ISSN 1562 - 2703

INTERNATIONAL JOURNAL AUTOMATION AUSTRIA

HEFT 2 Jg. 15, (2007)

INHALT *Seite*

GAUSCH F., DOURDOUMAS N.:
Ein Frequenzkennlinien-Verfahren für Abtastregelkreise 65

WEINMANN A.:
Robust Stability Radius Gradient. A Duality Approach for High-Order Systems 86

WINKLER M., SCHUSS M.:
Regelung einer instabilen Regelstrecke mit ausgeprägtem Reibungseinfluss und erheblicher Systemtotzeit 98

WEINMANN A.:
The Encirclements of the Hodograph of Perturbed High-Order Dynamic Systems 117

WEINMANN A.:
Eliminating Double Solutions in Lyapunov Equations 130

SCHLAGLICHTER 135

BUCHBESPRECHUNGEN 139

DISSERTATIONSKURZFASSUNGEN 141

DIPLOMARBEITEN 145

VERANSTALTUNGEN 146

IJAA SCOPE

"International Journal Automation Austria" publishes top quality, peer reviewed papers in all areas of automatic control concerning continuous and discrete processes and production systems.

Only original papers will be considered. No paper published previously in another journal, transaction or book will be accepted. Material published in workshops or symposia proceedings will be considered. In such a case the author is responsible for obtaining the necessary copyright releases. In all cases, the author must obtain the necessary copyright releases before preparing a submission.

Papers are solicited in both theory and applications.

Before preparing submissions, please visit our instructions to authors (see back cover) or web page.

Copyright © IFAC - Beirat. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored, transmitted or disseminated, in any form, or by any means, without prior written permission from IFAC - Beirat, to whom all requests to reproduce copyright material should be directed, in writing.

International Journal Automation Austria also is the official executive authority for publications of IFAC - Beirat Österreich.

Imprint:
Propagation of Automatic Control in Theory and Practice.
Frequency: Aperiodically, usually twice a year.
Publisher: IFAC - Beirat Österreich, Peter Kopacek, Alexander Weinmann
Editors in Chief: Alexander Weinmann, Peter Kopacek

Coeditors: Dourdoumas, N. (A) Fuchs, H. (D) Jörgl, H. P. (A)
Noe, D. (SLO) Schaufelberger, W. (CH)
Schlacher, K. (A) Schmidt, G. (D) Troch, I. (A)
Vamos, T. (H) Wahl, F. (D)

Address: Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik (E325/A6), TU-Wien,
A-1040 Wien, Favoritenstrasse 9-11, Austria
Phone: +43.1.58801-31801; FAX: +43.1.58801-31899
E-Mail: e318@ihrt.tuwien.ac.at
Homepage: http: //www.ihrt.tuwien.ac.at/IFAC_AUT/
http://www.acin.tuwien.ac.at/IJAA/index.htm
Layout: Eva Schirmbrand
Printing: Grafisches Zentrum HTU-GmbH

Ein Frequenzkennlinien-Verfahren für Abtastregelkreise

F. Gausch*, N. Dourdoumas†

Kurzfassung

Ziel der nachfolgenden Ausführungen ist die Übertragung der einfachen, aber sehr effektiven Vorgehensweise beim klassischen Frequenzkennlinien-Verfahren (FKL-Verfahren) auf den zeitdiskreten Fall. Zur Erinnerung: Beim klassischen FKL-Verfahren werden die gegebenen Spezifikationen für die Sprungantwort des Regelkreises anhand zweier elementarer Relationen in Spezifikationen für den Frequenzgang des offenen Kreises umgerechnet. Das Ziel ist, durch geeignete Regler den Frequenzgang des offenen Regelkreises so zu formen, dass die Spezifikationen zumindest in erster Näherung erfüllt sind. Das Stabilitätsproblem wird dadurch gelöst, dass nach Voraussetzung Systeme „vom einfachen Typ" betrachtet werden. Das hat zur Folge, dass eine positive Phasenreserve Stabilität des Regelkreises garantiert.

Schlüsselwörter: *Zeitdiskrete Systeme, dominantes Polpaar, Abtastregelkreis, Entwurf mir Frequenzkennlinien*

Abstract

The objective of the following treatise is the assignment of the simple but very effective design procedure using the classical frequency characteristic method (loop shaping method) to the discrete-time case. Recall the facts: The feature of the loop shaping method is the conversion of given specifications for the step response of the closed loop system with two elementary relations. The aim is shaping the frequency response of the open loop by suitable compensators so that the specifications are achieved at least approximately. The stability problem is solved by the assumption that „simple-typed" systems are considered. This has the consequence that a positive phase margin guarantees stability.

Key words: *Discrete-time systems, dominant close-loop poles, sampled-data system, computer-controlled system, loop shaping design*

1 Grundlegende Fakten

In den nachfolgenden Ausführungen werden gewisse benötigte, grundlegende Fakten aus der Theorie linearer, zeitkontinuierlicher bzw. diskreter, zeitinvaranter Systeme in knapper

*Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, D-33098 Paderborn, email: gausch@uni-paderborn.de

†Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, email: nicolaos.dourdoumas@tugraz.at

Form angegeben. Das FKL-Verfahren basiert auf der Idee, dass der Regelkreis näherungsweise durch eine Übertragungsfunktion mit einem dominanten Polpaar beschrieben wird.

1.1 Kenngrößen und Relationen eines zeitkontinuierlichen Systems mit dominantem Polpaar

Die Übertragungsfunktion des offenen Standard-Regelkreises lautet

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \qquad \text{mit} \quad 1 > \zeta > 0 \quad \text{und} \quad \omega_n > 0. \tag{1}$$

Es ergibt sich damit die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

mit dem sogenannten dominanten Polpaar (s. z.B. [4], [5])

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{2}$$

Die zugehörige Gewichtsfunktion $g(t)$ lautet

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t). \tag{3}$$

Mit Hilfe des Winkels Φ_ζ gemäß

$$\tan\Phi_\zeta := \left|\frac{\mathrm{Re}(s_{1,2})}{\mathrm{Im}(s_{1,2})}\right| = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4}$$

ergibt sich für (3)

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\cos\Phi_\zeta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t). \tag{5}$$

Für die Sprungantwort $h(t)$ erhalten wir unter Benutzung von (4)

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \Phi_\zeta).$$

Der maximale Wert der Sprungantwort, die **Überschwingweite** M_p, ergibt sich zu

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = M_p(\zeta). \tag{6}$$

Das **Überschwingen** ist anhand

$$\ddot{u} := M_p - 1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi\tan\Phi_\zeta} \tag{7}$$

definiert.

Die **Anstiegszeit** t_r ist ein Indikator für die Schnelligkeit der Sprungantwort $h(t)$, vom Wert 0 ausgehend den Wert 1 zu erreichen. Sie wird mit Hilfe des Wertes der Steigung

dh/dt der Sprungantwort also der Gewichtsfunktion $g(t)$ an einer geeignet gewählten Stelle $t = t_m$

$$t_r := \frac{1}{g(t_m)} \tag{8}$$

definiert. Bei der Wahl des Zeitpunktes t_m wird in der Fachliteratur oft der Wert $h(t_m) = 0.5$ für die Sprungantwort vorgeschlagen. Diese durchaus sinnvolle Wahl führt (s. [5]) allerdings zu mathematisch nicht einfach handbaren Relationen. Alternativ zur Festlegung von t_m betrachtet man den Maximalwert der Änderungsgeschwindigkeit d^2h/dt^2 der Sprungantwort, da man damit mathematisch einfache Relationen erhält: Die Anstiegszeit t_r ergibt sich anhand des ersten Maximums der Gewichtsfunktion an der Stelle t_m :

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_m} = 0. \tag{9}$$

Berechnet man den Wert t_m mit Hilfe von (9), so lautet die Anstiegszeit nach (8) unter Benutzung von (4)

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} \exp\left\{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right\} = \frac{1}{\omega_n} \exp\left\{(\frac{\pi}{2} - \Phi_\zeta)\tan\Phi_\zeta\right\}. \tag{10}$$

Damit ist das Produkt $\omega_n t_r$ eine Funktion des Dämpfungsgrades ζ

$$\omega_n t_r = \omega_n t_r(\zeta)\ . \tag{11}$$

Die **Durchtrittfrequenz** ω_c ergibt sich aus der Forderung $|L(j\omega_c)| = 1$ für den offenen Kreis. Man erhält dann

$$(\frac{\omega_c}{\omega_n})^2 = -2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4} \qquad \text{d.h.} \quad \frac{\omega_c}{\omega_n} = \frac{\omega_c}{\omega_n}(\zeta). \tag{12}$$

Die normierte Durchtrittsfrequenz ω_c/ω_n hängt ausschliesslich vom Parameter ζ ab.

Für die **Phasenreserve** Φ_r ergibt sich im vorliegenden Fall

$$\Phi_r := \pi + \arg\{L(j\omega_c\} = \arctan(2\zeta\frac{\omega_n}{\omega_c}) \qquad \text{d.h.} \quad \Phi_r = \Phi_r(\zeta). \tag{13}$$

Sie ist ebenfalls eine Funktion des Dämpfungsgrades ζ.

1.2 Das klassische Frequenzkennlinienverfahren

Beim Frequenzkennlinienverfahren (s. z.B. [3], [5]) übersetzt man Spezifikationen des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich in solche des offenen Kreises im Frequenzbereich; ausgehend von der Streckenübertragungsfunktion formt man durch Hinzufügen eines geeigneten Reglers den Frequenzgang des offenen Regelkreises. Die Spezifikationen im Zeitbereich betreffen Kenndaten der Sprungantwort, nämlich die Überschwingweite M_p und die Anstiegszeit t_r. Aus diesen Größen gewinnt man durch Benutzung von Näherungsformeln zugehörige Werte für die Phasenreserve Φ_r und die Durchtrittsfrequenz ω_c. Dieses Vorgehen wird folgermaßen legitimiert: betrachtet man bei einem System mit dominantem Polpaar die Summe $\Sigma(\zeta)$ des prozentualen(!) Überschwingens

$$\ddot{u}_\% := 100 * [M_p(\zeta) - 1]$$

und der Phasenreserve $\Phi_r(\zeta)$ ausgedrückt in Grad(!)

$$\Sigma(\zeta) := 100 * [M_p(\zeta) - 1] + \Phi_r(\zeta),$$

so zeigt sich, dass diese Summe in guter Näherung konstant ist (s. [3])

$$\Sigma \approx 70 \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \ . \tag{14}$$

Damit kann eine Forderung für die Überschwingweite in eine für die Phasenreserve umgewandelt werden:

$$\Phi_r = 70 - 100 * (M_p - 1) \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \ .$$

Bildet man wiederum unter Verwendung von (10) und (12) das Produkt $\omega_c t_r$

$$\Gamma(\zeta) := \omega_c t_r = \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}} \exp\left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \right\},$$

so ist es näherungsweise ebenfalls konstant (s. [3])

$$\Gamma \approx 1.4 \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \ . \tag{15}$$

Damit kann aus einem vorgegebenem Wert für die Anstiegszeit ein Wert für die Durchtrittsfrequenz ermittelt werden:

$$\omega_c = \frac{1.4}{t_r} \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \ .$$

1.3 Beschreibung linearer und zeitininvarianter zeitdiskreter Systeme

Wir betrachten ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der skalaren Eingangsgröße u und der skalaren Ausgangsgröße y. Sein Eingangs-Ausgangs-Verhalten wird üblicherweise mit Hilfe der z-Transformation anhand der z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mu_G(z)}{\nu_G(z)}$$

beschrieben (s. z.B. [2]). Laut Voraussetzung sind die Polynome $\mu_G(z)$ und $\nu_G(z)$ teilerfremd und besitzen reelle Koeffizienten. Obige Beschreibungsform ist leider nicht geignet für die Benutzung von logarithmischen Kennlinien (*BODE*-Diagrammen). Dieses Manko kann man allerdings beheben: wir unterwerfen die komplexe Variable z folgender bilinearen Transformation -hierbei ist Ω_0 ein reeller Maßstabfaktor-

$$z = \frac{1 + \frac{w}{\Omega_0}}{1 - \frac{w}{\Omega_0}}, \quad \text{bzw.} \quad w = \Omega_0 \frac{z-1}{z+1}. \tag{16}$$

Die bilineare Transformation (16) transformiert einen Punkt z *innerhalb* (außerhalb) des Einheitskreis in die *linke* (rechte) offene w-Ebene. Punkte $z = e^{j\omega T}$ *auf* dem Einheitskreis werden *auf* die imaginäre Achse $j\Omega$ der w-Ebene abgebildet. Beschränken wir uns hierbei

auf den Bereich $0 \leq \omega T < \pi$, dann wird er in den transformierten Frequenzbereich $0 \leq \Omega < \infty$ abgebildet und es gilt

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \tan\frac{\omega T}{2} .$$

Die zugehörige w-Übertragungsfunktion ist dabei[1]

$$\hat{G}(w) := G(z = \frac{1+\frac{w}{\Omega_0}}{1-\frac{w}{\Omega_0}}) = \frac{\beta_m w^m + ... + \beta_0}{\alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + ... + \alpha_0}(\Omega_0 - w)^{n-m} .$$

Die Beschreibung anhand der w-Übertragungsfunktion ermöglicht die Übernahme mancher Techniken und bewährter Verfahren, die bei Verwendung „zeitkontinuierlicher Systemmodelle" üblich sind. Insbesondere ist nun die Verwendung von *BODE*-Diagrammen möglich, da $\hat{G}(j\Omega)$ eine gebrochen rationale Funktion von $j\Omega$ ist!

2 Stabilität eines zeitdiskreten Standardregelkreises (Abtastregelkreises)

Wir betrachten einen zeitdiskreten Standardregelkreis und bezeichnen mit

$$L(z) = \frac{\mu_L(z)}{\nu_L(z)} \tag{17}$$

die kausale z-Übertragungsfunktion des offenen Kreises. Sie ergibt sich aus der Serienschaltung eines Reglers mit der Übertragungsfunktion $R(z)$ und der Strecke mit der Übertragungsfunktion $P(z)$. Letztere beschreibt (s. z.B. [7]) das System, welches aus der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $P_c(s)$, dem vorgeschalteten Halteglied und dem nachgeschalteten Abtaster besteht. Sie läßt sich anhand der Beziehung

$$P(z) = (1-z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}P_c(s)\right\} \tag{18}$$

berechnen. Die zugehörige Führungs-Übertragungsfunktion lautet dann

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)}.$$

Damit sie realisierbar, d.h. der Regelkreis nicht entartet ist, muss deren Differenzengrad d_T nichtnegativ sein bzw.

$$1 + L(z = \infty) \neq 0. \tag{19}$$

Die „Übersetzung" dieser Fakten in den w-Bereich erfolgt geradlinig: Unterwerfen wir die Übertragungsfunktion (17) der w-Transformation, so erhalten wir die zugehörigen Übertragungsfunktionen

$$\hat{L}(w) = \frac{\mu_{\hat{L}}(w)}{\nu_{\hat{L}}(w)} \qquad \text{und} \qquad \hat{T}(w) = \frac{\hat{L}(w)}{1+\hat{L}(w)}.$$

[1] Der Grad des Polynoms $\nu_G(z)$ ist n, der Grad des Polynoms $\mu_G(z)$ beträgt m. Man beachte, dass β_m oder α_n gleich Null sein können.

Die Bedingung (19) für die Kausalität des Regelkreises lautet dann im w-Bereich

$$1 + \hat{L}(w = \Omega_0) \neq 0.$$

Damit können wir folgenden Stabilitätssatz formulieren:
Satz: Der kausale zeitdiskrete Regelkreis ist genau dann BIBO-stabil, wenn

$$1 + \hat{L}(w = \infty) \neq 0$$

gilt *und* das Nennerpolynom von $\hat{T}(w)$ ein *HURWITZ*-Polynom ist. Die Überprüfung der Stabilität eines Regelkreises kann mit Hilfe des *NYQUIST*-Kriteriums erfolgen. Wir benutzen hierbei den Frequenzgang $\hat{L}(j\Omega)$ bzw. die Funktion $1 + \hat{L}(j\Omega)$ und den Begriff der stetigen Winkeländerung $\Delta\text{arc}\left\{1 + \hat{L}(j\Omega)\right\}$. In vollständiger Analogie zum kontinuierlichen Fall (s. [3]) bedeutet dieses:
Satz (NYQUIST-Kriterium): Der kausale zeitdiskrete Regelkreis ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung[2] der Funktion $1 + \hat{L}(j\Omega)$

$$\Delta\text{arc}\left\{1 + \hat{L}(j\Omega)\right\} = \left(\frac{n_a}{2} + n_r\right)\pi \tag{20}$$

beträgt. Hierbei symbolisieren n_a bzw. n_r die Anzahl der Pole der Übertragungsfunktion $\hat{L}(w)$ *auf* bzw. *rechts* der imaginären Achse der komplexen w-Ebene.

Diese Überprüfung kann u.U. vereinfacht erfolgen. Zur Erinnerung: Im zeitkontinuierlichen Fall kann -wenn der offene Regelkreis einem System vom sogenannten einfachen Typ entspricht- die Stabilität des Regelkreises durch die sehr einfach durchzuführende Überprüfung des Vorzeichens der Phasenreserve Φ_r überprüft werden: Es liegt genau dann BIBO-Stabilität vor, wenn die Phasenreserve positiv ist, d.h. $\Phi_r > 0$. Letztlich ist darin die konzeptuell einfache Durchführung der Reglersynthese mit Hilfe logarithmischer Frequenzkennlinien (*BODE*-Diagrammen) begründet! Es ist daher naheliegend, ein ähnliches Vorgehen bei zeitdiskreten Systemen anzustreben. Hierzu führen wir den Begriff zeitdiskretes System „vom einfachen Typ" ein:
Definition: Wir bezeichnen ein kausales zeitdiskretes System mit der Übertragungsfunktion $\hat{L}(w)$ „vom einfachen Typ", wenn

1. alle Pole einen negativen Realteil haben, mit Ausnahme eines evtl. vorliegenden einfachen Pols bei $w = 0$
2. der Verstärkungsfaktor positiv ist
3. der Betrag des Frequenzganges für *genau eine* positive Frequenz Ω_c den Wert 1 annimmt, d.h. $\left|\hat{L}(j\Omega_c)\right| = 1$
4. der Grenzwert $\hat{L}(j\Omega = \infty)$ die Bedingung $\left|\hat{L}(j\Omega = \infty)\right| < 1$ erfüllt[3].

Damit lässt sich folgender Satz formulieren:
Satz (Vereinfachtes Stabilitätskriterium): Unter der Annahme eines zeitdiskreten Systems „vom einfachen Typ" ist der zeitdiskrete kausale Standardregelkreis genau dann BIBO-stabil, wenn für die Phasenreserve

$$\hat{\Phi}_r := \text{arc}\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\} + \pi > 0$$

gilt.

[2] Hierbei wird die sogenannte transformierte Frequenz Ω von 0 bis ∞ variiert.
[3] Man beachte, dass im Vergleich zum zeitkontinuierlichen Fall die 4. Eigenschaft eine zusätzliche ist.

3 Ein zeitdiskretes System mit dominantem Polpaar

3.1 Der zeitdiskrete *offene* Standard-Regelkreis

Ausgehend von einem zeitkontinuierlichen offenen Kreis mit der Übertragungsfunktion nach (1) ist die z-Übertragungsfunktion des offenen Standard-Abtast-Regelkreises durch

$$L(z) = (1 - z^{-1})\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right\}$$

gegeben. Unter Verwendung der Abtastzeit (Diskretisierungszeit) T_a ergibt sich nach einigen Berechnungen

$$L(z) = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{(z-1)\,[z - \exp(-2\zeta\omega_n T_a)]} = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \delta_1 z + \delta_0}. \tag{21}$$

Hierbei wurden für die Polynomkoeffizienten im Nenner bzw. Zähler der Übertragungsfunktion folgende Abkürzungen verwendet:

$$\delta_0 := \exp(-2\zeta\omega_n T_a) \qquad \delta_1 := -[1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a)] \tag{22}$$

$$\beta_0 := \frac{1}{4\zeta^2}[-1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a) - (2\zeta\omega_n T_a)\exp(-2\zeta\omega_n T_a)] \tag{23}$$

und

$$\beta_1 := \frac{1}{4\zeta^2}\left[-1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a) + 2\zeta\omega_n T_a\right]. \tag{24}$$

Die Polynomkoeffizienten sind Funktionen f_i der Größen ζ, ω_n, und T_a, wobei sie in charakteristischen Gruppierungen erscheinen. Auch alle daraus abgeleiteten Größen weisen die gleiche Abhängigkeit auf, die wir durch $f_i(\zeta, \omega_n T_a)$ darstellen. Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden wir ζ und $\omega_n T_a$ als zwei freie Variablen betrachten.

Die Polynomkoeffizienten von $L(z)$ erfüllen gewisse Ungleichungen (s. [1]). Es gilt

$$1 > \delta_0(\zeta, \omega_n T_a) > 0 \qquad \text{und} \qquad \delta_1(\zeta, \omega_n T_a) < -1 \tag{25}$$

bzw.

$$\beta_0(\zeta, \omega_n T_a) > 0 \qquad \text{und} \qquad \beta_1(\zeta, \omega_n T_a) > 0\ . \tag{26}$$

Sie legen die Lage der Pole und der Nullstelle zueinander fest (s. Abbildung 1).

3.1.1 Beschreibung des zeitdiskreten *offenen* Regelkreises im transformierten Frequenzbreich

Wir betrachten den offenen zeitdiskreten Standardkreis mit der z-Übertragungsfunktion $L(z)$ nach (21) und unterwerfen diese der bilinearen Transformation (16) mit der speziellen Wahl

$$\Omega_0 := \frac{2}{T_a}, \tag{27}$$

wobei der Parameter T_a gleich der Abtastzeit ist. Man erhält nach einigen Berechnungen die w-Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$\hat{L}(w) := L(z = \frac{1 + \frac{w}{\Omega_0}}{1 - \frac{w}{\Omega_0}}) = V(1 - \frac{w}{\Omega_0})\frac{(1 + \frac{w}{\Omega_Z})}{w(1 + \frac{w}{\Omega_N})}. \tag{28}$$

Der Vorteil dieser Beschreibung liegt darin, dass für hinreichend kleine Werte der Abtastzeit T_a die w-Übertragungsfunktion $\hat{L}(w)$ gegen die Übertragungsfunktion $L(s)$ des zeitkontinuierlichen(!) Systems strebt. Im Grenzfall gilt dann

$$\lim_{T_a \to 0} \hat{L}(w) = L(w).$$

Die benutzten Konstanten in (28) ergeben sich anhand folgender Beziehungen:

$$V = \frac{\omega_n}{2\zeta} \tag{29}$$

$$\Omega_N = \Omega_0 \tanh \alpha \qquad \Omega_Z = \Omega_0 \frac{1}{-1/\alpha + \coth \alpha} \qquad \text{mit } \alpha := \zeta \omega_n T_a \,. \tag{30}$$

Man beachte, dass folgende Ungleichungen gelten (s. [1]):

$$-\Omega_Z < -\Omega_N < 0 \,.$$

Das bedeutet, dass die Nullstelle $n_1 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ der z-Übertragungsfunktion gemäß (21) negativ ist und *im* Einheitskreis links von der Polstelle liegt.
Die Pol-Nullstellen-Konfiguration der drei offenen Systeme $L(s)$, $L(z)$ und $\hat{L}(w)$ ist in Abbildung 1 ersichtlich.

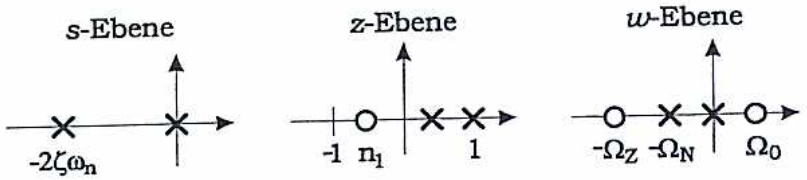


Abbildung 1: Pol-Nullstellen-Konfiguration der offenen Systeme

Ausgehend von der Übertragungsfunktion $\hat{L}(w)$ gemäß (28), können wir Kenndaten wie Phasenreserve und Durchtrittsfrequenz ermitteln.

3.2 Der zeitdiskrete *geschlossene* Standard-Regelkreis

Die Führungs-Übertragungsfunktion lautet nach Verwendung der Relation (21)

$$T(z) = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + (\delta_1 + \beta_1) z + (\delta_0 + \beta_0)} =: \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}. \tag{31}$$

Die Nullstelle ist dieselbe wie beim offenen Kreis und lautet unter Verwendung von (23) und (24)

$$n_1 = -\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{1 - \exp(-2\zeta\omega_n T_a) + (2\zeta\omega_n T_a)\exp(-2\zeta\omega_n T_a)}{-1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a) + 2\zeta\omega_n T_a}. \tag{32}$$

Die Koeffizienten des Nennerpolynoms von $T(z)$ ergeben sich zu:

$$\alpha_0 = \exp(-2\zeta\omega_n T_a) + \frac{1}{4\zeta^2}\left[1 - \exp(-2\zeta\omega_n T_a) - 2\zeta\omega_n T_a \exp(-2\zeta\omega_n T_a)\right] \tag{33}$$

und

$$\alpha_1 = -[1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a)] + \frac{1}{4\zeta^2}\left[-1 + \exp(-2\zeta\omega_n T_a) + 2\zeta\omega_n T_a\right]. \tag{34}$$

Damit erhalten wir unter Beachtung von (22) und (26) folgende Parameter-Abhängigkeiten:

$$\alpha_0 = \alpha_0(\zeta, \omega_n T_a) > 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha_1 = \alpha_1(\zeta, \omega_n T_a). \tag{35}$$

Der Regelkreis besitzt laut Voraussetzung ein konjugiert komplexes Polpaar im Einheitskreis. Letzteres besitzt unter Verwendung der Abtastzeit T_a die Polar-Form

$$z_{1,2} =: \exp\{(-\sigma \pm j\varpi)T_a\} = \exp(-\sigma T_a)[\cos(\varpi T_a) \pm j \sin(\varpi T_a)]. \tag{36}$$

Obige Beschreibung wird sich bei einigen nachfolgenden Betrachtungen und Interpretationen als vorteilhaft erweisen. Damit kann $T(z)$ folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$T(z) = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 - 2\exp(-\sigma T_a)\cos(\varpi T_a) + \exp(-2\sigma T_a)}. \tag{37}$$

Demnach gelten die Relationen (vgl. (31))

$$\alpha_0 = \exp(-2\sigma T_a) \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma = -\frac{1}{2T_a}\ln\alpha_0 \tag{38}$$

und

$$\alpha_1 = -2\sqrt{\alpha_0}\cos(\varpi T_a) \qquad \text{bzw.} \qquad \varpi = \frac{1}{T_a}\arccos\frac{-\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_0}}. \tag{39}$$

Die Größen σ und ϖ werden bei der nachfolgenden Berechnung der Sprungantwort eine Rolle spielen.

3.2.1 Sprungantwort des zeitdiskreten Standard-Regelkreises

Die Sprungantwort ergibt sich im z-Bereich unter Verwendung von (37) anhand der Relation

$$h(z) = \frac{z}{z-1}T(z) = \beta_1 \frac{z}{z-1}\frac{z - n_1}{(z - z_1)(z - z_2)}. \tag{40}$$

Zur Ermittlung der Sprungantwort im Zeitbereich formulieren wir folgenden Ansatz für die Partialbruch-Entwicklung obiger Relation

$$\frac{h(z)}{z} = \beta_1 \frac{1}{z-1}\frac{z - n_1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{K_0}{z-1} + \frac{K_1}{z - z_1} + \frac{K_2}{z - z_2}. \tag{41}$$

Zunächst ergibt sich unter Berücksichtigung von (31) die (reelle) Konstante

$$K_0 = T(z = 1) = 1 = \beta_1 \frac{1 - n_1}{(1 - z_1)(1 - z_2)}. \tag{42}$$

Für die (komplexe) Konstante K_1 gilt dann unter Verwendung von (42)

$$K_1 = \beta_1 \frac{1}{z_1 - 1}\frac{z_1 - n_1}{z_1 - z_2} = \frac{z_2 - 1}{1 - n_1}\frac{z_1 - n_1}{z_1 - z_2} =: |K_1|\exp(j\phi_1). \tag{43}$$

In dieser Relation erscheinen ausschließlich die Abstände der Pole bzw. der Nullstelle vom Punkt $z = 1$. Die Konstante K_2 ist konjugiert komplex zu K_1. Nach einigen Rechenmanipulationen (s. [1]) erhalten wir durch Rücktransformation von (41) die Sprungantwort im Zeitbereich:

$$h(iT_a) = 1 + 2\,|K_1|\exp(-\sigma i T_a)\cos(\varpi i T_a + \phi_1) = 1 - 2\,|K_1|\exp(-\sigma i T_a)\sin(\varpi i T_a + \mu + \lambda).$$

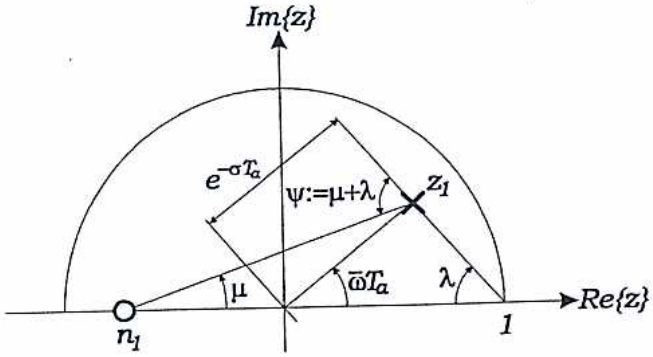


Abbildung 2: Pol-Nullstellen-Konfiguration von $T(z)$

Die Bedeutung der Größen (Winkel) μ und λ ist aus Abbildung (2) ersichtlich.

Mit Hilfe der Abkürzung

$$\psi := \mu + \lambda \tag{44}$$

und unter Verwendung (s. [?]) der interessanten Beziehung (s. Abbildung 2)

$$\frac{1}{2\,|K_1|} = \frac{|1-n_1|}{|z_1-n_1|}\,\frac{\frac{|z_1-z_2|}{2}}{|z_2-1|} = \sin\psi \tag{45}$$

erhält die Sprungantwort die prägnante Form

$$h(iT_a) = 1 - \frac{1}{\sin\psi}\exp(-\sigma i T_a)\sin(\varpi i T_a + \psi). \tag{46}$$

Man erkennt schön, wie bei fester Polkonfiguration die Lage der Nullstelle -bzw. der Wert des Winkels μ- die Größe von $h(iT_a)$ entscheidend beeinflusst.

Entscheidend ist nun Folgendes: Dieser diskreten Sprungantwort des Abtastregelkreises wird die zeitkontinuierliche Träger-Funktion

$$\tilde{h}(t) = 1 - \frac{1}{\sin\psi}\exp(-\sigma t)\sin(\varpi t + \psi) \tag{47}$$

zugeordnet. Alle vorkommenden Größen sind mit Hilfe der Relationen (22), (33), (34) bzw. (38), (39), (32), (36) und (43) vollständig bestimmt und sind i.A. (hochkomplizierte) Funktionen der Parameter ζ und ω_n des zeitkontinuierlichen offenen Kreises und der Abtastzeit T_a. Wir sind nun in der Lage, für das zeitdiskrete System die Kenngrößen Überschwingen und Anstiegszeit der Sprungantwort des zeitdiskreten(!) Systems zu definieren und zu berechnen. Man beachte, dass die Verwendung hierfür der tatsächlichen(!) zeitkontinuierlichen Sprungantwort praktisch unmöglich und nicht sinnvoll ist. Sie ist mathematisch kompliziert zu beschreiben und an den Abtastzeitpunkten nicht differenzierbar.

