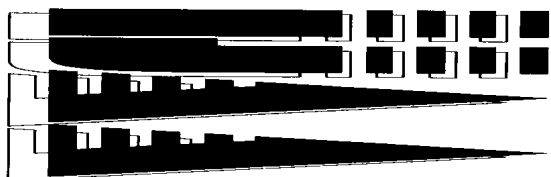


INTERNATIONAL JOURNAL AUTOMATION AUSTRIA



HEFT 2

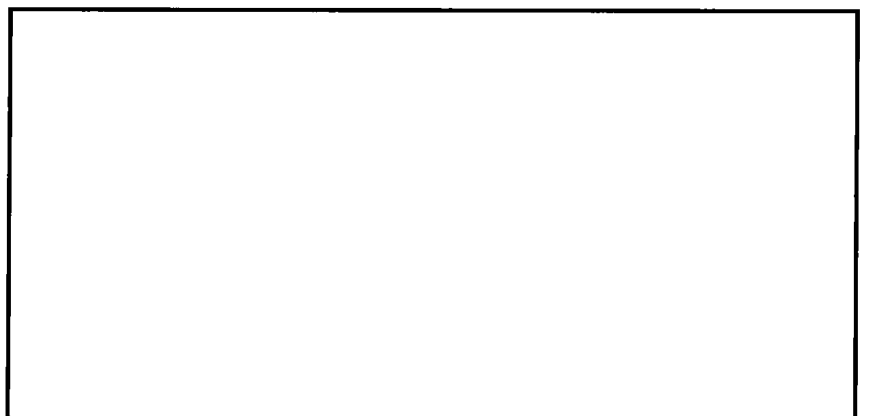
Jg. 14, (2006)

INHALT*Seite*

BAUER, R.; DOURDOUMAS, N.; GAUSCH, F.: Über den Einfluss von „rechten“ Nullstellen eines Systems auf dessen Sprungantwort; die Balance-Relation	61
WEINMANN, A.: Montaineering Design Approach for Self-Stabilizing Control	78
WEINMANN, A.: H ₂ -Oriented Stability Margin in Continuous-Time Control Systems	97
SCHLAGLICHTER	107
BUCHBESPRECHUNGEN	116
DIPLOMARBEITEN	118
VERANSTALTUNGEN	119

Österreichische Post AG

Info.Mail Entgelt bezahlt



Wenn unzustellbar, retour an:

IFAC-Beirat Österreich (E318)
Favoritenstraße 9-11, A-1040 Wien

Instruction to authors – presented as a pattern paper (18 pt)

A. Maier, F. Huber (12 pt)
Department, Vienna, Austria

Received April 8, 1999

Abstract

This paper shows (italics, 12 pt)

1 General (14 pt)

Authors should prepare their manuscript camera ready, format A 4, 12 typeface and must present their manuscript in good quality. At the left/right edge 2.5 cm, at the to/bottom edge 3 cm. Authors are invited to use papers of this journal as a sample. Please do not use an eraser or erasing fluid. Footnotes should be avoided if possible. Authors are expected to submit their paper to one of the publishers (O.Univ.Prof.Dr. Peter Kopacek, Institute for Handling Devices and Robotics, Vienna University of Technology, Favoritenstrasse 9-11, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801-31899 or O.Univ.Prof.Dr. Alexander Weinmann, Institute of Automatic Control, Vienna University of Technology, Gusshausstr. 27-29, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801 37599).

2 References (14 pt)

Within the paper references should appear in the following form:

(Mayer, H., 1990) or (*Mayer, H., 1990*) (12 pt);

Mayer, H., 1990, discovered that....

3 Figures and Tables (14 pt)

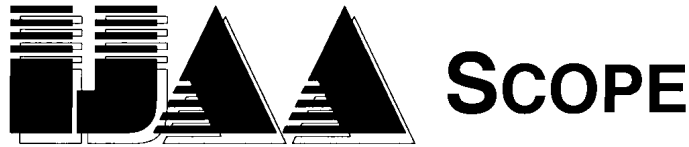
Figures and Tables should be integrated in the paper and have to be referred to as Fig. 4.1 or Tab. 5.2.

4 References

References are to be listed alphabetically according to first author. (11 pt)

5 Word Processing System/Editor

Microsoft Word for Windows 1.1 or higher; Microsoft Word 5.0; TeX or LaTeX.



"International Journal Automation Austria" publishes top quality, peer reviewed papers in all areas of automatic control concerning continuous and discrete processes and production systems.

Only original papers will be considered. No paper published previously in another journal, transaction or book will be accepted. Material published in workshops or symposia proceedings will be considered. In such a case the author is responsible for obtaining the necessary copyright releases. In all cases, the author must obtain the necessary copyright releases before preparing a submission.

Papers are solicited in both theory and applications.

Before preparing submissions, please visit our instructions to authors (see back cover) or web page.

Copyright © IFAC - Beirat. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored, transmitted or disseminated, in any form, or by any means, without prior written permission from IFAC - Beirat, to whom all requests to reproduce copyright material should be directed, in writing.

International Journal Automation Austria also is the official executive authority for publications of IFAC - Beirat Österreich.

Imprint:

Propagation of Automatic Control in Theory and Practice.

Frequency: Aperiodically, usually twice a year.

Publisher: IFAC - Beirat Österreich, Peter Kopacek, Alexander Weinmann

Editors in Chief: Alexander Weinmann, Peter Kopacek

Coeditors: Dourdoumas, N. (A) Fuchs, H. (D) Jörgl, H. P. (A)
Noe, D. (SLO) Schaufelberger, W. (CH)
Schlacher, K. (A) Schmidt, G. (D) Troch, I. (A)
Vamos, T. (H) Wahl, F. (D)

Address: Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik (E325/A6), TU-Wien,
A-1040 Wien, Favoritenstrasse 9-11, Austria

Phone: +43.1.58801-31801; FAX: +43.1.58801-31899

E-Mail: e318@ihrt.tuwien.ac.at

Homepage: http://www.ihrt.tuwien.ac.at/IFAC_AUT/
<http://www.acin.tuwien.ac.at/IJAA/index.htm>

Layout: Eva Schirmbrand

Printing: Grafisches Zentrum HTU-GmbH

Über den Einfluß von „rechten“ Nullstellen eines Systems auf dessen Sprunganwort; die Balance-Relation

R. Bauer*, N. Dourdoumas*, F. Gausch[†]

Kurzfassung

Die Problematik von reellen rechten Nullstellen der Übertragungsfunktion eines Systems ist seit langem bekannt. Insbesondere assoziiert man in Zusammenhang mit solchen Nullstellen das Auftreten des Unterschwingens der Sprunganwort eines Systems; diesbezüglich kann allerdings mancher „Aberglauben“ bzw. manche nichtzutreffende Behauptungen in der Fachliteratur gelesen werden. Das Ziel dieses Aufsatzes ist auf relativ einfacher Weise unter Heranziehen der sogenannten Balance-Relation die Wirkung solcher Nullstellen zu erfassen und bewusst zu machen. Unter der Annahme reeller Pole eines Systems kann die Auswirkung von rechten reellen Nullstellen auf den Verlauf der Sprunganwort näher quantifiziert werden. Zum Abschluss wird der Trajektorienverlauf im Zustandsraum beim Vorliegen eines Unterschwingens untersucht.

