechnik in Argentinien gab sodann M. I. Valla von der Universidad Nacional de la Plata. Infolge der derzeitigen wirtschaftlichen Situation Argentiniens sind die staatlichen Forschungsmittel sehr beschränkt, so dass sich die Forschungseinrichtungen verstärkt industriellen Projekten widmen müssen.

Einen integrierenden Bestandteil jedes bilateralen Automatisierungstages bildeten die Industrievorträge. Von österreichischer Seite behandelte G. G. Chiappe (Festo Austria), M. Abenante (Siemens Austria) und D. Paiuk (VAI-Ingdesi) ausgeführte innovative Projekte. P. Kopacek gab einen Überblick über den derzeitigen Stand und zukünftige Entwicklungstendenzen auf dem Gebiet der semi-automatisierten Demontage. Von argentinischer Seite berichtete B. Kuchen von der Universidad Nacional de San Juan über ausgeführte Industrieprojekte als eine Kooperation zwischen Universität und Wirtschaft. Abschließend gab J. Bauer von der Universidad Lomas de Zamora einen Überblick über das einzige CIM-Laboratorium in Argentinien und ging dabei besonders auf IMS (Intelligenten Produktionssysteme) ein.

Aufgrund der hohen Teilnehmerzahl – mehr als 100 – und des großen beidseitigen Interesses wurde angeregt in ein oder zwei Jahren den 2. österreichisch-argentinischen Automatisierungstag in Buenos Aires zu veranstalten.

P. Kopacek

6th IEEE Symposium on Industrial Electronics

**12. – 16. Juni 2001
Pusan, KOREA**

Das 6. Internationale – Symposium „Industrial Electronics“ wurde unter Leitung des IEEE „Committee on Industrial Electronics“ sowie der „Pusan National University“ und der „Changwon National University“ sowie des „Institute of Control, Automation and Systems Engineers“ hervorragend durchgeführt. Es umfasste 3 Übersichtsvorträge, 5 Plenarvorträge und 3 „Survey papers“ sowie 398 technische Vorträge in 47 Sessions. Der größte Teil der über 400 Teilnehmer aus 22 unterschiedlichen Ländern kam vor allem aus Japan und Korea.

Dem Programmkomitee gelang es eine Ausgewogenheit zwischen Theorie und Praxis im Programm sicherzustellen. Vor allem die Beiträge von Dr. Hwang (Evolutional Challenge on Technology and Cost for Future Memory Business) und Prof. Yuh (Exploring the Mysterious Underwater World with Robots) haben dabei gezeigt, wie breit das Spektrum sein kann und wie schnell sich der Markt in der Elektronikbranche am Beispiel der Chiptechnologie ändern kann.

Die Themen der Sitzungen reichten von Energiesystemen, nichtlineare und adaptive Regelung, Bilderkennungssystemen,... bis hin zu industriellen Anwendungen und mobilen Robotern. Ziel war es innovative Entwicklungen im Bereich der Industrieelektronik und artverwandter Bereiche darzustellen. Diese technischen Diskussionen die zwischen den Sprechern, Autoren und Teilnehmern nach jeder Sitzung geführt wurden, konnten auch in einer entspannten Atmosphäre am Abend bei den verschiedensten Abendveranstaltungen weitergeführt werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Erwartungen im höchsten Ausmaß erfüllt wurden, nicht zuletzt durch die sehr gute Nationale Organisation und das Ambiente. Das nächste und siebende Symposium findet vom 08. – 11. Juli 2002 in L'Aquila, Italien, statt.