3.3 Ein zeitkontinuierliches Ersatz-System

Die nachfolgenden Ausführungen sind bei der Ableitung von Faustformeln zum Reglerentwurf von Abtastregelkreisen nicht notwendig. Sie sind allerdings für das Verstehen der untersuchten Materie wichtig und ermöglichen einen Vergleich mit dem zeitkontinuierlichen Fall. Wir betrachten die Träger-Funktion $\tilde{h}(t)$ gemäß (47) und ermitteln die

Übertragungsfunktion $\tilde{T}(s)$ eines zeitkontinuierlichen Systems, das obige Funktion $\tilde{h}(t)$ als Sprungantwort aufweist. Die zugehörige *LAPLACE*-Transformierte lautet

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\sin\psi}\frac{(s+\sigma)\sin\psi + \varpi\cos\psi}{(s+\sigma)^2+\varpi^2} =: \frac{1}{s}\tilde{T}(s).$$

Nach einigen Umrechnungen erhalten wir die Übertragungsfunktion $\tilde{T}(s)$:

$$\tilde{T}(s) = \frac{s(\sigma - \varpi\cot\psi) + \varpi^2 + \sigma^2}{(s+\sigma)^2+\varpi^2} =: K\frac{s-n}{(s-\tilde{s}_1)(s-\tilde{s}_2)}. \tag{48}$$

Sie besitzt (s. Abbildung 3) das konjugiert komplexe Polpaar

$$\tilde{s}_{1,2} = -\sigma \pm j\varpi \qquad \sigma > 0 \tag{49}$$

und die reelle Nullstelle

$$n = -\frac{\varpi^2+\sigma^2}{\sigma - \varpi\cot\psi}. \tag{50}$$

Das Vorzeichen der Nullstelle hängt vom Faktor $(\sigma - \varpi\cot\psi)$ ab. Es gilt allerdings

$$\varpi\left(\frac{\sigma}{\varpi} - \cot\psi\right) = \varpi[\cot\rho - \cot(\rho+\phi)] = \frac{\varpi\sin\phi}{\sin\rho\sin(\rho+\phi)}.$$

Damit lautet die Nullstelle von $\tilde{T}(s)$

$$n = -\sqrt{\varpi^2+\sigma^2}\frac{\sin(\rho+\phi)}{\sin\phi}. \tag{51}$$

Da

$$0 < \rho < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad 0 < \phi < \pi - \rho$$

erfüllt ist, liegt die Nullstelle auf der reellen negativen Achse.

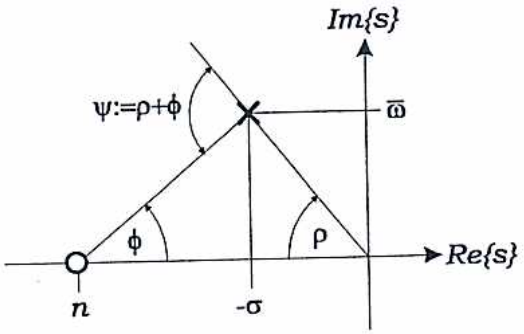


Abbildung 3: Pol-Nullstellen-Konfiguration des Ersatz-Systems

Damit gilt folgendes Faktum: die Sprungantwort des *zeitdiskreten* Standard-Regelkreises weist zu den Abtastzeitpunkten *dieselben* Werte auf wie die Sprungantwort eines *zeitkontinuierlichen* Systems mit dominantem Polpaar *und* einer Nullstelle. Es ist beachtenswert (s. [1]), dass die auftretenden Parameter ψ, σ und ϖ und die Winkel ρ und ϕ die in der Abbildung 3 ersichtliche Abhängigkeit von der Pol-Nullstellen-Konfiguration des zeitkontinuierlichen Ersatz-Systems aufweisen.

Das konjugiert komplexe Polpaar kann mit Hilfe des Ansatzes

$$(s - s_1)(s - s_2) = (s + \sigma)^2 + \varpi^2 =: s^2 + 2\bar{\zeta}\varpi_n s + \varpi_n^2 \tag{52}$$

in der üblichen Standard-Form (vgl. (2))

$$s_{1,2} = -\varpi_n\bar{\zeta} \pm j\varpi_n\sqrt{1 - \bar{\zeta}^2}) \tag{53}$$

dargestellt werden. Das wird sich bei manchen Vergleichen als vorteilhaft erweisen.

3.4 Kenngrößen des zeitdiskreten Standard-Regelkreises im Zeitbereich

Wir können nun mit Hilfe der Träger-Funktion $\tilde{h}(t)$ die Überschwingweite und die Anstiegszeit für die Sprungantwort des zeitdiskreten Standardregelkreises definieren und berechnen. Hierbei fassen wir $\tilde{h}(t)$ als Sprungantwort eines fiktiven zeitkontinuierlichen Systems auf und benutzen die anfangs formulierten Definitionen.

3.4.1 Überschwingweite $\tilde{M}_p$

Die Überschwingweite

$$\tilde{M}_p := \mathrm{Max}\left\{\tilde{h}(t)\right\} =: \tilde{h}(t_p) \tag{54}$$

ermitteln wir, indem wir $\tilde{h}(t)$ gemäß (47) differenzieren und diese gleich Null setzen. Es ergibt sich unter Beachtung (s. Abbildung 3) von

$$\cot\rho = \frac{\sigma}{\varpi}$$

nach einigen Umrechnungen

$$\tilde{g}(t) := \frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \varpi^2}}{\sin\psi}\exp(-\sigma t)\sin(\varpi t + \phi) \tag{55}$$

bzw. mit Hilfe von (52)

$$\tilde{g}(t) = \frac{\varpi_n}{\sin\psi}\exp(-\sigma t)\sin(\sqrt{1 - \bar{\zeta}^2}\varpi_n t + \phi).$$

Obige Beziehung ist das Analogon zu (5). Aus (55) folgt die Bestimmungsgleichung für den Zeitpunkt $\tilde{t}_p$, bei dem das Extremum auftritt

$$\tilde{g}(\tilde{t}_p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin(\varpi\tilde{t}_p + \phi) = 0$$

bzw.

$$\tilde{t}_p = \frac{1}{\varpi}(\pi - \phi). \tag{56}$$

Damit erhalten wir die Überschwingweite $\tilde{M}_p$ bzw. das Überschwingen $\tilde{M}_p - 1 = \tilde{h}(\tilde{t}_p) - 1$

$$\tilde{M}_p - 1 = \frac{\sin\rho}{\sin(\phi + \rho)}\exp\left\{-(\pi - \phi)\cot\rho\right\}. \tag{57}$$

Bedenkt man, dass bei einem konjugiert komplexen Polpaar definitionsgemäß

$$\cot\rho = \tan\Phi_\zeta$$

gilt, stellt Relation (57) das Analogon von (7) dar.

3.4.2 Anstiegszeit $\tilde{t}_r$

Zur Ermittlung der Anstiegszeit differenzieren wir die Funktion $\tilde{g}(t)$ und setzen sie gleich Null:

$$\left.\frac{d\tilde{g}}{dt}\right|_{\tilde{t}_m} = \frac{\varpi_n}{\sin\psi}\frac{\varpi}{\sin\rho}\exp(-\sigma t)\sin(\rho-\phi-\varpi t)\Big|_{\tilde{t}_m} = 0.$$

Wir erhalten dann

$$\tilde{t}_m = \frac{\rho-\phi}{\varpi}. \tag{58}$$

Damit beträgt die Anstiegszeit:

$$\tilde{t}_r := \frac{1}{\tilde{g}(\tilde{t}_m)} = \frac{\sin\psi}{\varpi}\exp\left\{\frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}}(\rho-\phi)\right\}. \tag{59}$$

Bedenkt man, dass

$$\arcsin\sqrt{1-\bar{\zeta}^2} = \arctan\frac{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}}{\bar{\zeta}} = \rho$$

gilt, erhalten wir

$$\tilde{t}_r = \frac{\sin\psi}{\varpi}\exp\{(\rho-\phi)\cot\rho\}. \tag{60}$$

Mit (59) liegt das Analogon von (10) vor.

3.5 Kenngrößen des zeitdiskreten offenen Standard-Regelkreises im transformierten Frequenzbereich

Wir wollen nun die Durchtrittsfrequenz und die Phasenreserve im w-Bereich ermitteln. Hierzu betrachten wir die w-Übertragungsfunktion des offenen Kreises gemäß (28)

$$\hat{L}(w) = V(1-\frac{w}{\Omega_0})\frac{(1+\frac{w}{\Omega_Z})}{w(1+\frac{w}{\Omega_N})} \tag{61}$$

3.5.1 Durchtrittsfrequenz Ω_c

Wir suchen diejenigen Werte $w = j\Omega_c$, so dass

$$\left|\hat{L}(j\Omega_c)\right| = 1$$

bzw.

$$\left|\hat{L}(j\Omega_c)\right|^2 = \left|V(1-\frac{j\Omega_c}{\Omega_0})\frac{(1+\frac{j\Omega_c}{\Omega_Z})}{j\Omega_c(1+\frac{j\Omega_c}{\Omega_N})}\right|^2 = 1$$

erfüllt wird. Nach einigen Berechnungen erhalten wir für das Quadrat der gesuchten (reellen) Durchtrittsfrequenz Ω_c

$$X := \Omega_c^2$$

die quadratische Bestimmungs-Gleichung

$$X^2[(\frac{V}{\Omega_0\Omega_Z})^2 - \frac{1}{\Omega_N^2}] + X[(\frac{V}{\Omega_0})^2 + (\frac{V}{\Omega_Z})^2 - 1] + V^2 = 0. \tag{62}$$

Um eine kompakte Schreibweise zu ermöglichen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$a_2 := (\frac{V}{\Omega_0\Omega_Z})^2 - \frac{1}{\Omega_N^2}, \qquad a_1 := (\frac{V}{\Omega_0})^2 + (\frac{V}{\Omega_Z})^2 - 1, \qquad a_0 := V^2.$$

Die Lösungen obiger Gleichung (62) lauten dann:

$$X_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

bzw. in Abhängigkeit der Parameter von $\hat{L}(w)$

$$X_{1,2} = \frac{1 - (\frac{V}{\Omega_0})^2 - (\frac{V}{\Omega_Z})^2 \pm \sqrt{[1 - (\frac{V}{\Omega_0})^2 - (\frac{V}{\Omega_Z})^2]^2 - 4V^2[(\frac{V}{\Omega_0\Omega_Z})^2 - \frac{1}{\Omega_N^2}]}}{2[(\frac{V}{\Omega_0\Omega_Z})^2 - \frac{1}{\Omega_N^2}]}. \tag{63}$$

Im Unterschied zur analogen Beziehung (12) im zeitkontinuierlichen Fall ist obige Gleichung kompliziert und unübersichtlich. Die gesuchte transformierte Frequenz Ω_c ergibt sich durch Benutzung der *positiven* Lösung X obiger Beziehung:

$$\Omega_c = \sqrt{X}. \tag{64}$$

Folgendes ist beachtenswert: Relevant sind reelle *und* positive Lösungen

$$X_{1,2} > 0.$$

Damit wir reelle Lösungen erhalten, muss die Diskriminante Δ nichtnegativ sein

$$\Delta := a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \quad . \tag{65}$$

Man kann zeigen (s. [1]), dass (65) tatsächlich erfüllt ist.

Unter dieser Voraussetzung kann man überlegen, dass folgendes gilt:

Fall 1 : $a_2 < 0 \Longrightarrow$ 1 positive und 1 negative Lösung bzw.
Fall 2 : $a_2 > 0 \Longrightarrow$ 2 positive oder 2 negative Lösungen.

Vom regelungstechnischen Standpunkt betrachtet, ist nur Fall 1 interessant. Man kann zeigen (s. [1]), dass für das Vorzeichen von a_2 der Ausdruck

$$\zeta\omega_nT_a - \tanh(\zeta\omega_nT_a) - 4\zeta^2$$

entscheidend ist:

$$a_2 < 0 \Longleftrightarrow \zeta\omega_nT_a - \tanh(\zeta\omega_nT_a) - 4\zeta^2 < 0 \quad . \tag{66}$$

Mit Hilfe des Programmes MACSYMA wurde der Gültigkeitsbereich obiger Ungleichung ermittelt. Er beträgt

$$1 > \zeta > 0 \qquad \text{und} \qquad 3.8 > \omega_nT_a > 0 \quad , \tag{67}$$

was - vom regelungstechnischen Standpunkt betrachtet - bei einem Abtastregelkreis erfüllt ist.

Die Parameter-Abhängigkeit der gesuchten Lösung ergibt sich unter Benutzung von (30) und (29) aus

$$\frac{V}{\Omega_0} = \frac{V}{\Omega_0}(\zeta, \omega_n T_a) \qquad \Omega_Z =: \frac{1}{T_a}\hat{\Omega}_Z(\zeta, \omega_n T_a) \qquad \Omega_N =: \frac{1}{T_a}\hat{\Omega}_N(\zeta, \omega_n T_a).$$

Für die gesuchte Lösung X ergibt sich

$$\Omega_c^2 =: \frac{1}{T_a^2}\hat{X}^2(\zeta, \omega_n T_a) \quad \text{bzw.} \quad \Omega_c = \frac{1}{T_a}\hat{X}(\zeta, \omega_n T_a)\ , \tag{68}$$

und damit gilt

$$\Omega_c T_a = \hat{X}(\zeta, \omega_n T_a). \tag{69}$$

3.5.2 Berechnung der Phasenreserve $\hat{\Phi}_r$

Sie ist definiert durch

$$\hat{\Phi}_r := \pi + \arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\}. \tag{70}$$

Wir benötigen also den Winkel der komplexen Zahl $\hat{L}(j\Omega_c)$

$$\hat{L}(j\Omega_c) = V(1 - \frac{j\Omega_c}{\Omega_0})\frac{(1 + \frac{j\Omega_c}{\Omega_Z})}{j\Omega_c(1 + \frac{j\Omega_c}{\Omega_N})},$$

d.h.

$$\arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\} = \arctan\left\{-\frac{\Omega_c}{\Omega_0}\right\} + \arctan\frac{\Omega_c}{\Omega_Z} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Omega_c}{\Omega_N}. \tag{71}$$

Damit erkennt man unmittelbar die Parameter-Abhängigkeit des Winkels $\arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\}$:

$$\arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\} = \arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\}(\zeta, \omega_n T_a).$$

Nach einigen Umrechnungen erhalten wir unter Verwendung der Größe

$$\Xi := \arctan\left\{\Omega_c \frac{-\Omega_c^2 + (\Omega_0\Omega_N - \Omega_0\Omega_Z - \Omega_Z\Omega_N)}{\Omega_c^2(\Omega_N - \Omega_Z + \Omega_0) + \Omega_0\Omega_Z\Omega_N}\right\}$$

$$\arg\left\{\hat{L}(j\Omega_c)\right\} = \Xi - \frac{\pi}{2}, \tag{72}$$

und so gilt

$$\hat{\Phi}_r = \Xi + \frac{\pi}{2} = \hat{\Phi}_r(\zeta, \omega_n T_a). \tag{73}$$

4 Ermittlung von Faustformeln für den zeitdiskreten Fall

Im zeitkontinuierlichen Fall liegen folgende zwei Faustformeln vor[4]:

$$\Sigma(\zeta) := 100 * [M_p - 1] + \Phi_r \approx 70 \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \tag{74}$$

[4]Man beachte, dass in der 1. Faustformel das „prozentuale Überschwingen" und die Phasenreserve Φ_r in Grad eingehen!

und

$$\Gamma(\zeta) := \omega_c t_r \approx 1.4 \qquad \text{für} \quad 1 > \zeta > 0.3 \quad . \tag{75}$$

In Analogie dazu betrachten wir im zeitdiskreten Fall die Ausdrücke

$$\tilde{\Sigma}(\zeta, \omega_n T_a) := 100 * [\tilde{M}_p - 1] + \hat{\Phi}_r \tag{76}$$

und

$$\tilde{\Gamma}(\zeta, \omega_n T_a) := \Omega_c \tilde{t}_r \quad . \tag{77}$$

Wir wollen einen Parameter-Bereich ermitteln, in dem $\tilde{\Sigma}$ und $\tilde{\Gamma}$ zumindest näherungsweise konstant sind. Wenn das gelingt, so kann der zeitdiskrete Entwurf in voller Analogie zum zeitkontinuierlichen mit Hilfe von *BODE*-Diagrammen erfolgen!

Die Komplexität dieses Unterfangens erkennt man erst, wenn man sich Folgendes vergegenwärtigt: Die Anzahl der freien Parameter hat sich auf zwei erhöht. Gravierender ist die Tatsache, dass -um obige Ausdrücke für einen festen Parametersatz $(\zeta, \omega_n T_a)$ auszuwerten- die entwickelten Relationen

$$\begin{array}{llll} \tilde{M}_p - 1 & \text{gemäß (57)} & \hat{\Phi}_r & \text{gemäß (73)} \\ \Omega_c & \text{gemäß (64)} & \tilde{t}_r & \text{gemäß (60)} \end{array}$$

heranzuziehen sind; hierbei handelt es sich allerdings um komplizierte Beziehungen, bei denen der Parametersatz $(\zeta, \omega_n T_a)$ *nicht* unmitellbar, sondern verschachtelt eingeht. Insofern ist der Einsatz von Programmen der Computeralgebra unumgänglich. In der vorliegenden Arbeit wurde MACSYMA eingesetzt.

Es wird beispielhaft der *prinzipielle* Weg zur Berechnung der Träger-Funktion $\tilde{h}(t)$ nach (47) demonstriert: Durch Vorgabe von $(\zeta, \omega_n T_a)$ werden die Zähler- und Nennerkoeffizienten der Führungsübertragungsfunktion $T(z)$ nach (31) ermittelt:

$$\begin{array}{llll} \beta_0 & \text{gemäß (23)} & \beta_1 & \text{gemäß (24)} \\ \alpha_0 & \text{gemäß (33)} & \alpha_1 & \text{gemäß (34).} \end{array}$$

Daraus kann die Darstellung von $T(z)$ gemäß (37) durch Verwendung der Größen

$$\sigma \quad \text{gemäß (38)} \quad \text{und} \quad \varpi \quad \text{gemäß (39)}$$

gewonnen werden. Damit liegen auch die Pole und die Nullstelle von $T(z)$

$$\begin{array}{ll} z_{1,2} & \text{gemäß (36)} \\ n_1 & \text{gemäß (32)} \end{array}$$

vor. Nach Ermittllung des Winkels ψ

$$\psi \quad \text{gemäß (45)}$$

liegen alle Größen zur Berechnung der Träger-Funktion

$$\tilde{h}(t) \quad \text{gemäß (47)}$$

in Abhängigkeit des Parametersatzes $(\zeta, \omega_n T_a)$ vor.

In vergleichbarer Weise wurden durch Variation des Parametersatzes im Bereich

$$0 < \zeta < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \omega_n T_a < \Delta \tag{78}$$

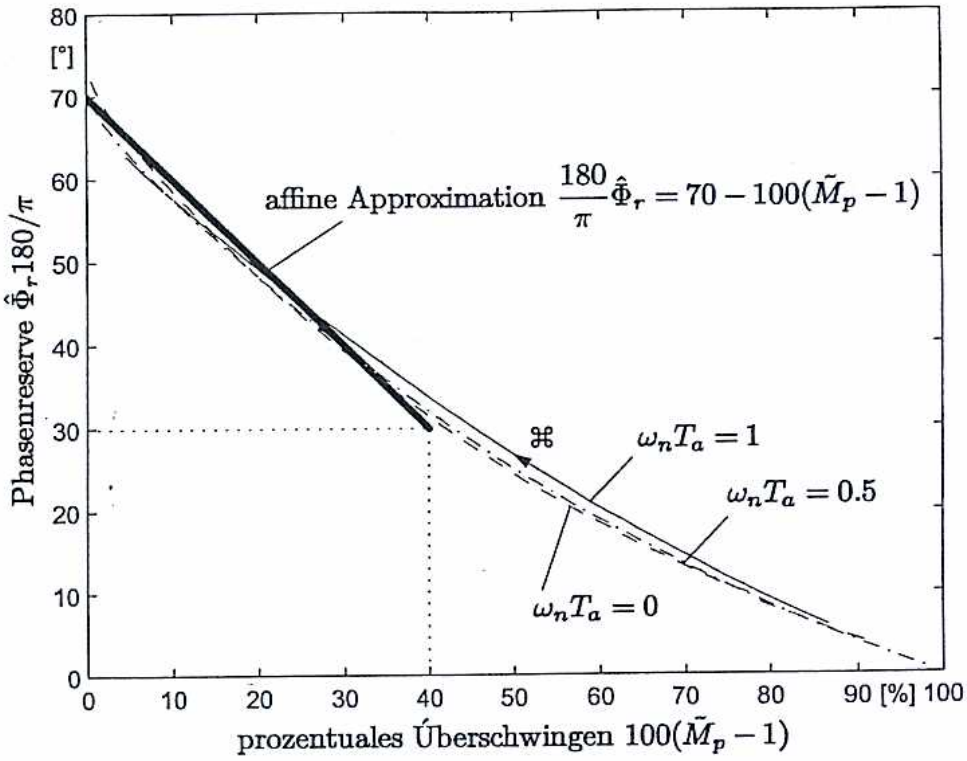


Abbildung 4: Phasenreserve und Überschwingen in $\tilde{\Sigma}(\zeta, \omega_n T_a)$

die Ausdrücke $\tilde{\Sigma}(\zeta, \omega_n T_a)$ und $\tilde{\Gamma}(\zeta, \omega_n T_a)$ ermittelt und mit $(\zeta, \omega_n T_a)$ als Kurvenparameter bei zweckmäßiger Wahl der Achsengrößen graphisch dargestellt; die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4 und 5 für den Fall $\Delta = 1$ ersichtlich.

Man kann daraus entnehmen, dass die Ausdrücke $\tilde{\Sigma}(\zeta, \omega_n T_a)$ und $\tilde{\Gamma}(\zeta, \omega_n T_a)$ in einem gewissen Bereich des Parametersatzes näherungsweise konstant sind. Es ergibt sich

$$\tilde{\Sigma}(\zeta, \omega_n T_a) \approx 70 \quad \text{für} \quad \ddot{u} \lesssim 40 \tag{79}$$

und

$$\tilde{\Gamma}(\zeta, \omega_n T_a) \approx 1.3 \quad \text{für} \quad \Omega_c \lesssim \frac{\Omega_0}{4} = \frac{1}{2T_a}. \tag{80}$$

Die Bereichsangabe in der Faustformel (80) folgt aus der in Abbildung 5 ersichtlichen Bereichsgrenze $(t_r/T_a)^{-1} \lesssim 0.4$ zusammen mit der dort angegebenen linearen Approximation sowie mit der Definition (27). Darüber hinaus zeigt diese Abbildung 5 auch, dass der genannte Gültigkeitsbereich für $\omega_n T_a > 1$ bei keinem Wert von ζ eingehalten werden kann; dies ist die Begründung für den Zahlenwert $\Delta = 1$ in den Bereichen (78).

5 Beispiel

Für die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.3}}{s\left[1 + 2 \cdot 0.3\frac{s}{0.2} + (\frac{s}{0.2})^2\right]} \tag{81}$$

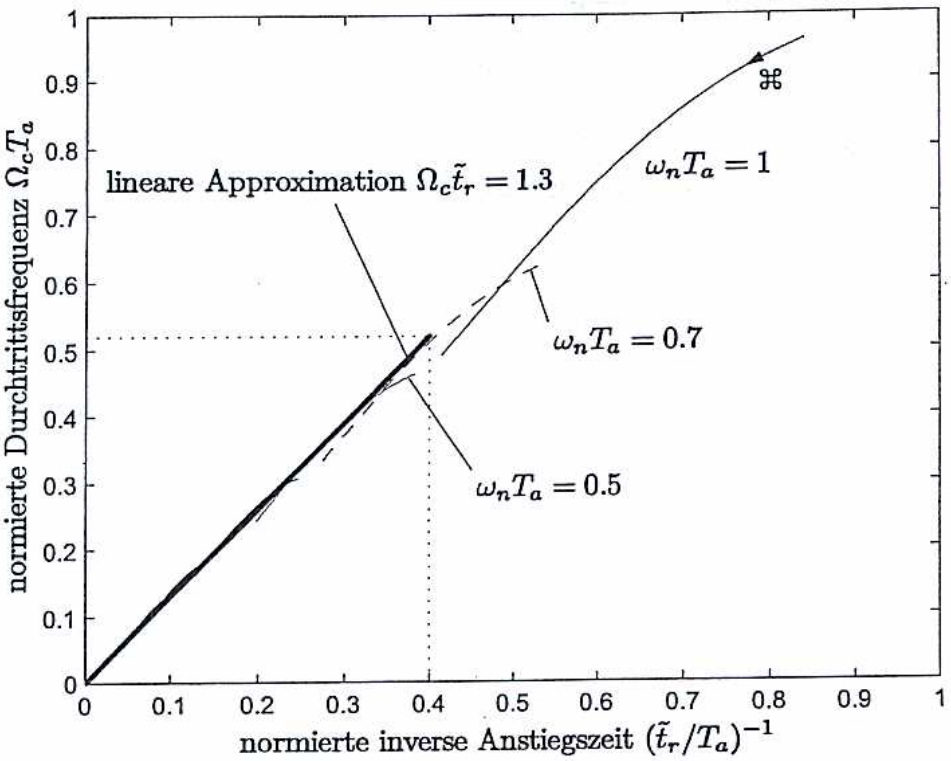


Abbildung 5: Durchtrittsfrequenz und Anstiegszeit in $\tilde{\Gamma}(\zeta, \omega_n T_a)$

soll ein zeitdiskreter Regler mit der Abtastzeit (Diskretisierungszeit)

$$T_a = 3 \tag{82}$$

so entworfen werden, dass die Sprungantwort des Regelkreises nach Abbildung 6 bei einer Anstiegszeit von

$$\tilde{t}_r = 10$$

ein prozentuales Überschwingen von

$$100 * (\tilde{M}_p - 1) = 10$$

aufweist.

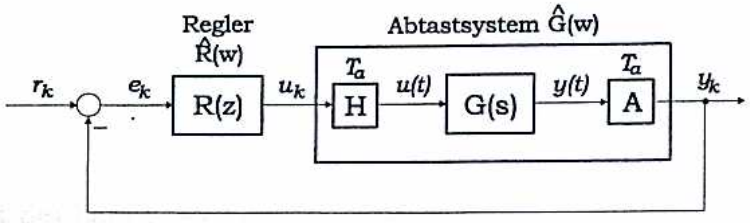


Abbildung 6: Abtastregelkreis

Die Faustformeln (79) und (80) übertragen die obigen Spezifikationen im Zeitbereich in solche in den Frequenzbereich. Demnach weist der Frequenzgang $\hat{L}(j\Omega)$ des offfenen Kreises (näherungsweise) die Phasenreserve

$$\hat{\Phi}_r = 60 \tag{83}$$

und die Durchtrittsfrequenz

$$\Omega_c = 0.13 \tag{84}$$

auf. Unter Verwendung von (27), (82) erhalten wir zunächst

$$\Omega_0 \approx 0.667.$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion $\hat{G}(w)$ gemäß (18) und (81) zu

$$\hat{G}(w) = (1 - \frac{w}{0.667}) \frac{(1 + \frac{w}{0.282})(1 - \frac{w}{8.3})}{w\left[1 + 2 \cdot 0.317 \frac{w}{0.205} + (\frac{w}{0.205})^2\right]}.$$

Die *BODE*-Diagramme des Frequenzgangs $\hat{G}(j\Omega)$ sind in Abbildung 7 strichliert (- -) gezeichnet. Eine Möglichkeit, die Entwurfsaufgabe zu lösen, besteht darin den zeitdis-

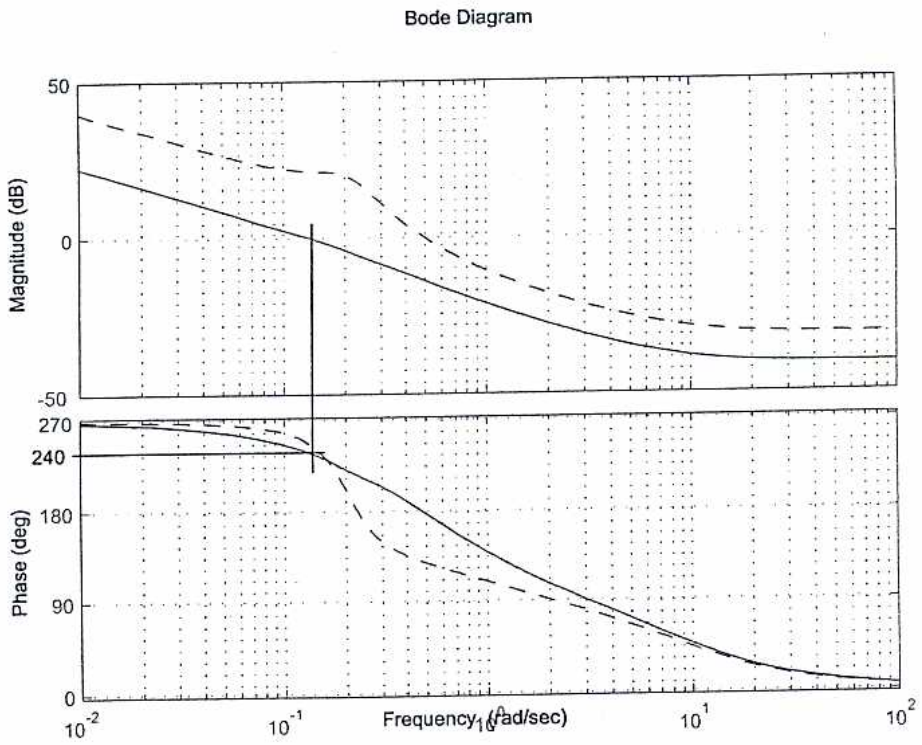


Abbildung 7: *BODE*-Diagramme zu $\hat{G}(j\Omega)$ (- -) und $\hat{L}(j\Omega)$ (–)

kreten Kompensationsregler $\hat{R}(w)$ so anzusetzen, dass die gedämpfte Eigenbewegung der Strecke unterdrückt wird. Weiters werden der Verstärkungsfaktor und ein Doppelpol so

festgelegt, dass die Forderungen (83) bzw. (84) bezüglich Phasenreserve und Durchtrittsfrequenz erfüllt werden. Diese Vorgehensweise führt zu einer Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$\begin{aligned}\hat{L}(w) &= \hat{R}(w)\hat{G}(w) \\ &= 0.135\frac{(1-\frac{w}{0.667})(1+\frac{w}{0.282})(1-\frac{w}{8.3})}{w(1+\frac{w}{0.333})^2}\end{aligned}$$

Die *BODE*-Diagramme von $\hat{L}(j\Omega)$ sind in der Abbildung 7 durchgezogen (–) dargestellt, wobei die Einhaltung der Spezifikationen verdeutlicht wurde. Da der offene Kreis vom einfachen Typ ist, wird durch die erreichte positive Phasenreserve die BIBO-Stabilität des Regelkreises gewährleistet. Für die z-Übertragungsfunktion des so entworfenen Reglers ergibt sich:

$$R(z) = \hat{R}(w = \Omega_0\frac{z-1}{z+1}) = \frac{0.197z^2 - 0.272z + 0.136}{z^2 - 0.667z + 0.111}.$$

Die Sprungantwort des zeitdiskreten Regelkreises ist in Abbildung 8 ersichtlich. Man

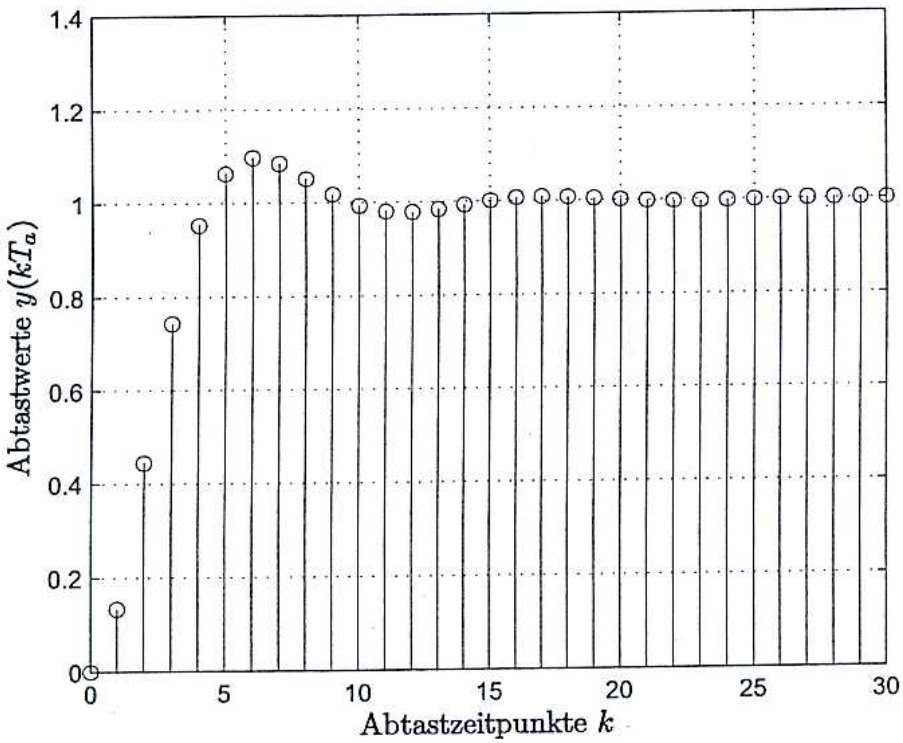


Abbildung 8: Sprungantwort des zeitdiskreten Regelkreises

erkennt, dass die gestellten Forderungen erfüllt sind.