Schlüsselwörter: *Reelle Nullstellen, Sprunganwort, Unterschwingen, Anschwingen*

Abstract

The problems connected with real right zeros of a transfer function of a system are well known. Particularly the appearance of undershoot in the step response of a system is often associated with such zeros; in this regard some „superstitions“ and wrong statements can be found in the literature. This paper deals with the investigation of the impact of such zeros on the step response using simple methods, especially the so-called „balance relation“. Assuming a system with real poles, this impact can be quantified in more detail. Finally the phenomenon of undershoot is analysed in state space.

Key words: *Real zeros, step response, undershoot, offshoot*

1 Motivation

Nullstellen eines Systems, die einen *nichtnegativen Realteil* besitzen, sind *eine bittere Realität*, mit der der Regelungstechniker leben muss ([7],[1],[10],[8]). Sie können weder mit Hilfe einer reinen Kompensation durch ein Steuerelement noch durch eine statische

*Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz, Inffeldgasse 16c, A-8010 Graz, email: robert.bauer@tugraz.at, nicolaos.dourdoumas@tugraz.at

[†]Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, D-33098 Paderborn, email: gausch@uni-paderborn.de

Rückführung der Ausgangsgröße und auch nicht durch Zustandsrückführung verändert werden! Man bedenke, dass sie einen gravierenden Einfluss auf relevante Übertragungsfunktionen eines Standardregelkreises haben: die komplementäre Führungsübertragungsfunktion wird für eine solche Nullstelle gleich Eins, und damit ist an dieser Stelle die Führungsübertragungsfunktion gleich Null. Die Sprungantwort eines Systems ist wiederum eine charakteristische Systemgröße, deren Verlauf bzw. Kenndaten wie Anstiegszeit und Überschwingen ein Bild gewisser Systemeigenschaften wiedergibt. Sie dient auch oft als Wunsch- bzw. Referenzgröße für einen zu entwerfenden Regelkreis. Es ist daher sinnvoll, den besonderen Einfluss von rechten Nullstellen auf die Sprungantwort zu untersuchen. Ziel ist es mit einfachen mathematischen Mitteln den Einfluss dieser Nullstellen zu durchleuchten und daraus Einsichten zu gewinnen.

2 Auswirkung einer *reellen rechten* Nullstelle auf die Sprungantwort (Balance-Relation)

Wir betrachten ein System mit der BIBO-stabilen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}. \quad (1)$$

Die Polynome $Z_G(s)$ und $N_G(s)$ besitzen reelle Koeffizienten, für den Differenzgrad (auch relativen Grad bzw. Polüberschuß genannt)

$$\nu := \text{Grad}\{N_G(s)\} - \text{Grad}\{Z_G(s)\}$$

gilt

$$\nu \geq 0.$$

Die zugehörige Sprungantwort $h(t)$ ergibt sich im Bildbereich mit Hilfe der LAPLACE-Transformation:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt =: H(s) = \frac{1}{s} G(s).$$

Folgendes resultiert unmittelbar aus obiger Relation: Für *jede* komplexe Konstante γ im Konvergenzbereich von $H(s)$

$$\gamma = \zeta + j\psi \quad \text{mit} \quad \zeta > 0$$

gilt die Beziehung

$$H(s = \gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\zeta + j\psi)t} h(t) dt. \quad (2)$$

Sie wird herangezogen, um für charakteristische Werte von γ Einsicht über den Verlauf der Zeitfunktion $h(t)$ zu gewinnen.

Wir nehmen nun an, dass γ eine *Nullstelle* von $H(s)$ ist. Es gilt dann:

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-(\zeta + j\psi)t} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} [h(t) \cos(\psi t)] dt + j \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} [h(t) \sin(\psi t)] dt \quad .$$

Aufgrund der auftretenden trigonometrischen Funktionen, die unendlich viele Vorzeichenwechsel aufweisen, ist es nicht möglich eine weiterführende Aussage über den Verlauf der Sprungantwort $h(t)$ zu machen. Die Situation ändert sich, wenn die Konstante γ *reell* ist:

$$\gamma = \zeta > 0.$$

Man sagt, ζ ist eine (reelle) *rechte* Nullstelle des Systems. Dann folgt aus (2) die sogenannte *Balance-Relation* für die Sprungantwort

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta t} h(t) dt = 0. \quad (3)$$

Nachdem die Funktion $e^{-\zeta t}$ nur positive Werte annimmt, *muss* $h(t)$ im Intervall $(0, \infty)$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen, damit obige Relation erfüllt werden kann. Die Sprungantwort zeigt einen besonderen, sozusagen *balancierten* Verlauf auf¹. Man kann nun die Auswirkung einer rechten reellen Nullstelle auf den Verlauf der Sprungantwort $h(t)$ des Systems qualitativ erfassen:

Falls eine *reelle rechte* Nullstelle vorliegt, nimmt die Sprungantwort $h(t)$ aufgrund der geltenden Balance-Relation (3) *zwangsläufig* sowohl positive als auch negative Werte an.

Bemerkung (Beispiel 1): Der Umkehrschluss gilt *nicht!* Man betrachte hierzu das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{150(s + 0.2)^2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}. \quad (4)$$

Es liegen zwei reelle „linke“ Nullstellen vor, und die Sprungantwort besitzt den positiven Grenzwert $h(\infty) = 1$. Sie nimmt erst im Bereich $1.6 \lesssim t \lesssim 3.71$ negative Werte an und ist sonst positiv. Allerdings weist sie *keinen* balancierten Verlauf auf.