H. Zebedin

**Ausschreibung
des
Fred Margulies-Preises
für Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der
Automatisierungstechnik
mit besonderer Berücksichtigung der sozialen Aspekte**

Anlässlich des zehnjährigen Bestehens des IFAC-Beirates Österreich wurde von diesem zusammen mit der Gewerkschaft der Privatangestellten der Fred Margulies-Preis ins Leben gerufen. Dieser Preis wird jährlich (2002 zum achten Mal) für hervorragende österreichische Arbeiten auf dem Gebiet der Automatisierungstechnik, mit besonderer Berücksichtigung der sozialen Aspekte, verliehen. Kriterien für die Bewertung sind im wesentlichen Innovationsgehalt, Wissenschaftlichkeit, wirtschaftliche Bedeutung sowie Interdisziplinarität des Ansatzes und soziale Relevanz. Der Preis in der Höhe von

€ 4.400,-- pro Jahr

wird je zur Hälfte von den beiden Stiftern geleistet und von einer Jury vergeben, welcher neben Persönlichkeiten aus Wissenschaft und Wirtschaft auch Vertreter der Gewerkschaft angehören.

Der Fred Margulies-Preis wird am 11. Oktober 2002 im Rahmen der SMART AUTOMATION AUSTRIA - Fachmesse für industrielle Automation – im Design Center Linz, Europaplatz 1, verliehen.

Eingereicht können Studien (auch Diplomarbeiten und Dissertationen) werden, welche innerhalb der letzten 5 Jahre in Österreich abgeschlossen wurden. Diese Arbeiten sind bis spätestens 31. Juli 2002 in einfacher Ausfertigung zusammen mit einer Kurzfassung (max. 10 Seiten) beim

Generalsekretariat des IFAC-Beirates c/o Institut für Handhabungsgeräte- und Robotertechnik der Technischen Universität, Favoritenstraße 9-11, 1040 Wien
(Tel. 58801-31801; E-mail: nemetz@ihrt.tuwien.ac.at)
einzureichen.

Für weitere Anfragen steht das Sekretariat des IFAC-Beirates unter obiger Adresse zur Verfügung.

Handbuch der Electronic Design Automation

Dirk Jansen (Hrsg.)

Carl Hanser Verlag, 2001

744 Seiten, 741 Abbildungen und 176 Tabellen, Hardcover

ISBN 3-446-21288-4

Das vorliegende Buch entstand aus der jahrelangen Zusammenarbeit von überwiegend an Fachhochschulen Unterrichtenden aus Lehrveranstaltungen über den Entwurf integrierter Elektronik. Die Autoren sind Mitglieder der „Multi-Project-Chip (MPC)“-Gruppe, einer Initiative im Bundesland Baden-Württemberg. MPC basiert auf der Idee auf einem WAFER mehrere Projekte gleichzeitig zu implementieren. Es deckt die gesamte Bandbreite des modernen Schaltungsentwurfs ab.

Nach einer Übersicht über Konzepte der elektronischen Design Automation (DAS) wird speziell auf den symbolischen sowie Hochsprachen-Entwurf eingegangen. Grafische Verhaltensspezifikationen, Synthese sowie Hardware/Software-Co-Design ergänzen dieses Kapitel. Der folgende Abschnitt über die Modellierung und Verifikation behandelt das breite Gebiet der Analog- und Digitalsimulation sowie der Simulation des Gesamtsystems. Relativ kurz behandeln die Autoren das Gebiet des testfreundlichen Entwurfs von Chips. Bei der Implementierung wird auf anwenderspezifische integrierte Schaltungen, programmierbare Logikschaltungen, integrierte Schaltungstechniken sowie geometrisches Layout und geometrische Verifikation eingegangen. Den Abschluß bildet ein Beispiel für den Ablauf eines Top-Down-Designs in übersichtlicher Form – EDA-Tutorium.

Das Buch richtet sich an den Anwender von EDA, den Praktiker und Studenten. Der Fachmann und der Forscher wird in diesem Buch manche Vereinfachungen und Verkürzungen entdecken. Es wurde aber nach bestem Wissen und Gewissen versucht zusammenzutragen was heute unumgänglich notwendig ist, um moderne Elektronik mit Hilfe des Rechners effektiv zu entwerfen.