6 Zusammenfassung

Beim Entwurf von zeitkontinuierlichen Standardregelkreisen mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens werden die als Entwurfziele vorgegebene Anstiegszeit und Überschwingwei-

te der Sprungantwort des geschlossenen Kreises anhand von zwei elementaren Relationen in die Durchtrittsfrequenz bzw. Phasenreserve des Frequenzganges des offenen Kreises für die Entwurfsprozedur umgerechnet. Grundlage für die Berechnung dieser beider Relationen ist die strukturell einfachste Regelkreisübertragungsfunktion, mit der eine wie oben spezifizierte Sprungantwort generiert wird; nämlich eine Übertragunsgfunktion mit lediglich einem konjugiert komplexen Polpaar und keiner endlichen Nullstelle.

In diesem Beitrag wurden die beiden analogen Relationen für den Entwurf von zeitdiskreten Regelkreisen ermittelt. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die strukturell einfachste Übertragungsfunktion des offenen Kreises, der ein Halteglied nullter Ordnung vor- und ein Abtaster nachgeschaltet ist, womit ein zeitdiskretes System (Abtastsystem mit der konstanter Abtastperiode T_a) entsteht.

Eine analytische Lösung des Problems wurde durch eine geeignet definierte Anstiegszeit möglich. Dabei wurde zur Berechnung der Kenngrößen des geschlossenen Kreises im Zeitbereich auf z-Übertragungsfunktionen und zur Berechnung der Kenngrößen des offenen Kreises im Frequenzbereich auf w-Übertargungsfunktionen zurückgegriffen. Während im zeitkontinuierlichen Fall in die Näherungsrelationen nur ein Parameter eingeht, werden sie im zeitdiskreten Fall noch von einem weiteren, von der Abtastzeit abhängigen Parameter beeinflusst; ein Einfluss, der in einer von der zeitkontinuierlichen Formulierung abweichenden Angabe der Bereichsgrenzen für die Gültigkeit der Relationen (79) und (80) erfasst werden kann.

Es ist bemerkenswert, dass ein zeitkontinuierliches „Einfachst-System" erweitert um eine geeignet angesetzte negative reelle Nullstelle eine Sprungantwort besitzt, die zu den Abtastzeitpunkten mit derjenigen Sprungantwort übereinstimmt, die vom zugehörigen zeitdiskreten(!) „Einfachst-System" generiert wird.

Die Verfasser bedanken sich beim anonymen Gutachter für seine Verbesserungsvorschläge.

Literatur

[1] Interner Bericht 5/2006, www.irt.tugraz.at/ bzw. www.srt.upb.de

[2] Föllinger O.: Lineare Abtastsysteme, R. Oldenbourg Verlag, 4. Auflage

[3] Horn M., Dourdoumas N.: Regelungstechnik. Pearson Verlag, München, 2004

[4] Horowitz I. M.: Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, New York, 1966

[5] Landgraf Chr., Schneider G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer-Verlag, Berlin 1969

[6] Reinschke K.: Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie. Springer Verlag, 2006

[7] Weinmann A.: Regelungen: Analyse und Entwurf technischer Systeme. Springer, 1994

Robust Stability Radius Gradient. A Duality Approach for High-Order Systems

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE
Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control
Gusshausstrasse 27-29/376, A-1040 Vienna / Austria
Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699
email: weinmann@acin.tuwien.ac.at

Manuscript received January 8, 2007

Abstract

For single-input single-output systems, this article presents a gradient method with respect to the stability radius and its stepwise increase. Plants of high order are intended especially, given numerically, by measured data (or given analytically). The controller is always known analytically. Unstructured uncertainties are considered as an unknown complex quantity which is bounded by its modulus.

For small structured uncertainties and for analytically given plants, the article addresses an explicit result. For medium-sized uncertainties, an exact solution is also presented, leading to a system of nonlinear equations.

For multiple-input multiple-output systems, a generalized stability radius is taken into consideration. The worst uncertainty dependence is also derived in this case.

Keywords: Stability radius, generalized stability radius, duality of controller increments and uncertainties in the plant, incremental change of the stability radius

1 Introduction

Consider the design of a control system. The plant is known either by a measured frequency plot $G(j\omega)$ or given analytically. A controller $K(s)$, given by its analytical transfer function, is in operation yet. The dynamic behavior does not comply with your expec-

tations. The plant's setup is so complicated that standard design procedures (e.g., Bode plot, LQR) fail.

What is feasible is an approach of computing the stability radius and increasing it by following the gradient with respect to the controller parameters.

Throughout the article, the stability radius $r = \min_\omega |1 + F_o(j\omega)|$ is used, where $F_o(s)$ is the open-loop transfer function (*Föllinger, O., 1994; Weinmann, A., 1994*). It is maximized in the presence of the uncertainties.

Although this task looks simple it is more difficult in the presence of uncertainties of the plant. One has to cope both with the gradient with respect to the parameters of the controller and the uncertain parameters of the plant.

2 Smallest Stability Radius for Plants with Unstructured Uncertainty

For the given nominal transfer functions $K(s)$ and $G(s)$ of the controller and plant, respectively, the stability radius has to be maximally reduced in spite of the unstructured uncertainty ΔG of the plant. The absolute value $|\Delta G|$ is considered limited, i.e., $|\Delta G| \leq g_0$; only the phase angle $\arg\Delta G$ is the unknown.

Separating into real and imaginary part, one has the simple corresponces as follows

$$\Delta \mathbf{g} \triangleq \begin{pmatrix} \Re e\ \Delta G \\ \Im m\ \Delta \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad |\Delta G| \triangleq \|\Delta \mathbf{g}\|_F \leq g_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Delta G}{\partial \Re e\ \Delta G} = 1, \quad \frac{\partial \Delta G}{\partial \Im m\ \Delta G} = j\ . \tag{2}$$

By product rule,

$$\frac{\partial(\Delta G \cdot \Delta G^*)}{\partial \Re e\ \Delta G} = 2\Re e\ \Delta G\ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\Delta G \cdot \Delta G^*)}{\partial \Im m\ \Delta G} = j\Delta G^* + \Delta G(-j) = 2\Im m\ G\ , \tag{4}$$

$$\frac{\partial |\Delta G|^2}{\partial \mathbf{g}} = 2\Delta \mathbf{g}\ . \tag{5}$$

The complex conjugate is denoted by the superscript asterix.

The complex distance $d(j\omega)$ from the Nyquist point $(-1, j0)$ to the point $F_0(j\omega)$ of the open-loop characteristic is $d(j\omega) = 1 + F_0(j\omega)$, see Fig. 1. In the perturbed case,

$$d(j\omega) = 1 + [G(j\omega) + \Delta G]K(j\omega)\ . \tag{6}$$

The worst uncertainty ΔG^* is simply an unknown complex number which should affect the stability radius most seriously. The frequency with minimum distance of the nominal $F_0(j\omega)$ to the Nyquist point is termed ω_T

$$r \overset{(6)}{=} \min_{\omega} |d(j\omega)| \tag{7}$$

$$\omega_T \triangleq \arg \min_{\omega} |d(j\omega)|\Big|_{\Delta G=0} \tag{8}$$

$$\omega_{Tp} \triangleq \arg \min_{\omega} |d(j\omega)|\Big|_{\Delta G=\Delta G^*} , \tag{9}$$

where ΔG^* is the worst uncertainty.

The minimum of the stability radius r with respect to ΔG, subject to the condition of an upper limit $|\Delta G| \leq g_0$, results from

$$[r(\Delta G)]^2 + \lambda |\Delta G|^2 \rightarrow \text{extremum}_{\Delta G} , \tag{10}$$

where λ is a Lagrange multiplicator. Then, using ω_T instead of ω_{Tp} first,

$$[1 + (G + \Delta G)K][1 + (G + \Delta G)K]^*\Big|_{s=j\omega_T} + \lambda |\Delta G|^2 \rightarrow \min_{\Delta G} \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \mathrm{g}}[\Delta G \cdot K + \Delta G^* \cdot K^* + (G + \Delta G)(G + \Delta G)^* K K^*] + 2\lambda \Delta \mathrm{g} \overset{(5)}{=} \mathbf{0} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} K + \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} K^* + [\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} (G + \Delta G)^* + (G + \Delta G) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}] K K^* + 2\lambda \Delta \mathrm{g} \overset{(2)}{=} \mathbf{0} \tag{13}$$

$$2 \begin{pmatrix} \Re e\ K \\ -\Im m\ K \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2(\Re e\ G + \Re e\ \Delta G) \\ 2(\Im m\ G + \Im m\ \Delta G) \end{bmatrix} K K^* + 2\lambda \Delta \mathrm{g} = \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} \Re e\ K \\ -\Im m\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Re e\ G \\ \Im m\ G \end{pmatrix} |K|^2 + \begin{pmatrix} \Re e\ \Delta G \\ \Im m\ \Delta G \end{pmatrix} |K|^2 + \lambda \Delta \mathrm{g} = \mathbf{0} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} \Re e\ K + |K|^2 \Re e\ G \\ -\Im m\ K + |K|^2 \Im m\ G \end{pmatrix} + (|K|^2 + \lambda) \Delta \mathrm{g} = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$\Delta \mathrm{g} = -\frac{1}{|K|^2 + \lambda} \begin{pmatrix} \Re e\ K + |K|^2 \Re e\ G \\ -\Im m\ K + |K|^2 \Im m\ G \end{pmatrix} . \tag{17}$$

Following the condition $\|\Delta \mathrm{g}\|_F \leq g_0$, one has

$$(\Re e\ K + |K|^2 \Re e\ G)^2 + (-\Im m\ K + |K|^2 \Im m\ G)^2 = g_0^2 (|K|^2 + \lambda)^2 . \tag{18}$$

This leads to λ and the result is

$$\Delta \mathbf{g}^{\star} = \pm \frac{g_0}{\sqrt{(\Re e\ K(s) + |K(s)|^2 \Re e\ G(s))^2 + (-\Im m\ K(s) + |K(s)|^2 \Im m\ G(s))^2}} \times \begin{pmatrix} \Re e\ K(s) + |K(s)|^2 \Re e\ G(s) \\ -\Im m\ K(s) + |K(s)|^2 \Im m\ G(s) \end{pmatrix} \Big|_{s=j\omega_T} . \tag{19}$$

Switching back to the complex uncertainty, the worst one is

$$\Delta G^{\star} = \Delta g^{\star}(1) + j \Delta g^{\star}(2) . \tag{20}$$

The transfer functions in Eq.(19) are functions in terms of ω_T, first. There is a slight difference to be expected between ω_T and ω_{Tp} (see Fig. 1). Only ω_T is known, initially. Second, having found $\Delta \mathbf{g}^{\star}$ in Eq.(19) based on ω_T, the minimum search has to include $\Delta G^{\star}$. The final ω_{Tp} is obtained iteratively by repeated computation. Usually, the dependence is very low.

Having found the optimum $\Delta G^{\star}$ in the case of known structure of G, an identification problem can be solved for $\Delta \mathbf{p}_G^{\star}$ to cope with $\Delta G^{\star}$ optimally.

Example 1. Plant resulting from measured data, numerically given:

A fourth-order plant and a third-order controller are selected. (The parameter details are chosen from the Example 2 with analytic setup.) Suppose the plant is only given by the graphic plot of the frequency response (or a corresponding numerical representation) in Fig. 1.

In Fig. 1, the setup and three steps of improving $K(s)$ are demonstrated. The stability radius is increased such that optimum damping from a practitioner's viewpoint is obtained, i.e. from 0.038 to 0.350. For a given $g_0 = 0.0025$, the nominal $F_0(j\omega)$ is plotted. A short dashed element shows the characteristic of the worst perturbed $F_0(j\omega) + K(s)\Delta G^{\star}$.

The changes in the eight controller parameters $\begin{pmatrix} \mathbf{z}_K \\ \mathbf{n}_K \end{pmatrix}$ from the initial case to the final (third) step of gradient improvement are

```
     0      -0.0022
     0       0.0168
18.0000     18.0048
18.0000     17.9633
 1.0000      0.7209
 1.6000      1.7326
 0.8300      1.4372
 0.1400     -0.1427.
```

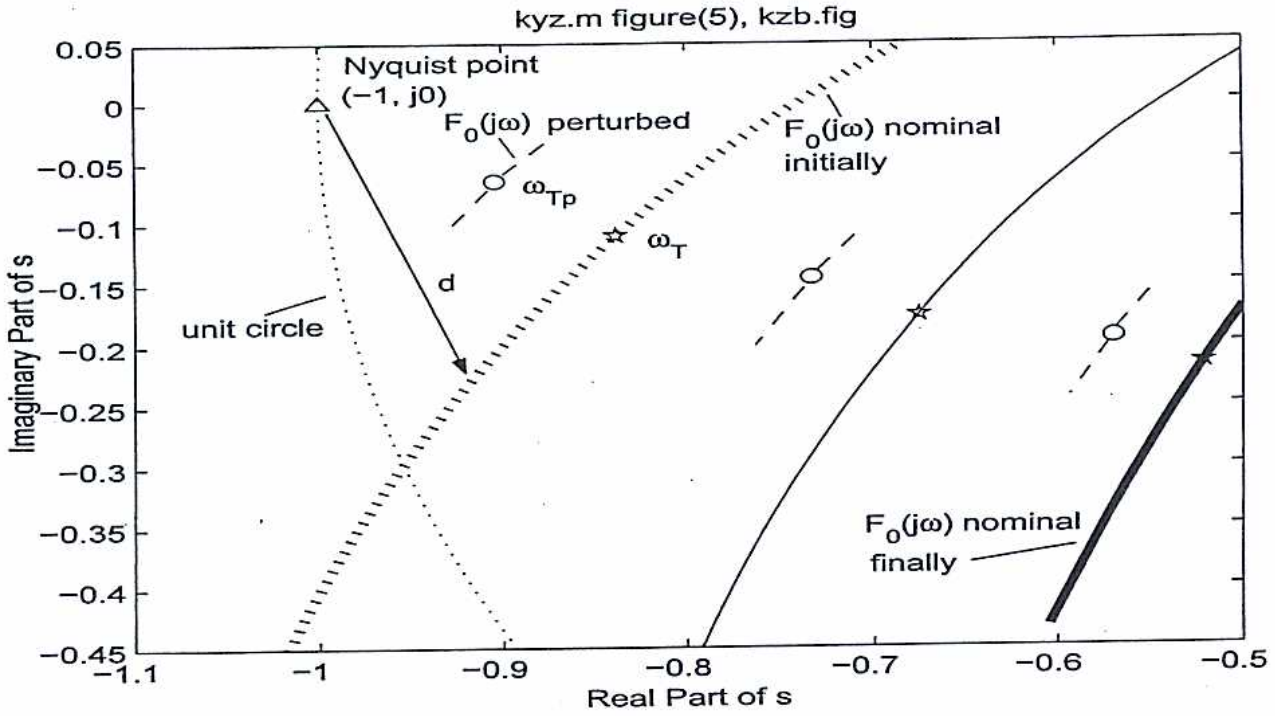


Figure 1: Open-loop characteristics $F_0(j\omega)$ for three steps of modifying $K(s)$ following Eq.(19)

In order to obtain the responses of the closed-loop system including the worst uncertainty, an approximation can be used because the addition of $K\Delta G$ to KG is only known at $\omega = \omega_T$.

For the sake of illustration, we estimate the consequences to be expected in the presence of the worst uncertainty $\Delta G^\star$. As derived in Eq.(19), a dead-time delay is used as a replacement of $\Delta G^\star$, and $G(j\omega) + \Delta G$ is replaced by $G(j\omega)e^{-j\omega T_t}$ such that

$$\arg[G(j\omega_T)] + [\arg\Delta G] = \arg[G(j\omega_T)e^{-j\omega T_t}] \; . \tag{21}$$

For details of parametrized plants see Section 3 and 4.

3 Maximizing the Stability Radius in Transfer Function Representation for Small Spherical Uncertainties

For completition purpose, the problem of Section 2 is repeated if the plant $G(s)$ is given by an analytic expression. For computational ease, we separate the coefficient vectors $\mathbf{p}_G$ of the plant into vectors $\mathbf{p}_{Gz}$ and $\mathbf{p}_{Gn}$ for numerator and denominator coefficients

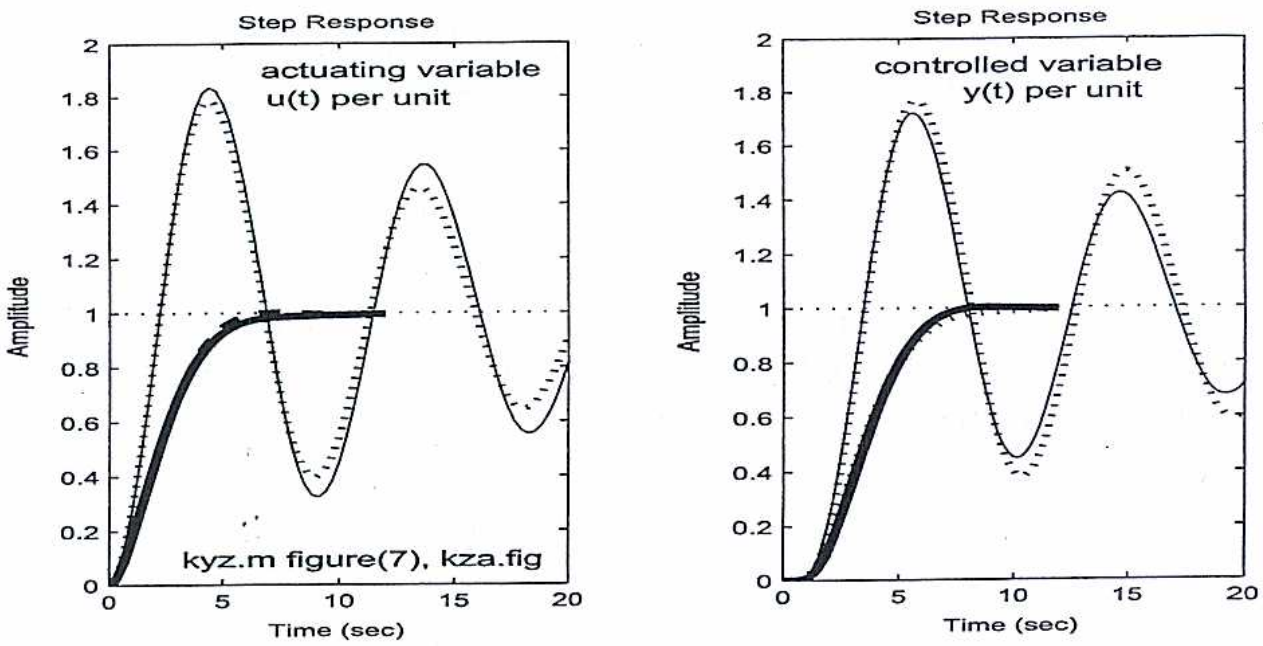


Figure 2: Per-unit step responses for a reference input step. Actuating variable $u(t)$, left, and plant output $y(t)$, right.

$\mathbf{p}_G \in \mathcal{R}^{2n+2}$; $\mathbf{p}_{Gz}, \mathbf{p}_{Gn} \in \mathcal{R}^{n+1}$,

$$K(s) = \frac{z_K(s)}{n_K(s)} = \frac{\mathbf{p}_{Kz}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Kn}^T \mathbf{s}} \qquad G(s) = \frac{z_G(s)}{n_G(s)} = \frac{\mathbf{p}_{Gz}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}} \tag{22}$$

$$d_R \triangleq d(j\omega_T) = 1 + \frac{\mathbf{p}_{Gz}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}} K(s)\Big|_{s=j\omega_T}, \quad r = |d_R| = \min_{\omega} |d(j\omega)|, \tag{23}$$

where

$$\mathbf{s} \triangleq (1 \;\; s \;\; s^2 \ldots s^n)^T \quad \in \mathcal{C}^{n+1} \tag{24}$$

and n is the degree of the polynomial.

3.1 Unified Approach. Control and Plant Derivatives

In the presence of small uncertainties given by $\Delta\mathbf{p}_{Gz}$ and $\Delta\mathbf{p}_{Gn}$, we find

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial \Delta \mathbf{p}_G} \overset{(72)}{=} (\Re e\, d_R) \begin{pmatrix} \Re e\, \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} \\ \Re e\, \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \end{pmatrix} + (\Im m\, d_R) \begin{pmatrix} \Im m\, \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} \\ \Im m\, \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

For small uncertainties, and for $s = j\omega_T$,

$$d_R = 1 + (G + \Delta G)K \tag{26}$$

$$d_R = 1 + (\mathbf{p}_{Gz} + \Delta\mathbf{p}_{Gz})^T \mathbf{s} \frac{1}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}} (1 - \frac{\Delta \mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}) K(s) \tag{27}$$

$$d_R \doteq \underbrace{1+\frac{R_{11}R_{12}}{R_{21}R_{22}}}_{\triangleq a} + \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{21}R_{22}}\mathbf{s}^T}_{\triangleq \mathbf{b}^T}\Delta\mathbf{p}_{Gz} \underbrace{-\frac{R_{11}R_{12}}{R_{21}^2R_{22}}\mathbf{s}^T}_{\triangleq \mathbf{c}^T}\Delta\mathbf{p}_{Gn}\,, \tag{28}$$

where

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{p}_G^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s} & \mathbf{p}_K^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s} \\ \mathbf{p}_G^T\mathbf{P}_n^T\mathbf{s} & \mathbf{p}_K^T\mathbf{P}_n^T\mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Gz}^T\mathbf{s} & \mathbf{p}_{Kz}^T\mathbf{s} \\ \mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s} & \mathbf{p}_{Kn}^T\mathbf{s} \end{pmatrix} \tag{29}$$

The dimension of $\mathbf{s}$ has to be adapted to the degree of K and G. For the sake of simplicity, no distinction is made in Eq.(29). In the derivation of what follows, $\mathbf{s}$ corresponds to the order of the plant G. Moreover, $\mathbf{S} \triangleq \mathbf{s}\mathbf{s}^T$ is defined.

For the gradient one has (*Weinmann, A., 2001*)

$$d_R = 1+G(s)K(s) = 1+G(s)\frac{(\mathbf{P}_z\mathbf{p}_K)^T\mathbf{s}}{(\mathbf{P}_n\mathbf{p}_K)^T\mathbf{s}} \tag{30}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \mathbf{p}_K} = G(s)\Big[\frac{\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}}{\mathbf{p}_K^T\mathbf{P}_n^T\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{p}_K^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}}{(\mathbf{p}_K^T\mathbf{P}_n^T\mathbf{s})^2}\mathbf{P}_n^T\mathbf{s}\Big]_{s=j\omega_T}\,. \tag{31}$$

The coefficients of the polynomials $p_{Kz}(s)$ in the numerator are collected in a vector $\mathbf{p}_{Kz}$, which is the first half of the parameter vector $\mathbf{p}_K$; the denominator polynomial is $p_{Kn}(s)$ corresponding to the second half of the parameter vector $\mathbf{p}_K$. Hence, one has

$$\mathbf{p}_K \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Kz} \\ \mathbf{p}_{Kn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{Kz} = \mathbf{P}_z\mathbf{p}_K, \quad \mathbf{p}_{Kn} = \mathbf{P}_n\mathbf{p}_K, \tag{32}$$

$$\mathbf{p}_G \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Gz} \\ \mathbf{p}_{Gn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{Gz} = \mathbf{P}_z\mathbf{p}_G, \quad \mathbf{p}_{Gn} = \mathbf{P}_n\mathbf{p}_G, \tag{33}$$

$$\text{where } \mathbf{P}_z \triangleq (\mathbf{I}_{n+1} \;\vdots\; \mathbf{0}_{n+1}), \quad \mathbf{P}_n \triangleq (\mathbf{0}_{n+1} \;\vdots\; \mathbf{I}_{n+1}) \in \mathcal{R}^{(n+1)\times 2(n+1)}\,. \tag{34}$$

Using Eq.(33) and Eq.(29), there is a unified approach for the uncertainties of the plant and gradient of the controller

$$\frac{\partial d(j\omega)}{\partial \mathbf{p}_G} = \frac{1}{R_{21}R_{22}}R_{12}(\mathbf{P}_z^T - \frac{R_{11}}{R_{21}}\mathbf{P}_n^T)\mathbf{s} \tag{35}$$

$$\frac{\partial d(j\omega)}{\partial \mathbf{p}_K} = \frac{1}{R_{21}R_{22}}R_{11}(\mathbf{P}_z^T - \frac{R_{12}}{R_{22}}\mathbf{P}_n^T)\mathbf{s}\,. \tag{36}$$

Optimization requires

$$r^2(\Delta\mathbf{p}_G) + \lambda\|\Delta\mathbf{p}_G\|_F^2 \;\rightarrow\; \min_{\Delta\mathbf{p}_G}\,. \tag{37}$$

3.2 Gradient with Respect to Plant Uncertainties

Having equipped the plant with the worst uncertainty $\Delta\mathbf{p}_G^\star$, the gradient with respect to $\Delta\mathbf{p}_K$ is derived. Replacing $\mathbf{p}_{Gz}$ by $\mathbf{p}_{Gz}+\Delta\mathbf{p}_{Gz}$ and $\mathbf{p}_{Gn}$ by $\mathbf{p}_{Gn}+\Delta\mathbf{p}_{Gn}$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta\mathbf{p}_{Gz}} \overset{(27)}{=} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{p}_{Gn}+\Delta\mathbf{p}_{Gn})^T\mathbf{s}}K = \frac{K(s)\mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}\left(1-\frac{\Delta\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}\right) \tag{38}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} = \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{21}R_{22}}}_{\triangleq e}\mathbf{s} \underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2 R_{22}}}_{\triangleq \mathbf{F}}\mathbf{S}\,\Delta \mathbf{p}_{Gn} \tag{39}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \overset{(27)}{=} K(s)(\mathbf{p}_{Gz}+\Delta \mathbf{p}_{Gz})^T\mathbf{s}\,\frac{(-1)}{[(\mathbf{p}_{Gn}+\Delta \mathbf{p}_{Gn})^T\mathbf{s}]^2}\mathbf{s} \tag{40}$$

$$= K(s)\mathbf{s}^T(\mathbf{p}_{Gz}+\Delta \mathbf{p}_{Gz})\,\frac{(-1)}{(\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s})^2}\left(1-\frac{\Delta \mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}\right)^2\mathbf{s} \tag{41}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} = \underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2 R_{22}}\mathbf{S}\mathbf{p}_{Gz}}_{\triangleq \mathbf{f}} \underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2 R_{22}}\mathbf{S}}_{\triangleq \mathbf{H}}\,\Delta \mathbf{p}_{Gz} + \underbrace{\frac{2R_{12}}{R_{21}^3 R_{22}}\mathbf{S}\mathbf{p}_{Gz}\mathbf{s}^T}_{\triangleq \mathbf{J}}\,\Delta \mathbf{p}_{Gn}\,. \tag{42}$$

Referring to Eqs.(25), (28), (39) and (42) yields

$$(\Re e\; d_R)\frac{\partial \Re e\; d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_G} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2\Delta \mathbf{p}_{Gz} + \mathbf{h}_3\Delta \mathbf{p}_{Gn} \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\Delta \mathbf{p}_{Gz} + \mathbf{k}_3\Delta \mathbf{p}_{Gn} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

where

$$\mathbf{h}_1 = (\Re e\; es)(\Re e\; a) \quad \in \mathcal{C}^{n+1} \tag{44}$$

$$\mathbf{h}_2 = (\Re e\; es)(\Re e\; \mathbf{b}^T) \quad \in \mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{45}$$

$$\mathbf{h}_3 = (\Re e\; es)(\Re e\; \mathbf{c}^T) + (\Re e\; a)(\Re e\; \mathbf{F}) \quad \in \mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{46}$$

$$\mathbf{k}_1 = (\Re e\; \mathbf{f})(\Re e\; a) \quad \in \mathcal{C}^{n+1} \tag{47}$$

$$\mathbf{k}_2 = (\Re e\; \mathbf{f})(\Re e\; \mathbf{b}^T) + (\Re e\; \mathbf{H})(\Re e\; a) \quad \in \mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{48}$$

$$\mathbf{k}_3 = (\Re e\; \mathbf{f})(\Re e\; \mathbf{c}^T) + (\Re e\; \mathbf{J})(\Re e\; a) \quad \in \mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)}\,. \tag{49}$$

For the expression $(\Im m\; d_R)\;\frac{\partial \Im m\; d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_G}$ replace $\Re e$ by $\Im m$ in Eqs.(43) through (49) and increase the indices of $\mathbf{h}$ and $\mathbf{k}$ by three.

Then, from Eq.(25)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial \Delta \mathbf{p}_G} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{h}_1+\mathbf{h}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_4 \end{pmatrix}}_{\triangleq \mathbf{h}_7} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{h}_2+\mathbf{h}_5 & \vdots & \mathbf{h}_3+\mathbf{h}_6 \\ \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_5 & \vdots & \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_6 \end{pmatrix}}_{\triangleq \mathbf{H}_7} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p}_{Gz} \\ \Delta \mathbf{p}_{Gn} \end{pmatrix}}_{\triangleq \Delta \mathbf{p}_{Gn}}. \tag{50}$$

Finally, optimization leads to

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial \Delta \mathbf{p}_G} + \lambda\frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{p}_G}\|\Delta \mathbf{p}_G\|_F^2 = \mathbf{0} \tag{51}$$

$$\mathbf{h}_7 + \mathbf{H}_7\Delta \mathbf{p}_G + 4\lambda\Delta \mathbf{p}_G = \mathbf{0} \tag{52}$$

$$\Delta \mathbf{p}_G^\star = -[\mathbf{H}_7 + 4\lambda \mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1}\mathbf{h}_7 \ , \tag{53}$$

where λ results from

$$\mathbf{h}_7^T[\mathbf{H}_7 + 4\lambda \mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1,T}[\mathbf{H}_7 + 4\lambda \mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1}\mathbf{h}_7 = p_0^2 \ . \tag{54}$$

If only some of the coefficients are uncertain, then at the positions of the certain parameters the parameter increments are kept fixed at zero.

Example 2. Plant in analytic representation:

The result of Eqs. (53) and(54) is carried out in detail. The setup for the controller parameters (order 3), the plant (order 4) without and with the worst uncertainty, respectively, is

0	0	0.0362
0	0	0.0819
18.0000	0	-0.0742
18.0000	0	-0.1675
1.0000	3.0000	3.1518
1.6000	1.0000	0.9984
0.8300	12.0000	11.9997
0.1400	57.0000	57.0033
	126.0000	126.0007
	104.0000	103.9932.

In Fig. 3, the initial plant and controller is illustrated. The nominal characteristic $F_0(j\omega)$ is depicted, and the characteristic of $K(j\omega)G_p(j\omega)$ where

$$G_p = \frac{(\mathbf{p}_{Gz} + \Delta \mathbf{p}_{Gz}^\star)^T \mathbf{s}}{(\mathbf{p}_{Gn} + \Delta \mathbf{p}_{Gn}^\star)^T \mathbf{s}} \tag{55}$$

in the initial worst case. (The result of changing the steps of K are the same as in Example 1. They are not repeated.)

For illustration purpose, random perturbations of the same limit are also applied, producing the family of dots around the pentagram point $F_0(j\omega_T)$. In the initial $F_0(j\omega)$, there is only a slight difference between $\omega_T = 0.697$ and $\omega_{Tp} = 0.703$.