Bemerkung (Beispiel 2): Es ist zu beachten, dass reelle *linke* Nullstellen *nicht zwingend* negative Werte der Sprungantwort zur Folge haben! Um dieses zu demonstrieren, werden die Nullstellen obiger Übertragungsfunktion leicht verändert:

$$G(s) = \frac{150(s + 0.3)^2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

Die zugehörige Sprungantwort nimmt *ausschliesslich* positive Werte an!

2.1 Balance-Relationen für mehrfache Nullstellen

Angenommen ein System besitzt m reelle rechte und verschiedene Nullstellen. Dann gelten m Balance-Relationen. Lassen wir gedanklich diese zu einer m -fachen reellen rechten Nullstelle ζ zusammenschmelzen, so gilt auf jeden Fall

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta t} h(t) dt = 0.$$

¹Unter der nicht einschränkenden Annahme, dass für hinreichend große t -Werte die Sprungantwort ausschliesslich positive Werte annimmt, gilt folgende **Bauernregel**: Je weiter rechts die Nullstelle ζ liegt, d.h. je schneller die Exponentialfunktion $e^{-\zeta t}$ abklingt, desto „kleiner“ ist der Bereich in dem $h(t)$ negativ ist. Dies ist einleuchtend, da die Balance-Relation (3) erfüllt sein muss.

Es stellt sich die Frage, welche weiteren Beziehungen gelten. Hierzu dienen folgende Überlegungen im Bildbereich: wir bilden die *LAPLACE*-Transformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

und betrachten anschliessend die zeitbeschwerte Funktion $t^k f(t)$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$. Deren Transformierte kann unmittelbar angegeben werden:

$$F^{(k)}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} t^k f(t) dt = (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}. \quad (5)$$

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $F(s)$ eine m -fache Nullstelle ζ besitzt. Dann besitzen die abgeleiteten Funktionen

$$\frac{d^k F(s)}{ds^k} \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq m-1$$

ebenfalls eine Nullstelle bei $s = \zeta$! Unter der Voraussetzung, dass die Nullstelle ζ eine *rechte reelle* Nullstelle ist, erhalten wir aufgrund von (5) unmittelbar folgende m Balance-Relationen für die Sprungantwort

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta t} t^k h(t) dt = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq m-1. \quad (6)$$

3 An- und Unterschwingen der Sprungantwort

Bei allen nachfolgenden Ausführungen *setzen* wir o.E.d.A. *voraus*, dass der Endwert der Sprungantwort positiv ist

$$h_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) > 0. \quad (7)$$

Wir betrachten ein BIBO-stabiles System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ gemäß (1) und positivem Differenzegrad

$$\nu > 0. \quad (8)$$

Letzteres bedingt, dass für den Anfangswert der Sprungantwort

$$h(t=0) =: h_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0 \quad (9)$$

gilt. Ferner setzen wir voraus, dass das System M rechte reelle Nullstellen besitzt. Die Sprungantwort weist deswegen einen balancierten Verlauf auf. Sie nimmt negative und positive Werte an und zeigt in einem endlichen Bereich $[0, t_1]$ *prinzipiell* eines der folgenden Verhalten an (siehe Abbildung 1):

- sie weist *einen* Vorzeichenwechsel auf; sie nimmt zunächst ab, um nach dem Vorzeichenwechsel positiv zu werden. Man spricht von einem *Unterschwingen* des Systems.

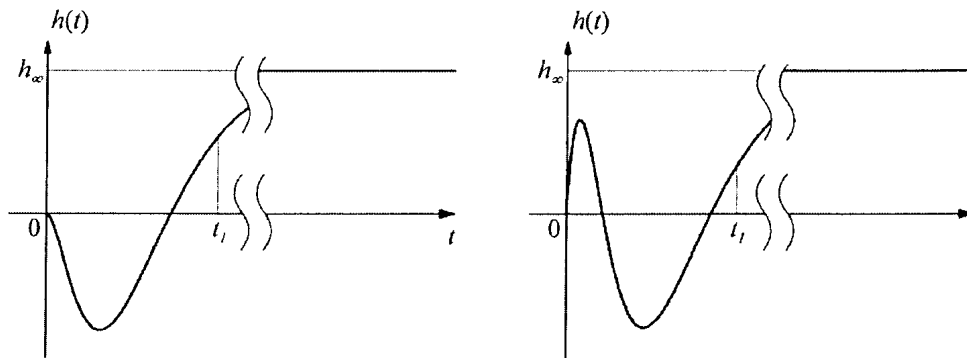


Abbildung 1: Unter- und Anschwingen des Systems

- sie weist *zwei* Vorzeichenwechsel auf; sie nimmt zunächst zu, wird anschliessend negativ, um erst nach einem weiteren Vorzeichenwechsel positiv zu werden. Man spricht vom einem *Anschwingen* des Systems.

Entscheidend für das Auftreten dieser Phänomene ist das Vorzeichen der *ersten von Null verschiedenen* zeitlichen Ableitung der Sprungantwort an der Stelle $t = 0$. Dies ist aufgrund der Voraussetzung (8) genau der Fall für die ν -te Ableitung, die im Bildbereich leicht berechnet werden kann [9]:

$$\left. \frac{d^\nu h}{dt^\nu} \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s^\nu G(s)\}.$$

Je nachdem ob

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{s^\nu G(s)\} > 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \{s^\nu G(s)\} < 0$$

gilt, liegt ein An- bzw. Unterschwingen vor. Es wird nun das Vorzeichen der Konstanten

$$U := \lim_{s \rightarrow \infty} \{s^\nu G(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s^\nu Z_G(s)}{N_G(s)} \right\}$$

untersucht. Entscheidend hierfür ist offensichtlich der Quotient der Koeffizienten der *höchsten* Potenz im Zähler- bzw. Nennerpolynom. Da das Nennerpolynom $N_G(s)$ ein monisches *HURWITZ*-Polynom ist, braucht man lediglich das Polynom $Z_G(s)$ zu studieren. Es besitzt im Allgemeinen N reelle linke Nullstellen $(-\alpha_i) < 0$, M reelle rechte Nullstellen $\zeta_i > 0$ und $2L$ konjugiert komplexe Nullstellen $(-\beta_i \pm j\gamma_i)$. Wir schreiben es in faktorisierter Form

$$\begin{aligned} Z_G(s) &= K \prod_{i=1}^N (s + \alpha_i) \prod_{i=1}^M (-s + \zeta_i) \prod_{i=1}^L [(s + \beta_i)^2 + \gamma_i^2] \\ &= K [s^N + \dots][(-s)^M + \dots][s^{2L} + \dots] = K [s^{N+2L+M} (-1)^M + \dots]. \end{aligned}$$

Hierbei ist gemäß (7) die Konstante K positiv. Man sieht, dass das Vorzeichen des Grenzwertes U durch

$$\text{sgn} \{U\} = (-1)^M$$

gegeben ist. Damit gilt: Ein BIBO-stabiles LZI-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$, einem positiven relativen Grad und einem positiven Grenzwert h_∞ seiner *balancierten* Sprungantwort

- weist genau dann ein Unterschwingen auf, wenn $G(s)$ eine *ungerade* Anzahl von *rechten reellen* Nullstellen besitzt bzw.
- weist genau dann ein Anschwingen auf, wenn $G(s)$ eine *gerade* Anzahl von *rechten reellen* Nullstellen besitzt².