P. Kopacek

Abnahme von Fertigungseinrichtungen

Edgar Dietrich, Alfred Schulze

Carl Hanser Verlag, 2001
128 S., Taschenformat, Spiralbindung
ISBN 3-446-21378-3

In den letzten Jahren ist es immer mehr zum Standard geworden, den Eignungsnachweis oder die Qualifikation der im Fertigungsbereich verwendeten Maschinen- und Fertigungseinrichtungen mittels statistischer Verfahren zu beurteilen. Grundlage hierfür ist die von Taguchi vorgeschlagene Verlustfunktion. Diese Theorie besagt, dass jede Abweichung von einem vorgegebenen Sollwert einen Verlust für das Unternehmen, die Organisation bzw. die Gesellschaft darstellt. Die Höhe dieses Verlustes ist von der jeweiligen Aufgabenstellung abhängig und wird durch die jeweilige Verlustfunktion beschrieben. Die Fehlleistungskosten hängen von der Abweichung der Werte vom Sollwert und von der Streuung dieser Werte ab. Daher muss es das Ziel jeder Fertigung sein, die Abweichungen vom Sollwert so gering wie möglich zu halten und die Streuung zu minimieren. So kann die Fehlerrate mit jeder Verringerung des Streubereiches um σ um 10% gesenkt werden.

Dieses Taschenbuch beschreibt, basierend auf der vorerwähnten Methode, die Abnahmeprozedur, um eine Fertigungseinrichtung bei Neukauf bzw. bei deren Änderung beurteilen zu können. Die Autoren möchten den Leser eine Hilfestellung in Form einer klaren Vorgehensweise bei der Abnahme von Maschinen und Fertigungseinrichtung geben. Das Buch besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil ist die Vorgehensweise beschrieben, ohne näher auf die statistischen Verfahren und Hintergründe einzugehen.

Durch die kompakte Informationsaufbereitung und das handliche Format werden die Bände zu einem echten Hilfsmittel, das der Anwender ständig zur Hand hat. Die Neufassung von existierenden Richtlinien garantiert aktuellste Verfahren und Vorgehensweise.

P. Kopacek

Softwaretechnik für Ingenieure

Eine leicht verständliche Einführung

Frank Rieg
Reinhard Hackenschmidt

792 Seiten, 1 CD-ROM
ISBN 3-446-21653-7

Carl Hanser Verlag München Wien, 2001

Da Software ohne Hardware nicht existieren kann, beginnen die Autoren des vorliegenden Werks mit einer kurzgefassten Zusammenstellung der für Ingenieure wichtigsten Komponenten der Computer und ihrer Peripherie. Darauf setzt als erste Softwareschicht ein Betriebssystem auf. Jeweils ein Kapitel ist den Microsoft-Betriebssystemen (von DOS bis Windows 2000) und diversen UNIX-Systemen (wie z.B. Linux) gewidmet. Dabei wird den Möglichkeiten der Programmierung auf diesen Systemen besonderes Augenmerk geschenkt. Womit die Autoren auch schon bei ihrem eigentlichen Thema angelangt sind, und zwar dem betriebssystemübergreifenden Programmieren, soweit das möglich ist. Dafür werden die Programmiersprachen Assembler, C und FORTRAN verwendet.

Diese drei Programmiersprachen werden von den Autoren aufgrund ihrer jahrelangen Industriepraxis als besonders relevant für die Erstellung technisch-wissenschaftlicher Programme erachtet. Auf jeweils ca. 100 Seiten werden die Grundstrukturen der Sprachen, die Befehle für die wichtigsten Operationen und der freie C-Compiler LCC (mit FORTRAN-77-Zusatz) anhand vieler Beispiele erklärt. Die vorgestellte Freeware und der gesamte Sourcecode der Programmbeispiele liegen auf einer CD-ROM dem Buch bei.

