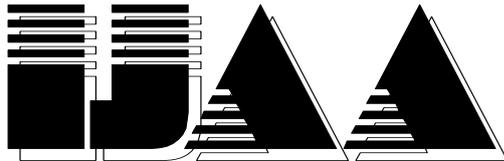
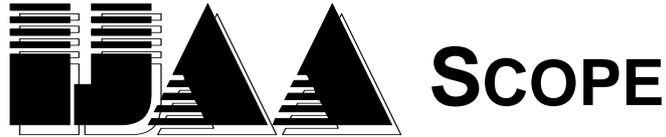


INTERNATIONAL JOURNAL AUTOMATION AUSTRIA



HEFT 2 Jahrgang 16 (2008)

<i>INHALT</i>	<i>Seite</i>
HORN, M., und REICHHARTINGER, M.: Sliding-Mode Regelung von elektrischen Drosselklappen	83
WEINMANN, A.: Linear quadratic controller with robustified stability margin for spherical uncertainties	97
LINDINGER, R.: Beobachterbasierte Methoden zur sensorlosen Regelung von Asynchronmaschinen – Übersicht und Vergleich	109
WEINMANN, A.: Gradients of Lyapunov subdeterminants preparing state controller design	126



"International Journal Automation Austria" (IJAA) publishes top quality, peer reviewed papers in all areas of automatic control concerning continuous and discrete processes and production systems.

Only original papers will be considered. No paper published previously in another journal, transaction or book will be accepted. Material published in workshops or symposia proceedings will be considered. In such a case the author is responsible for obtaining the necessary copyright releases. In all cases, the author must obtain the necessary copyright releases before preparing a submission. Papers are solicited in both theory and applications

Before preparing submissions, please visit our instructions to authors (see back cover) or web page.

Copyright © IFAC-Beirat. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored, transmitted or disseminated, in any form, or by any means, without prior written permission from IFAC-Beirat, to whom all requests to reproduce copyright material should be directed, in writing.

International Journal Automation Austria also is the official executive authority for publications of IFAC-Beirat Österreich.

Imprint: Propagation of Automatic Control in Theory and Practice.

Frequency: Aperiodically, usually twice a year.

Publisher: IFAC-Beirat Österreich, Peter Kopacek, Alexander Weinmann

Editors in Chief: Alexander Weinmann, Peter Kopacek

Coeditors: Dourdoumas, N. (A) Fuchs, H. (D) Jörgl, H. P. (A) Kugi, A. (A)
Noe, D. (SLO) Schaufelberger, W. (CH) Schlacher, K. (A)
Schmidt, G. (D) Troch, I. (A) Vamos, T. (H) Wahl, F. (D)

Address: 1) Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (E376), TU Wien,
A-1040 Wien, Gußhausstrasse 27-29, Austria
Phone: +43 1 58801 37677, FAX: +43 1 58801 37699
email: danzinger@acin.tuwien.ac.at
Homepage: <http://www.acin.tuwien.ac.at/de/Publikationen/Zeitschriften/IJAA>

2) Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik (E325/A6), TU-Wien,
A-1040 Wien, Favoritenstrasse 9-11, Austria
email: e318@ihrt.tuwien.ac.at
Homepage: http://www.ihrt.tuwien.ac.at/IFAC_AUT/

Layout: Rainer Danzinger

Printing: Kopierzentrum der TU Wien

Sliding-Mode Regelung von elektrischen Drosselklappen

Martin Horn, Markus Reichhartinger

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz

Email: martin.horn@tugraz.at

Kurzfassung: *Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der robusten Lageregelung von elektrischen Drosselklappen. Die Basis für den modellbasierten Reglerentwurf stellt ein strukturell einfaches mathematisches Streckenmodell dar, dessen Parameter experimentell bestimmt werden können. Dabei zeigt sich, dass einige Modellparameter beträchtlichen Schwankungen unterworfen sind. Mit Hilfe von Konzepten der so genannten Sliding-Mode-Theorie gelingt es, Regelkreise zu entwerfen, die trotz der ungenauen Kenntnis bestimmter Streckenparameter hervorragende dynamische Eigenschaften besitzen.*

1 Einführung und Aufgabenstellung

Zur Erzielung hoher Wirkungsgrade bei niedrigen Emissionen wird in Ottomotoren die Luftmassenzufuhr üblicherweise mit Hilfe von Drosselklappen reguliert. Bei *elektrisch* betätigten Drosselklappen erfolgt die Verstellung des Klappenwinkels φ mit Hilfe von Elektromotoren (siehe Bild 1). Der Aktionsbereich der Klappe ist durch mechanische Anschläge vorgegeben, für $\varphi = 0^\circ$ ist die Klappe geschlossen, für $\varphi = 90^\circ$ ist sie vollständig geöffnet. Die Messung des Klappenwinkels φ erfolgt aus Sicherheitsgründen oft über zwei Potentiometer mit gegenläufiger Widerstandskennlinie. Zur Gewährleistung der Betriebssicherheit des Systems, beispielsweise bei Ausfall der Motorelektronik, wird die Drosselklappe im stromlosen Zustand durch einen Federmechanismus in die so genannte Notlaufposition $\varphi = \varphi_0$ gebracht. Diese Klappenstellung erlaubt einen eingeschränkten Motorbetrieb und ermöglicht das langsame Weiterfahren.

Im Gegensatz zu rein *mechanischen* Realisierungen mittels Bowdenzugverbindung erlaubt der Einsatz von elektrischen Drosselklappen die Entkopplung von Gaspedalstellung und Klappenposition. Der Öffnungswinkel der Drosselklappe ist somit nicht starr durch die Gaspedalstellung vorgegeben, die Motorelektronik kann gezielt eingreifen. Der Einsatz dieses so genannten „E-Gas-Systems“, dessen prinzipieller Aufbau in Bild 2 dargestellt ist, ermöglicht die Realisierung von Fahrerassistenz-Systemen, wie z.B. ESP (Elektronisches Stabilitäts-Programm) oder ASR (Anti-Schlupf-Regelung).

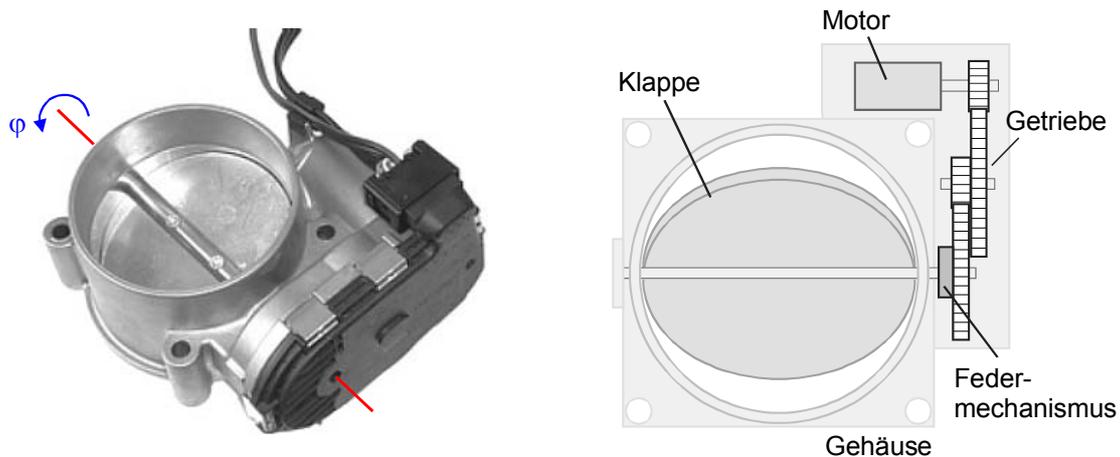


Bild 1: Elektrische Drosselklappe

Wesentliche Anforderungen an eine elektrische Drosselklappe sind die präzise Winkelpositionierung sowie die Unempfindlichkeit der Klappenlage gegenüber einwirkenden Störeinflüssen, wie sie z.B. Druckpulsationen im Saugrohr darstellen. Das bedeutet, dass der Klappenwinkel φ einem vorgegebenen Referenzwinkel ρ trotz des Einwirkens von Störungen „möglichst gut“ nachgeführt werden soll (siehe Bild 3).

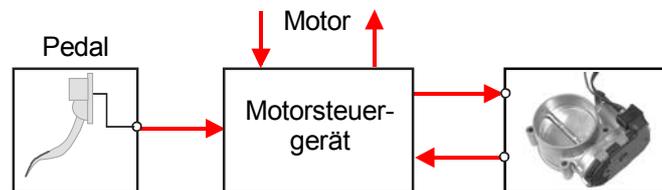


Bild 2: Prinzip des E-Gas-Systems

Durch die Implementierung des Lagereglers im Motorsteuergerät wird das dynamische Verhalten der Drosselklappe an die gestellten Anforderungen angepasst. Dabei werden üblicherweise PID-Regler verwendet, auch der Einsatz von Zustandsreglern wurde erprobt [4]. In beiden Fällen erweist sich die systematische Einstellung der Reglerparameter als schwierig und aufwändig.

In der vorliegenden Arbeit wird ein alternativer Ansatz zur robusten Regelung elektrischer Drosselklappen vorgestellt. Er beruht auf Prinzipien von „Sliding-Mode-Control“, also der nichtlinearen strukturvariablen Regelung [10]. Im folgenden Abschnitt wird zunächst ein einfaches mathematisches Modell einer elektrischen Drosselklappe, das als Basis für den Reglerentwurf dient, vorgestellt. Es zeigt sich, dass die Modellparameter mit Hilfe geeigneter Experimente unsicher, aber innerhalb gewisser Grenzen ermittelt werden können. Daraus resultiert die Notwendigkeit, Methoden der robusten Regelung einzusetzen. Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen von Sliding-Mode-Control wird die Entwurfsmethodik auf eine reale Drosselklappe angewandt.

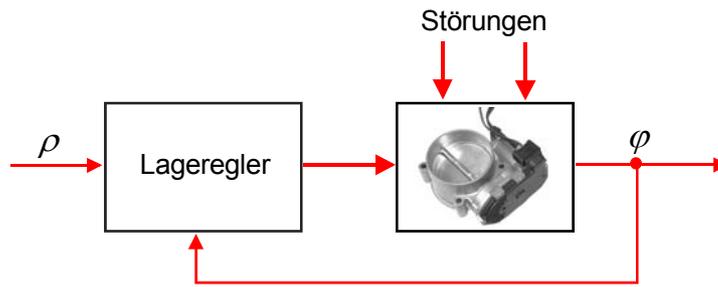


Bild 3: Lage-Regelkreis

2 Modell einer elektrischen Drosselklappe

Eine detaillierte Ableitung des hier angegebenen mathematischen Modells ist in [4] zu finden. Es berücksichtigt die Dynamik des Stellantriebs (im vorliegenden Fall ein fremd-erregter Gleichstrommotor), den Federmechanismus sowie trockene und viskose Reibungseffekte. Der Klappenwinkel φ in Abhängigkeit einer angelegten Motorspannung u kann demnach mit Hilfe folgender Differentialgleichung hinreichend genau beschrieben werden:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\kappa(\varphi) - \beta\frac{d\varphi}{dt} - \delta \operatorname{sign}\frac{d\varphi}{dt} + \gamma u$$

mit

$$\kappa(\varphi) = \alpha(\varphi - \varphi_0) + \mu \operatorname{sign}(\varphi - \varphi_0).$$

Hierbei sind α , β , γ , δ und μ positive Parameter, die mit Hilfe geeigneter Experimente ermittelt werden können. Durch Einführung der Zustandsvariablen

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \frac{d\varphi}{dt}$$

erhält man folgendes nichtlineares Zustandsraummodell mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\kappa(x_1) - \beta x_2 - \delta \operatorname{sign}(x_2) + \gamma u, \quad y = x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$$

und den Abkürzungen

$$a(\mathbf{x}) := -\kappa(x_1) - \beta x_2 - \delta \operatorname{sign}(x_2) \quad \text{und} \quad b := \gamma \quad (2)$$

nimmt die mathematische Beschreibung der Regelstrecke die *Normalform*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = a(\mathbf{x}) + bu, \quad y = x_1 \quad (3)$$

an.