4 Exact Solution

In the preceding section, $\Delta \mathbf{p}_G$ was assumed small. Omitting this condition, the exact solution results from

$$d_R = 1 + \frac{R_{12}}{R_{22}} \frac{(\mathbf{p}_{Gz} + \Delta \mathbf{p}_{Gz})^T}{(\mathbf{p}_{Gn} + \Delta \mathbf{p}_{Gn})^T \mathbf{s}} \tag{56}$$

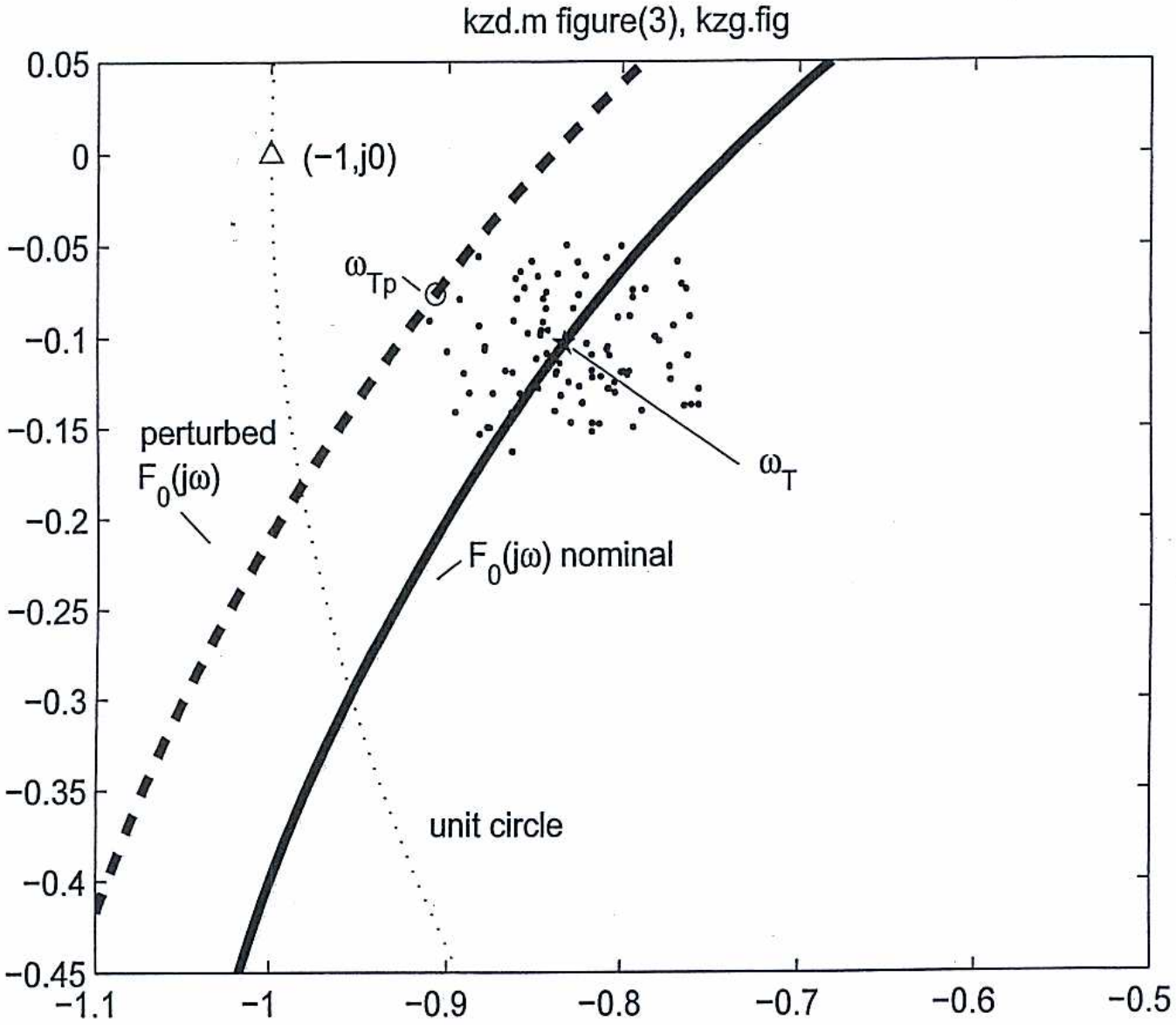


Figure 3: Nominal and worst perturbed open-loop characteristic $F_0(j\omega)$ and cloud of random selctions of the perturbed $F_0(j\omega_T)$

$$d_R d_R^* + \lambda \| \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p}_{Gz} \\ \Delta \mathbf{p}_{Gn} \end{pmatrix} \|_F^2 \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{p}_{Gz}, \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \tag{57}$$

$$\frac{\partial d_R d_R^*}{\partial \Delta \mathbf{p}_G} + 2\lambda \Delta \mathbf{p}_G = \mathbf{0} \ , \tag{58}$$

where

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} = K(s) \frac{1}{(\mathbf{p}_{Gn} + \Delta \mathbf{p}_{Gn})^T \mathbf{s}} \mathbf{s} \tag{59}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} = -K(s) \frac{(\mathbf{p}_{Gz} + \Delta \mathbf{p}_{Gz})^T \mathbf{s}}{[(\mathbf{p}_{Gn}^T + \Delta \mathbf{p}_{Gn}^T)\mathbf{s}]^2} \mathbf{s} \ . \tag{60}$$

Eq.(58) is a nonlinear equation to be resolved with respect to $\Delta \mathbf{p}_G$, which is an unknown of dimension two times the order of the plant plus two. Only a numerical solution is possible. The initial startup value is taken from Eq.(53) which is the result for small uncertainties.

5 Generalized Stability Radius

Suppose the generalized stability radius for a MIMO systems with m inputs and outputs

$$v \triangleq \det[\mathbf{I} + \mathbf{F}_0(s)] = \det[\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z}] = \det[\mathbf{I} + \mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G] \ . \tag{61}$$

For small perturbations $\Delta \mathbf{N}_G$ of $\mathbf{N}_G$, only, and using $\mathbf{N}_G \triangleq \mathbf{P}_{NG}\mathbf{S}_\sigma$ etc., where (*Weinmann, A., 2007*)

$$\mathbf{s} \triangleq (1 \ \ s \ \ s^2 \ \ \dots \ \ s^n)^T, \qquad \mathbf{S}_\sigma \triangleq \mathbf{s} \otimes \mathbf{I}_m \ , \tag{62}$$

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z}) = \det[\mathbf{I} + \mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G - \mathbf{N}_G^{-1} \cdot \Delta \mathbf{N}_G \cdot \mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G] \tag{63}$$

$$\frac{\partial \det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})}{\partial (\Delta \mathbf{P}_{NG})_{ij}} = \mathrm{tr}\{-\mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{S}_\sigma\mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G \mathrm{adj}(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})\} \tag{64}$$

$$\frac{\partial \det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})}{\partial \Delta \mathbf{P}_{NG}} = -\mathbf{N}_G^{-T}[\mathrm{adj}(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})]^T\mathbf{Z}_G^T\mathbf{Z}_K^T\mathbf{N}_K^{-T}\mathbf{N}_G^{-T}\mathbf{S}_\sigma^T \tag{65}$$

$$\frac{\partial |v|^2}{\partial \Delta \mathbf{P}_{NG}} \overset{(72)}{=} -2\Re e \ \{[\det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})^*]\mathbf{N}_G^{-T}(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})^{-T} \tag{66}$$

$$\times [\det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})]\mathbf{Z}_G^T\mathbf{Z}_K^T\mathbf{N}_K^{-T}\mathbf{N}_G^{-T}\mathbf{S}_\sigma^T\} \tag{67}$$

$$= -2|\det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})|^2 \ \Re e \ \{\mathbf{N}_G^{-T}(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})^{-T}\mathbf{Z}_G^T\mathbf{Z}_K^T\mathbf{N}_K^{-T}\mathbf{N}_G^{-T}\mathbf{S}_\sigma^T\} \tag{68}$$

$$= -2|\det(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})|^2 \ \Re e \ \{[\mathbf{S}_\sigma\mathbf{N}_G^{-1}\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G(\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{N}_G^{-1}]^T\}. \tag{69}$$

6 Conclusion

For perturbed SISO and MIMO systems, a general stability radius is taken into consideration and a gradient method for its stepwise increase. Emphasis is put on high-order systems and plants with only measured data. The worst uncertainty dependence is also derived in this case. For small uncertainties, explicit results for computer-assisted solutions are presented.

Appendix. Derivative of the Absolute Value

Derivative of the squared absolute value $|v|^2$ with respect to a real-valued parameter vector

$$\frac{\partial |v|^2}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial (vv^*)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{p}} v^* + v \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{p}} \tag{70}$$

$$= \frac{\partial (\Re e\ v + j \Im m\ v)}{\partial \mathbf{p}} (\ \Re e\ v - j \Im m\ v) + (\Re e\ v + j \Im m\ v) \frac{\partial (\Re e\ v - j \Im m\ v)}{\partial \mathbf{p}} \tag{71}$$

$$\frac{\partial |v|^2}{\partial \mathbf{p}} = 2 \left[(\Re e\ v)\ \frac{\partial (\Re e\ v)}{\partial \mathbf{p}} + (\Im m\ v) \frac{\partial (\Im m\ v)}{\partial \mathbf{p}} \right] = 2\ \Re e\ [v^* \frac{\partial v}{\partial \mathbf{p}}]\ , \tag{72}$$

where $()^*$ is the complex conjugate. In Eq.(72), $\mathbf{p}$ can be replaced by a real-valued matrix.

E.g., for ω instead of $\mathbf{p}$, $v = 3 + s + 4s^2, \quad s = j\omega$ (73)

$$vv^* = (3 - 4\omega^2)^2 + \omega^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial (vv^*)}{\partial \omega} = -46\omega + 64\omega^3. \tag{74}$$

Referring to Eq.(72), $2 \Re e\ [(3 - j\omega - 4\omega^2)(j - 8\omega)] = -46\omega + 64\omega^3.$ (75)

References

Föllinger, O., 1994, Regelungstechnik, 8. Auflage, Heidelberg: Verlag Hüthig

Weinmann, A., 1994, Regelungen, Band 1: Systemtechnik linearer und linearisierter Regelungen auf anwendungsnaher Grundlage. 3. Auflage, Wien, New York: Springer-Verlag

Weinmann, A., 2001, Gradients of norms, traces and determinants for automatic control applications, *Int. J. Automation Austria* **9**, H.1/2, pp.36-50 (see http://www.acin.tuwien.ac.at/IJAA/index.htm)

Weinmann, A., 2007, Duality-based robust polynomial matrix controller, *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* , submitted

Regelung einer instabilen Regelstrecke mit ausgeprägtem Reibungseinfluss und erheblicher Systemtotzeit

M. Winkler, M. Schuss
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gusshausstr. 27-29
A - 1040 Wien
Telefon +43 1 58801 376 24
Email: schuss@acin.tuwien.ac.at

31.10.2006

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein diskretes Zustandsraummodell des inversen Pendels abgeleitet. Nach Erweiterung um einen Integralanteil, erfolgt ein Reglerentwurf nach der Linearen Quadratischen Regler-Methode (LQR-Methode). Um die Qualität der Regelung zu steigern, wird die Reibung kompensiert. Es wird dabei die statische Kompensation mit einer Kennlinie und die adaptive Kompensation mit einem Störgrößenbeobachter verglichen. Für eine bildbasierte Regelung wird die Auswirkung einer Systemtotzeit auf das Regelungsverhalten gezeigt. Das diskrete Zustandsraummodell des inversen Pendels wird um ein Totzeitmodell erweitert und ein entsprechender Entwurf erfolgt.

Abstract

In this paper the inverted pendulum is discribed in discrete state space. After extending the discrete state space model by an integrator, a feedback control is designed by using the Linear Quadratic Regulator-method (LQR-method). The system is influenced by friction which leads to a reduction of the quality of the control system. First, the friction is compensated by a measured characteristic curve. Then, the friction is adaptive compensated by a disturbance observer. The influence of the delay time on the control system by using a camera is demonstrated. The discrete state space model of the inverted pendulum is extended by delay time and the controller is redesigned.

1 Einleitung

Heutzutage steigen die Anforderungen an die Prozessindustrie durch ständig kürzer werdende Produktlebenszyklen und ständig wachsende Konkurrenzmärkte. Dies spiegelt sich in den Produkten wider, die laufend höhere Kundenansprüche befriedigen müssen. Der Einsatz der Regelungstechnik in immer mehr Alltagsprodukten zur Steigerung von Qualität, Funktionalität und Benutzerfreundlichkeit ist deshalb nicht weiter verwunderlich. Abgesehen von den alltäglichen Produkten ließen sich viele hochtechnische Aufgaben ohne den Einsatz der Regelungstechnik nicht realisieren.
Das Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik ACIN stellt seinen Studenten den Aufbau eines inversen Pendels mit der Modellnummer IP-02 der Firma Quanser Inc. für Übungen zur Verfügung. Das inverse Pendel bietet einfachen und ungefährlichen Zugang zu einer instabilen Regelstrecke.
In dieser Arbeit wird zuerst ein diskretes Zustandsraummodell für den Aufbau des inversen Pendels abgeleitet. Nach Erweiterung des Zustandsraummodells um einen Integrator besitzt der Regelkreis exakte Stationärgenauigkeit und kann Störungen am Streckeneingang ausregeln. Für dieses diskrete Zustandsraummodell wird nach dem LQR-Verfahren (Linearer Quadratischer Regler) ein Regler entworfen.
Durch den beträchtlichen Einfluss der Reibung vermindert sich die Qualität der Regelung. Deshalb wird die Reibung zuerst durch eine identifizierte Reibkennlinie kompensiert. Die ausgeprägte Ortsabhängigkeit in der Reibung kann in der Kennlinie nicht berücksichtigt werden, und führt in Bereichen mit weniger Reibung zu einer Überkompensation mit einem entsprechend nervösen Systemverhalten. Aus diesem Grund wird für die Reibungskompensation ein diskreter linearer Störgrößenbeobachter genutzt, der die Ortsabhängigkeit der Reibung berücksichtigt und eine adaptive Reibungskompensation realisiert. Das Ergebnis der einzelnen Kompensationsarten ist zusammenfassend dargestellt.
Dem Institut steht durch Zusammenarbeit mit der Firma Festo AG & Co. KG ein Kompaktkamerasystem SBOC-M/SBOI-M zur Verfügung, mit dem in weiteren Arbeiten eine bildbasierte Regelung realisiert werden soll. Die Auswirkungen auf das Systemverhalten durch Einsatz der Kamera und die damit verbundene Systemtotzeit werden in dieser Arbeit gezeigt. Die Totzeit wird im Zustandsraummodell berücksichtigt, ein entsprechender Entwurf vorgenommen und das Ergebnis zusammenfassend präsentiert.

2 Modellbildung des diskreten inversen Pendels

In diesem Kapitel erfolgt die Modellbildung des diskreten inversen Pendels in den wichtigsten Schritten. Es gilt vorerst das kontinuierliche Zustandsraummodell des Wagens mit hängendem Pendelstab zu erstellen. Es ist ein weiteres Ziel des Kapitels, durch Anpassen der Winkelverhältnisse daraus das Zustandsraummodell des inversen Pendels zu ermitteln. Um exakte Stationärgenauigkeit und Fehlerfreiheit im Falle von Störungen am Streckeneingang zu gewährleisten, wird im nächsten Schritt das Zustandsraummodell um einen Integralanteil erweitert. Da das Modell des inversen Pendels in einer Abtastregelung verwendet wird, erfolgt abschließend eine Umwandlung des kontinuierlichen Zustandsraummodells in ein diskretes Zustandsraummodell.

Bei der Herleitung des Modells für das gesamte Pendel (vergleiche Abb. 1) muss sowohl das Kräftegleichgewicht für den Wagen, als auch das Kräftegleichgewicht im Schwerpunkt S des Stabes erfüllt sein. Da der Stab aus einem homogenen Material besteht und einen symmetrischen Querschnitt besitzt, befindet sich der Masseschwerpunkt S in der Stabmitte $l = L/2$. Zusätzlich muss das Momentengleichgewicht (Drallsatz) des Stabes erfüllt sein. Das Kräftegleichgewicht am Wagen und am Stab bilden zusammen mit dem Momentengleichgewicht die Grundgleichungen für die Modellbildung des gesamten Systems. Unter der Annahme eines kleinen Winkels $\alpha \approx 0$ (Ziel des Regelkreises ist es, das Pendel senkrecht zu halten) und der damit verbundenen Näherungen ergeben sich nach konsequenten Umformen und Einsetzen (Details siehe [Win06]) zwei lineare Differentialgleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{\alpha}$

$$\ddot{x} = -\frac{4}{R_A(4m_w + m_s)}\left(\frac{K_m K_g}{r}\right)^2 \dot{x} + \frac{3gm_s}{(4m_w + m_s)}\alpha + \frac{4}{R_A(4m_w + m_s)}\left(\frac{K_m K_g}{r}\right) U_A \qquad (1)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{6}{LR_A(4m_w + m_s)}\left(\frac{K_m K_g}{r}\right)^2 \dot{x} - \frac{6g(m_w + m_s)}{L(4m_w + m_s)}\alpha - \frac{6}{LR_A(4m_w + m_s)}\left(\frac{K_m K_g}{r}\right) U_A. \qquad (2)$$

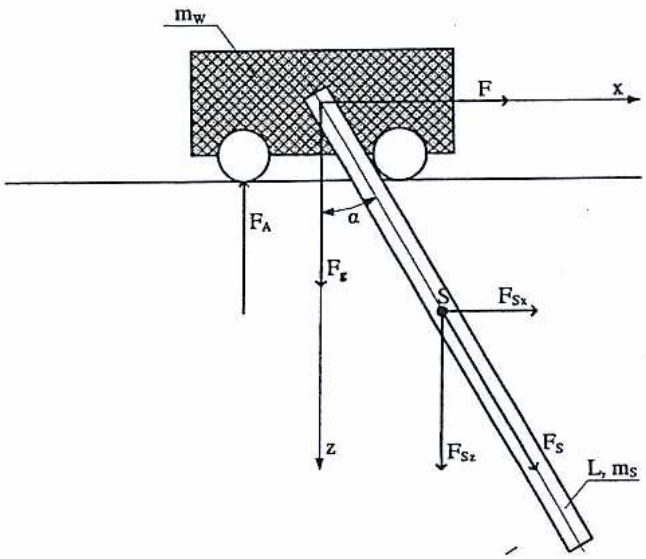


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Wagens mit hängendem Pendelstab

Diese Differentialgleichungen beschreiben das Verhalten des Gesamtsystems mit den Parametern des Streckenmodells (siehe [Qua96]), bestehend aus angetriebenem Wagen und hängendem Stabpendel. Um aus dem Modell des hängenden Pendels das Modell des inversen Pendels abzuleiten, muss in Gl. 1 und Gl. 2 das Vorzeichen für den Winkel α gewechselt werden.
Um stationäre Fehlerfreiheit und ideale Störgrößenunterdrückung am Streckeneingang zu garantieren, muss der Regler einen Integrator für die Regelgröße aufweisen. Dies wird durch Einführen einer weiteren Zustandsgröße laut [Wei95] mit

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t e(t')dt' \quad bzw. \quad \dot{x}_{n+1} \equiv e = y_{ref} - y \qquad (3)$$

für den kontinuierlichen Fall realisiert. Unter Berücksichtigung des Integratoranteils ergibt sich mit dem ursprünglichen Zustandsvektor

$$\underline{x}^T = \begin{pmatrix} x & \alpha & \dot{x} & \dot{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4}$$

die Systemmatrix $\underline{A}$, die Eingangsmatrix $\underline{B}$ und die Ausgangsmatrix $\underline{C}$ des Zustandsraummodells des nicht sprungfähigen kontinuierlichen inversen Pendels zu

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3gm_s}{(4m_w+m_s)} & -\frac{4}{R_A(4m_w+m_s)}\left(\frac{K_mK_g}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6g(m_w+m_s)}{L(4m_w+m_s)} & \frac{6}{LR_A(4m_w+m_s)}\left(\frac{K_mK_g}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{B}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{R_A(4m_w+m_s)}\frac{K_mK_g}{r} & -\frac{6}{LR_A(4m_w+m_s)}\frac{K_mK_g}{r} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Da die Regelstrecke über einen Analog-Digital-Wandler (ADC) angesteuert wird (siehe Abb. 2), verhält sich diese wie eine abgetastete und mit einem Halteglied nullter Ordnung versehene Regelstrecke. Mit sinkender Abtastzeit T wird das allgemeine kontinuierliche

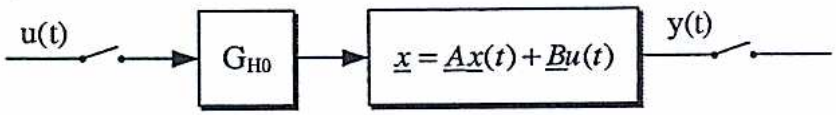


Abbildung 2: Eingrößen-Abtastregelstrecke mit Halteglied und Taster am Eingang und Ausgang [Wei95]

Zustandsraummodell immer fehlerhafter. Mit den Abkürzungen [Wei95, Ise8a]

$$\begin{aligned} \underline{\phi}(T) &= e^{\underline{A}T} \\ \underline{\psi}(T) &= \int_0^T \underline{\phi}(t)\,\underline{B}dt = \underline{A}^{-1}\left(e^{\underline{A}T} - \underline{I}\right)\underline{B} \end{aligned} \tag{6}$$

erhält man mit den Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ des ursprünglichen kontinuierlichen Systems die Zustandsgleichungen des Abtastsystems

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{\phi}\,\underline{x}(k) + \underline{\psi}\,\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}\,\underline{x}(k) + \underline{D}\,\underline{u}(k). \end{aligned} \tag{7}$$

Aus dem Differentialgleichungssystem wird durch die Abtastung ein Differenzengleichungssystem Gl. 7. Die Abtastzeit wird mit $T = 5ms$ entsprechend der Bildrate von 200 *Bilder/Sekunde* des Kompaktkamerasystems SBOC-M/SBOI-M der Firma Festo AG & Co. KG (Details siehe [Fes05]) gewählt. Um die volle Auflösung des CMOS-Chips der Kamera von $640(H) \times 480(V)$ ausnützen zu können, wird die Bildrate auf 200 *Bilder/Sekunde* reduziert. Das Nützen der vollen Auflösung soll wiederum die

möglichst exakte Bestimmung der Weg- und Winkelposition aus der Bildinformation ermöglichen. Die Zustandsraummatrizen für die Abtastregelstrecke mit Integralanteil ergeben sich mit den Systemparametern des Streckenmodells (siehe [Qua96]) zu

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2,145e-5 & 0,00489 & -3,588e-8 & 0 \\ 0 & 1,00 & 0,00026 & 0,005 & 0 \\ 0 & -0,0085 & 0,958 & -2,145e-5 & 0 \\ 0 & 0,142 & 0,104 & 1,00 & 0 \\ -0,005 & 3,588e-8 & -1,232e-5 & 4,495e-11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 2,387e-5 & -5,869e-5 & 0,0095 & -0,023 & -3,99e-8 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3 Optimierte Zustandsregelung mit diskretem LQR-Regler

Es ist Ziel dieses Kapitels, einen diskreten Linearen Quadratischen Regler (diskreter LQR-Regler) für das inverse Pendel zu entwerfen. Dazu wird zuerst in allgemeiner Weise der diskrete LQR-Regler erläutert. Beim nachfolgenden Entwurf des Reglers gilt es, durch passende Wahl der Gewichtungsmatrizen den Ertrag und Aufwand der Regelung einzustellen.

3.1 Allgemein

Es soll nun das inverse Pendel geregelt werden. Da es sich um ein Abtastsystem mit der Abtastzeit T handelt, liegt Information nur zu diskreten Zeitpunkten vor. Es soll allgemein das System vom Anfangszustand $\underline{x}(k_0) = \underline{x}_0$ zum Zeitpunkt t_0 bis zur Zeit $t_f = k_f T$ mit einem Zustandsregler $\underline{K}$ in den Endzustand $\underline{x}(k_f) = \underline{x}_f$ übergeführt werden. Der Ermittlung des Zustandsreglers K geht ein quadratisches Gütefunktional [Wei95]

$$I = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \underline{x}^T(k+1)\,\underline{Q}(k+1)\,\underline{x}(k+1) + \underline{u}^T(k)\,\underline{R}(k)\,\underline{u}(k) \tag{9}$$

voraus, in dem die Matrizen $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ die Gewichtungsmatrizen darstellen. Mit $\underline{Q}$ wird der Ertrag der Regelung $\underline{x}^T\,\underline{Q}\,\underline{x}$ und mit $\underline{R}$ der Aufwand der Stellgröße $\underline{u}^T\,\underline{R}\,\underline{u}$ festgelegt. Je größer die einzelnen Elemente in $\underline{Q}$ gewählt werden, umso größer wird das Augenmerk auf die zugehörige Zustandsgröße bei der Reglerberechnung gelegt. Umgekehrt liefern große Elemente in $\underline{R}$ kleine Stellgrößen. Je kleiner die Elemente in $\underline{R}$ gewählt werden, umso großzügigere Stellgrößen ergeben sich. Die Gewichtungsmatrizen müssen die Bedingungen $\underline{x}^T\,\underline{Q}\,\underline{x} \geq 0$ und $\underline{u}^T\,\underline{R}\,\underline{u} > 0$ erfüllen, um die Existenz des Optimums zu gewährleisten [Ise8a]. $\underline{Q}$ muss also symmetrisch und positiv semidefinit, $\underline{R}$ symmetrisch und positiv definit gewählt werden. Die Frage nach dem Optimum des quadratischen Gütekriteriums $I \rightarrow opt$ ergibt für große t_f und einem zeitinvarianten Prozess die algebraische nichtlineare

Riccatigleichung [Wei95, Ise8a] in der Riccati-Matrix $\underline{P}$

$$\underline{P} = \underline{A}^T \left[\underline{P} - \underline{P}\,\underline{B} \left(\underline{B}^T \underline{P}\,\underline{B} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \right] \underline{A} + \underline{Q}, \tag{10}$$

wobei für $\underline{A} \equiv \underline{\phi}(T)$ und $\underline{B} \equiv \underline{\psi}(T)$ gilt. Die Lösung dieser Gleichung liefert eine symmetrische zeitunabhängige Matrix $\underline{P}$. Mit dieser Lösung $\underline{P}$ folgt der diskrete Zustandsregler

$$\underline{K} = - \left(\underline{B}^T \underline{P}\,\underline{B} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\,\underline{A}, \tag{11}$$

der das quadratische Gütefunktional aus Gl. 9 optimal löst. Von größter Wichtigkeit für die Anwendung ist hierbei die Unabhängigkeit der Gl. 11 von den Anfangswerten $\underline{x}(0^+)$.

3.2 Entwurf eines diskreten LQR-Reglers

Im ersten Schritt werden die Gewichtungsmatrizen, wie in [Qua96] empfohlen, entsprechend dem ursprünglichem Zustandsraummodell ohne Integralanteil mit

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= diag\,(\ 0,25 \quad 4 \quad 0 \quad 0\ ) \\ R &= (\ 0,003\ ) \end{aligned} \tag{12}$$

gewählt. Dabei ist die Gewichtung zwischen Ertrag und Aufwand der Regelung auffällig. Wie sich herausstellt, ist die Gewichtung von R sehr hoch gewählt, und es ergibt sich eine sehr kleine Stellgröße. Diese Wahl der Gewichtungsmatrizen ist nicht zielführend, da das Regelverhalten deshalb nicht besonders hochwertig ist. Eine unpassende Verringerung der Gewichtung R belastet den Antrieb nur unnötig und soll auf jeden Fall vermieden werden. So bringt die Verringerung von $R = 0,0003$ um einen Faktor 10 wie in [Kol99] nicht den gewünschten Erfolg, da die Stellgröße u extrem verrauscht ist und permanent das Vorzeichen wechselt. Dadurch wird der Antrieb stark belastet, und eine zusätzliche störende Geräuschentwicklung ist die Folge.
Durch eine Vielzahl von Messungen sind die folgenden Gewichtungsmatrizen $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ bestimmt worden. Durch die Wahl von

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= diag\,(\ 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ) \\ R &= (\ 0,001\ ) \end{aligned} \tag{13}$$

kann ein neuer Zustandsregler $\underline{K}$ für das gesamte diskrete Zustandsraummodell des inversen Pendels mit Integralanteil und den entsprechenden Matrizen aus Gl. 8 mit

$$\underline{K} = (\ 53,52 \quad 115,77 \quad 37,534 \quad 19,985 \quad -29,845\ ) \tag{14}$$

bestimmt werden. Die Kontrolle der Pole des geschlossenen Regelkreises liefert mit

$$\underline{\lambda}^T = (\ 0,932 \pm 0,052i \quad 0,992 \pm 0,007i \quad 0,995\ ) \tag{15}$$

stabile Pole. Nach der Ermittlung von $\underline{K}$ kann das Vorfilter V für die Sollwertvorgabe y_{ref} berechnet werden. Das Vorfilter muss im stationären Zustand $\underline{x} = (kT + T) = \underline{x}(kT)$ den

Zusammenhang $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$ erfüllen. Daraus folgt allgemein laut [Wei95]

$$\underline{C}\,[\underline{I} - \underline{A}(T) - \underline{B}(T)\underline{K}]^{-1}\,\underline{B}(T)\underline{V} = \underline{I}, \tag{16}$$

woraus das Vorfilter $\underline{V}$ bestimmt werden kann. Da im Falle des inversen Pendels nur die Positionsvorgabe $y_{ref} = x_{ref}$ sinnvoll ist, reduziert sich die Ausgangsmatrix $\underline{C}$ auf $\underline{C}_1 = [100\ 0\ 0\ 0]$. Die Positionsvorgabe x_{ref} erfolgt dabei in cm. Damit kann das Vorfilter $V = -0,2991$ bestimmt werden.

4 Verringerung des Reibungseinflusses durch Kompensation

Reibung in mechanischen Systemen ist ein nichtlineares Phänomen und verursacht einen Verlust in der Regelungsqualität. Die Reibung ist die Ursache für statische Regelabweichungen, begrenztes Folgevermögen und sogenannte „slip-stick" Bewegung, also regelmäßiges Losreißen und folgendes Klebenbleiben des Systems in der Bewegung. Um präzise Regelungen für genaue Anwendungen zu realisieren, ist es unumgänglich die Reibung zu berücksichtigen. Die Reibung selbst ist das Resultat äußerst komplexer Vorgänge zwischen zwei Oberflächen. Einen großen Einfluss hat hierbei die Anwesenheit von Schmiermitteln zwischen den Oberflächen.
Man unterteilt die Reibung grundsätzlich in zwei Reibungssysteme. Das erste Reibungssystem ist hierbei durch die Reibung im Stillstand gekennzeichnet. Hier sind die Adhesivkräfte durch die Schmiermittel zwischen den zwei reibenden Oberflächen überwiegend. Die elastische Verformung dieser Schmiermittelübergänge weisen dabei das nichtlineare Verhalten auf, ähnlich steifen mechanischen Federn. Mit steigender Versetzung werden immer mehr Schmiermittelübergänge unterbrochen und das stehende System beginnt zu gleiten. Nun tritt das zweite Reibungssystem in Kraft. Die Reibung ist nun keine Funktion des Ortes mehr, sondern eine Funktion der Geschwindigkeit. Eine detaillierte Erläuterung dieser Modelle ist in [LABS03, FMR03] enthalten. Von diesen komplexen sehr aufwändigen Modellen wird vorerst Abstand genommen. Es werden in weiterer Folge gebräuchliche einfachere Reibungsmodelle erläutert [Ise8b, Noi04]. Es wird dabei von der Wirkung der Reibkraft F_R auf eine durch die Stellkraft F mit der Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ bewegten Masse m in allgemeinster Weise

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(F - F_R) \tag{17}$$

ausgegangen. Das einfachste Modell, das die Haftreibung im Stillstand ($\dot{x} = 0$) bzw. die Gleitreibung im bewegten Zustand ($|\dot{x}| > 0$) berücksichtigt, verwendet nur die Coulombsche Reibung F_C. Durch Erweitern der Coulombschen Reibungskraft um einen linearen geschwindigkeitsabhängigen Reibungsterm ergibt sich ein weiteres oft genutztes Modell

$$F_R = F_C sign(\dot{x}) + \sigma_2 \dot{x} \quad \text{für} \quad |\dot{x}| > 0. \tag{18}$$

Für eine Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ liefert $sign(\dot{x}) = 0$ und $F_R = 0$. Dies ist physikalisch nicht richtig, da auch bei Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ eine genau definierte Reibung wirkt. Deshalb wird das Reibungsmodell aus Gl. 18 für $\dot{x} = 0$ erweitert, und es folgt

$$\begin{aligned} F_R &= F_C sign(\dot{x}) + \sigma_2 \dot{x} \quad \text{für} \quad |\dot{x}| > 0 \\ F_R &= F_C sign(F) \quad \text{für} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{und} \quad |F| > F_C \\ F_R &= F \quad \text{für} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{und} \quad |F| < F_C. \end{aligned} \tag{19}$$

Wie allgemein bekannt spielt bei der Reibung der Einfluss der Schmiermittel eine große Rolle. Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten $\dot{x} \approx 0$ kann sich zwischen den reibenden Oberflächen keine Fluidschicht ausbilden, und die Reibungskraft F_R unterscheidet sich nur wenig von der Haftreibungskraft F_S. Mit steigender Geschwindigkeit kann sich aber eine Fluidschicht des Schmiermittels ausbilden, und die Reibungskraft sinkt. Dies ist auch unter dem Namen Stribeckeffekt bekannt [FMR03].