Die Programmierung der Windows-Oberflächen mit Hilfe der Programmiersprache C wird in den beiden letzten Kapiteln beschrieben. Eines beschäftigt sich mit der Schnittstelle der Microsoft Windows (32 Bit) Betriebssysteme, dem API (application programming interface), einer reinen C-Schnittstelle ohne Objekte oder Klassenbibliotheken. Das letzte Kapitel behandelt das Gegenstück dazu, nämlich die Programmierung von X11, dem Windows für UNIX.

Das vorliegende Buch wurde speziell für Ingenieure geschrieben und vermittelt allen, die Software entwickeln und modifizieren wollen, dafür eine solide Basis. Es ist für jeden zu empfehlen, der einen Einstieg in die Softwareentwicklung mit einer der behandelten Programmiersprachen oder Betriebssysteme sucht.

K. Daichendt

Handbuch Mikrotechnik

Wolfgang Ehrfeld (Hrsg.)

Carl Hanser Verlag, 2002

534 Seiten, 393 Abbildungen und 47 Tabellen, Hardcover

ISBN 3-446-21506-9

Die Mikrotechnik erlebte in den letzten beiden Dekaden eine stürmische Entwicklung, was sich nicht zuletzt dadurch wiederspiegelt, dass sie noch dieses Jahr ein Marktvolumen von über 60 Milliarden Euro erreichen wird. So ist beispielsweise ein modernes Kraftfahrzeug ohne mikrotechnischen Airbag-Sensor und mindestens zwanzig weiteren Produkten der Mikrotechnik für Motormanagement, Sicherheit, Straßenlage und Komfort nicht mehr denkbar. Es entstehen laufend neue Anwendungsgebiete der Mikrotechnik, welche die Technologiebasis ganzer Industriezweige fundamental verändern.

Das vorliegende Buch stellt eine Zusammenfassung von Beiträgen verschiedener Autoren dar. Nach Modellen und Werkzeugen sowie der Simulation von Mikrosystemen folgt ein Abschnitt über die Anwendung konventioneller Fertigungsverfahren, wie beispielsweise spanende Mikrobearbeitung, Lasermikrobearbeitung und Mikroabformung. Relativ breit wird auf die Anwendung von Prozessen der Halbleiterfertigung auf die Mikrotechnik eingegangen. Es werden u.a. die Photo- und Elektronenstrahllithographie sowie spezielle Ätztechniken eingehendst behandelt. Die Herstellung von Mikrostrukturen aus Glas ist ebenfalls ein integrierender Bestandteil dieses Übersichtswerkes. Relativ kurz wird dann die Herstellung komplexer Mikrostrukturprodukte mit dem bekannten LIGA-Prozeß behandelt. Den Abschluß bildet ein Abschnitt über Messverfahren für die Mikrotechnik, wobei zuerst auf die Anforderungen und dann auf Messverfahren für Rauheit, Stufenhöhe, Abstand sowie die optische Charakterisierung dünner Schichten eingegangen wird.

Das vorliegende Buch stellt eine der wenigen zusammenfassenden Darstellungen dieses relativ neuen Fachgebietes dar. Der Bogen spannt sich dabei von der mathematischen Modellierung über die Vielfalt der Fertigungsverfahren bis hin zu den Meß- und Prüfmethoden.

Dieses Buch wird seinem Anspruch, dem Leser ständig die neuesten Informationen zu vermitteln, gerecht. Es ist daher auch von besonderem Wert für Wissenschaftler und Ingenieure, sowohl an Universitäten als auch in der Industrie.

P. Kopacek

Ein Beitrag zur Steuerung von mobilen Robotersystemen

Dr. Man-Wook Han

Begutachter: O.Univ.Prof.Dr.Dr.h.c.mult. P. Kopacek
O.Univ.Prof.Dr. P.H. Osanna

Roboter werden wegen ihrer hohen Produktivität und Flexibilität in vielen Produktionsstätten eingesetzt. Mit der gesellschaftlichen Entwicklung werden automatisierte Maschinen auch außerhalb von Produktionsstätten benötigt, die folgende Vorteile bringen: Reduzierung der Dienstleistungskosten (z.B. Personalkosten), Fachkräfte werden von einfachen, monotonen und gefährlichen Routinearbeiten befreit.