Um ein besseres Bild von dem Verlauf der Sprungantwort zu erhalten, ist es sinnvoll, über die Anzahl der im Intervall $(0, \infty)$ auftretenden Vorzeichenwechsel von $h(t)$ eine Aussage zu machen, was in den nachfolgenden Ausführungen geschieht.

4 Schranken für die Anzahl der Nullstellen der Sprungantwort $h(t)$

Wir betrachten ein LZI-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ und positivem Differenzegrad. Das System besitzt n Pole s_i . Es wird *vorausgesetzt*, dass diese Pole *reell* sind, und dass insgesamt m paarweise verschiedene existieren. Diese Voraussetzung ist notwendig, um eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von interessierenden Systemfunktionen angeben zu können! Zunächst einige einfache Fakten aus der Analysis [5] für eine Funktion $g(t)$ und deren Integral $h(t)$: Wenn die Funktion $g(t)$ im Intervall $0 < t < \infty$ insgesamt N Nullstellen bzw. V Vorzeichenwechsel besitzt, so besitzt daselbst die Funktion $h(t)$ *höchstens* N Nullstellen bzw. V Vorzeichenwechsel. Natürlich ist die Differenz $N - V$ eine nichtnegative Zahl. Wir fassen nun $g(t)$ als Gewichtsfunktion und $h(t)$ als Sprungantwort des betrachteten Systems auf. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Nullstellen der Sprungantwort durch die maximale Anzahl der Nullstellen der Gewichtsfunktion beschränkt ist. Aus diesem Grund befassen wir uns im folgenden mit der Gewichtsfunktion. Diese hat im vorliegenden Fall die Struktur

$$g(t) = g_1(t)e^{s_1 t} + g_2(t)e^{s_2 t} + \dots + g_m(t)e^{s_m t}. \quad (10)$$

Die Polynome g_1, g_2, \dots, g_m haben jeweils den Grad k_1, k_2, \dots, k_m . Der Grad k_i ist hierbei kleiner als die Vielfachheit ρ_i des reellen Pols s_i

$$k_i \leq \rho_i - 1 \quad , \quad (11)$$

und es gilt

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m = n. \quad (12)$$

4.1 Eine obere Schranke

Nachfolgendes Lemma [5] erlaubt eine Aussage über die *maximale* Anzahl N_{\max} der Nullstellen obiger Funktion $g(t)$:

Die Funktion $g(t)$ nach (10) besitzt *höchstens*

$$N_{\max} = \sum_{i=1}^m (k_i + 1) - 1$$

²Man beachte, dass falls *keine* rechte reelle Nullstellen vorliegen, die Konstante U positiv ist. Wie in Beispiel 1 erwähnt, *können* dann Vorzeichenwechsel der Sprungantwort auftreten, sind allerdings *nicht* zwingend vorhanden. Im Unterschied zu dem Fall „rechte reelle Nullstellen“, gilt nun keine Balance-Relation!

reelle Nullstellen. Unter Beachtung von (11) und (12) kann N_{\max} nach oben zu

$$N_{\max} \leq \sum_{i=1}^m \rho_i - 1 = n - 1$$

abgeschätzt werden. Die Anzahl der vorliegenden ausschließlich reellen Pole liefert demnach eine *obere Schranke* für die Nullstellen und natürlich für die Vorzeichenwechsel der Funktion $g(t)$. Hierbei ist die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion irrelevant! Aufgrund des oben angeführten Satzes gilt dann:

Die Sprungantwort weist im Intervall $0 < t < \infty$ *höchstens* n reelle Nullstellen auf. D.h. es gibt *maximal* $n - 1$ *positive* und *reelle* Konstanten $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_{n-1}$ mit

$$h(\Delta_i) = 0.$$

Damit gilt auch für die Anzahl der Vorzeichenwechsel Ψ

$$\Psi \leq n - 1 \tag{13}$$

4.2 Eine untere Schranke

Angenommen, es existieren M reelle rechte Nullstellen. Dann gilt die Balance-Relation, und es kann leicht eine *untere* Schranke für die Vorzeichenwechsel Ψ der Sprungantwort angegeben werden. Sie hängt nur von der Natur von M ab. Wenn die Anzahl der rechten Nullstellen gerade ist, so gilt

$$2 \leq \Psi.$$

Wenn die Anzahl der rechten Nullstellen ungerade ist, so gilt

$$1 \leq \Psi.$$

Es sollen nun diese „trivialen“ Schranken verbessert werden. Dieses wird exemplarisch für eine ungerade Anzahl *verschiedener* Nullstellen dargelegt³. Wir wissen, es liegt ein Unterschwingen vor. Die Vorzeichenwechsel finden an den Stellen $t = \Delta_i$ statt und es gilt

$$\Delta_0 := 0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_\Psi$$

Wir nehmen an, dass die Anzahl der Vorzeichenwechsel Ψ kleiner als M ist. Es gelten nach (3) folgende M Integralgleichungen:

$$\int_0^{\infty} h(t)e^{-n_i t} dt = 0 \quad i = 1, \dots, M \tag{14}$$

bzw. für *beliebige* Konstanten k_1, k_2, \dots, k_M

$$k_1 \int_0^{\infty} h(t)e^{-n_1 t} dt + \dots + k_M \int_0^{\infty} h(t)e^{-n_M t} dt = 0$$

³Aus Stetigkeitsgründen ist zu erwarten, dass das Ergebnis sich nicht ändert, wenn eine reelle rechte Nullstelle mehrfach ist. Eine exakte - aber schwerfällige - Beweisführung kann mit Hilfe der Balance-Relationen (6) vollzogen werden.

bzw.