4.1 Statische Kompensation der Reibung

Es wird nun die Kennlinie bestimmt, die den Einfluss der Reibung auf die Bewegung des Wagens wiedergibt. Dazu muss eine Regelung entworfen werden, die es ermöglicht, den Wagen mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen (siehe [Win06]). Die dabei gemessene Stellgröße u ist proportional der Reibung, da bei Reibungsfreiheit im eingeschwungenen Zustand keine Stellgröße u notwendig wäre, um den Wagen mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen. Eine Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit in der Kennlinie ist dabei nur schwer möglich. Bei hoher Geschwindigkeit v reicht die beschränkte Länge der Zahnleiste nicht mehr aus, um neben der Geschwindigkeitsabhängigkeit der gemittelten Reibspannung u_R auch noch die explizite Ortsabhängigkeit zu berücksichtigen. Es wird nun die mittlere Stellgröße u bzw. Reibspannung u_R im eingeschwungenen Zustand des Regelkreises für äquidistante Geschwindigkeitsschritte in positiver und negativer Richtung ermittelt. Die Reibkennlinie wird durch lineare Interpolation, der auf diese Weise ermittelten Punkte, für ein einfaches Reibmodell mit Coulombscher Reibung und linearer geschwindigkeitsabhängiger Reibung Gl. 19 ermittelt. Das Ergebnis der Interpolation entspricht

$$u_R(v) = \begin{cases} 0,049995v + 0,55012 & \text{für } sign(v) = 1 \\ 0,046245v - 0,54052 & \text{für } sign(v) = -1 \\ 0,55012 sign(u) & \text{für } v = 0 \text{ und } |u| > 0,55012 \\ u & \text{für } v = 0 \text{ und } |u| < 0,55012. \end{cases} \tag{20}$$

Die Reibkennlinie weist also eine geschwindigkeitsvorzeichenabhängige Steigung und einen geschwindigkeitsvorzeichenabhängigen Schnittpunkt mit der Ordinate auf. Wie in Gl. 19 gezeigt, wird die Reibung bei $v = 0$ berücksichtigt. Die Reibspannung wird dabei aus der Stellgröße u abgeleitet, welche proportional zur Stellkraft F ist. Für $v = 0$ wird die Coulombkraft $F_C \propto u_C = 0,55012$ symmetrisch für beide Kennlinienäste angenommen, um die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten des Simulink-Modells nicht unnötig groß zu machen.

4.2 Adaptive Kompensation der Reibung

Das dynamische System des inversen Pendels wird durch die nichtlinearen Effekte der Reibung unangenehm beeinflusst. Zudem stellt sich die Reibung als wesentlich ortsabhängig dar. Verschleißerscheinungen im Antriebszahnrad machen die Reibung zusätzlich zeitabhängig. Die Parameter, mit denen sich die Reibung in Ort und Zeit ändert, sind nicht bekannt und zudem nur äußerst schwer zu ermitteln. Der Einsatz der statischen Kennlinie bewirkt eine deutliche Verbesserung im Regelverhalten, ist aber nicht in der Lage, die Orts- und Zeitabhängigkeit in der Reibung zu kompensieren. In Bereichen mit wenig Reibung kommt es zur Überkompensation, auf welche das System mit einem nervösen Verhalten reagiert. Wenn sich wie in diesem Fall der Einfluss der Reibung ändert und das Wissen über diese Änderung nur bedingt bekannt ist, eignet sich zur Kompensierung der Reibung der Einsatz eines linearen diskreten Störgrößenbeobachters. Dazu soll ein diskreter Zustandsbeobachter (vergleiche Abb. 3) um ein lineares Störgrößenmodell erweitert werden. Der so entworfene lineare Störgrößenbeobachter ist in der Lage, die Zustandsgrößen genauer zu schätzen, und liefert gleichzeitig eine Schätzung des Störeinflusses, der zur adaptiven Reibungskompensation genutzt werden kann [Mül00].
Die Grundlagen von diskreten Zustandsbeobachtern, mehr Details und grundsätzliche Erweiterungen wie z.B. Beobachter für äußere Störungen oder Zustandsbeobachter reduzierter Ordnung sind in [Wei95, Ise8a] dargestellt.
Es ist von entscheidender Wichtigkeit, dass der Entwurf für den Regler $\underline{K}$ und der Entwurf für die Beobachterrückführung $\underline{H}$ unabhängig voneinander durchgeführt werden können. Das ist die Aussage des sog. Separationstheorems. Die Pole des Beobachters können durch geeignete Wahl der Rückführmatrix $\underline{H}$ beeinflusst werden. Dabei kann ein grundlegender Zusammenhang aus der Matrizenrechnung genutzt werden. Da die Determinante einer Matrix $\underline{M}$ gleich der Determinante der transponierten Matriz $\underline{M}^T$ mit

$$det\underline{M} = det\underline{M}^T \tag{21}$$

ist, gilt für die charakteristische Gleichung des diskreten Zustandsbeobachters

$$det[z\underline{I} - \underline{A} + \underline{H}\,\underline{C}] = det[z\underline{I} - \underline{A}^T + \underline{C}^T\,\underline{H}^T]. \tag{22}$$

Vergleicht man die charakteristische Gleichung für den Zustandsbeobachter Gl. 22 mit der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises $det[z\underline{I} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}] = 0$, so können durch Ersetzen der Systemmatrizen durch die Matrizen des transponierten Ersatzsystems

$$\underline{A} \rightarrow \underline{A}^T \quad \underline{B} \rightarrow \underline{C}^T \quad \underline{K} \rightarrow -\underline{H}^T \tag{23}$$

für den Beobachterentwurf dieselben Gleichungen wie für den Zustandsreglerentwurf verwendet werden.
Die Pole bzw. Eigenwerte des Beobachters $\lambda_i[\underline{A}^T - \underline{C}^T\underline{H}^T]$ sollen in der z-Ebene dem Koordinatenursprung näher sein als die Eigenwerte $\lambda_i[\underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}]$ der Regelung. Wenn der Beobachter schnellere Pole besitzt als die Regelung, so sind die Zeitkonstanten des Schätzfehlersignals $\underline{\tilde{x}}$ kleiner als die Zeitkonstanten des Regelkreises [Wei95, Ise8a]. Unnötig schnelle Beobachterpole sind unbedingt zu vermeiden, da sonst die geschätzten Zustandsgrößen $\underline{\hat{x}}$ bedingt durch den Einfluss des Messrauschens stark verrauscht sind [Noi04].

Für den nichtlinearen Einfluss der Störgröße bzw. der Reibkraft $F_R(\underline{x}(t), t)$ soll nun ein fiktives lineares Modell

$$\begin{aligned} F_R(\underline{x}(t), t) &\propto U_R(\underline{x}(t), t) \approx \underline{W}\,\underline{d}(t) \\ \dot{\underline{d}}(t) &= \underline{V}\,\underline{d}(t) \end{aligned} \tag{24}$$

angenommen werden. Die Reibkraft F_R ist dabei proportional einer Reibspannung U_R, die zur Überwindung der Reibung an den Antrieb angelegt werden muss. Dies muss im Systemverhalten Gl. 1 und Gl. 2 entsprechend berücksichtigt werden (siehe [Win06]). Damit die Signale des fiktiven Modells die nichtlinearen Störungen möglichst gut annähern, müssen die Matrizen $\underline{V}$ und $\underline{W}$ entsprechend gewählt werden. Dazu ist aber entsprechendes Wissen über das Systemverhalten notwendig. Ist dieses Wissen nicht bekannt, so sind einfache Annahmen über das Systemverhalten dennoch zielführend. Durch die Wahl von $\underline{V} = 0$ und $\underline{W} = 1$ wird der nichtlineare Störungseinfluss der Reibung durch stückweise konstante Sprungfunktionen angenähert [Mül88, Mül00]. Eine weitere Verringerung der Fehlschätzung der Zustandsgrößen und eine bessere adaptive Reibungskompensation, wie in [FP92, Noi04] gezeigt, sind durch äußerst aufwändige nichtlineare Reibungsbeobachter möglich.
Die Berechnung der Beobachtermatrix $\underline{H}$ erfolgt in gleicher Weise wie in Kap. 3 abgeleitet. Die für die LQR-Methode benötigten Gewichtungsmatrizen werden notwendigerweise so gewählt, dass die Beobachterpole schneller als die Regelkreispole sind (siehe [Win06]).

4.3 Auswirkungen der Reibungskompensation im geschlossenen Regelkreis

Die Reibung wirkt destabilisierend, da sie zu einer erhöhten Pendelbewegung im Winkelverlauf α_{unk} führt (siehe Abb. 4(b)) und eine erhöhte Pendelbewegung im Wegverlauf x_{unk} bewirkt (Abb. 4(a)). Vor allem im Bereich des Sollwertsprunges zeigt die nichtkompensierte Strecke ein beträchtliches Überschwingen sowohl im Weg- als auch im Winkelverlauf, wodurch sich die Stellgröße lange in der Begrenzung befindet.
Um die Auswirkungen der Reibung zu verringern, wird in Kap. 4.1 die Reibung durch Aufschalten einer zuvor gemessenen nichtlinearen Reibkennlinie kompensiert. Die dabei festgestellte Ortsabhängigkeit der Reibung kann in der Kennlinie wegen endlicher Länge der Zahnleiste nicht berücksichtigt werden. In Abb. 4 ist der zugehörige Wegverlauf x_{stat} sowie der zugehörige Winkelverlauf α_{stat} dargestellt. Die positive Wirkung der Kompensation ist vor allem im Bereich des Sollwertsprunges $x_{ref} = 50cm$ deutlich ersichtlich. Es zeigt sich bedeutend weniger Überschwingen im Weg- und Winkelverlauf, wodurch der Stellgrößenaufwand im Bereich des Stellgrößensprunges deutlich reduziert wird. Im Bereich $x = 50cm$ wird aber die Reibung durch die Kennlinie überkompensiert, da in diesem Bereich weniger Reibung vorherrscht. Dies wirkt sich ungünstig auf das System aus, das mit einem nervösen Verhalten reagiert. Im Bereich der Reibungsüberkompensation ist die Pendelbewegung im Weg und Winkel höher und auch schneller. Dieses nervöse Verhalten schlägt sich unmittelbar auf die Stellgröße nieder. Im Bereich hoher Reibung und im Bereich des Sollwertsprunges bewirkt die Reibungskompensation durch die Aufschaltung der gemessenen Kennlinie eine große Verbesserung im Regelverhalten. Im Bereich mit

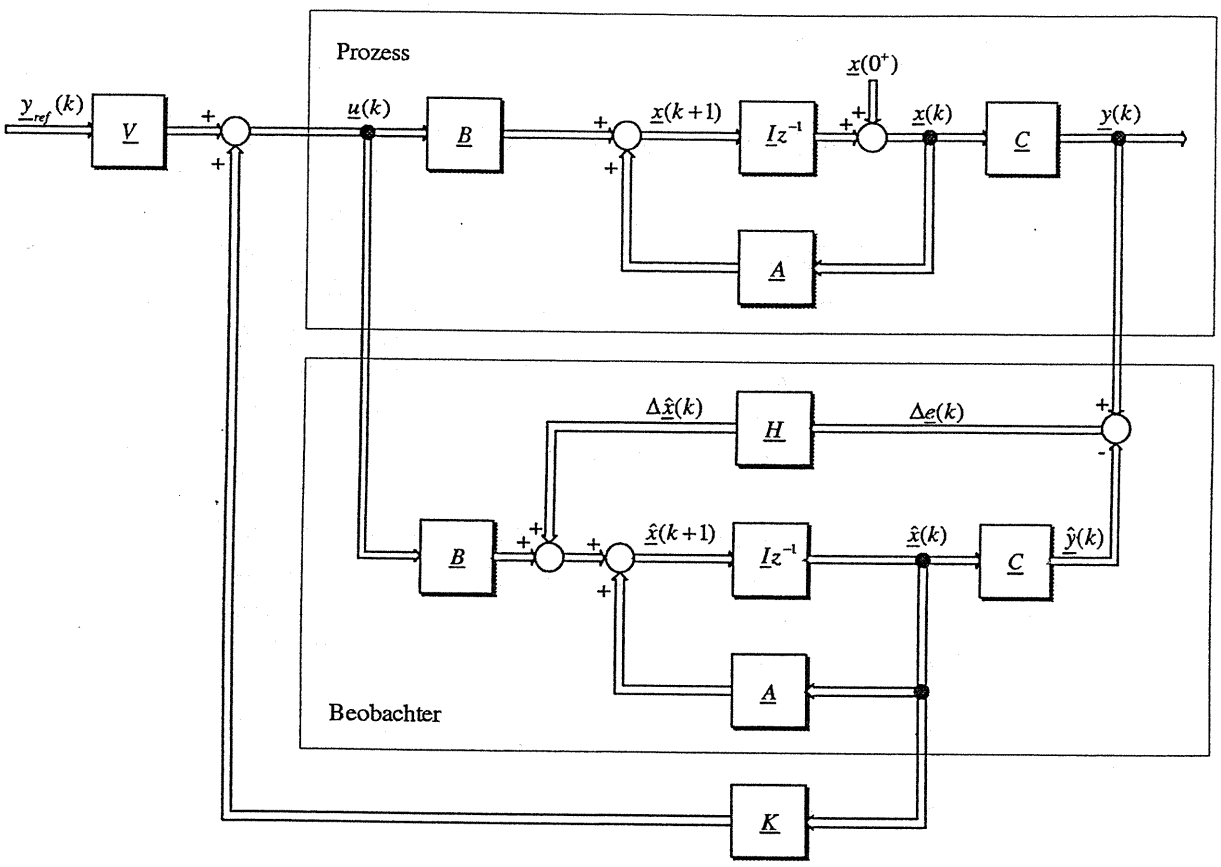
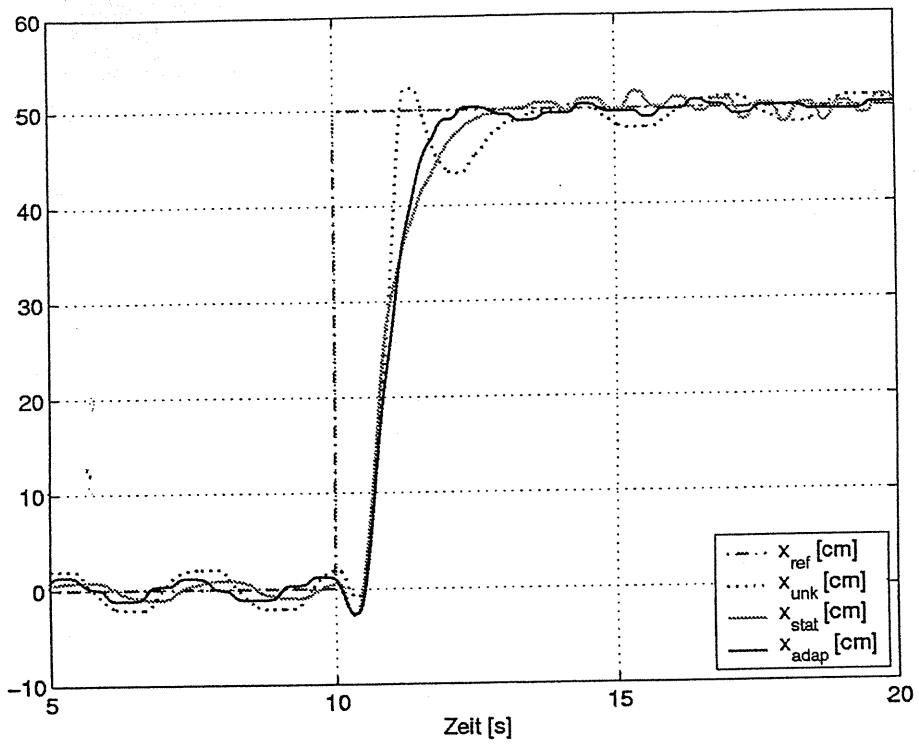


Abbildung 3: Zustandsregler mit Zustandsgrößenbeobachter

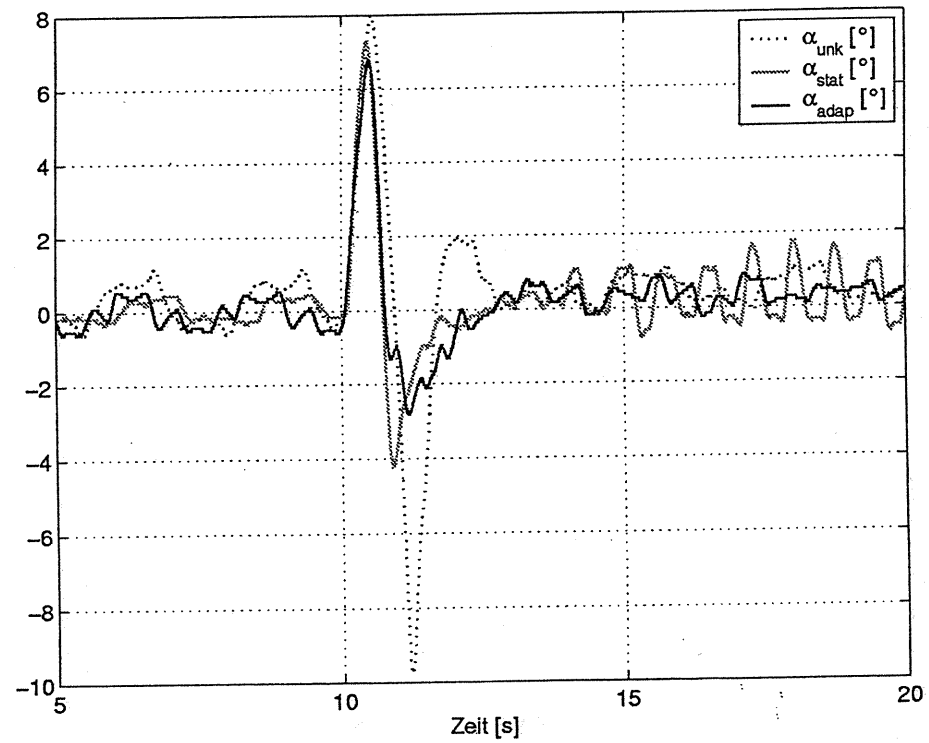
geringerer Reibung ergibt sich durch die Überkompensation aber ein nervöses Systemverhalten.

In Kap. 4.2 wird der nichtlineare Einfluss der Reibung durch den Einsatz eines linearen diskreten Störgrößenbeobachters kompensiert. Dazu wird der entworfene Zustandsgrößenbeobachter um ein lineares Störgrößenmodell erweitert. Die so geschätzte Störgröße berücksichtigt dabei durch das Störmodell auch die Ortsabhängigkeit, weshalb es in Bereichen mit weniger Reibung auch keine Überkompensation erfolgt. Die Verbesserung auf das Systemverhalten ist in Abb. 4 dargestellt. Im Bereich des Sollwertsprunges $x_{ref} = 50cm$ wird das Überschwingen im Winkelverlauf α_{adap} weiterhin reduziert. Der Wegverlauf x_{adap} stimmt viel besser mit dem Verlauf des reibungsfreien Modells x überein, als der Wegverlauf x_{stat} des kennlinienkompensierten Systems (siehe [Win06]).

Durch die adaptive Kompensation der Reibung ergibt sich vor allem im Bereich des Sollwertsprunges eine wesentlich geringere Stellgröße u_{adap}. In Abb. 5 ist dazu vergleichsweise die Stellgröße u_{unk} im unkompensierten Fall dargestellt, die sich länger in der Stellgrößenbegrenzung befindet. Durch den Einsatz eines Störgrößenbeobachters wird die ortsabhängige Reibung kompensiert, wodurch sich das Regelverhalten wesentlich verbessert. Zusätzlich ist die Stellgröße bedeutend kürzer in der Begrenzung und durch die Schätzung der Zustandsgrößen deutlich weniger verrauscht.



(a) Wegverlauf x_{ref}, x_{unk}, x_{stat} und x_{adap}



(b) Winkelverlauf α_{unk}, α_{stat} und α_{dyn}

Abbildung 4: Vergleich des Systemverhaltens unter Kompensation der Reibung

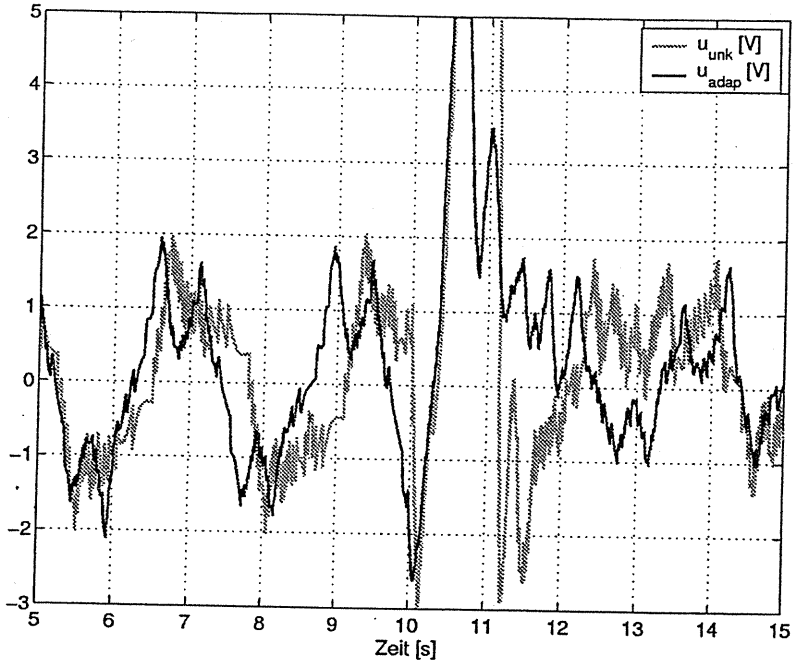


Abbildung 5: Vergleich der Stellgrößen u mit unkompensierter Reibung und durch Störgrößenbeobachter kompensierter Reibung

5 Totzeit im Regelkreis

In diesem Kapitel ist es Ziel, die Totzeit zu behandeln, die durch die Verwendung einer Kamera zur Positions- und Winkelerfassung im System auftritt. Die Kamera bestimmt durch den Bildverarbeitungsalgorithmus aus den aufgenommenen Bilddaten die Lage und den Winkel des inversen Pendels und ersetzt dabei die Inkrementalgeber. Das Auslesen des Bildes und die weitere Verarbeitung der Bilddaten durch den Algorithmus benötigen eine entsprechende Zeit, die im System wie eine Totzeit wirkt. Es wird angenommen, dass das Auslesen des aufgenommenen Bildes einen Abtastschritt und der Bildverarbeitungsalgorithmus mindestens einen weiteren Abtastschritt beanspruchen. Komplexere Algorithmen erfordern für die Verarbeitung der Daten entsprechend mehr Abtastschritte. Es treten also durch Verwendung der Kamera im Minimum zwei Abtastschritte Totzeit T_t auf. Es ergibt sich eine Abtastzeit von $T_s = 5ms$, da die diskrete Regelung des inversen Pendels mit der Kamera synchron läuft und das Kompaktkamerasystem SBOC-M/SBOI-M der Firma Festo AG & Co. KG dabei 200 *Bilder/Sekunde* liefert. Die Kamera wird nun für die Simulation am Modell und die Simulation an der echten Regelstrecke durch entsprechende Totzeitelemente ersetzt, die die gemessenen ursprünglichen Sensordaten aus den Inkrementalgebern des Lage- und Winkelsensors verzögern. Da es sich um einen diskreten Regelkreis mit einer Abtastzeit $T_s = 5ms$ handelt, lässt sich die Totzeit im Falle von ganzzahligen Werten $d = T_t/T_s = 1, 2, 3 \ldots$ durch die z-Übertragungsfunktion z^{-d} darstellen.

5.1 Erweiterung des diskreten Zustandsraummodells

Da das System mit Totzeit am Ausgang nicht steuerbar ist (vergleiche [Win06]), und der Einfluss der Totzeit auf das Systemverhalten laut entsprechender Systemtheorie unabhängig vom Ort des Auftretens ist, wird nun die Totzeit auf den Eingang transformiert. Wenn die Totzeit am Eingang der Regelstrecke auftritt, gilt nach [Ise8a]

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{A}\,\underline{x}(k) + \underline{b}u(k-d) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}\,\underline{x}(k)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Dabei wird die Totzeit als Verzögerungskette mit d z^{-1}-Elementen am Eingang dargestellt (siehe Abb. 6). Die Zustandsgrößen der Verzögerungskette werden in einen Zustandsvektor $\underline{x}_u \in R^{d\times 1}$ aufgenommen

$$\underline{x}_u^T(k) = [u(k-d)\; u(k-d+1)\; \ldots\; u(k-1)\;)]\,. \tag{26}$$

Für die Verzögerungskette gilt das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \underline{x}_u(k+1) &= \underline{A}_u\,\underline{x}_u(k) + \underline{b}_u u(k) \\ u(k-d) &= \underline{c}_u^T\,\underline{x}_u(k)\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Für nicht ganzzahlige Totzeiten im System, wie $d = d_1 + d_2$ mit $d_1 = 1,2,3\ldots$ und

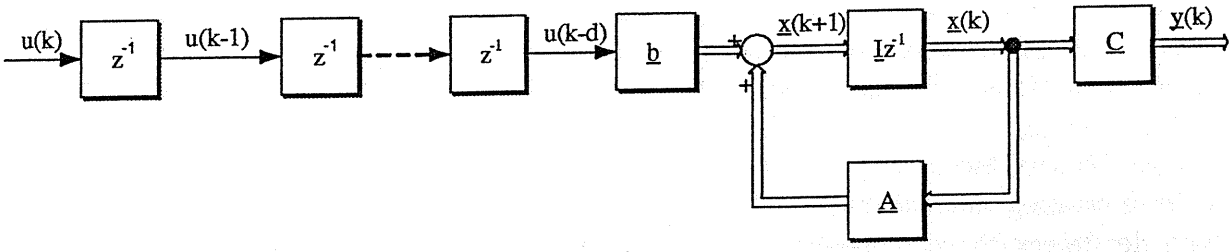


Abbildung 6: Zustandsraumdarstellung eines linearen Prozesses mit Totzeit am Eingang [Ise8a]

$0 \le d_2 \le 1$, kann eine Modellbildung der Totzeit wie in [LF98] vorgenommen werden. Erweitert man den Zustandsvektor des ursprünglichen Systems ohne Totzeit $\underline{x}$ um den Zustandsvektor der Verzögerungskette $\underline{x}_u$ aus Gl. 26, erhält man den neuen Zustandsvektor des Systems mit Totzeit

$$\underline{x}_d^T(k) = [\underline{x}^T\; \underline{x}_u^T] \in R^{1\times(n+d)} \tag{28}$$

und daraus folgt das zugehörige Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \underline{x}_d(k+1) &= \underline{A}_d\,\underline{x}_d(k) + \underline{b}_d u(k) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}_d\,\underline{x}_d(k) \end{aligned} \tag{29}$$

mit den Zustandsraummatrizen

$$\begin{aligned} \underline{A}_d &= \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{b}\,\underline{c}_u^T \\ \underline{0} & \underline{A}_u \end{pmatrix} \in R^{(n+d)\times(n+d)} \\ \underline{b}_d^T &= \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{b}_u^T \end{pmatrix} \in R^{1\times(n+d)} \\ \underline{C}_d &= \begin{pmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{pmatrix} \in R^{2\times(n+d)}. \end{aligned} \tag{30}$$

Der Reglerentwurf nach der LQR-Methode ist nicht zielführend, da die Gewichtungsmatrizen, wie bei der Modellbildung gezeigt, entsprechend der Anzahl der Totzeitschritte erweitert werden müssen. Mit steigender Anzahl von Totzeitschritten steigt auch die Anzahl der frei wählbaren Elemente in den Gewichtungsmatrizen und die Auswirkung sind nur mehr schwer einsehbar. Deshalb erfolgt der Reglerentwurf durch Polvorgabe. Es werden dabei die Pole des geschlossenen Regelkreises aus Gl. 15 verwendet. Da für jeden Totzeitschritt ein Pol gewählt werden muss, stellt sich die Frage nach der Plazierung dieses Poles? Es hat sich durch viele Simulationen gezeigt (vergleiche [Win06]), dass je näher Pole dem Ursprung des Einheitskreises sind, umso weniger weicht das Systemverhalten vom parallel mitsimulierten totzeitfreien Regelkreisverhalten ab. Die Pole für den Beobachter werden nun entsprechend schneller gewählt. Weiters hat sich gezeigt, dass mit steigender Anzahl von Totzeitschritten die Elemente der Beobachterrückführmatrix $\underline{H}$ extrem hohe Werte annehmen. Dies stellt in der Simulation kein Problem dar, deshalb funktioniert die Regelung auch bei einer Totzeit von sechs Abtastschritten wie gefordert. In der Realität ergibt sich jedoch eine Grenze von vier Abtastschritten, da das vorherrschende Messrauschen durch die enormen Werte der Matrixelemente beträchtlich verstärkt wird und an Einfluss gewinnt. Die Details zum Regler- und Beobachterentwurf, zu den Simulationsergebnissen und zu den Ergebnissen an der realen Strecke findet man in [Win06].
Neben dem Entwurfsverfahren für totzeitbehaftete Systeme im Zustandsraum, gibt es unter anderem auch Reglerentwurfsverfahren im Frequenzbereich wie die sogenannte Internal Model Control-Methode (IMC-Methode) welche in [MZ89, Dat98] ausgeführt ist. Da bei einer Regelung mit einem Smith Predictor in der Regelkreisstruktur neben dem Regler und der realen Strecke ebenfalls das Streckenmodell verwendet wird, ist das Regelungsprinzip von IMC und nach einem Smith Predictor ähnlich [AY03, ASC+04, TKHH96].