Daher sind „Service robots“ und „Personal robots“ zwei aktuelle Schlagworte der Roboterforschung. Die meisten eingesetzten Serviceroboter werden als Einzweckmaschinen verwendet, z.B. Tankroboter, Flugzeuggreinigungsroboter etc.. Das Wachstumspotential ist in diesem Bereich extrem hoch. Die Anforderungen die an Serviceroboter gestellt werden sind die autonome bzw. intelligente Manipulations- und Bewegungsfähigkeit.

Daher ist es notwendig, intelligente Konzepte (speziell die Navigation) für mobile Plattformen bzw. Roboter zu entwickeln. Einsatzbereiche solcherart ausgestatteter Roboter sind vorwiegend der Servicebereich und der Haushalt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Navigation von mobilen Robotern mit Hilfe von neuronalen Netzen und Fuzzy-Steuerungen bzw. Neuro-Fuzzy-Methoden.

In den letzten Jahren haben Fuzzy - und Neuro Methoden eine Schlüsselposition in der Informationsverarbeitung speziell in komplexen technischen Systemen eingenommen. Während die Fuzzy Logik strukturiertes, qualitatives Erfahrungswissen in Form linguistischer „ Wenn..., dann...“ Regeln operationalisiert, ahnen Künstliche Neuronale Netze (KNN) zur Verarbeitung unstrukturierter, quantitativer Daten oder Signale die Funktionsweise des Gehirns nach.

Künstliche Neuronale Netze (KNN) stellen ein Informationsverarbeitungssystem dar, das aus einfachen, parallel geschalteten Elementen (Neuronen) besteht. Ein Fuzzysystem arbeitet auf Basis "Der Theorie der unscharfen Mengen", das aus vagen und ungenauen Informationen eine Handlung oder eine Entscheidung treffen kann. Für die praktische Anwendung wurden deshalb Fuzzysysteme und KNN implementiert.

Die entwickelten Verfahren wurden an einer mobilen Roboterplattform *Nomad200* (Hersteller: Nomadic Inc., USA) und einem Miniroboter (EPFL, Schweiz) getestet.

Beitrag zur Planung flexibel automatisierter Demontage- systeme für komplexe Gebrauchsgüter am Beispiel Bildschirmgerät

Dr. Gregor Eckerth

Begutachter: O.Univ.Prof.Dr.Dr.h.c.mult. P. Kopacek
O.Univ.Prof.Dr. P.H. Osanna

Die innerhalb der EU anfallende Menge an Elektronikschrott wird auf einen zweistelligen Millionenbetrag an Jahrestonnen geschätzt, der sich binnen ein bis zwei Dekaden verdoppelt. Aus diesem Grund soll die ökologisch wirksame Kreislaufführung elektronischer Produkte forciert werden.

Ein Teilaspekt dieser Kreislaufführung liegt innerhalb der Demontage der Produkte, welche sich als Transformationsprozess versteht, dessen materielle Eingangsgröße ein Vielstoffprodukt ist und dessen Ausgangsgrößen Fraktionen bilden, die nachgelagerten Prozessen zugeführt werden. Die momentan hauptsächlich manuellen Zerlegetätigkeiten sollen zukünftig automatisiert durchgeführt werden. Vor diesem Hintergrund ist das Ziel der vorliegenden Arbeit die Konzeption und Umsetzung einer roboterbasierten automatisierten Demontageanlage, welche aufgrund sensorischer Systeme zustandsflexibel den Zerlegeprozeß steuert und dadurch den prozesssicheren Einsatz der Bewegungsautomaten gewährleistet. Als Demontageobjekte werden Bildschirmgeräte gewählt.