2.1 Daten einer realen Drosselklappe

Bei der in Bild 1 dargestellten Drosselklappe liegt der Notlaufpunkt bei $\varphi_0 = 0.095$ rad. Die Motorspannung u ist betragsmäßig auf einen Wert von 10 V beschränkt, die maximale Winkelgeschwindigkeit der Klappe liegt bei etwa 6 rad s^{-1} . In Tabelle 1 sind die experimentell bestimmten Wertebereiche für die Modellparameter angegeben.

Parameter	physik. Einheit	Minimum	Maximum
α	$[\text{s}^{-2}]$	70	90
β	$[\text{s}^{-1}]$	60	110
γ	$[\text{rad s}^{-2}\text{V}^{-1}]$	100	140
δ	$[\text{rad s}^{-2}]$	40	90
μ	$[\text{rad s}^{-2}]$	100	150

Tabelle 1: Wertebereiche für die Modellparameter

Die Schwankungen der identifizierten Parameter sind unter anderem darauf zurückzuführen, dass im mathematischen Modell (1) Erscheinungen, wie z.B. die Getriebelose oder Haftreibungsphänomene nicht berücksichtigt werden.

3 Regelungskonzept

Im Folgenden wird die grundlegende Idee eines klassischen Sliding-Mode-Reglers erläutert. Dabei beschränken wir uns - im Hinblick auf das mathematische Modell (1) - auf Strecken zweiter Ordnung mit *einer* Eingangsgröße u , *einer* Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor \mathbf{x} . Die Erweiterung auf Strecken höherer Ordnung und auf Mehrgrößensysteme ist geradlinig [8] und wird hier nicht behandelt.

Vom Streckenmodell wird vorausgesetzt, dass es in der *Normalform*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad y = x_1 \quad (4)$$

vorliegt. Die skalare Funktion $b(\mathbf{x})$ soll konstantes Vorzeichen besitzen, im vorliegenden Fall wird $b(\mathbf{x}) > 0$ angenommen. Die Aufgabe der zu entwerfenden Regelung besteht darin, den Streckenausgang y einer vorgegebenen (hinreichend glatten) Referenzgröße ρ *asymptotisch nachzuführen*. Der Vektor \mathbf{x} wird also dem Referenzvektor

$$\mathbf{r} := \left(\rho \quad \frac{d\rho}{dt} \right)^T$$

nachgeführt.

Für die Lösung der formulierten Nachführungsaufgabe ist die Einführung des Fehlervektors

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{x} - \mathbf{r} \stackrel{(4)}{=} \left(x_1 \quad \frac{dx_1}{dt} \right)^T - \left(\rho \quad \frac{d\rho}{dt} \right)^T = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2)^T$$

zweckmäßig. Das Ziel der Synthesaufgabe kann dann folgendermaßen formuliert werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (5)$$

Unter Einbeziehung der vorgegebenen Referenzgröße ρ lautet die Streckenbeschreibung nun

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_2 \quad (6)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = a(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{r}) + b(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{r})u - \frac{d^2\rho}{dt^2}. \quad (7)$$

Beim Reglerentwurf, der in nachfolgenden zwei Schritten erfolgt, wird die Aufteilung des Streckenmodells in einen *linearen* Anteil (6) und in einen *nichtlinearen* Anteil (7) ausgenützt.

Der erste Schritt des Entwurfes besteht darin, den linearen Systemteil mit Hilfe seiner fiktiven Eingangsgröße ε_2 zu stabilisieren. Dabei wird die Tatsache ignoriert, dass ε_2 nicht direkt vorgegeben werden kann, sondern aus der Differentialgleichung (7) hervorgeht. Die Stabilisierung wird mit Hilfe des Ansatzes

$$\varepsilon_2 = -\lambda \varepsilon_1 \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 \quad (8)$$

bewerkstelligt, λ ist ein vorgebbbarer Entwurfsparameter.

Im zweiten Schritt wird derjenige Verlauf der Stellgröße u ermittelt, der den durch (8) charakterisierten „Wunschverlauf“ von ε_2 gewährleistet. Dazu wird die *skalare* Größe σ gemäß

$$\sigma(t) := \varepsilon_2(t) + \lambda \varepsilon_1(t) \quad (9)$$

betrachtet. Das Problem besteht nun darin, ausgehend von $\sigma_0 := \sigma(t=0)$ die Größe σ in *endlicher Zeit* T zu Null zu machen und anschließend auf diesem Wert zu halten, also

$$\sigma(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \geq T. \quad (10)$$

Das bedeutet, dass die Trajektorien in der $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ -Ebene für $t \geq T$ längs einer Geraden mit der Steigung $(-\lambda)$ in den Ursprung laufen, die Forderung (5) wird also erfüllt.

Man beachte, dass das zu lösende Nachführungsproblem darauf reduziert wurde, die eingeführte skalare Größe σ in endlicher Zeit zu Null zu machen. Dieses „Stabilisierungsproblem erster Ordnung“ kann mit Hilfe der Direkten Methode von Lyapunov [6] anschaulich gelöst werden. Als Lyapunov-Funktion wird dazu die quadratische Funktion

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$$

angesetzt. Zur Erfüllung der Bedingung (10) muss für $\sigma \neq 0$ die so genannte „sliding condition“

$$\frac{dV}{dt} = \sigma \frac{d\sigma}{dt} \stackrel{!}{\leq} -\eta |\sigma| \quad \text{mit} \quad \eta > 0$$

bzw.

$$\text{sign}(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} \leq -\eta \quad \text{für} \quad \sigma \neq 0 \quad (11)$$

gelten. Wie man überprüfen kann, gewährleistet die Erfüllung von (11), dass σ nach einer endlichen Zeit

$$T \leq \frac{|\sigma_0|}{\eta}$$

verschwindet. Durch entsprechende Wahl von η kann somit die Zeit T prinzipiell beliebig klein gemacht werden.

3.1 Ansatz eines Regelgesetzes

Ein Regelgesetz, das die Einhaltung von (11) gewährleistet, ist durch

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{b(\mathbf{x})} \left[-a(\mathbf{x}) + \frac{d^2\rho}{dt^2} - \lambda \left(x_2 - \frac{d\rho}{dt} \right) \right] - \frac{\varkappa}{b(\mathbf{x})} \text{sign}(\sigma), \quad \varkappa > 0 \quad (12)$$

gegeben. Mit obigem Ansatz gilt für die zeitliche Ableitung von σ der Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\varkappa \text{sign}(\sigma)$$

und in weiterer Folge durch Multiplikation mit $\text{sign}(\sigma)$

$$\text{sign}(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} = -\varkappa.$$

Offensichtlich muss für die Erfüllung (11) der Parameter \varkappa zu allen Zeiten der Bedingung

$$\varkappa \geq \eta$$

genügen. Die Größe \varkappa kann entweder als hinreichend große Konstante oder als Funktion der Zustandsgrößen angesetzt werden.

3.1.1 Interpretation des Regelgesetzes

In Bild 4(a) ist das Prinzip der entworfenen Regelung zu erkennen. Die eingezeichnete Trajektorie startet zur Zeit $t = 0$ im durch $\sigma_0 = \varepsilon_2(0) + \lambda\varepsilon_1(0)$ charakterisierten Punkt. Sie verläuft dann so, dass $|\sigma|$ abnimmt („reaching phase“). Nach einer endlichen Zeit T befindet sich die Trajektorie auf der durch $\sigma = 0$ charakterisierten Gerade. Die Trajektorie „gleitet“ längs der Geraden in den Ursprung, man spricht von einem „Gleitzustand“ oder neudeutsch „sliding-mode“. Hierbei wird vorausgesetzt, dass das Regelgesetz ideal realisiert werden kann, was allerdings unendlich hohe Schaltfrequenzen erfordert. Die Bewegung auf der Geraden ist offensichtlich durch

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

charakterisiert. Der hierfür erforderliche Verlauf der Stellgröße wird als „äquivalente Stellgröße“ („equivalent control“) bezeichnet und lautet:

$$u_{eq} = \frac{1}{b(\mathbf{x})} \left[-a(\mathbf{x}) + \frac{d^2\rho}{dt^2} - \lambda \left(x_2 - \frac{d\rho}{dt} \right) \right] \quad (13)$$

In Bild 4(b) ist ein möglicher Verlauf der entsprechenden Trajektorie dargestellt, wenn das Regelgesetz *nicht* ideal realisiert ist. Der Verlauf ab dem Zeitpunkt $t = T$ ist darauf zurückzuführen, dass reale Stellglieder aufgrund endlicher Schaltgeschwindigkeiten nicht, wie vorausgesetzt, die im Regelgesetz benötigte Signum-Funktion ideal nachbilden können. Als Folge davon entsteht das so genannte „Rattern“ oder „Klappern“ (engl. „chattering“), d.h. die Trajektorie vollführt eine hochfrequente Oszillation um die Gerade $\varepsilon_2 = -\lambda\varepsilon_1$. Dieses Rattern ist meistens unerwünscht, da beispielsweise unmodellerte „schnelle“ Dynamikanteile der Strecke angeregt werden können.

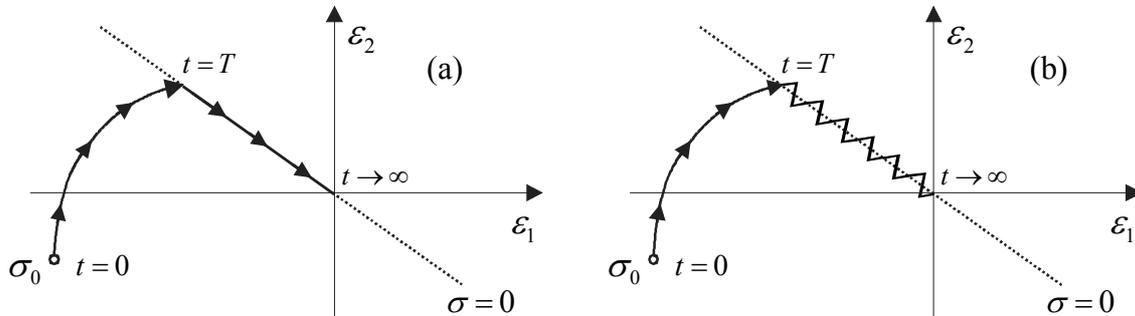


Bild 4: Prinzip der Regelung: (a) idealer Fall (b) realer Fall

3.1.2 Praktische Realisierung des Regelgesetzes

Eine einfache Maßnahme zur Reduktion bzw. Vermeidung des Ratterns ist die „Glättung“ des Regelgesetzes (14). Dabei wird die Signum-Funktion durch eine stetige Funktion approximiert [9]. Üblicherweise wird hierzu die Sättigungsfunktion verwendet, also

$$\text{sign}(\sigma) \quad \rightarrow \quad \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\phi}\right) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\phi} & \text{für } |\sigma| \leq \phi \\ \text{sign}(\sigma) & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{wobei } \phi > 0.$$

Durch den positiven Skalierungsfaktor ϕ , der auch eine Funktion der Zustandsvariablen sein kann, wird die „Steilheit“ der Sättigungsfunktion bzw. der Approximationsgrad der Signum-Funktion festgelegt. In der $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ -Ebene wird durch die vorgeschlagene Modifikation ein „attraktiver Schlauch“ um die Gerade $\varepsilon_2 = -\lambda\varepsilon_1$ gelegt. In Bild 5 ist diese so genannte Grenzschicht („boundary layer“) grau dargestellt. Ausgehend von σ_0 erreicht die zugehörige Trajektorie - bei sinnvoller Reglerauslegung - den grauen Bereich in endlicher Zeit, danach wird der Bereich nicht mehr verlassen. Eine Konsequenz dieser „ratterfreien“ Regelung besteht allerdings darin, dass die Erfüllung der Bedingung (5) nicht mehr garantiert werden kann, vielmehr hängt die „Genauigkeit“ der Nachführung unter anderem von der speziellen Wahl von ϕ ab.