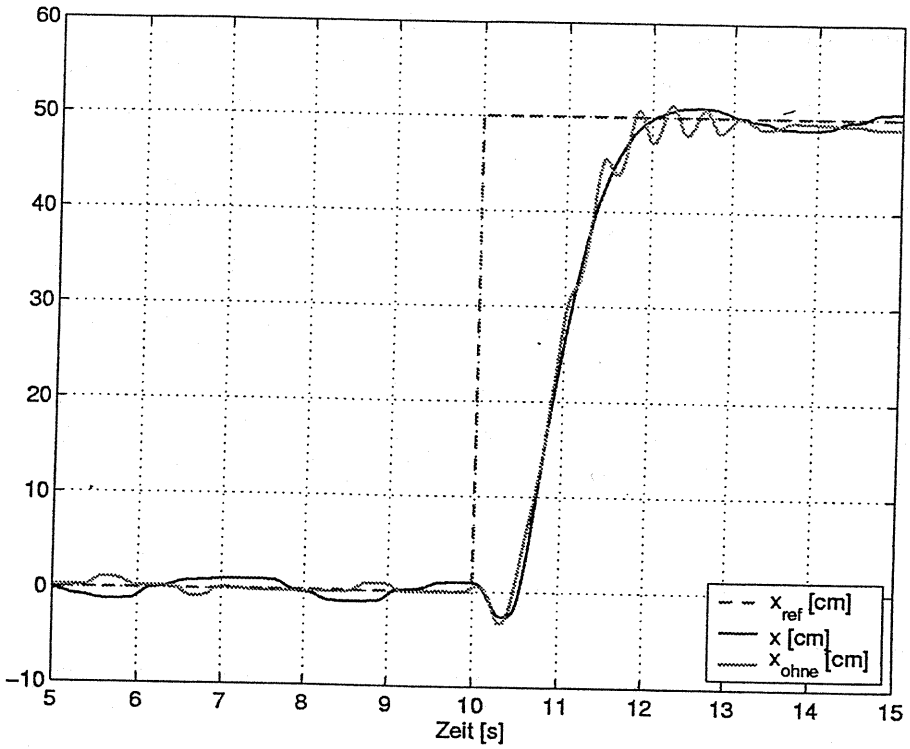
5.2 Auswirkung auf das Systemverhalten

Zusammenfassend für die Simulation am realen Streckenmodell sei das Regelverhalten in Abb. 7 für eine Systemtotzeit von $T_t = 20ms$ und entsprechendem Regler- bzw. Störgrößenbeobachterentwurf dargestellt. Zum besseren Vergleich sind dabei der Wegverlauf x_{ohne} und der Winkelverlauf α_{ohne} des inversen Pendels eingetragen, bei dem die Totzeit $T_t = 15ms$ (!) im Entwurf nicht berücksichtigt wird. Es sei erwähnt, dass sich das System bei einer Totzeit von $T_t = 15ms$ an der Stabilitätsgrenze befindet, ab einer Totzeit von $T_t = 20ms$ ein instabiles Verhalten aufweist und deshalb nicht als Referenz in die Abbildungen eingetragen wird. Die Auswirkung steigender Totzeit auf das Systemverhalten wird in [Win06] ausführlich gezeigt. Die Verzögerung der gemessenen Werte bewirkt vor allem im Bereich des Sollwertsprunges $x_{ref} = 50cm$ eine zusätzliche Pendelbewegung im Weg x_{ohne} und Winkel α_{ohne} (siehe Abb. 7), die durch die begrenzte Stellgröße nicht

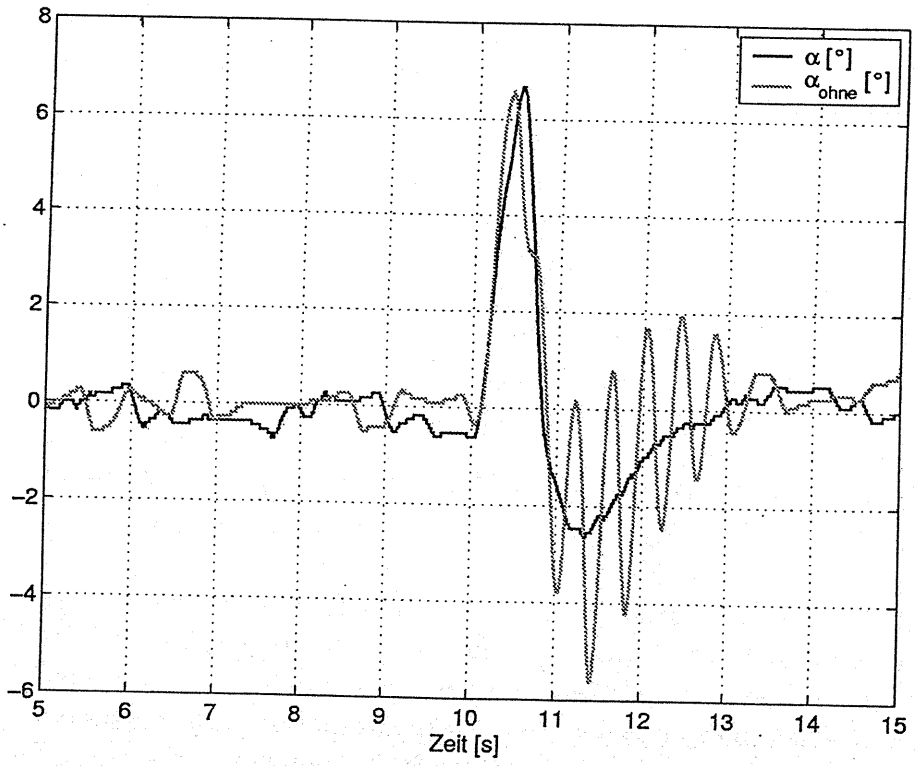
mehr kompensiert werden kann. Durch Berücksichtigung der Totzeit durch Erweiterung des Streckenmodells im Entwurf sind diese zusätzlichen Bewegungen im Bereich des Sollwertsprunges nicht mehr vorhanden (vergleiche Abb. 7). Die äußerst positive Wirkung des Entwurfes ist also unmittelbar ersichtlich. Da diese zusätzlichen Pendelbewegungen nicht mehr auftreten, ist auch die Stellgröße deutlich weniger oft und kürzer in der Begrenzung. Durch die hohen Werte in der Beobachterrückführungsmatrix $\underline{H}$ gewinnt das Messrauschen mit steigender Anzahl von Totzeitschritten an Einfluss. Dies bewirkt eine Begrenzung in der Anzahl der Totzeitschritte. Bei einer Anzahl von sechs Totzeitschritten ist aufgrund des Messrauschens eine Regelung mit der realen Strecke nicht mehr möglich. Berücksichtigt man das Totzeitmodell nicht im Reglerentwurf, so sinkt die Qualität der Regelung mit steigender Totzeit sehr schnell. Bereits bei einer Totzeit von $T_t = 15ms$ ist das System an der Stabilitätsgrenze. Berücksichtigt man aber die Totzeit im Entwurf, so zeigt sich auch noch bei einer Totzeit von $T_t = 20ms$ ein ausgezeichnetes Regelverhalten.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Um einen Reglerentwurf vornehmen zu können, erfolgte zuerst eine Modellierung des inversen Pendels. Es wurde dabei nicht das kontinuierliche Zustandsraummodell des sog. mathematischen Pendels ermittelt, sondern unter zusätzlicher Berücksichtigung der Trägheitsmomente das physikalische Pendel modelliert. Da eine Zustandsregelung mit einer Regelstrecke mit Tiefpasscharakter keine exakte Stationärgenauigkeit besitzt und auch keine Störungen am Streckeneingang ausregeln kann, wurde das Zustandsraummodell um einen Integratoranteil erweitert.
Nach Umwandlung des kontinuierlichen Zustandsraummodells in ein diskretes Zustandsraummodell, wurde unter Anpassung der Gewichtungsmatrizen ein diskreter Zustandsregler nach dem LQR-Verfahren entworfen.
Nach Verbesserung der Qualität der Regelung durch einen Integralanteil, wurde der Einfluss der Reibung kompensiert. Die Reibung selbst wirkte sich äußerst negativ in Form einer hohen Pendelbewegung im Positions- und Winkelverlauf aus. Im Bereich des Sollwertsprunges zeigte sich ein hohes Überschwingen, was ein unerwünscht empfindliches Systemverhalten bewirkte und zu einer Begrenzung der Stellgröße führte.
In einem ersten Schritt wurde eine Reibungskennlinie nach einem einfachen Reibmodell durch Messung und anschließende Interpolation der Messpunkte bestimmt. Aufschalten der Kennlinie auf die reale Strecke kompensierte die Reibung statisch. Schon bei der Bestimmung der Kennlinie, zeigte sich eine beträchtliche Ortsabhängigkeit im Reibungsverhalten. In Bereichen mit großer Reibung bewirkte die Kompensation eine Verbesserung durch eine Verringerung der Pendelbewegung. Auch bei den Sollwertsprüngen stimmten der Weg- und Winkelverlauf des kompensierten Systems mit den Verläufen des idealen reibungsfreien Streckenmodells bedeutend besser überein. In Positionsbereichen mit weniger Reibung bewirkte die sich daraus ergebende Überkompensation ein äußerst nervöses Systemverhalten und eine geringere Reduktion der Pendelbewegung. Eine Identifikation der Ortsabhängigkeit in der Kennlinie war problematisch und durch die begrenzte Länge der Zahnleiste nicht erfolgreich möglich. Da die Ortsabhängigkeit nicht berücksichtigt werden konnte, wurden auch keine weiteren Kennlinien nach komplexeren Reibmodellen



(a) Wegverlauf x und x_{ohne}



(b) Winkelverlauf α und α_{ohne}

Abbildung 7: Vergleich des Weg- und Winkelverlaufes mit und ohne Berücksichtigung der Totzeit im Regler- und Beobachterentwurf

bestimmt.
Stattdessen wurde ein diskreter Zustandsgrößenbeobachter um ein lineares Störgrößenmodell erweitert. Der so entworfene Störgrößenbeobachter lieferte nach dem linearen Störmodell eine geschätzte Störgröße, welche erfolgreich zur adaptiven Kompensation der Reibung verwendet wurde. Das Störmodell berücksichtigte die Ortsabhängigkeit und es gab keine Positionsbereiche mit Reibungsüberkompensation. Durch die geschätzten Zustandsgrößen wies die Stellgröße einen erheblich weniger verrauschten Verlauf auf. Da der Störbeobachter ein lineares Modell der Störung beinhaltete, die tatsächliche Reibung aber ein nichtlineares Verhalten aufwies, konnte die Reibung nicht exakt kompensiert werden. Weiters könnten deshalb aufwändige nichtlineare diskrete Störungsbeobachter wie in [FP92, Noi04] entworfen werden, welche die Reibung besser zu kompensieren in der Lage wären.
Da die Regelung des inversen Pendels in weiteren Arbeiten über eine Kamera erfolgen soll, wurden die Auswirkungen einer Totzeit auf das Systemverhalten ermittelt. Es zeigte sich, dass sich das inverse Pendel bereits bei einer Systemtotzeit von drei Abtastschritten an der Stabilitätsgrenze befand und dabei ein entsprechend schlechtes Regelverhalten aufwies. Bei einer Totzeit von vier Abtastschritten konnte die Regelung das Pendel nicht mehr in der inversen Position halten.
Deshalb wurde das Zustandsraummodell um die Totzeit erweitert. Für das erweiterte Zustandsraummodell wurde anschließend ein Regler- und Beobachterentwurf vorgenommen. Es zeigte sich, dass Systempole, verursacht durch das Totzeitmodell, nahe dem Ursprung in der z-Ebene ein gewünschtes Systemverhalten aufweisen. Weiters ergab sich, dass mit steigender Anzahl von Totzeitschritten immer höhere Werte in den Elementen des Beobachters auftraten. Bei einer Totzeit von sechs Abtastschritten waren einzelne Werte in der Beobachtermatrix und damit der Einfluss des Messrauschens so hoch, dass eine Regelung nur noch in der Simulation möglich war. Bei einer Totzeit von vier Abtastschritten war eine Regelung an der realen Strecke durchführbar und der Regelkreis wies dabei das gewohnte Systemverhalten ohne Totzeit auf.
Es könnte neben dem Reglerentwurf im Zustandsraum ein Reglerentwurf im Frequenzbereich nach der sogenannte Internal Model Control-Methode (IMC-Methode [MZ89, Dat98]) erfolgen. Eine weitere Methode für totzeitbehaftete Systeme wäre die Regelung mit einem Smith Predictor, das dem IMC ähnlich ist. Die beiden entworfenen Regler könnten sogar ineinander umgerechnet werden [AY03].

Literatur

[ASC+04] Sung H. Ahn, Bong S. Sim, Dae Y. Chi, Kook N. Park, Su. K Park, Chung Y. Lee, and Young J. Kim. Smith predictor control for water pressure control system with time delay. *IEEE*, pages 663–666, November 2004.

[AY03] N. Abe and K. Yamanaka. Smith predictor control and internal model control- a tutorial. *SICE*, pages 1383–1387, 2003.

[Dat98] Aniruddha Datta. *Adaptive Internal Model Control.* Springer, 1998.

[Fes05] Festo AG und Co. KG, D-73726 Esslingen. *Beschreibung Kompaktkamerasystem Typ SBO.. -M ..*, 2005. www.festo.com (26.06.2006).

[FMR03] Gianni Ferretti, Gianantonio Magnani, and Paolo Rocco. Singel and multistate integral friction models. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 49(12), 2003.

[FP92] Bernard Friedland and Young-Jin Park. On adaptive friction control. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 37(10), 1992.

[Ise8a] Rolf Isermann. *Digitale Regelsysteme, Band 1.* Springer Verlag, 1988a.

[Ise8b] Rolf Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme, Band 2.* Springer Verlag, 1988b.

[Kol99] Gerald Koller. Optimale Pendelregelung. Modellbildung, Entwurf und Vergleich an einem Versuchsaufbau. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Wien, Mai 1999.

[LABS03] Vincent Lampaert, Farid Al-Bender, and Jan Swevers. A generalized maxwell-slip friction model appropriate for control purposes. *PhysCon*, pages 1170–1177, 2003.

[LF98] Guoqing Li and Henryk Flashner. A linear digital control design and stability analysis for time delay systems without linear approximation. *IEEE*, pages 77–82, 1998.

[Mül88] Peter C. Müller. Control of nonlinear systems by applying disturbance rejection control techniques. *Proc. IEEE*, pages 734–737, 1988.

[Mül00] Peter C. Müller. Nonlinearity estimation and compensation by linear observers: Theory and application. *Proc. 2nd Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos (COC2000), St.Petersburg, Russia,*, pages 16–21, 2000.

[MZ89] Manfred Morari and Evanghelos Zafiriou. *Robust Process Control.* Prentice-Hall, 1989.

[Noi04] Robert Noisser. Nichtlinearer Reibungsbeobachter zur adaptiven Reibungskompensation bei Bewegungsregelung. *e und i Heft*, (121. Jahrgang), 7/8 2004.

[Qua96] Quanser Consulting Inc. *IP-02 Self Erecting, Linear Motion Inverted Pendulum*, 1996.

[TKHH96] Takeshi Takehara, Teruo Kunitake, Hideki Hashimoto, and Fumio Harashima. The control for the disturbance in the system with time delay. *IEEE*, pages 349–353, 1996.

[Wei95] Alexander Weinmann. *Regelungen, Analyse und technischer Entwurf, Band 2.* Springer Verlag, 1995.

[Win06] Michael Winkler. Regelung einer instabilen Regelstrecke mit ausgeprägtem Reibungseinfluss und erheblicher Systemtotzeit. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2006.

The Encirclements of the Hodograph of Perturbed High-Order Dynamic Systems

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE
Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control
Gusshausstrasse 27-29/376, A-1040 Vienna / Austria
Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699
email: weinmann@acin.tuwien.ac.at

Manuscript received November 6, 2006

Abstract

For high-order linear dynamic systems, the hodograph of the characteristic polynomial is addressed. State space, transfer functions, open-loop and closed-loop systems are taken into consideration. The presence of uncertainties which are bounded by Frobenius norm is admissible. Special focus is put on systems which are only available by measurements.

Keywords: Encirclements, multivariable systems, norm-limited uncertainties

1 Introduction

In the field of electrical and control engineering, the phase of a complex function is of high interest, especially if the order of the dynamical system is high. In the early decades of automatic control yet, the number of encirclements (*Föllinger, O., 1960*) has drawn interests of control system designers because Nyquist stability was an important design instrument based on the open-loop frequency response.

This article addresses the encirclements of the Mikhailov hodograph around the origin which is a very different issue for the closed-loop system directly. For the sake of completeness, the open-loop plots are included.

Consider a complex function $f(s)$ with zeros only. The characteristic polynomial of a dynamical system is a frequently used example. For $s = \sigma + j\omega$, preferably for $\sigma = 0$, the change of arg $f(s)$ is essential when some change of ω is applied. From the well-known

Cauchy Theorem of logarithmic residues (Argument Principle), the closed path C_s, which encircles the left s-half-plane, and the corresponding path C_f in the complex f plane provide an important correspondence, see Appendix A.

For very high order of the dyamic system, the problem arises to safely count the encirclements without being affected by the cyclic irregularity of the angle. The encirclements must be reproducable even for multiples of 2π. A safe analytical expression is needed.

Due to the fact that the encirclements are hard to detect, a safe alternative is needed, especially for stability considerations. Passing the encirclements around a set of poles being entirely located in the left half of the s-plane, i.e., for stable systems, is equal to the monotonic increase of the angle or equal to a strictly positiv derivative $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}$, see Appendix A. Computational support to guarantee $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} > 0$ is needed as one of the issues of this article.

2 Monotonic Increase of the Argument

For a linear continuous-time dynamic system with the coefficient matrix $\mathbf{A}_{cl}$, stability requires that arg $h(j\omega)$ increases monotonically with rising ω, where the hodograph of the characteristic equation is

$$h(j\omega) \triangleq \det(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl}) \tag{1}$$

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C} \tag{2}$$

and $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$; $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^r$; $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$; $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$; $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n\times m}$; $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{r\times n}$; $\mathbf{K}_y \in \mathcal{R}^{m\times r}$. This statement is holds for single-input single-output and multivariable systems. The open-loop coefficient matrix is $\mathbf{A}$, the closed-loop one $\mathbf{A}_{cl}$ and $\mathbf{K}_y$ is the output state controller matrix. The theorem above is the well-known Cremer, Leonhard, Mikhailov stability criterion, also known as the Monotonic Angle Property for stable systems of order n: As ω varies from 0 to ∞, arg $p_{cl}(j\omega)$ experiences an increment of $n\frac{\pi}{2}$.

Focus is put on the phase of $h(j\omega)$. Separating

$$h(j\omega) = h_0 e^{j\alpha(\omega)}, \quad h_0 \triangleq |h(j\omega)|, \quad h_0^2 = h(j\omega)h^*(j\omega) \tag{3}$$

$$\ln h(j\omega) = 0.5\ln h_0^2 + j\alpha \tag{4}$$

$$\alpha = -j\ln h(j\omega) + 0.5j\ln h_0^2 . \tag{5}$$

Monotonic increase of α $\forall\omega$ leads to

$$\frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega} = -j\frac{1}{h(j\omega)}\frac{\partial h(j\omega)}{\partial\omega} + 0.5j\frac{1}{h_0^2}\frac{\partial(h_0^2)}{\partial\omega} > 0 . \tag{6}$$

Referring to Eq.(1) and (3),

$$h_0^2 = h(j\omega)h^*(j\omega) = \det(\omega^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2) \tag{7}$$

and (*Weinmann, A., 2001*)

$$\frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega} = -j\frac{1}{h(j\omega)}\mathrm{tr}[j\mathbf{I}_n\mathrm{adj}(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})] + 0.5j\frac{1}{h_0^2}\mathrm{tr}[2\omega\mathbf{I}_n\mathrm{adj}(\omega^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)] \tag{8}$$

$$\frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega} = \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-1}] + j\omega\mathrm{tr}[(\omega^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)^{-1}] \,. \tag{9}$$

Surprisingly, the analytic expression is in terms of $j = \sqrt{-1}$. With respect to the real variables α and ω, the imaginary terms must cancel. The second part in Eq.(9) is purely imaginary since $(\omega^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)$ is real. Thus, the real part of the first term suffices to give the result

$$\frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega} = \Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-1}] \,. \tag{10}$$

For $\mathbf{A}_{cl} \in \mathcal{R}^{2\times2}$ and owing to the correspondences of the adjoint $\mathrm{tr}[\mathrm{adj}(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})] = \mathrm{tr}(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})$, the result needs no inverse. Hence,

$$\frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega} = \Re e\ \frac{\mathrm{tr}(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})}{\det(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})} \,, \quad \mathbf{A}_{cl} \in \mathcal{R}^{2\times2} \,. \tag{11}$$

3 Maximum Angle Gradient

To obtain the peak of the angle increase, execute the maximum $\max_\omega \frac{\partial\alpha(\omega)}{\partial\omega}$ by analytical means,

$$\frac{\partial^2\alpha(\omega)}{\partial\omega^2} \overset{(10)}{=} \Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-2}\cdot j] = 0 \tag{12}$$

$$= -\Im m\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-2}] = 0 \rightsquigarrow \omega_0 \,. \tag{13}$$

The second differential quotient $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\omega^2}$ determines the crossover densitiy of α in Fig. 5.

4 Examples

Example 1. Stable first-order system:

Consider $\mathbf{A} \triangleq -a$, $h(j\omega) = j\omega + a$, $\alpha = \mathrm{atan}\frac{\omega}{a}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} = \frac{a}{a^2+\omega^2}$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} \overset{(9)}{=} (j\omega + a)^{-1} + j\omega\frac{1}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{a + j\omega}\frac{a - j\omega}{a + j\omega} + \frac{j\omega}{\omega^2 + a^2} \tag{14}$$

$$= \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \Re e\ [(j\omega + a)^{-1}]. \tag{15}$$

The phase increment $\Delta\alpha(\omega)|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty}$ for a single stable pole of the first-order system has to turn out π. This agrees with

$$\int_0^\infty \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}d\omega = \int_0^\infty \frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega = \text{atan}\frac{\omega}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Example 2. Tenth-order system:

Consider a stable tenth-order system with poles at $-0.7+j, -0.7-j, -0.2+j*3, -0.2-j*3, -4, -3, -2, -1, -0.5, -0.3$, gain 3, no zeros. In Fig. 1, the results are depicted: The original sawtooth angle with periodicy, the purely positive $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}$, the second derivative $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\omega^2}$, and the total angle, resulting from the integral of $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}$ versus frequency. For the sake of illustration, the Mikhailov plot is given in Fig. 2. For the purpose of regular display of the hodograph, a saturating function f_{sat} was inserted, characterized by the following mapping: $x_{in} \leq 1,\ x_{out} = x_{in}; x_{in} > 1,\ x_{out} = \log_{10}(x_{in}) + 1; x_{in} < -1,\ x_{out} = -\log_{10}(-x_{in}) - 1$.

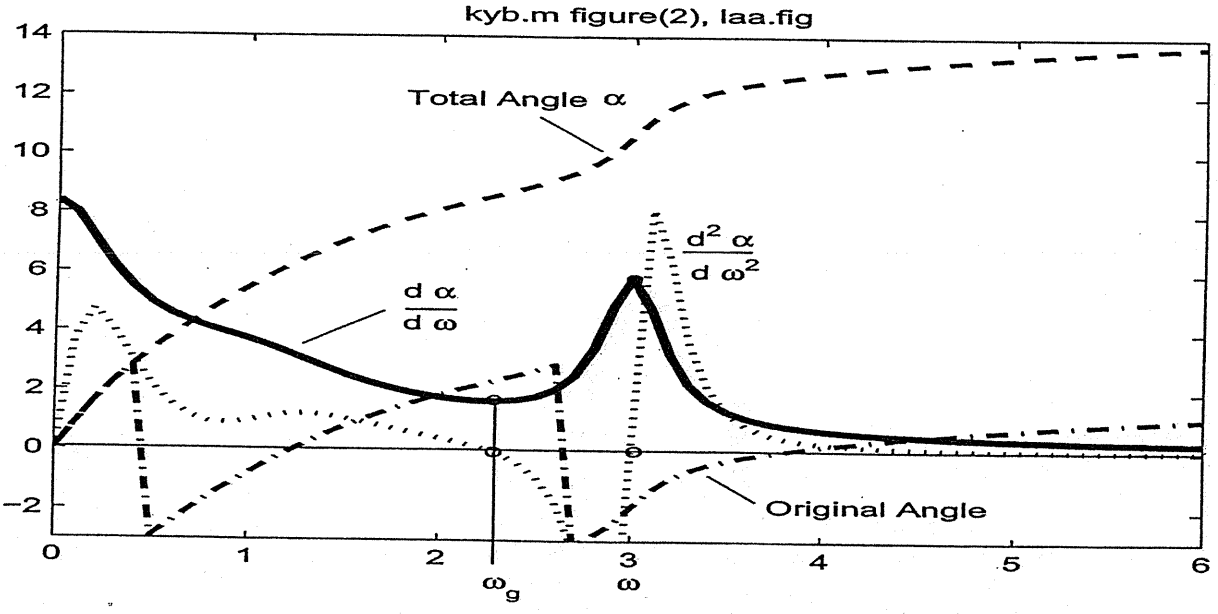


Figure 1: Angle α and its derivatives for a stable system of tenth order

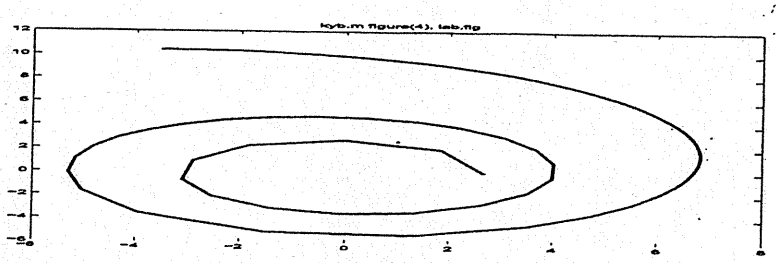


Figure 2: Mikhailov plot for a stable system of tenth order

For a slightly modified but unstable system, where only one pair of poles $+0.2 \pm j3$ was changed, Figs. 3 and 4 show the results. If $\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}$, augmented by the worst uncertainty from Eqs.(23) and (28), just touches the abscissa, the stability border would be reached.

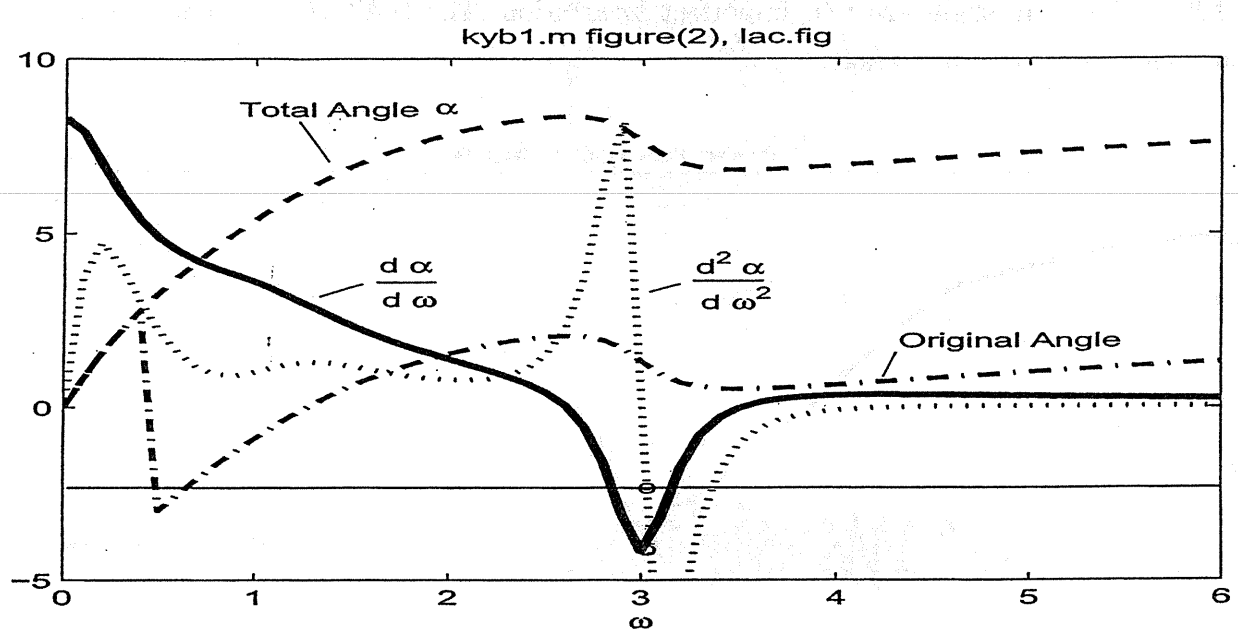


Figure 3: Angle α and its derivatives for an unstable system of tenth order

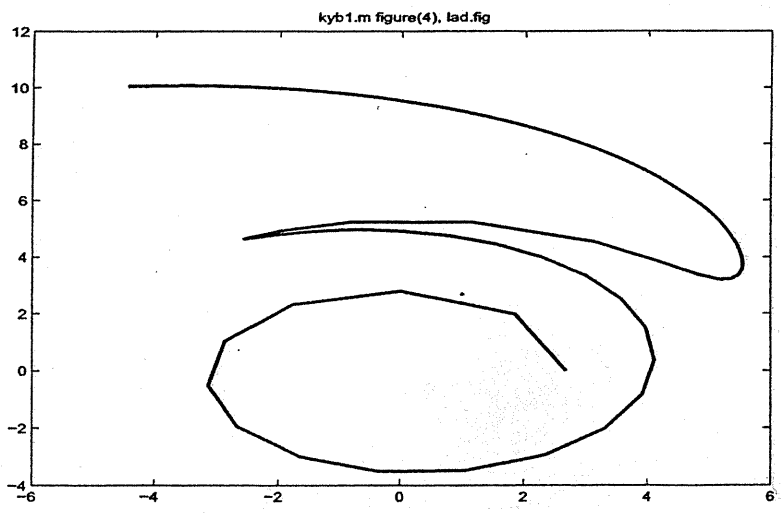


Figure 4: Mikhailov plot for an unstable system of tenth order

Example 3. Eightieth-order system:

For this high-order system, the poles were selected according to linspace$(-10, -1, 80)$. The results are given in Figs. 5 to 7. The exact value of $40\pi = 125.6637$ is presented as 126.2379 due to slight error of imperfect integration. The MATLAB command quad would yield more accurate results.

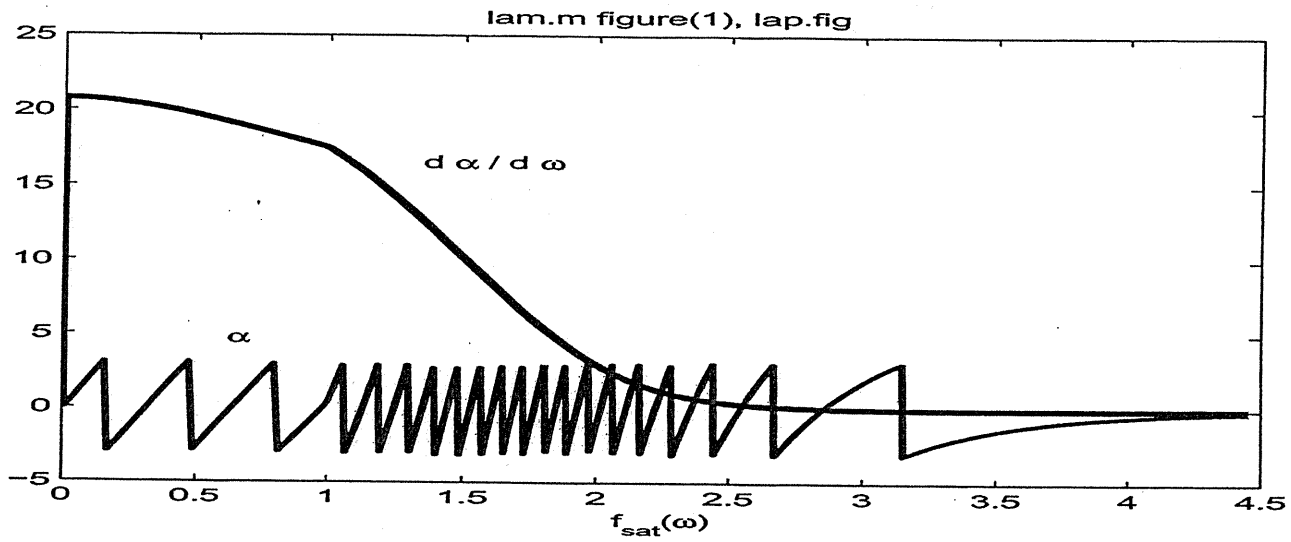


Figure 5: Sawtooth angle and derivative of the angle with respect to ω for the stable dynamic system of order 80 $(80 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = 20 \cdot 2\pi)$

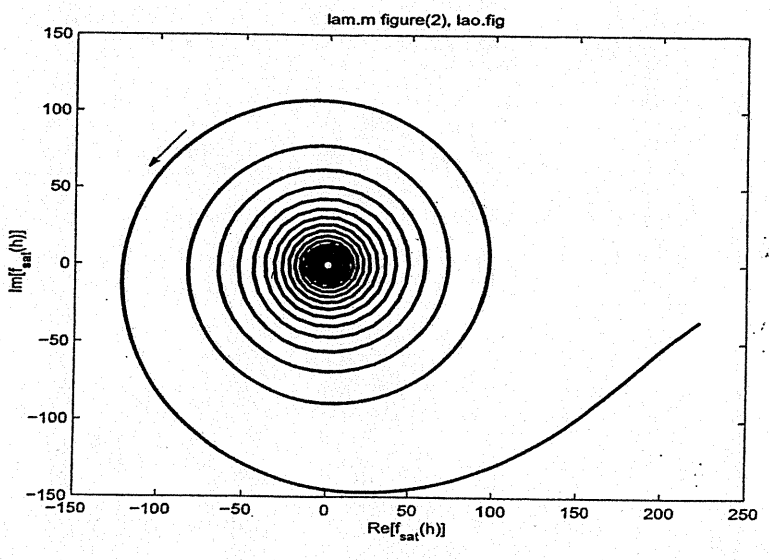


Figure 6: Mikhailov plot for the stable dynamic system of order 80

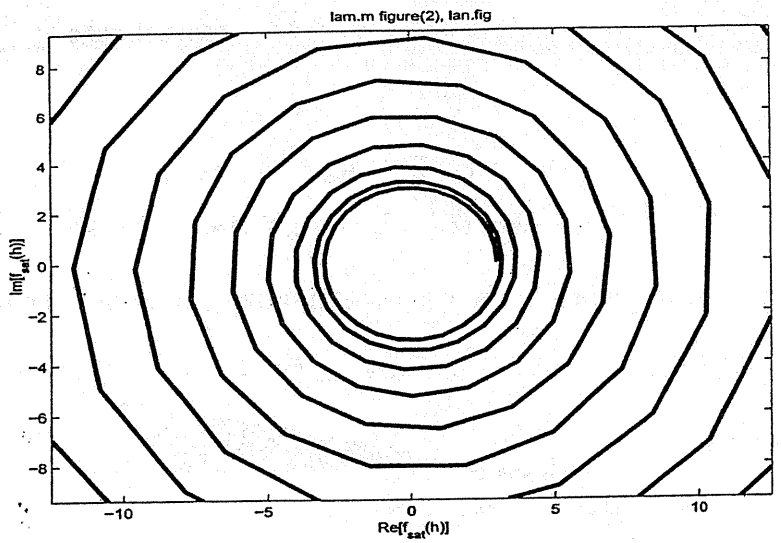


Figure 7: Mikhailov plot for the stable dynamic system of order 80, zoomed in at the origin

5 Worst Uncertainty for State Space

5.1 Small Uncertainties

Find the uncertainty which has the strongest influence on the angle gradient

$$\frac{\partial\alpha(\omega,\Delta\mathbf{A})}{\partial\omega}+\lambda\|\Delta\mathbf{A}\|_F^2 \overset{(10)}{=} \Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl}-\Delta\mathbf{A})^{-1}]+\lambda\|\Delta\mathbf{A}\|_F^2 \ \rightarrow\ \max_{\Delta\mathbf{A}}\ . \quad (17)$$

Abbreviating $\mathbf{V}=(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl})^{-1}=\mathbf{\Phi}(j\omega)$, presupposing $\Delta\mathbf{A}$ small in norm sense, and using $(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})^{-1}\doteq\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\cdot\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}+-...$

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\mathbf{A}}\Re e\,\mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl}-\Delta\mathbf{A})^{-1}]+2\lambda\Delta\mathbf{A} \ \rightarrow\ \max_{\Delta\mathbf{A}} \quad (18)$$

$$\Re e\ \frac{\partial}{\partial\Delta\mathbf{A}}\mathrm{tr}[\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}]+2\lambda\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\Re e\ \mathbf{V}^{2T}+2\lambda\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{\Re e\ \mathbf{V}^{2T}}{2\lambda} \quad (21)$$

$$\|\Delta\mathbf{A}\|_F^2=\frac{\mathrm{tr}[\Re e\ \mathbf{V}^{2T}\Re e\ \mathbf{V}^2]}{4\lambda^2} \triangleq a_0^2 \quad (22)$$

with the intermediate result

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{\Re e\ \mathbf{V}^{2T}}{\sqrt{\mathrm{tr}[(\Re e\ \mathbf{V}^{2T})\ (\Re e\ \mathbf{V}^2)]}}a_0=\Delta\mathbf{A}(\omega) \quad (23)$$

which is still a function of ω.