$$\int_0^{\infty} h(t)[k_1 e^{-n_1 t} + \dots + k_M e^{-n_M t}] dt = 0. \quad (15)$$

Dann kann durch eine entsprechende Wahl der Konstanten k_i eine Funktion

$$\hat{k}(t) = \sum_{i=1}^M \hat{k}_i e^{-n_i t}$$

konstruiert werden, die an den *gleichen* Stellen Δ_i ($i = 1, \dots, \Psi$) einen Vorzeichenwechsel aufweist wie die (angenommene) Sprungantwort $h(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{k}(t) < 0 & \quad \text{für} \quad \Delta_{2\rho} < t < \Delta_{2\rho+1} \quad \rho = 0, 1, \dots \\ \hat{k}(t) > 0 & \quad \text{für} \quad \Delta_{2\rho+1} < t < \Delta_{2\rho+2} \quad \rho = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Diese Wahl wäre hingegen unmöglich, wenn man M Vorzeichenwechsel verlangen würde. Das bedeutet, die Funktion $h(t)\hat{k}(t)$ wechselt im Intervall $(0, \infty)$ *nicht* ihr Vorzeichen und nimmt an den Stellen $t = \Delta_i$ den Wert Null an. Dann gilt allerdings

$$\int_0^{\infty} h(t)\hat{k}(t) dt \neq 0,$$

im Widerspruch zu der Integralgleichung (15) und zu den geltenden Balance-Relationen. Damit ist einsichtig, dass für die Anzahl der Vorzeichenwechsel folgende untere Schranke gilt:

$$M \leq \Psi. \quad (16)$$

Bemerkung: Folgender Satz von *LAGUERRE* [2],[4] kann benutzt werden, um eine Beziehung (Ungleichung) zwischen existierenden Vorzeichenwechsel einer Funktion und den Nullstellen eines sogenannten *LAPLACE*-Integrals zu formulieren:

Wir betrachten eine *reelle* Funktion $\alpha(t)$ mit beschränkter Variation [3] in dem Intervall $(0, R)$ für beliebige große positive Werte R . Es wird vorausgesetzt, dass sie eine stetige Ableitung

$$\beta(t) := \frac{d\alpha}{dt}$$

besitzt. Wir bilden für *reelle* Größen ξ das *LAPLACE*-Integral

$$f(\xi) := \int_0^{\infty} e^{-\xi t} d\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{-\xi t} \beta(t) dt. \quad (17)$$

Angenommen die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Funktion $\beta(t)$ beträgt Ψ , so besitzt die Funktion $f(\xi)$ im Konvergenzbereich des Integrals (17) *nicht mehr* als Ψ Nullstellen. Wir wählen nun als $\alpha(t)$ das Integral der Sprungantwort $h(t)$ eines BIBO-stabilen Systems mit der Übertragungsfunktion $G(s)$. Diese Wahl führt zu einer Funktion mit beschränkter Variation, da sie im betrachteten Intervall differenzierbar und deren Ableitung $h(t)$

beschränkt ist. Obiges Theorem besagt, dass *falls* die Sprungantwort $h(t)$ des Systems Ψ Vorzeichenwechsel aufweist, die Funktion

$$f(\xi) := \int_0^{\infty} e^{-\xi t} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \Big|_{s=\xi} = H(s = \xi) = \frac{1}{\xi} G(s = \xi) \quad (18)$$

nicht mehr als Ψ Nullstellen besitzt. In der Sprache der Regelungstechnik: die Übertragungsfunktion $G(s)$ weist nicht mehr als Ψ *rechte reelle* Nullstellen auf. Bedenkt man, dass beim Vorliegen reeller rechter Nullstellen die Balance-Relation gilt und damit Vorzeichenwechsel von $\beta(t)$ *zwingend* sind, so folgt aus dem Vorliegen von M rechten reellen Nullstellen die Ungleichung (16).

Zusammenfassung: Unter der Annahme n reeller Pole und M rechter reeller Nullstellen gilt für die Anzahl Ψ der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort die Ungleichung:

$$M \leq \Psi \leq n - 1 \quad . \quad (19)$$

4.3 Beispiele

Nachfolgende Beispiele demonstrieren unter Verwendung der Balance-Relation und der Relation (19), dass in bestimmten Fällen die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort eines Systems *identisch* ist mit der Anzahl der reellen rechten Nullstellen der Übertragungsfunktion.

Im Fall $n = 2$ gilt gemäß (19)

$$1 = M \leq \Psi \leq n - 1 = 1,$$

d.h. die Anzahl der rechten reellen Nullstellen stimmt mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel überein.

Im Fall $n = 3$ gilt

$$M \leq \Psi \leq n - 1 = 2.$$

Falls eine rechte Nullstelle vorliegt, existiert zwangsläufig genau ein Vorzeichenwechsel. Liegen zwei rechte Nullstellen vor, so können auch nur genau zwei Vorzeichenwechsel vorliegen. D.h. auch im Fall $n = 3$ stimmt die Anzahl der rechten reellen Nullstellen mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort überein.

Der Fall $n = 4$: Es gilt nun

$$M \leq \Psi \leq n - 1 = 3 \quad (20)$$

Falls eine einzige rechte Nullstelle vorliegt, ist es nicht möglich auszuschließen, dass 3 Vorzeichenwechsel existieren. Liegen 2 bzw. 3 Nullstellen vor, so stimmt wiederum aufgrund der Balance-Relation und der Ungleichung (20) die Anzahl der rechten reellen Nullstellen mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort überein.

Im allgemeinen Fall n gilt

$$M \leq \Psi \leq n - 1 \quad (= 1, 2, 3...)$$

In Anlehnung an die oben betrachteten einfachen Fälle ist offensichtlich: in den Fällen

$$M = n - 1 \quad \text{und} \quad M = n - 2 \geq 0$$

ist die Anzahl der rechten reellen Nullstellen *identisch* mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort. Sonst kann keine weitere Aussage gemacht werden.

Obige Beispiele geben zu der *Vermutung* Anlass, dass die Anzahl der rechten reellen Nullstellen der Übertragungsfunktion identisch ist mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort. Dies ist leider *falsch* wie das folgende Beispiel zeigt.

Ein Gegenbeispiel (Beispiel 3): Wir betrachten folgendes System der Ordnung 4. mit *einer* reellen rechten Nullstelle

$$G(s) = \frac{600(1-s)(s+0.2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}. \quad (21)$$

Dessen Sprungantwort weist ein Unterschwingen auf, besitzt allerdings 3 Vorzeichenwechsel (Nullstellen) im Intervall $(0, \infty)$!