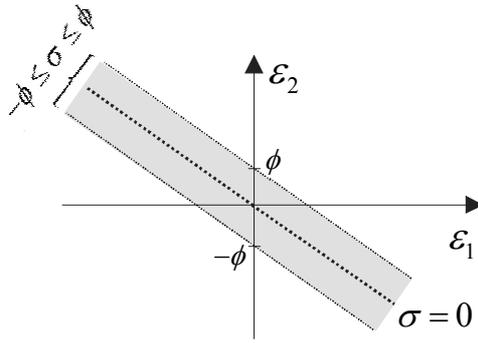


Bild 5: Boundary Layer

3.2 Anwendung auf die Drosselklappe

Bisher wurde vorausgesetzt, dass das mathematische Modell (1) das Verhalten der realen Regelstrecke *exakt* nachbildet. Diese idealisierende Annahme kann natürlich nicht aufrecht erhalten werden, die Funktionen $a(\mathbf{x})$ und $b(\mathbf{x})$ sind unsicher, d.h.

$$a(\mathbf{x}) = \hat{a}(\mathbf{x}) + \Delta a(\mathbf{x}), \quad b(\mathbf{x}) = \hat{b}(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Hierbei repräsentieren die Funktionen \hat{a} und \hat{b} ein *Nominalsystem*, durch Δa bzw. Δb werden alle möglichen Streckenvariationen beschrieben.

Für die Stellgröße u wird nun der Ansatz (12) mit den (bekannten) Funktionen des Nominalsystems, d.h.

$$u = \frac{1}{\hat{b}} \left[-\hat{a} + \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \lambda \left(x_2 - \frac{d\rho}{dt} \right) \right] - \frac{\varkappa}{\hat{b}} \text{sign}(\sigma), \quad (15)$$

gewählt, wobei hier aus Gründen der Übersichtlichkeit das Argument \mathbf{x} weggelassen wurde. Basierend auf worst-case Annahmen kann eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung von (11) trotz vorhandener Unsicherheiten abgeleitet werden. Nach dem Einsetzen von (15) in (11) und mit (14) erhält man nach einigen Rechenschritten:

$$\varkappa \geq \frac{\hat{b}}{b} \eta + \frac{\hat{b}}{b} |a - \hat{a}| + \left| 1 - \frac{\hat{b}}{b} \right| \left| -\hat{a} + \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \lambda \varepsilon_2 \right|. \quad (16)$$

Die nominellen Parameter der vorliegenden Drosselklappe wurden als arithmetische Mittelwerte der jeweiligen Maximal- bzw. Minimalwerte (siehe Tabelle 1) angesetzt, d.h.

$$\hat{\alpha} = 80, \quad \hat{\beta} = 85, \quad \hat{\gamma} = 120, \quad \hat{\delta} = 65, \quad \hat{\mu} = 125.$$

Mit diesen Werten kann die maximale Abweichung der Funktion $a(\mathbf{x})$ von der Nominalfunktion $\hat{a}(\mathbf{x})$ abgeschätzt werden, es gilt:

$$|a(\mathbf{x}) - \hat{a}(\mathbf{x})| \leq 12 |x_1| + 12 |x_2| + 107.$$

Mit $\hat{b} = \hat{\gamma} = 120$ ergibt sich unmittelbar

$$0.85 \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq 1.2 \quad \text{bzw.} \quad \left| 1 - \frac{\hat{b}}{b} \right| \leq 0.2$$

Setzt man die obigen Abschätzungen in die Relation (16) ein, so findet man nach einigen elementaren Umformungen die Bedingung:

$$\varkappa \geq 1.2\eta + 28|x_1| + (25 + 0.2\lambda)|x_2| + 113 + 0.2 \left| \frac{d^2\rho}{dt^2} \right| + 0.2\lambda \left| \frac{d\rho}{dt} \right|. \quad (17)$$

Mit den "möglichst ungünstigen" Annahmen

$$|x_1|_{\max} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad |x_2|_{\max} = \left| \frac{d\rho}{dt} \right|_{\max} = 6 \text{ rad s}^{-1}, \quad \left| \frac{d^2\rho}{dt^2} \right|_{\max} = 100 \text{ rad s}^{-2}$$

ergibt sich für die Konstante \varkappa :

$$\varkappa \geq 1.2\eta + 2.4\lambda + 327. \quad (18)$$

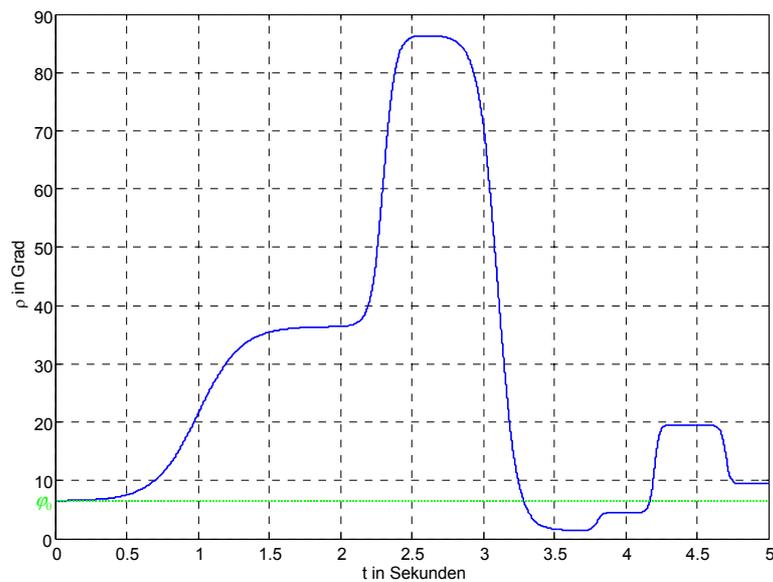
Oft wird \varkappa als hinreichend große Konstante gewählt, eine „adaptive“ Wahl gemäß (17) bzw. (18) ist aber ebenso denkbar.

4 Ergebnisse

Das ermittelte Regelgesetz wird nun auf seine Leistungsfähigkeit und vor allem auf seine Praxistauglichkeit hin untersucht. Dabei werden zunächst Simulationsergebnisse präsentiert, die in weiterer Folge mit Messergebnissen an einer realen Drosselklappe gegenüber gestellt werden. Die Führungsgröße ρ wurde so gewählt, dass die oben angegebenen maximalen Werte für Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung erreicht, aber nicht überschritten werden. Es werden mehrere Positionen sowohl über als auch unter dem Notlaufpunkt angefahren.

4.1 Simulationsergebnisse

Die folgenden Ergebnisse basieren auf dem mathematischen Modell (1), dessen Parameter aus den in Tabelle 1 angegebenen Wertebereichen zufällig ausgewählt wurden. Als Referenzgröße ρ dient der in Bild 6 dargestellte Verlauf. Für den Reglerentwurf wurde der Parameter $\lambda = 55$ gewählt, \varkappa wurde gemäß (17) als hinreichend große Konstante angesetzt, nämlich $\varkappa = 500$. Für die Simulation wurde die Signum-Funktion durch eine Sättigungsfunktion mit der konstanten „Breite“ $\phi = 0.5$ ersetzt. In Bild 7 ist der Verlauf des resultierenden Regelfehlers ε_1 dargestellt. Man erkennt, dass der Regelfehler auch dort, wo ρ über ein längeres Zeitintervall konstante Werte annimmt, nicht vollständig verschwindet, d.h. die stationäre Genauigkeit ist nicht gegeben. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Signum-Funktion durch eine Sättigungsfunktion ersetzt wurde.

Bild 6: Verlauf der Referenzgröße ρ

Die Wahl von kleineren Werten für ϕ kann den stationären Fehler verkleinern, zu kleine Werte von ϕ wirken sich allerdings negativ auf den Verlauf der Stellgröße u aus.

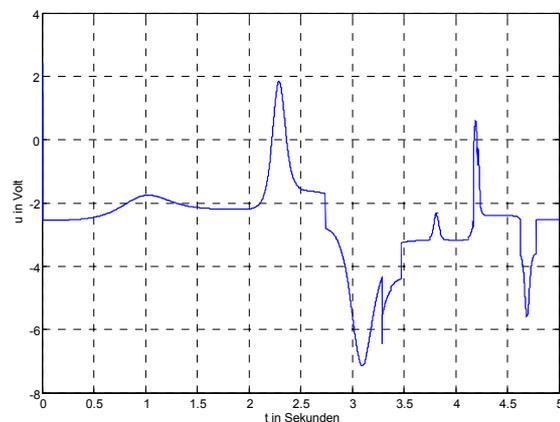
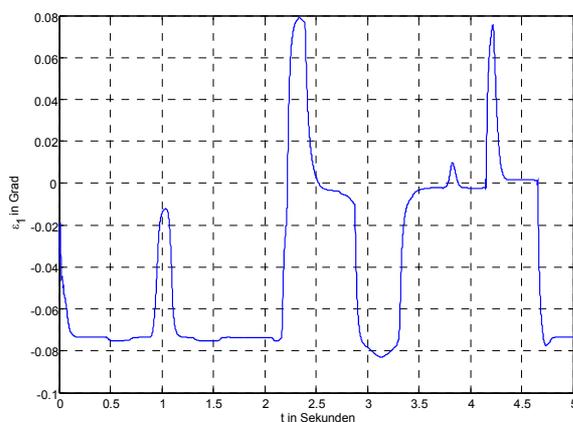


Bild 7: Simulierter Verlauf des Regelfehlers Bild 8: Simulierter Verlauf der Stellgröße

Abhilfe kann auch der Einsatz eines integrierenden Reglers basierend auf dem Ansatz

$$\sigma = \varepsilon_2 + \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_0 \int_0^t \varepsilon_1 d\tau \quad \text{wobei} \quad \lambda_1, \lambda_0 > 0$$

schaffen. Hierbei ist allerdings das Auftreten unerwünschter Grenzyklen im geschlossenen Regelkreis zu beachten. Im vorliegenden Fall wurde aber auf Grund der sehr zufriedenstellenden Ergebnisse auf den Einsatz des integrierenden Reglers verzichtet. Bild 8 zeigt den Verlauf der Stellgröße u , die immer im zulässigen Bereich bleibt.