Expanding Eq.(13), one has for the minimum in the nominal case

$$\frac{\partial^2\alpha(\omega,\Delta\mathbf{A})}{\partial\omega^2}\Big|_{\Delta\mathbf{A}=\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial\omega}\Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl})^{-1}] \quad (24)$$

$$= \Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl})^{-2}\ (-j\mathbf{I}_n)] \quad (25)$$

$$= -\Im m\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl})^{-2}] = -\Im m\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2] = 0\ . \quad (26)$$

Including the uncertainty when detecting the minimum (and omitting some analysis),

$$-\Im m\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl}-\Delta\mathbf{A})^{-2}] = -\Im m\ \mathrm{tr}[(\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{V})^2] \triangleq d_f\ . \quad (27)$$

For $d_f = 0$ there results

$$-\Im m\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^2] = 2\Im m\ \mathrm{tr}[\mathbf{V}^3\cdot\Delta\mathbf{A}] \quad \rightsquigarrow \quad \omega_g\ . \quad (28)$$

Having inserted $\Delta\mathbf{A}$ from Eq.(23), resolving with respect to ω yields the frequency (or frequencies) ω_g with lowest angle gradient, see Fig.1. In Eq.(23), two signs are possible. One of these signs corresponds to the worst uncertainty. Opposite to this sign, the uncertainty is determined which optimally backs the system. Finally, $\Delta\mathbf{A}^\star$ is achieved from Eq.(23) based on ω_g.

Example 3, continued: The left and the right side of Eq.(28) are depicted in Fig. 8. The intersection point yields the respective ω_g. For $a_0 = 0.175$, $\omega_g = 2.45$ results $(\Delta\partial\alpha/\partial\omega)^\star \overset{(10)}{=} \Re e\ \{\mathrm{tr}\mathbf{V}^2\Delta\mathbf{A}^\star\} = -0.393$, where $\Delta\mathbf{A}^\star$ from Eq.(23)

$\Delta\mathbf{A}^\star =$

0.0100	0.0018	0.0141	0.0023	0.0005	0.0061	0.0004	-0.0001	-0.0000	-0.0000
-0.0018	0.0138	-0.0279	0.0161	-0.0082	-0.0057	-0.0006	0.0010	0.0001	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0049	0.0129	-0.0131	0.0087	0.0003	0.0009	0.0000	-0.0001
0.0000	-0.0000	-0.0129	0.0196	-0.0235	-0.0223	-0.0016	0.0019	0.0002	-0.0000
0	0	0	0	0.0933	-0.0733	-0.0031	-0.0054	-0.0001	0.0003
0	0	0	0	0.0733	0.0835	0.0049	-0.0043	-0.0006	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0033	0.0020	0.0007	0.0004
0	0	0	0	0	0	-0.0020	0.0007	0.0008	0.0011
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0048	0.0090
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0090	0.0143.

5.2 Arbitrary Uncertainty

For arbitrary uncertainty, one has to follow a system of nonlinear equations

$$\frac{\partial}{\partial\Delta A_{ij}}\left[\Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl}-\Delta\mathbf{A})^{-1}] + \lambda\|\Delta\mathbf{A}\|_F^2\right] = 0 \quad (29)$$

$$\left[\Re e\ \mathrm{tr}[(j\omega\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_{cl}-\Delta\mathbf{A})^{-2}\right](-1)(-E_{ij}) + 2\lambda A_{ij} = 0. \quad (30)$$

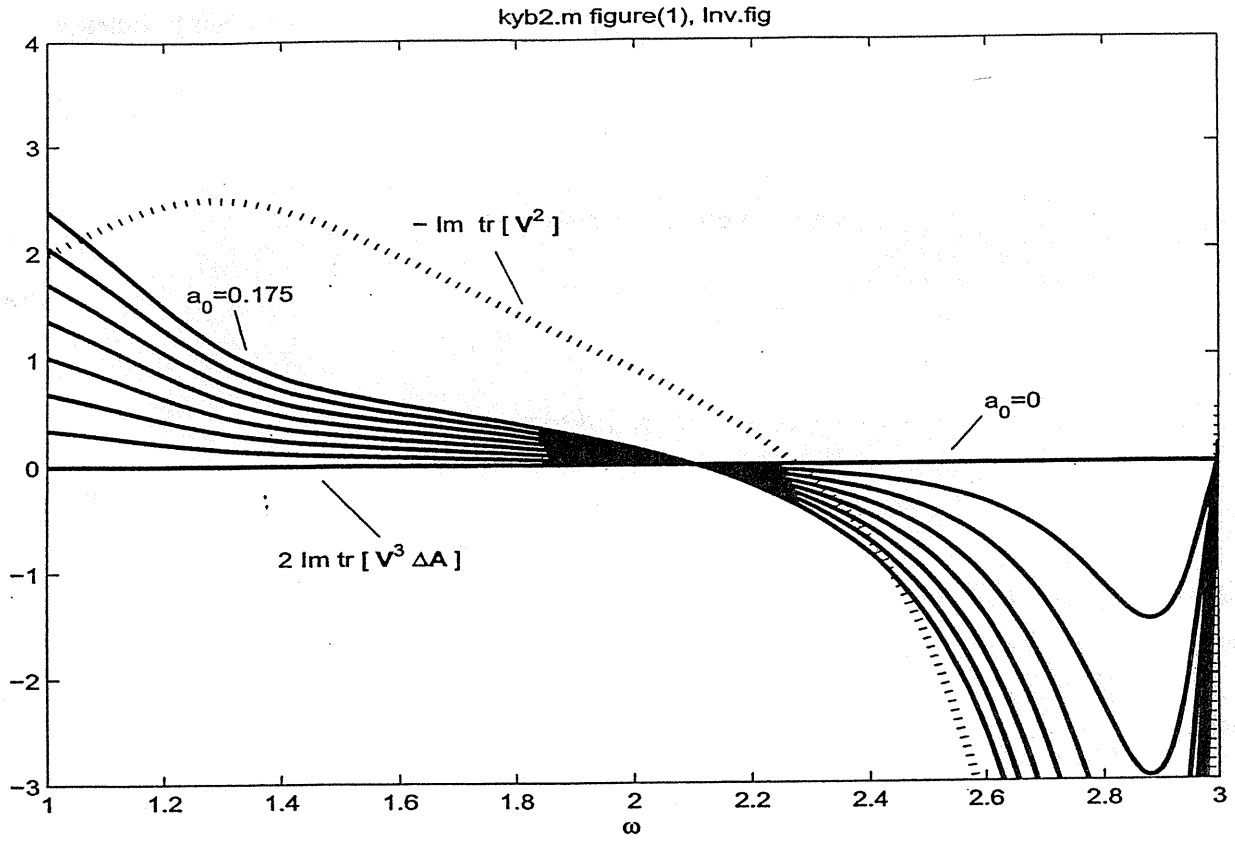


Figure 8: Illustration of Eq.(28)

6 Transfer Function Representation

The encirclements of $1+F_o(j\omega)$ around the origin, corresponding to the Nyquist criterion as derived from the open-loop transfer function, do not coincide with the encirclements of the Mikhailov hodograph. These encirclements are determined as follows

$$1+F_o(j\omega) \triangleq \frac{z(s)}{p(s)}\Big|_{s=j\omega} \triangleq \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{s}}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}\Big|_{s=j\omega} = f\, e^{j\beta} \tag{31}$$

$$\left[\ln(\mathbf{z}^T\mathbf{s}) - \ln(\mathbf{n}^T\mathbf{s})\right]_{s=j\omega} = \ln f + j\beta. \tag{32}$$

The abbreviation $\mathbf{s} \triangleq (1 \quad s^1 \quad s^2 \quad \dots \quad s^n)^T$ has been used; in addition, let us employ $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = (0 \quad 1 \quad 2s \quad \dots \quad ns^{n-1})^T$ and $\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial s^2} = [0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 2 \,\vdots\, 6s \,\vdots\, 12s^2 \,\vdots \dots \vdots\, n(n-1)s^{n-2}]^T$. Then,

$$\beta = -j\ln(\mathbf{z}^T\mathbf{s})\Big|_{s=j\omega} + j\ln(\mathbf{n}^T\mathbf{s})\Big|_{s=j\omega} + \ln f \tag{33}$$

$$\beta = \Im m\,[\ln(\mathbf{z}^T\mathbf{s}) - \ln(\mathbf{n}^T\mathbf{s})]_{s=j\omega} \tag{34}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{\partial\beta}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\omega} = \frac{\partial\beta}{\partial s}\cdot j \tag{35}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\mathbf{z}^T\mathbf{s}}\mathbf{z}^T - \frac{1}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}\mathbf{n}^T\right)\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}\right]_{s=j\omega} + j\frac{\partial f}{\partial \omega} \tag{36}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \Re e\left[\left(\frac{\mathbf{z}^T}{\mathbf{z}^T\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}\right)\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}\right]_{s=j\omega} . \tag{37}$$

If in Eq.(31) the numerator and denominator polynomial coefficient vectors of $F_o(j\omega)$ are termed $\mathbf{z}$ and $\mathbf{n}$

$$1 + F_o(j\omega) \triangleq 1 + \frac{z(s)}{p(s)}\Big|_{s=j\omega} \triangleq 1 + \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{s}}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}\Big|_{s=j\omega}, \tag{38}$$

then the result Eq.(37) is reused replacing $\mathbf{z}$ by $\mathbf{z}+\mathbf{n}$ systematically,

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \Re e\left[\left(\frac{(\mathbf{z}+\mathbf{n})^T}{(\mathbf{z}+\mathbf{n})^T\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}\right)\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}\right]_{s=j\omega} . \tag{39}$$

In order to find the extrema of the first derivatives, the second derivative is needed

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(j\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) = j\frac{\partial}{\partial s}\left(j\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} = \Re e\left[j(\mathbf{z}^T(\frac{1}{\mathbf{z}^T\mathbf{s}})^2(-1)\mathbf{z}^T\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} + \mathbf{n}^T(\frac{1}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}})^2\mathbf{n}^T\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s})\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} + j(\frac{\mathbf{z}^T}{\mathbf{z}^T\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}})\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial s^2}\right]_{s=j\omega} \tag{41}$$

$$\text{and since } \Re e\,[j(\alpha + j\beta)] = -\beta = -\Im m\,(\alpha + j\beta) \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} = \Im m\left[\frac{1}{(\mathbf{z}^T\mathbf{s})^2}(\mathbf{z}^T\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s})^2 - \frac{1}{(\mathbf{n}^T\mathbf{s})^2}(\mathbf{n}^T\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s})^2 - (\frac{\mathbf{z}^T}{\mathbf{z}^T\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}})\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial s^2}\right]_{s=j\omega} . \tag{43}$$

7 Worst Uncertainty for Transfer Functions

Find the sensitivity of $\frac{\partial \beta}{\partial \omega}$ with respect to $\Delta\mathbf{p}$ by expanding Eq.(37) and abbreviating $\mathbf{s}' = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \Re e\left\{\frac{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_z^T}{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}} - \frac{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_n^T}{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_n^T\mathbf{s}}\right]\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}\Big\}_{s=j\omega} \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{p}}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right) = \Re e\left\{\frac{\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}'}{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}} - \frac{(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}'}{[(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}]^2}\mathbf{P}_z^T\mathbf{s} - \text{the same with index } n\right\}_{s=j\omega}$$

$$= \Re e\left\{\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}'(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})^{-1} - \mathbf{P}_z^T\mathbf{s}'(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})^{-2}(\Delta\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})\right.$$
$$-(\Delta\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}')(\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}')^{-2} - (\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}')\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})^{-2}$$
$$\left.+(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}')(\mathbf{P}_z\mathbf{s})2(\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s})^{-3}(\Delta\mathbf{p}^T\mathbf{P}_z^T\mathbf{s}) - \text{the same with index } n\right\}_{s=j\omega} \tag{45}$$

$$\triangleq \mathbf{h}_0 + \mathbf{H}_1\Delta\mathbf{p} . \tag{46}$$

The result then is obtained from Eq.(45)

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{p}}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right) + 2\lambda\Delta\mathbf{p} = 0 . \tag{47}$$

The result of Eq.(47) depends on ω; the value at ω_T has to be inserted, given by $\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}|_{\omega=\omega_T} = 0$. Then,

$$\mathbf{h}_0 + \mathbf{H}_1\Delta\mathbf{p} + 2\lambda\Delta\mathbf{p} = 0\,, \qquad \|\Delta\mathbf{p}\|_F = p_o \tag{48}$$

$$\Delta\mathbf{p}^\star = -(\mathbf{H}_1 + 2\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{h}_0\,, \tag{49}$$

where a square equation in λ has to be solved

$$\mathrm{tr}[\mathbf{h}_0^T(\mathbf{H}_1^T + 2\lambda\mathbf{I})(\mathbf{H}_1 + 2\lambda\mathbf{I})\mathbf{h}_0] = p_o^2 \;\rightsquigarrow\; \lambda\,. \tag{50}$$

For $\mathbf{H}_1 = 0$, the case of small uncertainties,

$$\Delta\mathbf{p}^\star = -\frac{p_o}{\sqrt{\mathbf{h}_0^T\mathbf{h}_0}}\mathbf{h}_0\,. \tag{51}$$

8 Derivation from Measurements

The derivation of $\frac{\partial\beta}{\partial\omega}$ from measured data of $F_0(j\omega)$ is carried out in what follows. Measuring of

$$F_0(j\omega) = \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{s}}{\mathbf{n}^T\mathbf{s}}|_{s=j\omega} \triangleq f_0 e^{j\gamma} \tag{52}$$

is accompanied by measuring the differential quotients of $\frac{\partial f_0}{\partial\omega}$ and $\frac{\partial\gamma}{\partial\omega}$. They are required in Eq.(59). The Nyquist distance is rewritten

$$1 + f_0 e^{j\gamma} \triangleq f e^{j\beta} \tag{53}$$

$$1 + f_0\cos\gamma + j f_0\sin\gamma = f\cos\beta + j f\sin\beta \tag{54}$$

$$\cos\beta = \frac{1 + f_0\cos\gamma}{f}, \qquad \sin\beta = \frac{f_0}{f}\sin\gamma, \tag{55}$$

$$\tan\beta = \frac{f_0\sin\gamma}{1 + f_0\cos\gamma} \tag{56}$$

$$\beta = \arctan\frac{f_0\sin\gamma}{1 + f_0\cos\gamma} \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\partial\beta}{\partial f_0}\frac{\partial f_0}{\partial\omega} + \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\omega} \tag{58}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{1 + f_0^2 + 2f_0\cos\gamma}\left[\frac{\partial f_0}{\partial\omega} + f_0(f_0 + \cos\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial\omega}\right]. \tag{59}$$

Except the case $1 + F_0(j\omega) = 0$, the denominator in Eq.(59) is not dangerous.

9 Degree of Stability

The results can easily be modified for some degree of stability when $s = j\omega$ is replaced by $s = \sigma + j\omega$. Then, one has

$$\frac{\partial \alpha(\sigma + j\omega)}{\partial \omega} = \Re e \ \mathrm{tr}[((\sigma + j\omega)\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-1}] \ . \tag{60}$$

The condition

$$\frac{\partial \alpha(\sigma + j\omega)}{\partial \omega} > 0 \tag{61}$$

for $\sigma > \sigma_0$ is a condition of a specific stability degree predetermined by σ_0.

10 Conclusion

The encirclements for the Mikhailov hodograph for multivariable systems and the characteristic of the open-loop transfer function for single-input single-output systems were addressed by evaluating the differential quotient of the phase with respect to frequency followed by the integral with respect to frequency.

The angle increase (monotonic angle increase) was derived for SISO systems with given state space and transfer function. The equations (10), (23) and (28) represent the main results. The derivative of the angle with respect to the frequency equal to zero is the stability border.

The investigations are supported by MATLAB analytically up to order ten with adaquate computational effort. For systems of higher order, numerical evaluation leads to very good results. Special emphasis was put on systems where the plant is only avalable by measurement.

Appendix

A The Number of Encirclements

For a dynamic system of nth order $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, the characteristic polynomial is $\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl}) \triangleq f(s)$. To check stability, all the n zeros of $f(s)$ must be located in the left s-half-plane and the statements of Eqs.(65) and (66) are satisfied. The result is the well-known stability criterion of Cremer, Leonhard, Mikhailov. Then

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_s}\frac{f'(s)}{f(s)}ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_f} d[\ln f(s)] = \frac{1}{2\pi j}\Delta_{C_f}\ln f(s) \tag{62}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\Delta_{C_f}\ln[\ |f(s)|e^{j\arg f(s)}\ ] = \frac{1}{2\pi j}\Delta_{C_f} j\arg f(s) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_f}\arg f(s) \tag{63}$$

For polynomials one finds

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_f}\arg V\prod_i(s-s_{Ni}) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_f}\sum_i\arg(s-s_{Ni}) \quad (64)$$

$$= \frac{1}{2\pi}2\pi \text{ number of zeros of } f(s) \text{ in the left half-plane} \triangleq U_{C_f} \; . \quad (65)$$

If the increment of $\Delta_{C_f}\arg f(s)$ is selected along the imaginary axis only

$$\Delta_{C_f}\arg f(s)\Big|_{s=-j\infty}^{s=+j\infty} = 2\pi\,\frac{U_{C_f}}{2} = \pi \text{ times number of zeros of } f(s) \text{ in the left half-plane.} \quad (66)$$

Multiple zeros have to be counted according to their multiplicity.

B Necessary Stability Condition

Referring to $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i[\mathbf{A}]$ and $\lambda_i[\mathbf{A}^{-1}] = \frac{1}{\lambda_i[\mathbf{A}]}$, one finds from Eq.(9) or Eq.(10) for $\omega = 0$ the result $\mathrm{tr}[-\mathbf{A}_{cl}^{-1}] > 0$. This corresponds with the necessary stability condition as can be seen from the following derivation. Starting with the necessary and sufficient condition,

$$\Re e\,\lambda_i[\mathbf{A}_{cl}] < 0 \;\forall\, i \quad (67)$$

$$\Re e\,\lambda_i[\mathbf{A}_{cl}^{-1}] < 0 \;\forall\, i \quad (68)$$

$$\Rightarrow \sum_i \Re e\,\lambda_i[\mathbf{A}_{cl}^{-1}] < 0 \;\forall\, i \quad (69)$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}_{cl}^{-1} < 0 \quad (70)$$

$$-\mathrm{tr}\mathbf{A}_{cl}^{-1} = \mathrm{tr}[-\mathbf{A}_{cl}^{-1}] > 0\,. \quad (71)$$

References

Föllinger, O., 1960, Über die Umlaufzahl einer Ortskurve, *Regelungstechnik* **9**, pp. 308-311

Weinmann, A., 2001, Gradients of norms, traces and determinants for automatic control applications, *Int. J. Automation Austria* **9**, H.1/2, pp. 36-50 (see http://www.acin.tuwien.ac.at/IJAA/index.htm)

Eliminating Double Solutions in Lyapunov Equations

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE
Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control
Gusshausstrasse 27-29/376, A-1040 Vienna / Austria
Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699
email: weinmann@acin.tuwien.ac.at

Manuscript received August 7, 2007

Abstract

In this article, solving the Lyapunov equation is addressed. Owing to symmetry properties, there are several solutions of mulitplicity two. Selecting those rows in the system equations, which are responsible for the multiplicity, is the first step of the solution process in this paper. By straightforward addition of these rows and by addition of the corresponding columns, the solution of the Lyapunov equation is reduced to a system of less equations with single solutions throughout.

Keywords: Multiple solutions, linear algebra, system determinant

1 Introduction

Many linear control applications based on optimization with square index of performance require the solution of a Lyapunov equation. In statistically stationary processes, the determination of the covariance also leads to a Lyapunov equation (*Bryson, A.E., and Ho, Y.C., 1975*). The soluton of the general Sylvester equation was carried out by *Bartels, R.H., and Stewart, G.W., 1972* with the help of Schur reduction to triangular form by orthogonal similarity transformations.

For the sake of illustration, consider the upper triangle matrix $\mathbf{S}^{[n\times n]}$. For easy orientation, the elements are equipped with integers in increasing size. The numbers are chosen as identifiers. Augmenting the zeros in $\mathbf{S}$ by the corresponding numbers from the upper

triangle, the symmetric matrix $\mathbf{F}$ is achieved. Enumerating the 25 elements (corresponding to `linspace(1,25,25)'`) yields a column, which is put in parallel to the columnized matrix $\mathbf{F}$, i.e., $\mathrm{col}\,\mathbf{F}$.

The matrix $\mathbf{E}$ vizualizes pairs of numbers. The meaning of its rows is as follows: First, the row with a 2 and a 6 shows that the number 2 in matrix $\mathbf{F}$ reappears in position 6, 3 reappears in row 11, 4 reappears in row 16 etc.

S =

1	2	3	4	5
0	6	7	8	9
0	0	10	11	12
0	0	0	13	14
0	0	0	0	15

F =

1	2	3	4	5
2	6	7	8	9
3	7	10	11	12
4	8	11	13	14
5	9	12	14	15

E=

2	6
3	11
4	16
5	21
8	12
9	17
10	22
14	18
15	23
20	24

`linspace(1,25,25)'`	`col(F)`
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	2
7	6
8	7
9	8
10	9
11	3
12	7
13	10
14	11
15	12
16	4
17	8
18	11
19	13
20	14
21	5
22	9
23	12
24	14

The solutions of the Lyapunov equation

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{Q} \tag{1}$$

are considered. They are a special case of the Sylvester equation $\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{C}$.

Some basic facts concerning Lyapunov equations Eq.(1) are repeated. Equating the Lyapunov left-hand side of Eq.(1) with $\mathbf{W}\mathbf{P}$, the matrix $\mathbf{W}$ does not exist as a function of $\mathbf{A}$ alone.

A solution of Eq.(1) for $\det \mathbf{A} \neq 0$ is intended by rearranging and omitting superfluous rows and columns. Eq.(1) is a system of n linear equations with partly double solutions. There are $n(n-1)/2$ solutions of multiplicity two and n solutions are single.

In the case of $n = 2$ one has a matrix equation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

which corresponds to four scalar equations where equation 2 and 3 referring to the unknown p_2 are equal.. Omitting one of them, one finds

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\triangleq \mathbf{Up} = \mathbf{q} \rightsquigarrow \mathbf{p} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q}\,. \tag{4}$$

Using Kronecker products, from Eq.(1) one finds a vector equation

$$\mathbf{X}\,\mathrm{col}\,\mathbf{P} = \mathrm{col}\,\mathbf{Q}\,, \text{where} \quad \mathbf{X} \triangleq \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}_n\,. \tag{5}$$

For $n = 2$, Eq.(7) demonstates four equations for three unknowns

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = \mathrm{col}\,\mathbf{Q} \tag{6}$$

$$\triangleq \mathbf{X}\,\mathrm{col}\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2 Systematic Elimination

In the example with $n = 2$, two equations are equal. The contents of Eq.(3) equals that of Eq.(7). Instead of deleting one of them, rows 2 and 3 in Eq.(7) are added. This leads to the three defacto unknowns.

Moreover, not only adding the rows is required but also addition of appropriate columns. Referring to Eq.(7), adding row 2 and 3 in $\mathbf{X}$ and column 2 and 3 in $\mathbf{X}$ as

well, the matrix $\mathbf{X}_R$ is achieved

$$\mathbf{X}_R = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ 2a_{12} & 2(a_{11}+a_{22}) & 2a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Multiplying the second row in $\mathbf{U}$ by 2 would also produce the second row of $\mathbf{X}_R$.

Adding rows and columns is termed reduction an is denoted by the subscript $_R$. Via help of MATLAB code: $\mathbf{X}_R$ = `luk(X)`. Deleting the superfluous element in a vector $\mathbf{p}$ is termed $\mathbf{p}_D$ via MATLAB code `lvm(p,n)`. Hence, one has

$$\mathbf{X}\,\mathrm{col}\,\mathbf{P} = \mathrm{col}\,\mathbf{Q} \tag{9}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{p} = \mathbf{q} \tag{10}$$

$$\mathbf{X}_R\mathbf{p}_D = \mathbf{q}_D \tag{11}$$

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{X}_R^{-1}\mathbf{q}_D = (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{q})_D \tag{12}$$

$$\text{or} \qquad \texttt{inv(luk(X))} * \texttt{lvm(q,n)} = \texttt{lvm(inv(X)} * \texttt{q,n)} . \tag{13}$$

The software as follows is available:

`luh.m` function for reduction only w.r.t. $()_{Rr}$. `luh(Y*y,n) = luh(Y,n)*y` .

`luk.m` function for reduction with respect to rows and columns

`lvk.m` function to retrieve $\mathbf{A}$ from $\check{\mathbf{A}}_R \equiv \mathbf{X}_R^T$

`lup.m` function following Eq.(5) except transposition

`lvm.m` function for deleting of a single row

Hence, `A=lvk(luk(lup(A)))`.

If the right-hand side of Eq.(10) is replaced by $\mathbf{Yq}$, i.e., $\mathbf{Xp} = \mathbf{Yq}$, one has $\mathbf{X}_R\mathbf{p}_D = \mathbf{Y}_{Rr}\mathbf{q}$ or `pD=inv(luk(X)) * luh(Y,n) * colfunc(Q)` .

Note the correspondences between code `lvm.m, luk.m, luh.m` and indices D, R and Rr, respectively.

A reduction following Eq.(3) is applied, termed by the subscript R

$$\mathbf{X}_R\mathrm{col}_R\mathbf{P} = \mathrm{col}_R\mathbf{Q} . \tag{14}$$

To switch back from the reduced vector $\mathrm{col}_R\mathbf{P}$ to the entire matrix $\mathbf{P}$ as known from the Lyapunov equation, the upper triangle matrix has to be filled.

3 Example. Determinant and Condition Number

A sample of 20 arbitrary matrices `rand(10,10) - 0.5 * ones(10,10)` $\in \mathcal{R}^{10\times 10}$ is selected. In Fig. 1 the results for the matrices $\mathbf{X}$ and $\mathbf{X}_R$ are presented. The condition numbers are

close together but there is a tremendous difference in the determinant; $\det \mathbf{X}_R$ is by far higher and thus better than $\det \mathbf{X}$ before reduction was applied.

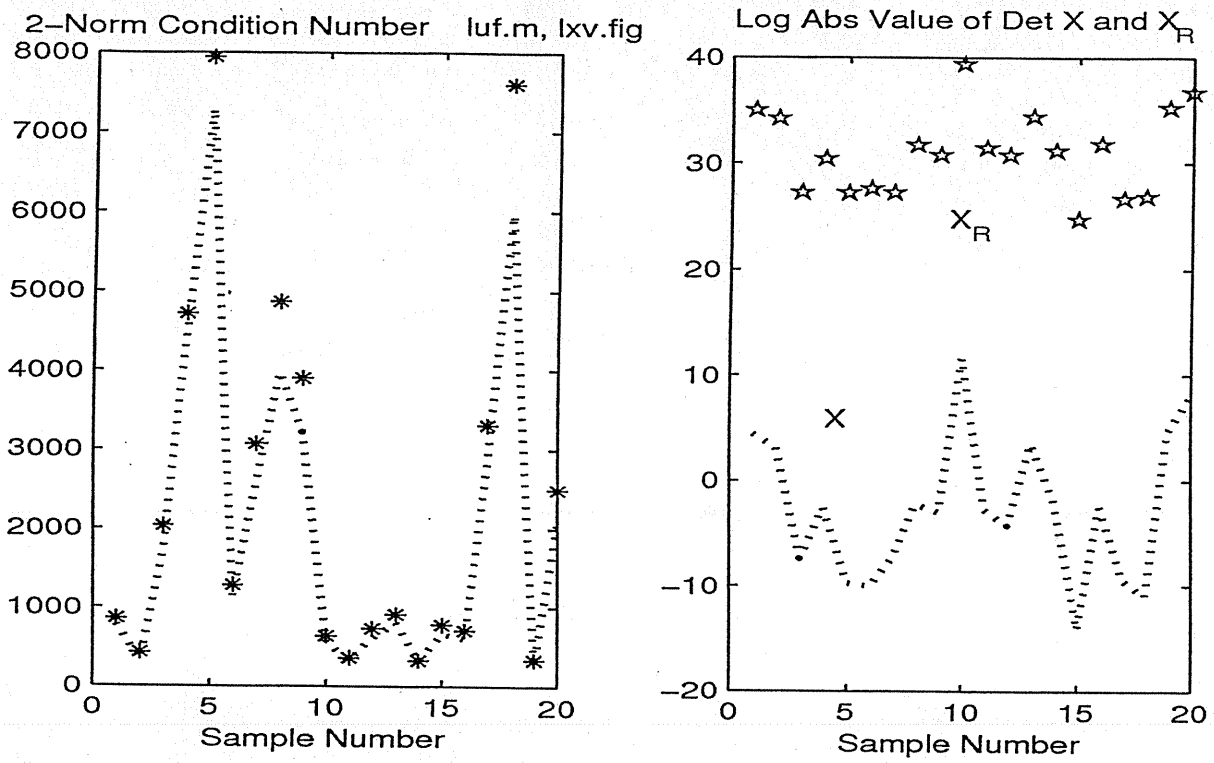


Figure 1: Condition number and amount of the determinant before and after reduction

4 Conclusion

By adequate addition of selected rows and columns in the matrix system of the Lyapunov equation, the number of unknowns and equations is reduced from n^2 partly double solutions to $n(n+1)/2$ simple solutions. The solution is concentrated into an adequate reduction process. The system determinant can be increased respectively by applying this operation.