5 Über die Nullstellen von *LAPLACE* - Integralen

Auch wenn im allgemeinen Fall die Anzahl der rechten reellen Nullstellen der Übertragungsfunktion *nicht* mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort übereinstimmt, stellt sich die prinzipielle Frage, ob die Anzahl und Lage der Vorzeichenwechsel einer Funktion $\beta(t)$ in einer analytischen Relation zu Kenngrößen der *LAPLACE*-Transformierten

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} \beta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

stehen. Man kann sich leicht vorstellen, dass der zahlenmässig größte Vorzeichenwechsel gewissermassen ein „Maß“ für die Normalität der Sprungantwort ist. Ab diesem Zeitpunkt, wechselt sie nicht mehr das Vorzeichen und strebt gegen einen Grenzwert.

Hierzu benutzen wir Erkenntnisse von *POST* [6], welche von *WIDDER* [11] verallgemeinert wurden. Der folgende Satz dient der Erfassung (Charakterisierung) der Vorzeichenwechsel einer Originalfunktion $\beta(t)$ mittels der zugehörigen Bildfunktion $F(s)$: *Falls* die Funktion $\beta(t)$ im Intervall $[0, \infty)$ an der Stelle δ ein Vorzeichenwechsel besitzt, so weist für *hinreichend große* Werte k die Funktion

$$F^{(k)}(s) := (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-st} t^k \beta(t) dt = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-st} t^k d\alpha(t) = \frac{d^k F(s)}{ds^k} \quad (22)$$

eine *reelle* Nullstelle ζ_k auf. Insbesondere gilt der Zusammenhang

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\zeta_k}{k} = \frac{1}{\delta}. \quad (23)$$

Das bedeutet: *falls* Ψ Vorzeichenwechsel der (reellen) Funktion $\beta(t)$ vorliegen, besitzt die (i.A. komplexwertige) Funktion

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(k)}(s)$$

Ψ *reelle* Nullstellen im Unendlichen!

Unter Beachtung der eingeführten Nomenklatur beim formulierten Satz von *LAGUERRE* (vgl. (17) und (18)) und unter der weiteren Voraussetzung

$$\alpha(0+) = \alpha(0) = 0,$$

die bei uns gegeben ist, kann man die Aussagen obigen Satzes verschärfen: *Falls* die Funktion $\beta(t)$ im Intervall $(0, R)$ für jeden beliebig großen positiven Wert R insgesamt Ψ Vorzeichenwechsel besitzt, so weist obiges Integral (22) in seinem Konvergenzintervall für hinreichend große k -Werte *genau* Ψ reelle Nullstellen auf. Diese können mit Hilfe von (23) berechnet werden.

Betrachtet man nun ein BIBO-stabiles System mit Tiefpasscharakter, so erfüllen seine Sprungantwort $h(t)$ bzw. deren Integral die gestellten Voraussetzungen für die Funktion $\alpha(t)$. Einfach formuliert: die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Sprungantwort stimmt überein mit der Anzahl der *reellen rechten* Nullstellen der *LAPLACE*-Transformierten der „zeitbeschwerten“ Sprungantwort $[t^k h(t)]$ für hinreichend große k -Werte.

5.1 Anwendung des *POST-WIDDER*-Theorems auf die Sprungantwort

Wir betrachten ein BIBO-stabiles LZI-System mit M *reellen rechten* Nullstellen

$$G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)} \quad \text{mit } G(s=0) > 0 \quad \text{und } G(s=\infty) = 0.$$

Wir haben obigen Satz auf die Sprungantwort $h(t)$ solch eines Systemen auf vielfältige Art angewandt: Die explizit (per Hand) ermittelten Ausdrücke $\frac{d^k H(s)}{ds^k}$ gestalten sich sehr unübersichtlich. Auch wenn die Funktion $h(t)$ - vgl. (10) - eine relativ einfache Struktur besitzt

$$h(t) = \sum_i h_i(t) e^{-s_i t},$$

wobei $h_i(t)$ Polynome der Variablen t sind, und die zugehörige *LAPLACE*-Transformierte $H(s)$ sogar angeschrieben werden kann, führt die Anwendung auch in den einfachsten Fällen(!) zu keinem befriedigenden Resultat. Bei der Verwendung von „symbolisch rechnenden“ Programmen war das Ergebnis ebenfalls ernüchternd, da schon bei niedrigem Grad der Differentiation die Programme versagten. Daraufhin wurde das Programm *MACSYMA* angewandt, wobei die Ermittlung der Nullstellen der abgeleiteten Funktionen mit Hilfe numerischer Algorithmen erfolgte. Sehr hilfreich war letztendlich das Verfahren von *DESCARTES* zur Ermittlung reeller Nullstellen. Damit wurde die *LAPLACE*-Transformierte der Sprungantwort

$$h(s) = \frac{1}{s} \frac{600(1-s)(s+0.2)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (24)$$

des schon behandelten Systems (21) untersucht. Der interessierte Leser möge mit Hilfe von *MACSYMA*⁴ bei geeigneter Initialisierung den Befehl

for k : 1 thru 40 do(hk :factor(diff(hk , s)), disp(k /realroots(num(hk))))

⁴MACSYMA ist ein Programmpaket der Firma Symbolics.

ausführen lassen. Es werden in einer Schleife für $k = 1, \dots, 40$ die reellen Nullstellen der Funktion hk ermittelt, die sich durch k -malige Differenzierung der Funktion (24) ergibt. Die Lage der Vorzeichenwechsel wird gemäß (23)

$$\delta = \frac{k}{\zeta_k}$$

berechnet. Ab der 7. Iteration erhalten wir 3 reelle Nullstellen ζ_k , aus denen die 3 Vorzeichenwechsel der Sprungantwort näherungsweise berechnet wurden. Es ist festzuhalten, dass die Konvergenz dieser Vorgehensweise nicht sehr gut war.