4.2 Messergebnisse

Zunächst wurde der reale Regelkreis mit den oben angegebenen Reglerparametern erprobt, d.h. $\lambda = 55$, $\varkappa = 500$ und $\phi = 0.5$. In Bild 9 ist der Verlauf des Regelfehlers dargestellt. Der Betrag des Fehlers schwankt in einem Bereich zwischen -1.5° und 1° , d.h. verglichen mit den Simulationsergebnissen ist der Fehler wesentlich größer.

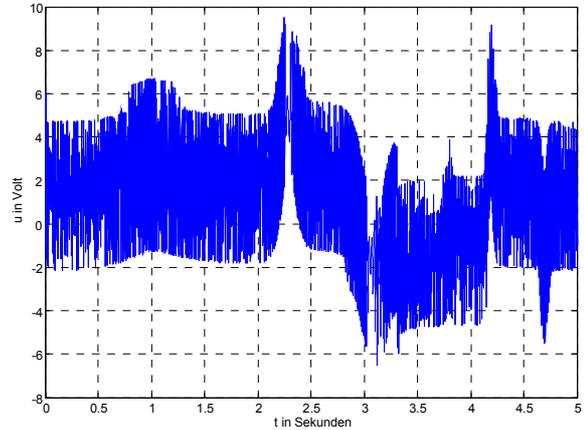
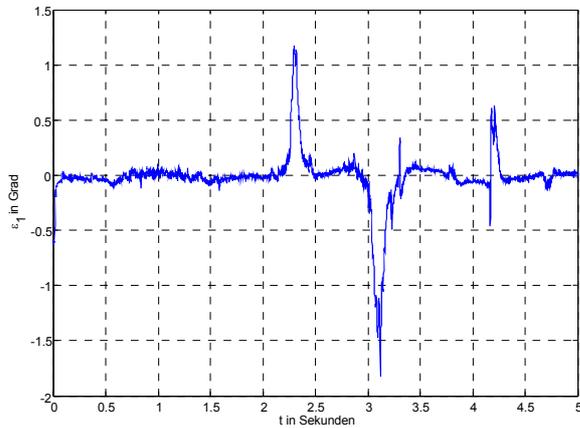


Bild 9: Verlauf des Regelfehlers für $\phi = 0.5$ Bild 10: Stellgrößenverlauf für $\phi = 0.5$

Dieses Ergebnis war allerdings vorhersehbar, da - wie bereits erwähnt - im Streckenmodell (1), das der Simulation zu Grunde liegt, Haftreibungsphänomene und das Getriebeispiel vollkommen vernachlässigt wurden. Der etwas „unruhige“ Verlauf von ε_1 begründet sich im Verlauf der Stellgröße u , der in Bild 10 dargestellt ist. Der stark ausgeprägte unetstetige Anteil von u bewirkt unerwünschte Vibrationen der Drosselklappe, die man im wahrsten Sinne des Wortes als Rattern bezeichnen kann. Eine Vergrößerung von ϕ unter Beibehaltung der Werte von λ und \varkappa führt zu einer deutlichen Glättung der Stellgröße und damit auch des Regelfehlers. Erst für Werte $\phi \geq 3$ kann das Rattern, das sich auch als unangenehmes „Knistern“ in der Drosselklappe hörbar bemerkbar macht, vollkommen unterdrückt werden. Bild 11 zeigt den Verlauf des Klappenwinkels für $\phi = 4$.

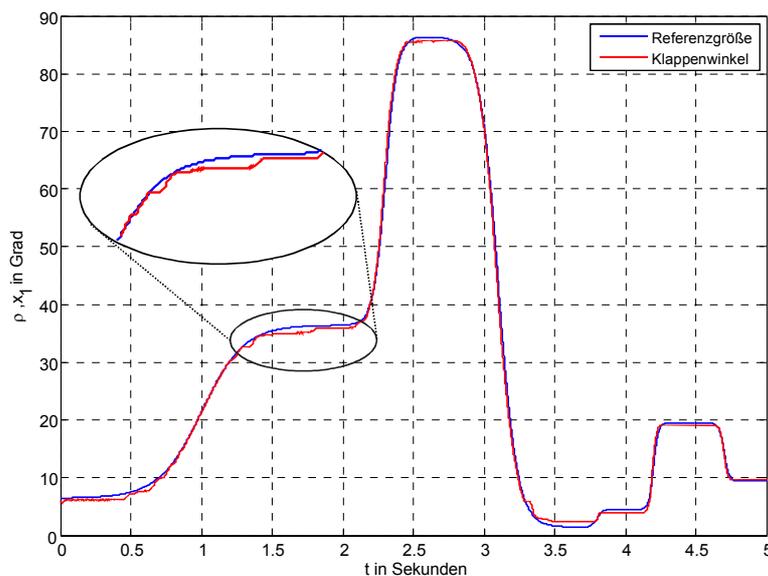


Bild 11: Gemessener Verlauf des Klappenwinkels für $\phi = 4$

Man erkennt, dass vor allem im Bereich kleiner Winkelgeschwindigkeiten die Klappe oft steckenbleibt und dann wieder losbricht (stick-slip-Effekt). Dies ist vor allem auf die zu große (konstante) Breite ϕ der Sättigungsfunktion zurück zu führen.

4.2.1 Modifizierter Regler

Aus den bisherigen Erkenntnissen kann ein verbesserter Regler abgeleitet werden. Offensichtlich ist es sinnvoll, den Faktor ϕ im Bereich kleiner Winkelgeschwindigkeiten zu verkleinern. Dieser Idee wird der Ansatz

$$\phi = 1 + |x_2| \quad (19)$$

gerech. Man beachte, dass die Bedingung (11) auf Grund der Zeitabhängigkeit von ϕ modifiziert werden muss, sie lautet nun

$$\text{sign}(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} \leq -\eta + \frac{d\phi}{dt}.$$

Diese „sliding condition“ ist im Falle eines abnehmenden Wertes von ϕ (d.h. die Grenzschicht wird *dünn*er) strenger als im Falle eines zunehmenden Wertes (die Grenzschicht wird *dick*er). Dieser Tatsache kann Rechnung getragen werden, indem im Regelgesetz (12) die Größe \varkappa durch den Ausdruck $(\varkappa - \frac{d\phi}{dt})$ ersetzt wird.

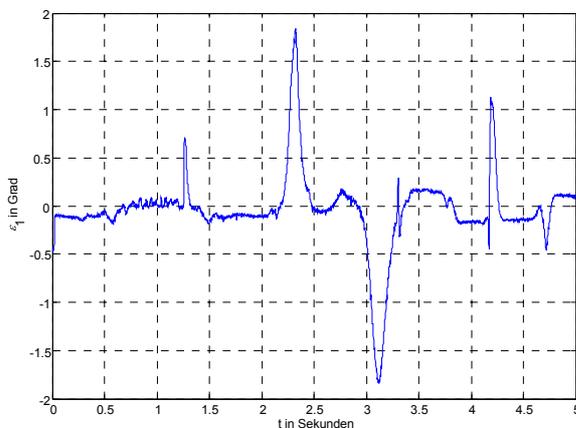


Bild 12: Regelfehler für $\phi = 1 + |x_2|$

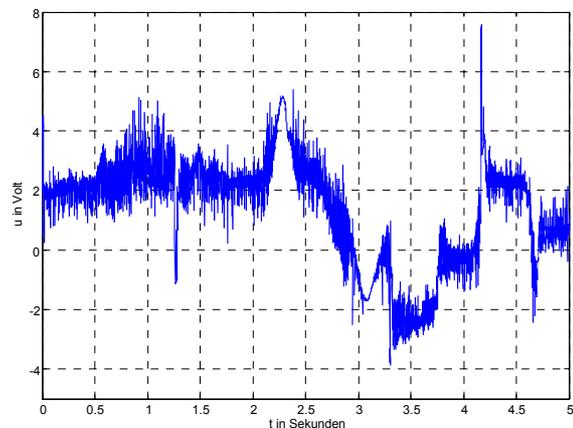


Bild 13: Stellgröße für $\phi = 1 + |x_2|$

In Bild 12 ist der Verlauf des Regelfehlers dargestellt, wenn der modifizierte Regler eingesetzt wird. Der stationäre Fehler beträgt weniger als 0.2° , liegt also im Bereich der Simulationsergebnisse. Im Vergleich zu dem in Bild 9 dargestellten Ergebnis ist im Bereich kleiner Winkelgeschwindigkeiten ein ruhigerer Verlauf des Regelfehlers deutlich zu erkennen, für höhere Winkelgeschwindigkeiten nimmt der Fehler betragsmäßig etwas zu. Der Verlauf der Stellgröße, der in Bild 13 zu sehen ist, offenbart, dass das Rattern - im Gegensatz zu dem in Bild 10 dargestellten Verlauf - wirkungsvoll verhindert wird. Bild 14 zeigt, dass der „Skalierungsfaktor“ ϕ Werte zwischen 1 und 7 annimmt, wobei ϕ für konstante

Werte des Klappenwinkels, d.h. $x_2 \approx 0$ minimal wird.

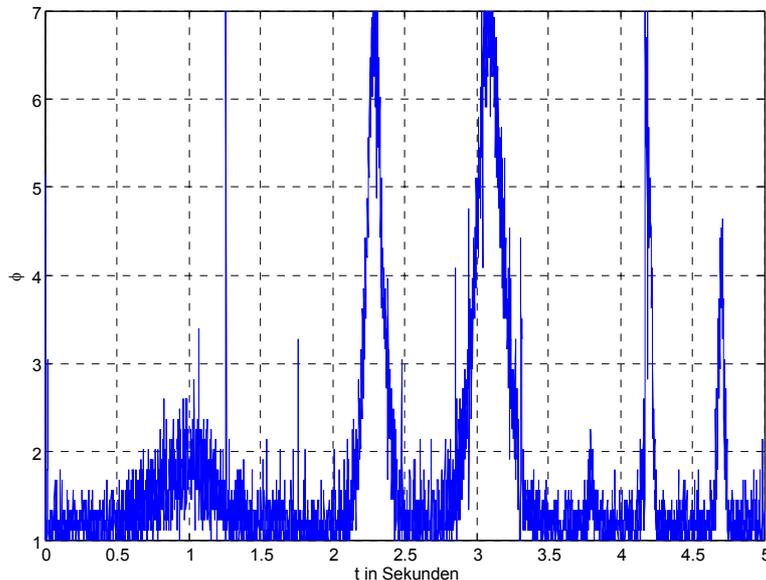


Bild 14: Skalierungsfaktor ϕ

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Ansätze zur Regelung elektrischer Drosselklappen basierend auf Ideen der nichtlinearen strukturvariablen Regelung vorgestellt. Die entworfenen Regelgesetze beruhen auf den klassischen Konzepten der Sliding-Mode Regelung. Die Regelgesetze zeichnen sich durch Robustheit und durch strukturelle Einfachheit aus. Dies erlaubt die einfache Implementierung im Motorsteuergerät. Den vorgestellten Ergebnissen liegt ein vorgegebener Verlauf der Führungsgröße ρ und ihrer zeitlichen Ableitungen zu Grunde. Die entworfenen Regelkreise zeigen allerdings auch dann ein sehr zufriedenstellendes dynamisches Verhalten, wenn der Verlauf von ρ nicht vorberechnet ist, sondern beispielsweise direkt aus der Gaspedalstellung ermittelt wird und die zeitlichen Ableitungen durch numerische Differentiation gewonnen werden.