Die zu demontierenden Produkte werden einer Analyse hinsichtlich Aufbau und manuellem Demontageprozess unterzogen. Mit der Methodik des Teilverbindungsgraphen werden erste Randparameter und Zerlegesequenzen einer automatisierten Demontage identifiziert. Eine Untersuchung des Masse-Zeit-Verhältnisses bei der Bildschirmgerätezerlegung zeigt, dass aus wirtschaftlichen Gründen die Demontage mit dem Herauslösen der Bildröhre enden sollte.

Mit den Mitteln der Konfigurations-, Aktions-, und Layoutplanung werden zwei Anlagenvarianten konzipiert. Die Auswahl einer Variante erfolgt vor dem Hintergrund der prozesssicheren Handhabung der Bildröhre und kürzerer Prozessnebenzeiten.

Abschließend wird die Umsetzung des Konzeptes dargestellt. Dabei wird insbesondere auf die eingesetzte Sensorik, die gewählte Steuerungsstruktur und die Aktorik eingegangen. Das Zusammenspiel der Komponenten wird durch Beschreibung eines Demontageablaufes dokumentiert.

17. Österreichischer Automatisierungstag

im Rahmen der **SMART AUTOMATION AUSTRIA**

Fachmesse für industrielle Automation

11. Oktober 2002

10.00 – 14.00 Uhr

DESIGN CENTER LINZ

Linz, Europaplatz 1

Die Automatisierungstechnik beschäftigt sich nach wie vor mit Problemlösungen im industriellen Bereich. Auf der anderen Seite halten jedoch die Informationstechnologien rasant Einzug in unser tägliches Leben. Die Automatisierungstechnik wird sich daher zukünftig ebenfalls mit Themen wie Infomobility, Infotainment, Business to Business Lösungen auseinander zu setzen haben, um ihren Nutzern zeitgemäße Werkzeuge bieten zu können. Auf dem zum 17. mal jährlich stattfindenden „Österreichischen Automatisierungstag“ soll der österreichischen Industrie, forschungsfördernden Stellen sowie Vertretern von Technologietransferzentren ein erster Überblick über aktuelle und zukünftige Forschungsschwerpunkte und Forschungsarbeiten auf diesen innovativen Gebieten gegeben werden.

Im Rahmen dieses 17. Österreichischen Automatisierungstages findet auch heuer wieder die Verleihung des Fred Margulies-Preises statt, welcher für hervorragende österreichische Arbeiten auf dem Gebiet der Automatisierungstechnik, mit besonderer Berücksichtigung der sozialen Aspekte, verliehen wird.

Die Teilnahme am Automatisierungstag ist kostenlos, eine Voranmeldung ist jedoch erforderlich.

Anmeldungen an:

Institut für Handhabungsgeräte und Robotertechnik, TU Wien
Favoritenstraße 9 – 11, 1040 Wien

Tel.: 01/58801-31801

Fax: 01/58801-31899

E-mail: nemetz@ihrt.tuwien.ac.at

Während sowie nach dem Ende des Automatisierungstages können die Teilnehmer die SMART AUTOMATION AUSTRIA kostenlos besuchen.

Es erfolgt noch eine gesonderte Aussendung mit dem detaillierten Programm.

International IARP Workshop on Robots for Humanitarian Demining

Vienna, November 3 – 5, 2002

Background:

At the Versailles Economic Summit of 1982 an international collaborative project, now known as the International Advanced Robotics Programme (IARP), was initiated. In 2000, nations participating in the IARP are Australia, Austria, Brazil, Canada, China, France, Germany, Italy, Japan, Korea, Russia, Spain, U.K., and USA. The European Union, Belgium, and New Zealand are observer members. The general objective of the IARP is: "To encourage development of advanced robotic systems that can dispense with human work for difficult activities in harsh, demanding or dangerous environments, and to contribute to the revitalization and growth of the world economy". This is subscribed by all these countries.

Scope:

The workshop will review and discuss the major advances in Science and Technology regarding mobile robots and associated manipulation devices for humanitarian demining. Particular emphasis will be given to the applications regarding the detection of landmine and removal using advanced robotic systems including peripheral devices.