References

Bartels, R.H., and Stewart, G.W., 1972, Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. of the ACM* **15**, pp. 820-826

Bryson, A.E., and Ho, Y.C., 1975, Applied Optimal Control, *Hemisphere Publishing*, pp. 328-338

The 5th IFAC International Workshop on Automatic Systems for Building the Infrastructure in Developing Countries: Automation in Infrastructure Creation

May, 17 – 18, 2007
Cesme, Izmir,Turkey

The 5th IFAC International Workshop "DECOM-TT 2007" on Automatic Systems for Building the Infrastructure in Developing Countries "Automation in Infrastructure Creation" took place on May 17 to 20, 2007, in Cesme near Izmir, Turkey, and it was organised successfully by the Turkish National Member Organization of IFAC. Although in respect of the number of the really present participants as well as the number of accepted and presented contributions it was rather a medium sized event on the other side in respect of scientific weight and value in the area of system design, automation and control applications it has to be noted as an important meeting for international senior experts and young scientists.

The Plenary Part of the 5th IFAC Workshop DECOM-TT 2007 consisted of Presentations in which it was reported about specific robotic systems and roboter systems for special applications.

The other parts of the Workshop were organised in sixteen Sessions each of these consisting of between 3 and 6 submitted Presentations. In general the Sessions bring information in a series of presentations that deal according to the theme of the Workshop with various automation problems that are of special importance in geographical areas with developing infrastructures in general and specifically in industrial environment where manufacturing plants are still only partly automated.

Two Sessions (General and Teaching/Training Issues) dealt with "Education", an area that is of special importance for developing countries.

Reports about basic scientific developments were presented in the Sessions on "Motion, Location, Sensing and Vision", "Theoretical Advances in Nonlinear and Optimal Control", "System Identification and Modelling"and "Fuzzy, Neural and Fuzzy-Neural Controls" whereas about scientific advances oriented to automation and control application there were given comprehensive reports in the Sessions on "Special Purpose Controller Designs", "New Results in Control of Time-Delay Systems" and "Complex System Control and Modelling Problems".

Further on several Sessions were dedicated to Developments of Design, Automation and Monitoring in Industry whereas special Sessions dealt with "Plant Monitoring and Process Automation", "Automation and Information Systems - Macro-/Application-Level Problems", and "Instrument and Plant Design".

Specific applications as there were "Aerospace Modelling and Control Applications", "Manipulation, Biped and Wheeled Robots"and "Energy and Power Control Designs" were presented in several other well attended Sessions allowing the audience to get additional information from the authors in interesting discussions.

The workshop was closed by a meeting of the IFAC Technical Committee on Developing Countries in the frame of which the organizers have been congratulated to the success of the event. The participants thanked for the excellent organization and expressed their great interest to participate in the next Workshop that will take place in two years in Mexico.

P. H. Osanna and M.N. Durakbasa,

IFAC Workshop „Intelligent Assembly and Disassembly – IAD 07" und IFAC Workshop on " Intelligent Manufacturing Systems – IMS 07".

23.-25.Mai 2007
Alicante, Spanien

Auf Grund eines Beschlusses des technischen Komitees der IFAC „Manufacturing Plant Control" wurden diese beiden traditionellen Workshops auf Grund ihrer hohen Spezialisierung zusammengelegt. Sie wurden von der Abteilung Automatisierung, Robotertechnik und Computervision der Universität Alicante in hervorragendster Weise organisiert.
Das erste IFAC Workshop über intelligente Produktionssysteme fand 1992 in Dearborn (USA) statt. Das erste IFAC Workshop über intelligente Montage und Demontage wurde 1998 in Bled, Slowenien organisiert.
Von den insgesamt eingereichten 75 Papers (54 für IMS und 21 für IAD) wurden 62 (45 für IMS und 17 IAD) ausgewählt. Insgesamt wurden 3 Übersichtsvorträge gehalten, einer für IAD, einer für IMS und ein Industriebeitrag.

In seinem Übersichtsvortrag für IAD versuchte P. Kopacek einen Überblick über den derzeitigen Stand und Entwicklungstendenzen der intelligenten Montage und Demontage zu geben. Er zeigte an Hand von realisierten Montage- und Demontagesystemen, dass die Automatisierung von Montagevorgängen im Wesentlichen unintelligent abgeschlossen ist. Anders ist es bei der Demontage wo noch Probleme der Sensorik, der Demontagewerkzeuge sowie der Verwendung der künstlichen Intelligenz zu lösen sind. Für Montage und

Demontage geht der Trend eindeutig in die Richtung der Zusammenarbeit von Mensch und Roboter an einem Arbeitsplatz. Der Übersichtsvortrag von D. Kiritsis von der Technischen Hochschule in Lausanne beschäftigte sich im Wesentlichen mit der Einführung einer integrativen Betrachtungsweise des Lebenszyklus eines Produktes – Product live cycle management (PLM). Seitens der Industrie stellte B. Kale vom Omron ein neues, kostengünstiges System für Montage- und Demontageanlagen vor.

Einen Schwerpunkt in beiden Workshops stellten Beiträge zur Logistik und Produktionsablauf dar. Bei IMS wurden daneben noch Modellbildung und Simulation sowie CAD/CAM CAE Systeme sowie Qualitätskontrolle behandelt. Bei IAD konzentrierten sich die Beiträge auf die Anwendung moderner Sensortechnologien sowie virtuelle Realität und Simulation für die Demontage.

Beide Workshops wurden in hervorragendster Weise organisiert, das Abstract Book und die CD-Room Preprints hatten höchste Qualität und das Begleitprogramm brachte den Teilnehmern Alicante näher.

Das nächste Workshop IMS findet im Oktober 2008 in Szcsecin , Polen statt. Über IAD wird noch diskutiert.

P. Kopacek

16. Internationales Workshop „Robotics in Alpe-Adria-Danube-Region – RAAD 2007"

7.-9- Juni 2007
Ljubljana, Slowenia

Dieses nun schon zur Tradition gewordene Workshop wurde diesmal von der Fakultät Elektrotechnik der Universität Laibach in hervorragendster Weise organisiert. 86 Teilnehmer aus 14 Ländern präsentierten 70 technische Beiträge, welche in 14 Sessions angeordnet waren. Das Programm wurde durch 4 Übersichtsvorträge in 2 Plenarysessions ergänzt.

In seinem Übersichtsbeitrag „Humanoid Robots Learning from Multimodal Observation of Humans" gab R. Dillmann, von der Universität Karlsruhe einen Überblick über das Projekt Humanoide Roboter. Als erster Prototyp wurde ein menschenähnlicher Roboter bestehend aus einer mobilen Plattform und einem flexiblen Torso, welcher mit 2 Armen mit jeweils einer 5 Fingerhand, einem Kopf mit visuellen und akustischen Sensoren, vorgestellt. Dieser Roboter ist bereits in der Lage mit Menschen zu kooperieren, wobei dies durch Lernen vom

menschlichen Verhalten bewerkstelligt wird. M. Munih von der Universität Laibach gab einen Überblick über die Forschungsarbeiten an seinem Institut über Roboter zur Rehabilitation. Es ist dies momentan eine beliebte Forschungsrichtung, um Rehabilitationen effizient auch zu Hause durchführen zu können. Die beiden restlichen Übersichtsvorträge standen von B. Cleasson und H. Kosler und gaben einen Überblick über die Roboter Produktpalette zweier Hersteller.

Wie üblich waren die technischen Papers von der Thematik her sehr heterogen. Das Spektrum reichte von theoretisch orientierten Papers, über Steuerung und Regelung, Modellierung und Simulation sowie Robotermechanismen, über allgemeine Papers, über mechatronische Systeme, Ausbildung in Robotertechnik, Mensch-Roboter Interaktion, bis hin zu humanoiden Robotern, autonomen mobilen Robotern, Industrierobotern. Behandelte Randgebiete waren Greiftechnologien und Bildverarbeitungssysteme.

Ergänzt wurde die Tagung durch ein fachlich sehr interessantes Rahmenprogramm. Die 17. RAAD Tagung findet von 15.-17. September 2008 an der „Universita Politecnica delle Marche“ in Ancona, Italien statt. Für 2009 liegt ein Proposel aus Österreich vor.

P. Kopacek

Industrial Ethernet in der Automatisierungstechnik

M. Metter, R. Bucher

Publicis Corporate Publishing, 2. Auflage 2007
391 Seiten, schwarzweiß Abbildungen
ISBN 978-3-89578-277-0

Informationstechnik (IT) finden wir heute in allen Unternehmensbereichen. Mit IT bezeichnet man die Technik, die es ermöglicht, Informationen zur richtigen Zeit an der richtigen Stelle verfügbar zu machen, um diese im Sinne einer Produktivitätssteigerung zu nutzen. Hinter IT verbergen sich eine Vielzahl von Kommunikationsstandards und Protokollen, die zusammen einen durchgängigen Informationsfluss ermöglichen. Ethernet ist dabei der wichtigste Standard, der die Grundlage zu allem darstellt – durchgängig etabliert im Büro und im industriellen Umfeld.

Dieses Buch betrachtet Industrial Internet in der Automatisierungstechnik. In dieser zweiten, wesentlichen überarbeiteten Auflage war es zum einen wichtig die bewährten Grundlagen und Begriffe für den Einsatz von Ethernet-LAN-Techniken mit Simatic vorzustellen. Zum anderen erhielten die aktuellen Themen wie IT Security, Industrial WLAN und Profinet einen größeren Raum, der ihrer steigenden Bedeutung auch zukommt.

Die Intention dieses Buches ist es, Anlagenbetreibern, Programmierern und Inbetriebsetzern einen schnellen und pragmatischen Einstieg in das Thema Ethernet im industriellen Umfeld zu ermöglichen. Dazu wurde die bewährte Mischung aus Information und Praxisbeispielen gewählt.

Das Buch kann sowohl Studierenden als auch Praktikern empfohlen werden.

P. Kopacek

Test- und Prüfungsaufgaben Regelungstechnik

A. Weinmann

Springer WienNewYork, 2. Auflage 2007
310 Seiten, 332Abbildungen
ISBN-10 3-211-37135-4
ISBN-13 978-3-211-37135-0

In dieser 2. Auflage sind aus den wichtigsten Gebieten der Regelungstechnik 457 Aufgaben zusammengestellt, sie stammen überwiegend aus Vorlesungen und Übungen im Studiengang Elektrotechnik der Technischen Universität Wien in höheren Semestern.

Der Bogen spannt sich dabei von grundlegender Analyse von Regelstrecken und –kreisen über deren Entwurf, Stabilitätsuntersuchungen, Zustandsraum, Abtastregelungen, Optimierung, stochastische Regelungen und Robustheit bis zu nichtlinearen Systemen. In der 2. Auflage wurden 50 weitere Beispiele aus Fuzzyregelung, chaotische Regelung, Internal-Modal-Control und Differentiell flache Systeme aufgenommen.

Zu jeder Angabe schließt sich eine genaue Durchrechnung, Diskussion und Lösung an. Dabei wurde auf Kürze und Prägnanz besonderer Wert gelegt. Bei der Beispielauswahl ist bewusst auf eine gewisse Streuung wert gelegt worden. Daher finden sich neben sehr einfachen Aufgabenstellungen auch komplexere. Somit trägt dieses Buch den unterschiedlichsten Bedürfnissen Rechnung.

Die Durchrechnung erfolgt überwiegend analytisch, da sie ein Höchstmaß an Transparenz zeigt. Darüber hinaus wurden über 30 Programme für numerische und symbolische Computerunterstützung - überwiegend unter Verwendung von Matlab 6.1 - angegeben.

Das Buch kann sowohl Studierenden höherer Semester als auch in der Praxisstehenden Ingenieuren empfohlen werden.

P. Kopacek.

Ein Beitrag zur zustandsorientierten Instandhaltung von Hydrogeräten für moderne Schienenfahrzeuge

Dipl.-Ing. (FH) Andreas Barth

Begutachter: O. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Dr.mult.h.c. Peter Kopacek

Die Vision, welche letztendlich ausschlaggebend für die Durchführung dieser Arbeit war, sieht eine Umstellung der bisher zeitabhängigen Instandhaltung von hydraulischen Bremsanlagen hin zu einer modernen, zustandsorientierten Instandhaltung vor. Im Sinne dieses Vorhabens, versteht sich diese Arbeit als Initialarbeit, als Machbarkeitsstudie um Kenntnis über die Möglichkeiten aber auch Grenzen der zustandsorientierten Instandhaltung, angewandt an einem hydraulischen Bremssystem, zu erlangen.

Die Orientierung der Instandhaltung einer Anlage an ihrem Verschleißzustand bedingt, dass der fortschreitende Verschleiß erfassbar gemacht werden kann. In manchen Fällen sind die benötigten Kenngrößen direkt messbar, oftmals stecken diese Informationen aber in nicht direkt messbaren, internen Anlagenkennwerten oder können nur aus dem sich verändernden dynamischen Verhalten des Systems, durch Beobachtung über einen längeren Zeitraum gefiltert werden.

Um Gewissheit zu erlangen, ob sich die Anwendung von zustandsorientierter Instandhaltung bei einer hydraulischen Bremsanlage zum heutigen Zeitpunkt mit vertretbarem Aufwand realisieren lässt und welche Diagnosetiefe damit erreicht werden kann, ist zum einen die Einarbeitung in die Vielzahl an verschiedenen Methoden und Diagnoseverfahren erforderlich, welche bei Einsatz von zustandsorientierter Instandhaltung zur Anwendung kommen und zum anderen die Untersuchung der Anlage, deren Instandhaltungsprinzip modernisiert werden soll, hinsichtlich ihrer technischen Eignung notwendig.

So wurde auf Basis von Fachliteratur eine Übersicht erstellt, welche die zur Verfügung stehenden Diagnoseverfahren auflistet und detailliert beschreibt. Es wird auf die Unterschiede der einzelnen Verfahren eingegangen und deren Vor- und Nachteile dargestellt. Beispiele aus der Wirtschaft über den erfolgreichen Einsatz einzelner Diagnoseverfahren zum Zweck der zustandsorientierten Instandhaltung geben deutlich zu erkennen, welches Potential in diesen Methoden steckt.

Die Analyse der technischen Realisierbarkeit wurde anhand einer realen hydraulischen Bremsanlage durchgeführt. Hierzu wurde eine Anlage gewählt, die in großer Stückzahl gefertigt wurde und ein hohes Maß an Standardkomponenten aufweist, um eine größtmögliche Allgemeingültigkeit und damit Wiederverwendbarkeit der Untersuchungsergebnisse gewährleisten zu können. Inhalt dieser Analyse ist neben der detaillierten Beschreibung der Komponenten und deren Eigenschaften speziell das Verhalten der Komponenten bei zunehmendem Verschleiß und dessen Auswirkung auf die Anlage.

Im Hinblick auf die Bildung von eindeutigen Merkmalen zur Erkennung des zunehmenden Verschleißes liegt das Hauptaugenmerk der Analyse auf dem Verschleißverhalten der

Komponenten. Aber auch weitere nicht zu vernachlässigende Faktoren wurden betrachtet. So wurde für jede Komponente die Auswirkung eines Ausfalls auf die Anlage in Form von Material und Zeitaufwand angegeben. Ebenso wurden die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ausfalles und die Einschätzung der technischen Durchführbarkeit einer zustandsorientierten Instandhaltung untersucht. Auf Basis dieser gesammelten Daten wurde jene Komponente gewählt, bei welcher die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Anwendung der zustandsorientierten Instandhaltung gegeben erschien.

Anhand dieser gewählten Komponente werden weitere Untersuchungen exemplarisch durchgeführt. Dabei galt es im ersten Schritt, die notwendigen Informationen ohne zusätzliche mechanische Erweiterungen der Anlage (z.B. Sensoren), lediglich aus internen Zustandsgrößen zu generieren.

Mit Hilfe der experimentellen Identifikation wurde versucht, ein hinreichend genaues mathematisches Modell der Komponente abzubilden. Dies wurde mit der „System Identification Toolbox" von Matlab anhand gemessener Ein- und Ausgangsdaten erstellt und parametriert. Das auf diese Weise gewonnene Modell konnte in die Applikationssoftware der Bremssteuerung implementiert werden um seine Funktionsfähigkeit unter realen Bedingungen zu testen. Zu diesem Zweck wurde ein hydraulischer Prüfstand aufgebaut, an dem vergleichende Messungen zwischen einer neuwertigen und einer verschlissenen Komponente durchgeführt wurden.

Eine Beurteilung der gewonnenen Erkenntnisse und eine Ausblick auf die nächsten Schritte bilden den Abschluss der Arbeit.

Sicherheit und Gefahr aus technischer Sicht; ausgehend vom akademischen und medialen Blickpunkt werden singuläre Ordnungsschemata erarbeitet und Sicherheits-Strategien und -Methoden beleuchtet und optimal generiert.

Dipl.Ing. Andreas J. Bauer, DWT, MBA

Begutachter: O.Univ.Prof. Dr.techn. Dr.mult.h.c. P. Herbert Osanna

Sicherheit und Gefahr aus technischer Sicht; ausgehend vom akademischen und medialen Blickpunkt werden singuläre Ordnungsschemata erarbeitet und Sicherheits-Strategien und -Methoden beleuchtet und optimal generiert.

Safety and security are generated from an academical and media point of view to ensure a good access of the theme.
As preferred method the FMEA / FMECA are being treated in Chapter 2 of the PhD thesis. Different types are introduced (standards, industrial practice). A detailed analysis of the methods and the differences is being carried out. On the basis of this analysis an improvement-plan for a European Standard is generated and an optimal approach for user is published. Implications of practical use are given adequate space.

Chapter 3 describes in an interdisciplinary way threats from technical point of view and law's point of view. To invert Maslov's Pyramide is an innovation; also the generation of threats through human life. The technological leverage is identified as a challenge for safety and security.
A new scheme for safety and security is generated in Chapter 4. The range of the scheme starts by the individual human and reaches multinational and multicontinental scopes.

Chapter 5 focuses on information and knowledge. The technical implications of IT are generated in detail. Strengths and weaknesses are analysed. A threefold separation is being used: errors, enemy attacks and natural weaknesses.

In Chapter 6 safety and security strategies are developed. The strategies range from module strategy up to regional-strategy whereas here as last part a systematic analysis is given.

Chapter 7 focuses on the identification of threats. This is followed by Chapter 8 in which it is described how to overcome threats and crisis.

The difference between total safety and security and residual is analysed and discussed in the following Chapter 9.
An overview on used methods is generated in Chapter 10 whereas the methods are structured by the way of use: policy/strategy/goals, identification, analysis, assessment, realisation.
Finally Chapter 11 shows chances which can be realised by using good and secure practices for the well-being of citizens and for the use of world-policy.

Internationale Kooperation zusammenarbeitender Klein- und Mittelbetriebe.

Dipl.-Ing. Nasih Abdulkader Ibrahim Zandi

Begutachter: O.Univ.Prof. Dr.techn. Dr.mult.h.c. P. Herbert Osanna

The importance of small and medium sized enterprises (SMEs) is today far beyond any discussion in countries all over the world - in European countries as well as in South East Asia and in USA, in Africa as well as in Latin America. To meet market demands in present

and future global industrial world, manufacturing enterprises of any kind and any size must be flexible and agile enough to respond quickly to product demand changes. With support of artificial intelligence and modern information technology it is possible to realise modern cost-effective customer-driven design and manufacturing taking into account the importance and basic role of quality management and metrology. This will be especially possible on the basis of the innovative concept and model for modern enterprises the so-called "Multi-Functions Integrated Factory - MFIF" that makes possible an agile and optimal industrial production in any kind of industry and especially in modern SMEs.

To meet high-level demands both from industrial and from private customers in the future, manufacturing enterprises must be flexible and agile enough to respond quickly to product demand changes. New models for alternative configurations of future industrial organisations in general which are usually applied and especially for small and medium sized enterprises (SMEs) need to be investigated.

In this thesis global competitive associations of factories as well as of collaborating SMEs are presented as an innovative concept and a new model for manufacturing enterprises developed to meet demands for cost-effective customer-driven design and production. This concept can be used with success to realize agile and optimal global international cooperations of collaborating SMEs. The quality assurance process will be used in all product production processes in such a system - from the design stage to the final assembly. Quality management and quality assurance in individual activities of different function enterprises - big factories as well as SMEs - in such a collaboration structure play a basic role to ensurse the realisation of the concept, e.g. through the intelligent production systems based on quality management and quality assurance in the system to create, to realize and to present the features, such as, concurrent, interactive, modular, integrative, learning, autonomous, self optimising and self organising functions.

In this presentation, the intelligent quality assurance system in MFIF, an off-line programming technique for ICMM as basis for simultaneous quality assurance and an intelligent measuring cell for the flexible automation of quality assurance and management, data collection and data evaluation in multi-function integrated factory was proposed and discussed. Optoelectronic and Nanotopographic quality assurance methods and a global data communication model for the future that is investigated to realise the concurrent quality management and quality assurance activities and other production activities in MFIF, e.g. all production processes, for example design and development, process planning, manufacturing and quality assurance and management etc., which are traditionally carried out sequentially, can be parallelly carried out in MFIF in global and intelligent manufacturing environment, are introduced.

Quality management systems with intelligent, associative, concurrent, interactive, modular, integrative, learning, autonomous, self optimising and self organising functions will be realized in global international cooperations of collaborating small and medium sized enterprises in the near future.

Fertiggestellte Diplomarbeiten

Hysteresekompensation und Positionierung von piezoelektrischen Stapelaktuatoren

Martin Schmidbauer; Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung, Universität Linz

Regelung eines Universalgelenkes für Humanoide Roboter mit einem bürstenlosen Gleichstrommotor

Doris Benold; IHRT, TU Wien

MAMoRo – A Biologically Inspired Modular Autonomous Mobile Robot Platform

Jidan Al-Eryani; IHRT, TU Wien

Datum	*Veranstaltung*	*Ort*	*Weitere Informationen erhältlich bei:*
2.-5.10.2007	IFAC Conference Cost Effective Automation in Networked Product Development and Manufacturing	*Monterry Mexico*	e-mail:IFACcea07.mty@servicios.itesm.mx http://cidyt.mty.itesm.mx/ifac-CEA07/
24.10.2007 13:00 – 18:00 Uhr	22. Österreichischer Automatisierungstag Automatisierungstechnik: Forschung - Industrie	*Linz Austria*	e-mail: e318@ihrt.tuwien.ac.at http://www.ihrt.tuwien.ac.at
26.10.2007	5. Österr. - Bulgar. Automatisierungstag	*Sofia Bulgaria*	e-mail: kopacek@ihrt.tuwien.ac.at
14.-16.11.2007	IFAC Workshop Manufacturing Modelling, Management and Control, MIM 2007	Budapest Hungary	e-mail: mim2007@conferences.hu http://www.conferences.hu/mim2007
8.-10.4.2008	IFAC SFI, SUT, ONR, MI Workshop Navigation, Guidance & Control of Underwater Vehicles (NGCUV2008)	Killaloe, Co Clare Ireland	e-mail: ngcuv08@ul.ie http://www.ngcuv08.com
12.-14.6.2008	AACC IFAC Conference American Control Conference ACC 2008 - in cooperation with IFAC -	Seattle USA	e-mail: aanna@mit.edu http://www.a2c2.org/conferences/acc2008/
23.-28.6.2008	Robot Soccer Europa Meisterschaft	*Linz Austria*	e-mail: kopacek@ihrt.tuwien.ac.at
6.-11.7.2008	IFAC Congress World Congress	*Seoul Korea*	e-mail: secretariat@ifac2008.org http://www.ifac2008.org
9.-10.10.2008	IFAC IFIP Workshop Intelligent Manufacturing Systems (9th) - IMS	*Szczecin Poland*	e-mail: ims08@ps.pl http:www.ims08.ps.pl
6.-8.7.2009	IFAC Symposium Identification and System Parameter Estimation – SYSID´09(15^{th})	*St. Malo France*	e-mail: to be announced http://sysid2009.org

22. ÖSTERREICHISCHER AUTOMATISIERUNGSTAG

Automatisierungstechnik: Forschung – Industrie

Mittwoch 24. Oktober 2007
13.30 - 18.00 Uhr
an der

Johannes Kepler Universität Linz

Die Automatisierungstechnik wird immer mehr zur Querschnittsdisziplin in ihrer engen Verzahnung mit der Mechatronik, Informationstechnik und anderen fachverwandten Disziplinen. Oft entscheidet die eingesetzte Automatisierungslösung über technische Wettbewerbsvorteile sowie die gleich bleibende Qualität der produzierten Güter.

Die österreichische Industrie und hier insbesondere Klein und Mittelbetriebe kooperieren zunehmend mit Universitätsinstituten und Forschungseinrichtungen um neueste Automatisierungslösungen in ihre Produkte zu integrieren.

Auf diesem „22. Österreichischen Automatisierungstag" sollen wie bisher der österreichischen Industrie, forschungsfördernden Stellen sowie Vertretern von Technologietransferzentren ein Überblick über mögliche Ansätze, zukünftige Entwicklungen sowie realisierte Projekte gegeben werden.

IFAC Beirat Österreich (ib) | ÖGART Österreichische Gesellschaft für Automatisierungs- und Robotertechnik | OESTERREICHISCHE COMPUTER GESELLSCHAFT AUSTRIAN COMPUTER SOCIETY | IEEE EMS Society Chapter Central Europe | OGMA Österreichische Gesellschaft für Mess- und Automatisierungstechnik (ÖGMA) | ÖGTP Österreichische Gesellschaft für Technologiepolitik (ÖGTP) | IHRT Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik, Technische Universität Wien (IHRT) | Österreichische Gesellschaft für System- u. Automatisierungstechnik

Programm

12.30 - 17.00 Registrierung

13.30 – 13.45 Eröffnung
Univ. Prof. Dr. P. KOPACEK, TU Wien
Univ. Prof. Dr. K. Schlacher, JKU Linz
Dipl.-Ing. F. Pirker, Präsident, ÖGMA
Dr. N. ROZSENICH, Präsident ÖGART
Univ.Prof.Dr.G.Kotsis, Vizerektorin der JKU Linz

13.45 – 14.30 Automatisierungstechnik an der JKU Linz
Prof. Dr. K. Schlacher, RegPro. Uni Linz

14.30 - 14.50 Verleihung des Fred Margulies-Preises
Dr. N. Rozsenich

14.50 – 15.20 Einsatz aktiver Schwingungsdämpfung mittels virtueller Sensoren in Industrieanlagen
Dipl.-Ing. G. Keintzel, Siemens VAI Metals Technologies GmbH & Co

15.20 - 15.50 Reglerentwicklung im Bereich Spritzgießmaschinen
Dr. G. Grabmair, ENGEL AUSTRIA GmbH

Leitung Univ.Prof.Dr.Dr.h.c.mult. P. KOPACEK

15.50 – 16.15 Pause

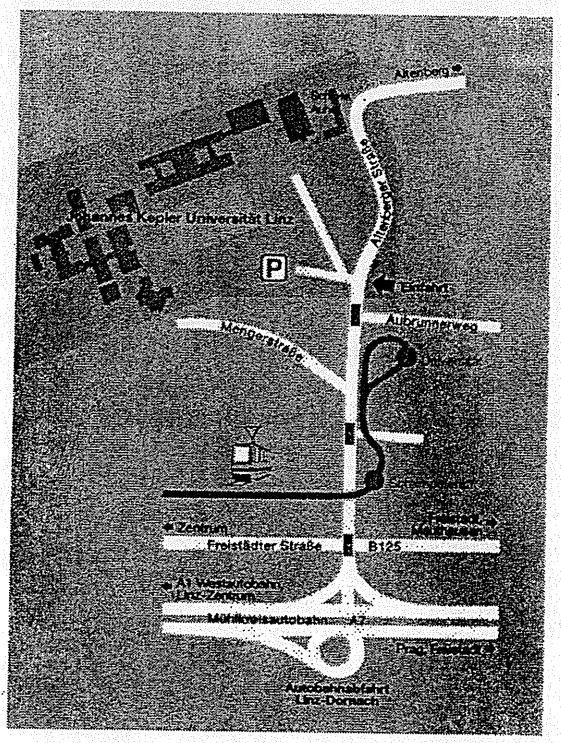
16.15 - 16.45 Perfection in Automation for Innovative Machines
Dipl.-Ing. Dr. R. Kickinger, Bernecker + Rainer Industrie-Elektronik Ges.m.b.H.

16.45 – 17.15 Automatisierung in der Medizintechnik
Dr. M. Zauner MSc., FH OÖ

17.15 - 17.45 Robotik in Österreich
Erste Ergebnisse einer Studie des BMVIT
Dr. H. Gattringer, JKU Linz
Prof. Dr. P. Kopacek, TU Wien

17.45 – 18.00 Zusammenfassung und Ausblick
Dr. N. Rozsenich
Prof. Dr. P. KOPACEK, TU Wien

In der Pause und nach Beendigung der Veranstaltung findet eine Demonstration „Roboterfußball" mit den Teams „Leonding Micros" (HTL Leonding) und AUSTRO (IHRT TU Wien) statt.



Anreise

Auto:
Von der Westautobahn A1 beim Knoten Linz in Richtung Prag/Freistadt (Autobahn A7) - auf der Autobahn durch Linz und über die Donau - nach ca. 1 km Ausfahrt "Linz/Dornach". Nach der Autobahnabfahrt gerade über die Kreuzung und die Altenberger Straße entlang. Nach ca. 500 m befindet sich links die Zufahrt zum Parkplatz der Universität.

Öffentlichen Verkehrsmittel:

Vom Hauptbahnhof mit der Straßenbahnlinie Nr. 1 oder Nr. 2 Richtung „Universität" bis zur Endhaltestelle. Die Fahrt dauert ca. 20-30 Min.

Die Repräsentationsräume B+C befinden sich im Unicenter 1. Stock.

Anmeldung zum
22. Österreichischen Automatisierungstag

Johannes Kepler Universität, Linz, Altenbergstraße 69
Repräsentationsräume B und C, Unicenter 1.Stock

Mittwoch, 24 Oktober 2007

FAX Antwort:
AN: **01 / 588 01 – 318 99**
Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik, TU WIEN
Favoritenstraße 9 – 11, 1040 WIEN
Tel.: 01 / 588 01 – 318 01
Fax: 01 / 588 01 – 318 99

oder **E-MAIL:** schirmbrand@ihrt.tuwien.ac.at

Vor- und Zuname: .....

Funktion(en): .....

Firma / Anschrift:.....

☎ .....

FAX: .....

E-mail:.....

Instruction to authors – presented as a pattern paper (18 pt)

A. Maier, F. Huber (12 pt)
Department ....., Vienna, Austria

Received April 8, 1999

Abstract
This paper shows ..... (italics, 12 pt)

1 General (14 pt)

Authors should prepare their manuscript camera ready, format A 4, 12 typeface and must present their manuscript in good quality. At the left/right edge 2.5 cm, at the to/bottom edge 3 cm. Authors are invited to use papers of this journal as a sample. Please do not use an eraser or erasing fluid. Footnotes should be avoided if possible. Authors are expected to submit their paper to one of the publishers (O.Univ.Prof.Dr. Peter Kopacek, Institute for Handling Devices and Robotics, Vienna University of Technology, Favoritenstrasse 9-11, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801-31899 or O.Univ.Prof.Dr. Alexander Weinmann, Institute of Automatic Control, Vienna University of Technology, Gusshausstr. 27-29, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801 37599).

2 References (14 pt)

Within the paper references should appear in the following form:
(Mayer, H., 1990) or (*Mayer, H., 1990)* (12 pt);
Mayer, H., 1990, discovered that....

3 Figures and Tables (14 pt)

Figures and Tables should be integrated in the paper and have to be referred to as Fig. 4.1 or Tab. 5.2.

4 References

References are to be listed alphabetically according to first author. (11 pt)

5 Word Processing System/Editor

Microsoft Word for Windows 1.1 or higher; Microsoft Word 5.0; TeX or LaTeX.