Bei den durchgeführten Experimenten wurde die Winkelgeschwindigkeit durch numerische Differentiation aus dem gemessenen Klappenwinkel φ ermittelt. Möglicherweise verbessert der Einsatz der so genannten „Derivative Estimation Toolbox“ [11], die Werkzeuge zur Echtzeitschätzung von Zeitableitungen bereitstellt, die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Regler. Unklar ist auch, ob durch den Einsatz von Sliding-Mode Reglern höherer Ordnung [5] weitere Verbesserungen erzielt werden können. Durch geschickte Wahl von u können hier auch die höheren zeitlichen Ableitungen von σ zum Verschwinden gebracht werden [3]. Diese Vorgangsweise ermöglicht, ähnlich wie bei dynamischen Sliding-Mode Reglern die effiziente Unterdrückung des unerwünschten Ratterns [7].

Die Autoren bedanken sich bei den anonymen Gutachtern für die wertvollen Hinweise zur Verbesserung des Manuskripts.

Literatur

- [1] *Bosch GmbH*, Ottomotor-Management: Grundlagen und Komponenten, Robert Bosch GmbH, 2001
- [2] *Filippov A.F.*: Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Kluwer Academic Publishers, 1988
- [3] *Fridman L., Levant A.*: Higher-Order Sliding Modes, in: Sliding Mode Control in Engineering, Marcel Dekker Inc, 2002
- [4] *Horn M., Schriebl M., Unger E., Dourdoumas N.*: Konzept zur digitalen Lageregelung von Drosselklappen bei Ottomotoren, International Journal Automation Austria 11, 2003
- [5] *Horn M., Reichhartinger M.*: Second-order sliding mode control of electronic throttle valves, Proceedings of the 10th International Workshop on Variable Structure Systems, 2007
- [6] *Khalil H.K.*: Nonlinear Systems, 3rd edition, Prentice Hall, 2002
- [7] *Sira-Ramirez H.*: On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems, International Journal of Control, Vol. 57, No. 5, 1993
- [8] *Slotine J.J.E., Li W.*: Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991
- [9] *Teolis C., Kwatny H.G., Mattice M.*: Symbolic Computing Tools for Nonsmooth Dynamics and Control, in: Lecture Notes in Control and Information Science 247, Springer Verlag, 1999,
- [10] *Utkin V.I.*: Sliding Modes in Control and Optimization, Springer Verlag, 1992
- [11] *Zehetner J., Reger J., Horn M.*: A Derivative Estimation Toolbox based on Algebraic Methods - Theory and Practice, IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Singapur 2007

Linear Quadratic Controller with Robustified Stability Margin for Spherical Uncertainties

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE

Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control

Gusshausstrasse 27-29/376

A-1040 Vienna / Austria

Phone: +43 1 58801 37611 Fax: +43 1 58801 37699

email: `weinmann@acin.tuwien.ac.at`

Manuscript received April 17, 2008

Abstract

The linear quadratic regulator result is augmented by a robustification procedure with respect to the stability margin. This margin is selected from Mikhailov stability criterion and defined as the minimum distance of the hodograph to the origin. For a given upper Frobenius norm bound of the spherical uncertainties, the structural details are derived which may not be exceeded in magnitude. Small and medium-sized uncertainties are in consideration while following the limits given by the conditions of the approximations in use. The analytic details for the extremum uncertainty are rendered by a concise formula the derivation of which includes a short repetition in order to overcome some computational complexity.

Keywords: Most dangerous uncertainty, structure of uncertainty, Riccati equation, Frobenius norm-bounded uncertainties

1 Introduction

Linear quadratic (LQ) controllers based on solving the Riccati equation are a well-known instrument for the design of optimum control systems (*Anderson, B.D.O., and Moore,*

J.B., 1989; Franklin, G.F., et al., 2002). Changing the weight matrices to obtain specific transients were investigated in *Weinmann, A., 1999*. The Mikhailov hodograph, which is also used in this paper, is an excellent means to incorporate the stability margin of a multivariable system (*Weinmann, A., 2005*). Uncertainties with a spherical bound correspond to many real-world applications in industrial fields (*Weinmann, A., 2007*) and are also addressed.

Douglas, J., and Athans, M., 1992 derive a LQ regulator based on the overbounding method of Petersen and Hollot, resulting in minimization of stiffness elements' potential energy and rate of dissipation through uncertain damping elements. Preservation of LQ regulator optimality in the presence of uncertainty is carried out in *Mehdi, D., et al., 1996*. The upper bound for the uncertainty which does not destabilize the control system is presented in *Neto, A.T., 1992*; by using linear inequalities in *Huang, S.N., and Shao, H.H., 1995*. Actuator faults are treated as uncertainties in *Hsieh, C.S., 2006*.

The presented article addresses the problem of combining the advantages of the issues mentioned in the first paragraph above. Special emphasis is put on exact interrelations avoiding results which are only sufficient.

Consider a multivariable continuous-time control system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3)$$

where $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$; $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^r$; $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$; $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{cl} \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$; $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$; $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{r \times n}$.

Replacing the Laplace operator s in the characteristic equation of the closed-loop control system by $j\omega$ intentionally, one has the basis of the Mikhailov hodograph

$$h(j\omega) \triangleq \det(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl,p}) \neq 0. \quad (4)$$

The better the degree of stability, the larger the least modulus $|h(j\omega)|$, least versus frequency ω . The parameter h_0 is considered the real and positive stability margin which results from

$$\min_{\omega} |h(j\omega)| \triangleq h_0 = |h(j\omega_0)|. \quad (5)$$

It corresponds to the location of that point on the hodograph $h(j\omega)$, which is closest to the origin, and is given by $h(j\omega_0)$. The geometrical distance is h_0 .

The stability margin h_0 of a unperturbed dynamic system of n th order with the coefficients matrix \mathbf{A}_{cl} of the closed loop results from executing the minimization (*Weinmann, A., 2005*)

$$h_0^2 = \det(\omega_0^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2), \quad (6)$$

where ω_0 results from

$$\text{tr}[\text{adj}(\omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)] = 0 . \quad (7)$$

The LQ controller is the result of minimizing an index of performance on both quality of the dynamic state variable of the control system and effort of the actuating variable. The weighting matrices \mathbf{Q} and \mathbf{R} are chosen to implement the respective quality and effort. The result is given by the well-known Riccati equation in a matrix \mathbf{P} . This is the basis for the optimum state controller \mathbf{K} .

Having selected and reselected the weighting matrices, the resulting stability margin h_0 is determined. Including the uncertainties in the system coefficient matrix \mathbf{A} leads to their influence on the stability margin. The bound of the uncertainties yields bounds in the stability margin. The lower bound of the stability margin is the more dangerous one. The target of the paper is to determine this dangerous bound exactly and to address a means in the weighting matrices in order to compensate the influence of the uncertainty in such a way that the worst case of the compensated perturbed system is still better than the best case of the uncompensated system.

The over-all intention is as follows: for some given \mathbf{Q}, \mathbf{R} there results h_0 ; the uncertainties with spherical bound deteriorate h_0 ; the worst uncertainty is selected exactly following the procedure of considering the whole family of the uncertainties and their influence on LQ controller design; the weighting matrix \mathbf{Q} is selected preferably and changed in increments in order to get a worst h_0 which is still better than the original one or better than a given limit.

2 Small Uncertainties

The Riccati equation

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (8)$$

is utilized to find the increment $\Delta \mathbf{P}$ triggered by an additive-type uncertainty $\Delta \mathbf{A}$. Considering $\Delta \mathbf{A}$ small in norm sense,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \\ - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{P} - \Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (9)$$

Using Eqs.(50) and (52) and abbreviating

$$\mathbf{F} \triangleq \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \quad (10)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P} + (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U}_{nn}] \text{col} \Delta \mathbf{A} = \\ = [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T) + (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{I}_n] \quad \text{col} \Delta \mathbf{P} . \end{aligned} \quad (11)$$

From elementary LQ regulator theory, the controller increment $\Delta\mathbf{K}$ results as

$$\Delta\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{P}. \quad (12)$$

Based on this, one can develop the functionality chain

$$\Delta\mathbf{A} \xrightarrow{(11)} \Delta\mathbf{P} \xrightarrow{(16)} \Delta\mathbf{K}. \quad (13)$$

With the abbreviation

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_K &\triangleq - [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T)] \\ &\times [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T) + (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T)\mathbf{I}_n]^{-1} \\ &\times [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{U}_{nn}], \end{aligned} \quad (14)$$

one has

$$\text{col}\Delta\mathbf{K} = \mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A} \quad (15)$$

$$\Delta\mathbf{K} = \text{loc}\{\mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A}\}. \quad (16)$$

The operators “col” and “loc” stand for columnizing a matrix and decolumnizing a vector, respectively. In the perturbed case, the stability margin is

$$h_0^2 = \det\{\omega_0^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl,p}^2\}, \quad (17)$$

where

$$\mathbf{A}_{cl,p} \triangleq \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{K} = \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{K} \quad (18)$$

and ω_0 results from

$$\text{tr}[\text{adj}(\omega_0^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl,p}^2)] = 0. \quad (19)$$

The uncertainty with the strongest influence, i.e., the largest admissible uncertainty, follows from

$$h_0^2 + \lambda\|\Delta\mathbf{A}\|_F^2 \rightarrow \text{extr}_{\Delta\mathbf{A}}. \quad (20)$$

Differentiating $\Delta\mathbf{K}$ of Eq.(15) with respect to ΔA_{ij} yields

$$\frac{\partial}{\partial\Delta A_{ij}}\text{col}\Delta\mathbf{K} = \text{col}\frac{\partial}{\partial\Delta A_{ij}}\Delta\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial\Delta A_{ij}}\mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A} \quad (21)$$

$$= \mathbf{V}_K\frac{\partial}{\partial\Delta A_{ij}}\{\text{col}\Delta\mathbf{A}\} \quad (22)$$

$$= \mathbf{V}_K\mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{[n^2]}. \quad (23)$$

The vector \mathbf{e} above is a basis (unit) vector of dimension n^2 with a single digit one at the $i + (j-1)n$ position. Differentiating Eq.(20) with respect to ΔA_{ij} and referring to Eq.(46)

$$\frac{\partial(h_0^2)}{\partial \Delta A_{ij}} + 2\lambda \Delta A_{ij} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta A_{ij}} \det\{\omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2 + \mathbf{A}_{cl} \mathbf{B} \Delta \mathbf{K} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_{cl}\} + 2\lambda \Delta A_{ij} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \{[\mathbf{A}_{cl} \mathbf{B} \text{ loc}\{\mathbf{V}_K \mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\} + \mathbf{B} \text{ loc}\{\mathbf{V}_K \mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\} \mathbf{A}_{cl}] \\ \times \text{adj}[\omega_0^2 \mathbf{I}_n + (\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{K})^2]\} + 2\lambda \Delta A_{ij} = 0 . \end{aligned} \quad (26)$$

Defining v_{ij} for abbreviation in the equation above,

$$v_{ij} + 2\lambda \Delta A_{ij} = 0 \quad (27)$$

$$\Delta A_{ij} = -\frac{1}{2\lambda} v_{ij} . \quad (28)$$

The given norm bound $a_0^2 = \sum_{ij} \Delta A_{ij}^2$ leads to

$$\lambda = \frac{1}{2a_0} \sqrt{\sum_{ij} v_{ij}^2} \quad (29)$$

$$\text{and } \Delta A_{ij}^* \triangleq \Delta A_{ij} = \pm \frac{a_0}{\sqrt{\sum_{ij} v_{ij}^2}} v_{ij} . \quad (30)$$

An iteration is required because v_{ij} of Eq.(26) itself depends on $\Delta \mathbf{A}$ inside of $\Delta \mathbf{K}$ of Eq.(16).