6 Verhältnisse am Standardregelkreis

Wir betrachten einen Standardregelkreis mit der Führungsgröße $r(t)$, der Ausgangsgröße $y(t)$ und der Regelabweichung $e(t)$

$$e(t) = r(t) - y(t).$$

Wir bezeichnen mit $P(s)$ bzw. $R(s)$ die Strecken- bzw. die Reglerübertragungsfunktion. Es wird angenommen, dass der Regler $R(s)$ den Regelkreis intern stabilisiert und dass die Strecke selbst nicht sprungfähig ist. Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises bezeichnen wir mit $L(s)$

$$L(s) := P(s)R(s) =: \frac{Z_L(s)}{N_L(s)}.$$

$T(s)$ sei die BIBO-stabile Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises. Bei verschwindendem Anfangszustand beschreiben folgende Relationen das Verhalten des Regelkreises im Bildbereich :

$$\begin{aligned} y(s) &= T(s)r(s), \\ T(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{Z_L(s)}{N_T(s)} \end{aligned} \quad (25)$$

und

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)}r(s) = [1 - T(s)]r(s).$$

Durch Einführung der komplementären Führungsübertragungsfunktion

$$S(s) := 1 - T(s) = \frac{N_L(s)}{N_T(s)} \quad (26)$$

erhalten wir

$$e(s) = S(s)r(s) = \frac{N_L(s)}{N_T(s)}r(s).$$

Die vorhin aufgestellten Überlegungen bezüglich der Rolle der rechten reellen Nullstellen einer Übertragungsfunktion können problemlos auf die Relationen (25) und (26) angewandt werden. Hierbei geht es um den Einfluss von rechten reellen Nullstellen des offenen Kreises auf den Verlauf der Sprungantwort des Regelkreises bzw. um den Einfluss von *rechten reellen Polstellen* des offenen Kreises auf den Verlauf der Regelabweichung $e(t)$ bei sprungartiger Führungsgröße. Verhältnisse am Standardregelkreis

7 Zustandsraum-Interpretation des Unterschwingens der Sprungantwort

Wir gehen von folgendem asymptotisch stabilen, steuerbaren und beobachtbaren n -dimensionalen LZI-System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (28)$$

aus und ermitteln die Werte des Zustandsvektors und der Ausgangsgröße für den Fall $u(t) = 1$. Es ergibt sich für den Zustandsvektor nach einigen Berechnungen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (29)$$

Der stationäre Wert des Zustandsvektors lautet dann

$$\mathbf{x}_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (30)$$

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, dass der zugehörige Grenzwert der Sprungantwort positiv ist:

$$y_\infty := -\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} > 0. \quad (31)$$

Obige Relation (29) wird nun umgeschrieben

$$\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = e^{\mathbf{A}t} [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}].$$

Damit ist ersichtlich, dass der transformierte Zustandsvektor

$$\bar{\mathbf{x}}(t) := -[\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}] = \mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}(t)$$

dem „freien“ System

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \quad (32)$$

mit der Ausgangsgröße

$$\bar{y} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \quad (33)$$

genügt. Aufgrund dessen entsprechen im ursprünglichen System (27, 28) bei konstanter Eingangsgröße $u = 1$ die Übergänge

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{x}_\infty \\ y(t=0) = 0 & \rightarrow y_\infty \end{array}$$

den Übergängen des freien Systems (32, 33):

$$\begin{array}{ll} \bar{\mathbf{x}}(t=0) = \mathbf{x}_\infty & \rightarrow \mathbf{0} \\ \bar{y}(t=0) = y_\infty & \rightarrow 0 \end{array}$$

Das Auftreten von Unterschwingen bedingt, dass ein endliches Intervall $0 < t < t_1$ existiert, in dem

$$\bar{y}(t) > y_\infty \quad (34)$$

gilt. Nachdem o.E.d.A. ⁵

$$\|\mathbf{c}\| = 1$$

gewählt werden kann, bedeutet das: die Trajektorie $\bar{\mathbf{x}}$ des Systems (32, 33) verläuft im Intervall $0 < t < t_1$ *derart*, dass deren Projektion auf \mathbf{c} einen größeren Wert als y_∞ annimmt.

7.1 Betrachtungen anhand einer Normalform

Die Betrachtungen vereinfachen sich bei der Benutzung von besonderen Zustandsraumdarstellungen. Wir nehmen an, dass das System in der Steuerbarkeits-Normalform vorliegt:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_B \mathbf{x} + \mathbf{e}_n u \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Hierbei sind die Matrix \mathbf{A}_B und der Vektor \mathbf{e}_n durch

$$\mathbf{A}_B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Der Vektor \mathbf{c} ist durch

$$\mathbf{c}^T := (c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1})$$

gegeben, wobei $\|\mathbf{c}\| = 1$ gilt. Zur Erinnerung: die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}.$$

Die stationären Werte \mathbf{x}_∞ bzw. y_∞ gemäß (30) und (31) ergeben sich, da man die benötigte Matrix \mathbf{A}_B^{-1} explizit angeben kann, zu

$$\mathbf{x}_\infty = -\frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0} \mathbf{e}_1$$

bzw.

$$y_\infty = c_0/a_0 \quad .$$

Unterschwingen bedeutet nun folgendes: die Trajektorie $\bar{\mathbf{x}}$ des freien Systems

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}_B \bar{\mathbf{x}} \quad \bar{y} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit } \bar{\mathbf{x}}(t=0) =: \bar{\mathbf{x}}_0 = \frac{1}{a_0} \mathbf{e}_1$$

⁵Diese Annahme ist tatsächlich keine Einschränkung, weil sich durch eine entsprechende Skalierung die Eigenschaft des Unterschwingens nicht ändert.

darf im Intervall $0 < t < t_1$ *nicht* so verlaufen, dass ihre Projektion auf \mathbf{c} einen größeren Wert als c_0/a_0 annimmt. Möchte man andererseits gezielt ein Zählerpolynom für $G(s)$ derart suchen, dass Unterschwingen vorliegt, so kann dies nun auch einfach bewerkstelligt werden. Aufgrund von \mathbf{A}_B und \mathbf{e}_n stehen nämlich der Anfangszustand $\bar{\mathbf{x}}_0$ und der gesamte Trajektorienverlauf fest. Wir müssen nur mehr eine Projektionsrichtung mit der oben genannten Eigenschaft (34) suchen; mit der Festlegung dieser Richtung ist automatisch das Zählerpolynom von $G(s)$ festgelegt.