Topics:

Specific topics include but are not limited to:

- ◆ Teleoperators
- ◆ Moving (wheels, tracks...), walking, flying, ...
- ◆ Mobile Robots (Mobile Platforms)
 - Moving (wheels, tracks...), walking, flying, ...
- ◆ Modular, Low Cost Platforms
- ◆ Sensors and sensor fusion
 - for Landmine Detection
 - for Robot localization
- ◆ Devices for landmine clearance
- ◆ Control algorithms
- ◆ Power supply
- ◆ Human Machine Interface
- ◆ Social aspects and education
- ◆ Applications

Participation:

Participation in IARP workshops is by invitation only. The IARP Contact Person of each country will co-ordinate the submission of extended abstracts (2-3 pages), from which a final selection will be made by the International Programme Committee (IPC).

Es wird um möglichst viele Beiträge aus Österreich ersucht.

Inst.für Handhabungsgeräte und Robotertechnik/TU Wien, 1040 Wien, Favoritenstr. 9-11
Tel. 01/58801-31801; Fax: 01/58801-31899; E-Mail: kopacek@ihrt.tuwien.ac.at

<i>Datum</i>	<i>Veranstaltung</i>	<i>Ort</i>	<i>Weitere Informationen erhältlich bei:</i>
18.-21.4.2002	2002 FIRA European Championship	<i>Vienna Austria</i>	<u>http://www.ihrt.tuwien.ac.at/FAIRAE</u> <u>copacek@ihrt.tuwien.ac.at</u>
8.-10.5.2002	American Control Conference (in co-operation with IFAC)	<i>Anchorage, Alaska, USA</i>	<u>http://www.ent.ohio.edu/~acc2002</u> e-mail: rrr@gibbs.cheng.okstate.edu
27.-29.5.2002	FIRA Robot World Congress	<i>Seoul Korea</i>	<u>http://www.firacongress.net</u> e-mail: fira2002@fira.net
21.-26.7.2002	15th IFAC World Congress	<i>Barcelona, Spain</i>	b'02 Secretariat Intern. Center for Numerical Methods in Eng. Universitat Polytechnica de Catalunya Campus Nord Gran Capita, s/n – Edificio C1 E-08034 Barcelona, Spain <u>http://www.ifac2002.org</u> e-mail: <u>secretariatnoc@b02.ifac2002.org</u>
25.-27.9.2002	4th Asian Control Conference (in co-operation with IFAC)	<i>Singapore</i>	<u>http://www.ece.nus.edu.sg/ascc2002</u> e-mail: <u>ascc2002@nus.edu.sg</u>
3.-5.11.2002	Intern. Workshop on Robots for Humanitarian Demining	<i>Vienna Austria</i>	<u>http://www.ihrt.tuwien.ac.at/HUDEM</u> <u>kopacek@ihrt.tuwien.ac.at</u>
7.-11.10.2002	ISR 2002 – International Symposium on Robotics	<i>Stockholm Sweden</i>	<u>http://isr.2002.com</u> e-mail: <u>isr2002@iip.kth.se</u>
11.10.2002	17. Österreichischer Automatisierungstag	<i>Linz</i>	<u>kopacek@ihrt.tuwien.ac.at</u>
9.-11.12.2002	2nd IFAC Conference Mechatronic Systems – in co-operation with IEEE/ASME	<i>Berkeley CA USA</i>	<u>http://www.unex.berkeley.edu/eng/mech</u> <u>mechatronics2002@unx.berkeley.edu</u>
5.-7.2.2003	IMACS/IFAC Symposium Mathematical Modelling – 4 th MATHMOD	<i>Vienna Austria</i>	e-mail: <u>inge.troch@tuwien.ac.at</u>
16.-18.6.2003	6th IFAC Symposium Advances in Control Education	<i>Oulu Finland</i>	<u>http://www.ntsat.oulu.fi/ace</u> e-mail: <u>office@atu.fi</u>