Both signs in Eq.(30) yield the upper and lower bound. In addition to the bound condition $\|\Delta \mathbf{A}\|_F < a_0$, no element of $\Delta \mathbf{A}$ may exceed $\Delta \mathbf{A}^*$.

3 Medium-sized Uncertainties

Including all the parts of the Riccati equation, one has

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{A} \\ - \Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{P} - \Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{P} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A}^T + \Delta \mathbf{A}^T) + (\mathbf{A}^T + \Delta \mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F} \\ - (\Delta \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n) \text{col}(\Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T) = -(\Delta \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T - \Delta \mathbf{A}^T) + (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T - \Delta \mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{I}_n \\ + (\Delta \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n)[(\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T) \otimes \mathbf{I}_n]\} \text{col} \Delta \mathbf{P} \triangleq \mathbf{H} \text{col} \Delta \mathbf{P} = \\ = [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U}_{nn}] \text{col} \Delta \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (33)$$

Eq.(33) yields $\Delta\mathbf{P}$ from ΔA_{ij}^* for the second step of the iteration. The steps are repeated until hopefully the procedure for determining $\Delta\mathbf{P}$ has converged. See Appendix B for an example of good convergence.

Referring to Eq.(14), the corresponding extension is

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_K &\triangleq - [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T)] \\ &\times \{ \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T - \Delta\mathbf{A}^T) + (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T - \Delta\mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{I}_n \\ &\quad + (\Delta\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n)[(\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T) \otimes \mathbf{I}_n] \}^{-1} \\ &\times [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{U}_{nn}] , \end{aligned} \quad (34)$$

where Eq.(16) is reused with the new result of Eq.(34) above. The LQ controller increment triggered by the uncertainty is

$$\text{col}\Delta\mathbf{K} \stackrel{(12)}{=} -[\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T)]\text{col}\Delta\mathbf{P} \quad (35)$$

$$\stackrel{(33)}{=} -[\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T)]\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{U}_{nn}]\text{col}\Delta\mathbf{A} \quad (36)$$

$$\text{col}\Delta\mathbf{K} = \mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A} . \quad (37)$$

In $\mathbf{H}(\Delta\mathbf{A})$ some small dependence on $\Delta\mathbf{A}$ remains. Hence, only an iterative solution results. Finally, one finds the new v_{ij}

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left\{ [\mathbf{A}_{cl}\mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\} + \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\}\mathbf{A}_{cl}] \right. \\ &+ \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\} \cdot \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A}\} + \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A}\} \cdot \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\mathbf{e}_{i+(j-1)n}^{n^2}\} \\ &\left. \times \text{adj}[\omega_0^2\mathbf{I}_n + (\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{B} \text{loc}\{\mathbf{V}_K\text{col}\Delta\mathbf{A}\})^2] \right\} + 2\lambda\Delta A_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$v_{ij} + 2\lambda\Delta A_{ij} = 0 \quad (39)$$

$$\Delta A_{ij}^* = \pm \frac{a_0}{\sqrt{\sum_{ij} v_{ij}^2}} v_{ij} . \quad (40)$$

4 Change of \mathbf{Q} for Regaining the Original Nominal Stability Margin

By simple repetition of the derivations above, the increment of \mathbf{Q} is determined in order to improve the controller such that even under the worst uncertainty $\Delta\mathbf{A}^*$ a stability margin is produced, which is better than or equal to the lowest uncertainty influence in the original Riccati controller design with \mathbf{Q} and \mathbf{R} .

Inserting $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}^*$, $\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}$ into the Riccati equation Eq.(8), one finds

$$\mathbf{H} \text{col}\Delta\mathbf{P} = -\text{col}(\Delta\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\Delta\mathbf{A}^*) \quad (41)$$

$$\mathbf{H} \triangleq \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A}_p^T - \mathbf{F}) + (\mathbf{A}_p^T - \mathbf{F}) \otimes \mathbf{I}_n . \quad (42)$$

Then, referring to Eq.(16)

$$\Delta \mathbf{K} = \text{loc} \{ \mathbf{V}_Q \text{col}(\Delta \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{A}^*) \} \quad (43)$$

with

$$\mathbf{V}_Q \triangleq [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T)] \mathbf{H}^{-1} . \quad (44)$$

In a derivation similar to obtaining Eqs.(26) and (30), with a new set of intermediate variables \bar{v}_{ii} one finds the increment

$$\Delta Q_{ii} = \frac{q_0}{\sqrt{\sum_{ii} \bar{v}_{ii}^2}} \bar{v}_{ii} . \quad (45)$$

Since the matrix \mathbf{Q} is selected diagonal in most cases of applications, the sum only has to be taken for the main diagonal in order not to disturb the positive definiteness of \mathbf{Q} . Thus, this $\Delta \mathbf{Q}$ is the norm-minimal change of \mathbf{Q} leading to the final $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}$; producing the biggest change of h_0^2 for a given q_0 . Similarly, the final result of the total uncertainty in Eq.(30) is denoted as $\Delta \mathbf{A}^*$.

Example. Resonant system of $n = 4$:

For the setup \mathbf{A} , \mathbf{B}

	A				B	
0.3972	0.3716	0.7165	0.1859	0.5000	1.0000	
0.4136	0.4253	0.5113	0.7006	1.0000	50.0000	
0.6552	0.5947	0.7764	0.9827	1.0000	1.0000	
0.8376	0.5657	0.4893	0.8066	1.0000	1.0000	

$n = 4$, $m = 2$, $a_0 = 0.04$, $q_0 = 2.2$, $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_4$, $\mathbf{R} = 2\mathbf{I}_2$ we get a resonant system with $\omega_0 = 0.31$. The resulting $\Delta \mathbf{A}^*$, the optimal controller \mathbf{K}^T without uncertainty, and \mathbf{K}^{*T} with uncertainty are

	Delta A*				K'		K*'	
-0.0258	0.0005	0.0024	0.0102	-0.6765	-1.0551	-1.2701	-1.1052	
0.0003	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0006	-0.7005	0.0220	-1.1680	
-0.0019	0.0072	-0.0172	0.0073	-1.4051	-1.3452	-2.0848	-1.1856	
0.0121	-0.0045	0.0127	-0.0094	-0.7792	-0.3152	-0.7992	-0.1459	

Fig. 1 shows the resulting values of h_0^2 for 180 arbitrarily selected uncertainties, the norms of which are equal to the setup of a_0 . The bounds are included with horizontal lines. The figure demonstrates a numerical experiment ascertaining the fact that the bounds are true. The optimum $\mathbf{Q}^* = \text{diag}[2.3388 \ 2.6105 \ 1.6359 \ 1.2231]$ leads to a slight change of $\omega_0 = 0.32$.

In Fig. 2, the hodographs are shown where q_0 is selected such that after the change of \mathbf{Q} the stability margin under the most dangerous uncertainty is slightly higher than the least dangerous uncertainty for the original \mathbf{Q} . (An alternative could be to design the system such that the most dangerous uncertainty does not produce a system the behaviour of which is worse than the nominal case.)

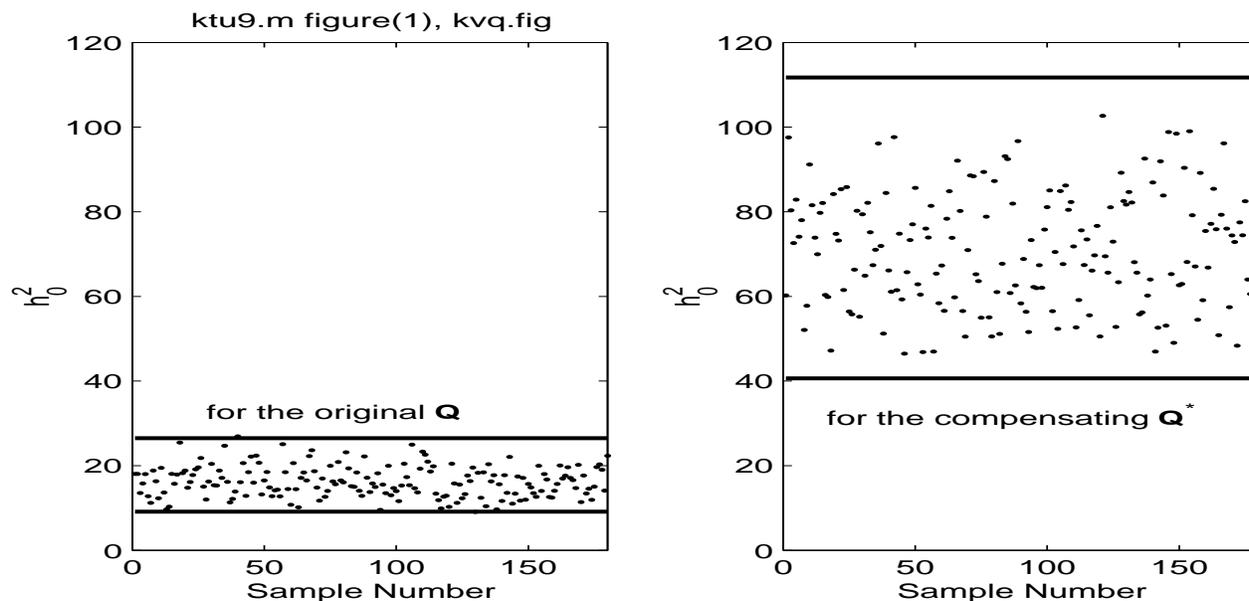


Figure 1: Stability margin for random uncertainty within the resulting bounds

The singular values of the original and the compensated control system are given in Fig. 3.

5 Conclusion

The well-known linear quadratic regulator result is the basis of the design operation. In addition, the Mikhailov stability margin is used for robustification purpose. For a given upper Frobenius norm bound of the spherical uncertainties, the structural details of the limits are derived. The extremum uncertainty is given by a concise formula, the derivation of which includes a short repetition in order to overcome some computational complexity.