Einige bemerkenswerte Details

- Der Anfangszustand $\bar{\mathbf{x}}_0$ liegt im „1. Quadranten“.
- Die Richtung der Trajektorie im Anfangszustand $\bar{\mathbf{x}}_0$ lautet *immer*:

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{A}_B \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

- Ein zu s_i gehöriger Rechts-Eigenvektor \mathbf{p}_i lautet (bekanntlich):

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} 1 & s_i & s_i^2 & \cdots & s_i^{n-1} \end{pmatrix}^T.$$

Wir gehen nun von n verschiedenen, reellen, negativen geordneten Eigenwerten s_i

$$s_1 > s_2 > \dots > s_n$$

aus. Dann nähert sich die Trajektorie für hinreichend große t -Werte dem zum größten (betragsmäßig kleinsten) Eigenwert s_1 gehörigen Eigenvektor \mathbf{p}_1 , der somit von der Richtung erstaunlich eingeschränkt ist. Weiters zeigt kein Eigenvektor in den „1. Quadranten“ (bzw. dem entsprechenden Gebiet bei höheren Ordnungen mit $\bar{x}_i \geq 0$).

- Zeigt der Ausgangsvektor \mathbf{c} *nicht* in den 1. Quadranten, kann das Zählerpolynom von $G(s)$ kein *HURWITZ*-Polynom sein. Die Übertragungsfunktion besitzt dann mindestens eine Nullstelle mit positivem Realteil.

7.2 Beispiel

Wir gehen von folgendem System 2. Ordnung mit den Eigenwerten $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$ aus:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Abgesehen vom Ausgangsvektor \mathbf{c} liegt die Trajektorie des transformierten Systems

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fest (siehe Abbildung 2). Mit dem Ausgangsvektor $\mathbf{c}^{(1)}$ ergibt sich kein Unterschwingen, mit $\mathbf{c}^{(2)}$ hingegen schon. Die Übertragungsfunktion im ersten Fall

$$G^{(1)}(s) = \frac{s+3}{\sqrt{10}(s+1)(s+2)}$$

weist keine rechte Nullstelle auf, im Gegensatz zum zweiten Fall:

$$G^{(2)}(s) = \frac{s-1}{\sqrt{2}(s+1)(s+2)}.$$

Offensichtlich können Ausgangsvektoren, die in den 1. Quadranten zeigen ($c_0 \geq 0, c_1 \geq 0$), kein Unterschwingen hervorbringen.

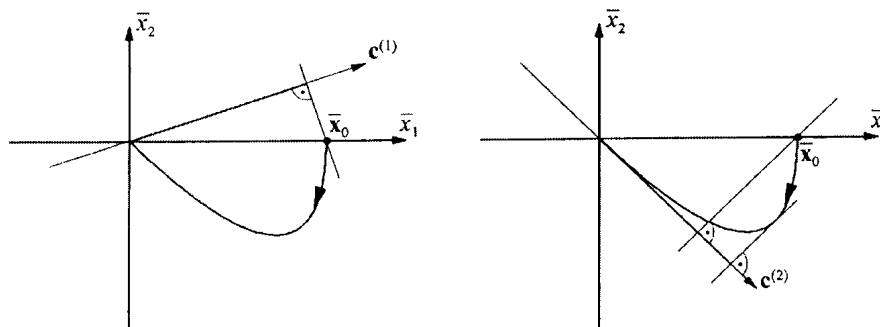


Abbildung 2: Trajektorie auf zwei verschiedene Ausgangsvektoren projiziert

7.3 Beispiel

Wir gehen von einem System 3. Ordnung mit den Eigenwerten $s_1 = -1, s_2 = -2$ und $s_3 = -3$ aus

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Die Trajektorie des transformierten Systems

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist in Abbildung 3 ersichtlich. Auch hier können alle Ausgangsvektoren \mathbf{c} , die in den 1. Oktanten zeigen ($c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$), kein Unterschwingen hervorrufen. Einige dieser Ausgangsvektoren bewirken aber zwei Vorzeichenwechsel der Sprungantwort! Einen einleuchtenden Grenzfall stellt zum Beispiel der Ausgangsvektor

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 1]$$

dar, für den jene Teile der Trajektorie mit $\bar{x}_3 > 0$ eine negative Sprungantwort bewirken⁶. Ein ähnlicher Ausgangsvektor mit $c_0 \neq 0$ lautet

$$\mathbf{c}^T = \frac{1}{\sqrt{1.1616}} [0.04 \ 0.4 \ 1]$$

⁶Geht man von negativen, reellen Eigenwerten aus, wird die Trajektorie für sehr große t immer $\bar{x}_3 > 0$ aufweisen, weil die Eigenvektoren $\mathbf{p}_i = (1 \ s_i \ s_i^2)^T$ lauten.

und führt bei entsprechender Skalierung zu der bereits im Abschnitt 2 behandelten Übertragungsfunktion (4)

$$T(s) = \frac{150(s + 0.2)^2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

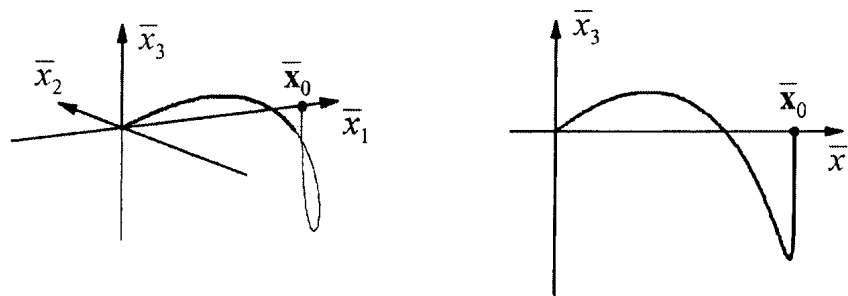


Abbildung 3: Trajektorie eines Systems 3. Ordnung

Literatur

- [1] Horn M., Dourdoumas N.: Regelungstechnik. Pearson Verlag, München, 2004
- [2] Laguerre E.: Oeuvres, 1, Sur la Théorie des Équations Numériques. Journal de Mathématiques pures et appliqués, 3 série, t. IX, 1883
- [3] Lang S.: Undergraduate Analysis (Kapitel 10, § 4). Springer Verlag New York, Berlin, 1987
- [4] Obreschkoff N.: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome, §24. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963
- [5] Pólya G., Szegő G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Band II, Berlin 1925
- [6] Post E.: Generalized Differentiation, Tran. Amer. Math. Soc. 32 (1930), pp. 723-781
- [7] Reinschke K.: Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie. Springer Verlag, 2006
- [8] Skogestad S., Postlethwaite I.: Multivariable Control Systems. John Wiley & Sons, 1997
- [9] Vidyasagar M.: On Undershoot and Nonminimum Phase Zeros. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 5, pp. 440, 1986
- [10] Weinmann A.: Regelungen: Analyse und Entwurf technischer Systeme. Springer, 1994
- [11] Widder D.V.: The LAPLACE Transform. Princeton University Press, 1941