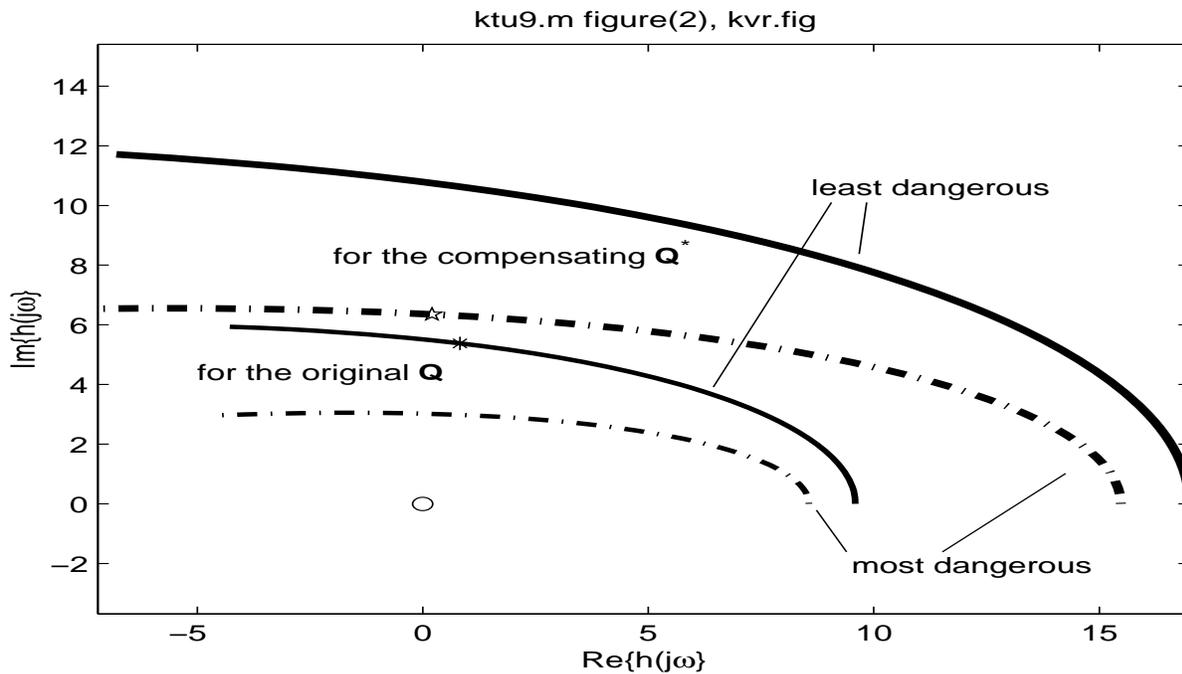


Figure 2: Hodographs $h(j\omega)$ for nominal \mathbf{Q} and compensating \mathbf{Q}^*

The final design includes the minimum norm change of the weighting matrix such that it suffices to compensate the worst influence of the uncertainty.

References

- Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., 1989, Optimal control. Linear quadratic methods (Englewood Cliffs, Prentice-Hall Int.)
- Douglas, J., and Athans, M., 1992, Robust linear quadratic designs with respect to parameter uncertainty, *Proceedings of the American Control Conference*, **4**, pp. 2905-2910
- Franklin, G. F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A., 2002, Feedback Control of Dynamic Systems, 4th edition (Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall)
- Hsieh, C.S, 2006, Adaptive two-stage LQ reliable control of uncertain discrete-time systems, *International Journal of Electrical Engineering* **13**, pp. 73-83
- Huang, S.N., and Shao, H.H., 1995, Robustness for uncertain linear quadratic regulator systems, *Advances in Modeling and Analysis C* **45**, No 1-3, pp. 31-40
- Mehdi, D., Al Hamid, M., and Perrin, F., 1996, Robustness and optimality of linear quadratic controllers for uncertain systems, *Automatica* **32**, No 7, pp. 1081-1083
- Neto, A.F., Dion, J.M., and Dugard, L., 1992, Robustness bounds for LQ regulators,

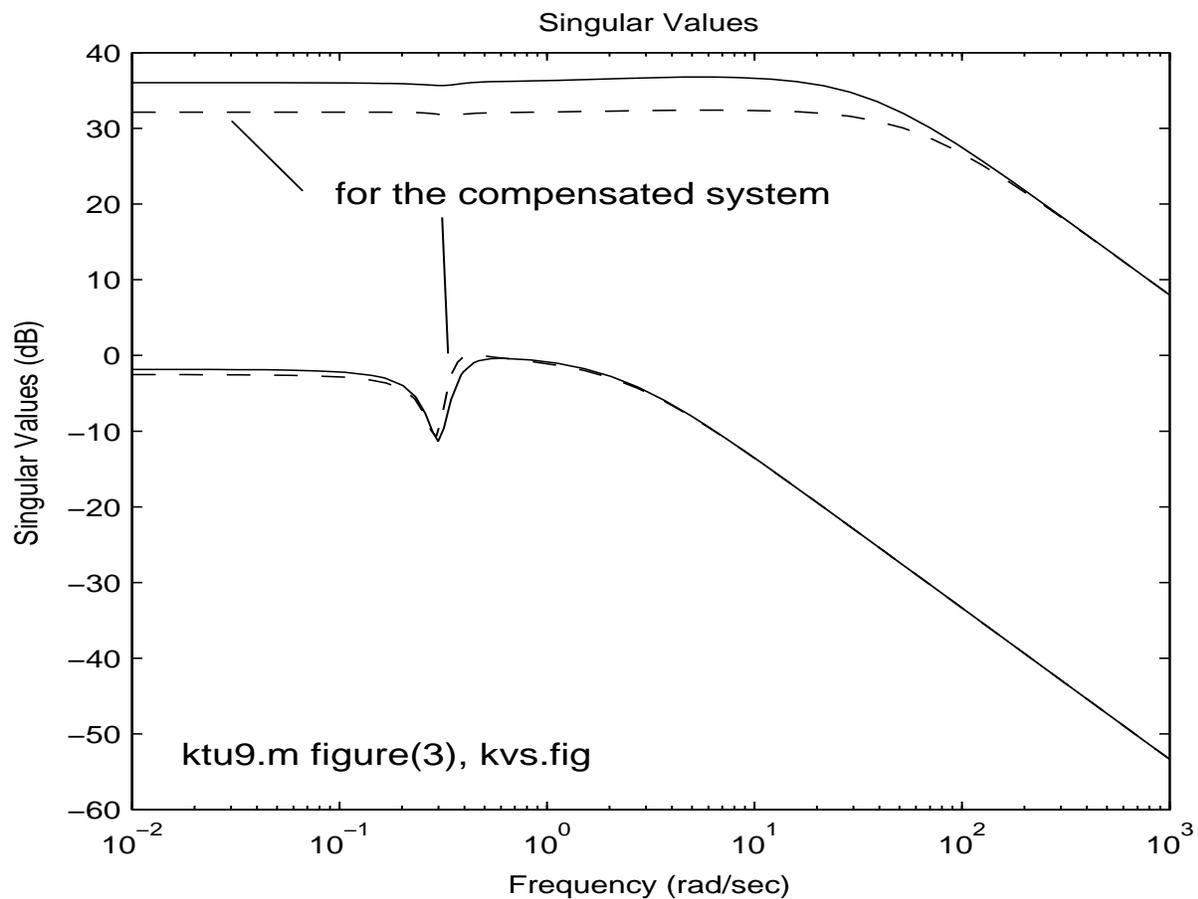


Figure 3: Singular values

IEEE Trans. on Automatic Control **37**, pp. 1373-1377

Weinmann, A., 1999, Weight-balanced Robust Controllers with Prespecified or Minimum Norm, 14. *IFAC Congress, Beijing*, Paper No.G-2e-13-6, Preprints Vol. G, pp. 307-312

Weinmann, A., 2005, A dialog-oriented and gradient-based stability margin in uncertain systems, *Cybernetics and Systems: An International Journal* **36**, Number 7, pp.641-666

Weinmann, A., 2007, Performance gradients under sperical uncertainties, *Tagungsband des 15. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung in Retzhof, 19. Sept. 2007*, S. 141-163

Weinmann, A., 2008, Performance gradients in automatic control analysis, A catalogue of correspondences. *Int. J. Automation Austria* **16**, No. 1/2, pp. 1-59. See <http://www.acin.tuwien.ac.at/de/Publikationen/Zeitschriften/IJAA>

Appendix

A Correspondences

$$\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial e} = \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e} \text{adj } \mathbf{A} \right] \quad (46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial e} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e} \mathbf{A}^{-1} \quad (47)$$

$$\text{Kronecker matrix } \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial K_{y,ij}} = \mathbf{E}_{ij} \triangleq \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \text{ with unit vector } \mathbf{e}_i \quad (48)$$

$$\text{tr}[\mathbf{M}\mathbf{E}_{ij}] = M_{ji} = (\mathbf{M}^T)_{ij} \quad (49)$$

$$\text{col}(\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{G}) \equiv (\mathbf{G}^T \otimes \mathbf{H})\text{col}\mathbf{F} . \quad (50)$$

Permutation matrix in Kronecker matrix sense: Square matrix with entries zero except one solitary digit one in each row and column

$$\mathbf{U}_{kl} \triangleq \mathbf{U}_{kl}^{(kl \times kl)} \triangleq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes \mathbf{E}_{ji}^{(l \times k)} = \sum_i^k \sum_j^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes (\mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)})^T . \quad (51)$$

Then, for $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times r}$

$$\text{col } \mathbf{K} = \mathbf{U}_{rm} \text{col}\{\mathbf{K}^T\} , \quad \text{col}\{\mathbf{K}^T\} = \mathbf{U}_{mr} \text{col } \mathbf{K} . \quad (52)$$

B Example for Convergence Demonstation

We select $n=8$, $m=2$, $Q=\text{eye}(n)$, $R=0.2 * \text{eye}(m)$, $\text{delta}A=0.1 * \text{eye}(n)$ and

$A = \text{rand}(n,n) =$

0.2848	0.0633	0.3532	0.6299	0.7149	0.3313	0.8389	0.0933
0.2653	0.5254	0.6833	0.9644	0.8582	0.9532	0.0364	0.4697
0.4447	0.1573	0.0447	0.5645	0.3377	0.8576	0.4974	0.6938
0.7964	0.7376	0.6349	0.1623	0.2784	0.9377	0.4125	0.9807
0.6938	0.1420	0.0932	0.0480	0.0537	0.9069	0.8959	0.6597
0.3584	0.9091	0.6797	0.6879	0.9733	0.7149	0.3431	0.7991
0.7749	0.8969	0.5430	0.2994	0.9981	0.9388	0.2582	0.5218
0.4112	0.5260	0.5235	0.9642	0.0320	0.3118	0.2986	0.2978

$B =$

0.5000	1.0000
1.0000	50.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000
1.0000	1.0000

and find

$P =$

8.1381	-0.0876	21.6263	41.0670	-41.0016	-20.1701	-19.7172	14.3864
-0.0876	0.0105	-0.1430	-0.2699	0.2549	0.1438	0.1033	-0.0840
21.6263	-0.1430	114.8677	209.5676	-213.7129	-91.8482	-114.6869	80.9637
41.0670	-0.2699	209.5676	387.4148	-393.5229	-170.0401	-211.0504	149.5743
-41.0016	0.2549	-213.7129	-393.5229	400.9497	172.6910	214.9348	-152.4255
-20.1701	0.1438	-91.8482	-170.0401	172.6910	77.3076	90.4969	-65.1105
-19.7172	0.1033	-114.6869	-211.0504	214.9348	90.4969	118.0631	-82.7588
14.3864	-0.0840	80.9637	149.5743	-152.4255	-65.1105	-82.7588	59.3915

and P_d from $[Khd, P_d, E] = \text{LQR}(A+\text{delta}A, B, Q, R)$. Then, to check the convergence

we use $\text{DeltaTest} = P + \text{Delta} P$ [from Eq. (33) after 19 steps] - $P_d =$

$= 1.0e-003 *$

0.0016	-0.0000	0.0081	0.0147	-0.0150	-0.0064	-0.0080	0.0056
-0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0001	0.0000	0.0001	-0.0000
0.0076	-0.0001	0.0396	0.0719	-0.0733	-0.0315	-0.0391	0.0272
0.0139	-0.0001	0.0724	0.1312	-0.1338	-0.0575	-0.0714	0.0497
-0.0142	0.0001	-0.0737	-0.1336	0.1363	0.0585	0.0727	-0.0507
-0.0062	0.0000	-0.0321	-0.0582	0.0594	0.0255	0.0317	-0.0221
-0.0075	0.0001	-0.0389	-0.0706	0.0720	0.0309	0.0384	-0.0268
0.0053	-0.0000	0.0274	0.0496	-0.0506	-0.0217	-0.0270	0.0188

Beobachterbasierte Methoden zur sensorlosen Regelung von Asynchronmaschinen - Übersicht und Vergleich

Roland Lindinger
Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gusshausstrasse 27-29/E376, A-1040 Wien
Tel.: +43 1 58801 37621
email: lindinger@acin.tuwien.ac.at

21. August 2008

Kurzfassung:

Die Anwendung eines Drehzahlbeobachters erhöht die Zuverlässigkeit der Regelung einer Asynchronmaschine und verhindert Kosten, die durch den Einsatz eines Drehzahlsensors entstehen. Vor allem in den letzten zwei Jahrzehnten wurden zahlreiche Versuche unternommen, Modelle zu entwickeln, die den praktischen Anforderungen gerecht werden. Sie unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Stabilität, Parametersensitivität, Komplexität und Genauigkeit. Die drei häufigsten Methoden sind dabei direkte Drehzahlschätzungen, Model Reference Adaptive Systems (MRAS) und vollständige Luenberger-Beobachter. Dieser Artikel gibt einen Überblick über verschiedene Ansätze und erläutert die jeweiligen Vor- und Nachteile.¹

Abstract:

The application of a speed observer increases the reliability of the induction machine control and prevents costs caused by the implementation of a speed sensor. Particularly in the last two decades much effort has been spent on the development of models which satisfy the practical requirements. They differ in stability, parameter sensitivity, complexity and accuracy. The three most frequent methods are direct speed estimations, Model Reference Adaptive Systems (MRAS) and complete Luenberger observers. This article is a brief overview over different approaches and describes the respective benefits and drawbacks.

1 Einleitung

Seit einigen Jahren besteht im Bereich der Antriebstechnik ein wachsendes Interesse an sensorlosen Regelungen von Asynchronmaschinen. Als Motivation dafür gilt in vielen Fällen sowohl die Reduktion der Anschaffungs- und Wartungskosten, als auch die Erhöhung der Zuverlässigkeit und damit der Verfügbarkeit des Systems. Der Preis des Drehgebers spielt dabei oft eine untergeordnete Rolle. Im Vordergrund steht die Vermeidung von Ausfällen, die einerseits Arbeitsaufwand und damit Kosten verursachen, andererseits ein Sicherheitsrisiko darstellen können.

¹Diese Arbeit entstand im Rahmen einer Kooperation von ELIN EBG Traction mit dem Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

Der Trend zur drehgeberlosen Regelung wird durch die Entwicklungen im Mikroprozessor- und Wechselrichterbereich unterstützt. Denn sowohl die steigende Leistungsfähigkeit als auch der sinkende Preis der einzelnen Komponenten begünstigen den Einsatz von Beobachtern.

Die wichtigsten Vorteile drehzahlsensorloser Regelungen sind:

- die geringeren Produktions- und Wartungskosten,
- die höhere Zuverlässigkeit durch weniger Komponentenausfälle,
- die Reduktion der benötigten Verkabelung und der Signalverarbeitung,
- weniger Platzbedarf und
- geringeres Gewicht.

Je nach verwendetem Beobachteransatz müssen dafür allerdings auch folgende Nachteile in Kauf genommen werden:

- geringere Genauigkeit der Position und des erzeugten Momentes,
- Verringerung der dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems,
- größere Stromrippel und
- höherer Einfluss des Messrauschens auf die Regelung.

Für den Betrieb einer Asynchronmaschine ist die Drehzahlinformation nicht zwingend notwendig. Eine einfache Methode zur Regelung von Asynchronmaschinen ist die U/f -Regelung, bei der die Höhe der Statorspannung proportional zur Frequenz vorgegeben wird. Im stationären Zustand der Maschine stellt sich dadurch der Nennfluss ein und es kann das volle Moment der Maschine genützt werden. Der Nachteil dieser einfachen und robusten Regelung ist allerdings die geringe Dynamik die dadurch erzielt wird.

Um eine Asynchronmaschine hochdynamisch zu betreiben, muss eine Feldorientierung vorgesehen werden. Dazu wird jedoch eine zuverlässige Information über die aktuelle Position der Rotorflussgrundwelle benötigt. Ein naheliegender Ansatz ist die direkte Ermittlung des Drehfeldwinkels durch eine Flussmessung. Die benötigten Hall-Sensoren verschlechtern allerdings durch mögliche Ausfälle das Betriebsverhalten und die Zuverlässigkeit des Systems. Es wird daher meist eine indirekte Methode bevorzugt, bei der man die Drehzahl ermittelt und daraus auf die Rotorflusslage rückschließt. Für diese Vorgangsweise muss die Drehzahl daher gemessen oder (drehzahl- und positions-) sensorlos bestimmt werden.

In Abb. 1 ist ein Überblick über die verschiedenen Verfahren zur Regelung von Asynchronmaschinen (ASM) dargestellt. Für eine sensorlose feldorientierte Regelung (FOR) existieren unterschiedliche Ansätze. Eine Möglichkeit ist, durch die Nutzung sekundärer Effekte auf die aktuelle Drehzahl zu schließen. Dies kann z. B. durch überlagerte Signaleinspeisungen, Ausnützen von Nutungs- und Sättigungserscheinungen oder kleinen

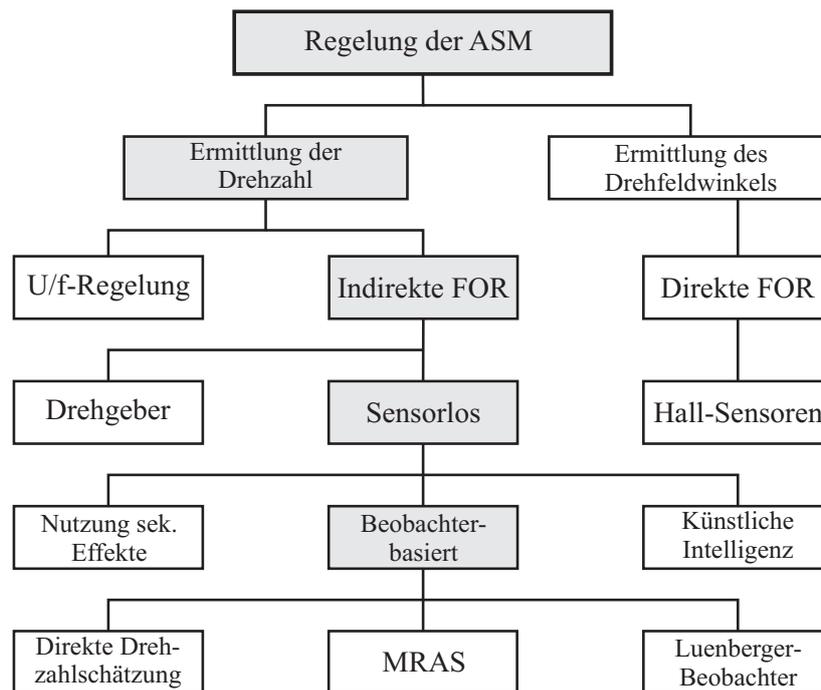


Abb. 1: Verschiedene Verfahren zur Regelung einer Asynchronmaschine (FOR...Feldorientierte Regelung, MRAS...Model Reference Adaptive System)

Unsymmetrien im konstruktiven Aufbau des Motors erfolgen (Jansen u. Lorenz, 1995; Profumo u. a., 1993; Schroedl, 1997).

Ein weiterer Ansatz ist die Verwendung von Neuronalen Netzen oder Fuzzy Logic zur Ermittlung der Drehzahl. Voraussetzung dafür ist jedoch eine große Datenmenge als Lernbasis oder ein hoher Wissensstand über das Verhalten des Systems (Kuchar u. a., 2004; Simoes u. Bose, 1994; Vas u. a., 1995).

Für einen Umstieg von einer bestehenden Regelung mit Drehgeber auf eine sensorlose Regelung bietet sich die beobachterbasierte Ermittlung der Drehzahl an. Sie beruht auf dem analytischen Modell der Maschine und benötigt als Eingangsgrößen nur die gemessenen Statorströme und die ohnehin bekannten Statorspannungen.

Das Blockschaltbild in Abb. 2 zeigt zum Vergleich die Struktur der Regelung einer Asynchronmaschine mit Drehzahlsensor (punktierete Linie) und mit Drehzahlbeobachter (strichlierte Linie). Der Regler gibt abhängig vom gewünschten Sollmoment $m_{soll}(t)$ und der gemessenen bzw. geschätzten Drehzahl $\omega_m(t)/\hat{\omega}_m(t)$ eine Spannung $\underline{u}_s(t)$ vor, die über den Wechselrichter (WR) an die Maschine angelegt wird. Für die Drehzahlbeobachtung wird der Statorstrom $\underline{i}_s(t)$ gemessen und gemeinsam mit der vorgegebenen Spannung an den Beobachter übergeben.

In den folgenden Abschnitten wird zuerst das zugrundeliegende Maschinenmodell erläutert. Darauf aufbauend werden zwei Methoden zur Fluss-schätzung vorgestellt, die für

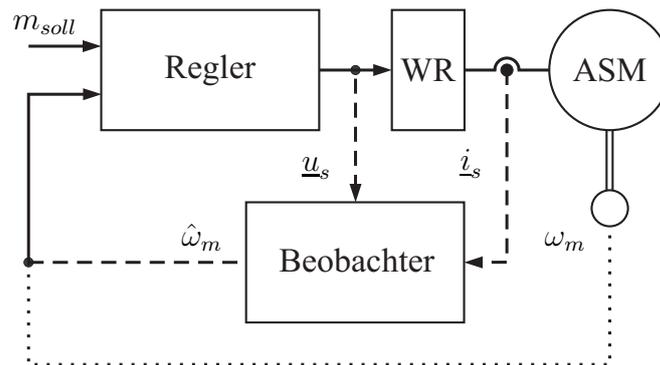


Abb. 2: Blockschaltbild der Regelung einer Asynchronmaschine mit Drehzahlsensor (punktierter Linie) und mit Drehzahlbeobachter (strichlierte Linie)

viele Beobachter als Basis für die Berechnung der Drehzahl dienen. Anschließend folgt die Beschreibung der drei häufigsten Ansätze zur beobachterbasierten Drehzahlschätzung von Asynchronmaschinen. Weitere Modelle und Vergleiche der einzelnen Methoden finden sich z. B. in (Asher, 2000; Blasco-Gimenez, 1995; Elbuluk u. Kankam, 1997; Hinkkanen, 2004; Holtz, 2002; Ilas u. a., 1994; Ohya u. a., 2006).

2 Modell der Asynchronmaschine

Die Modellierung der Asynchronmaschine erfolgt in der Raumzeigerdarstellung, siehe z. B. (Kleinrath, 1980). Sie ist eine Momentaufnahme der Ströme und Felder in der Maschine, wobei man nur die Grundwellen der Strombeläge und Feldverteilungen betrachtet. Die sinusförmige Verteilung entlang des Umfangs ermöglicht es, diese auch durch einen Vektor darzustellen. Legt man nun eine Gauß'sche Zahlenebene in einen achsnormalen Querschnitt der Maschine, lässt sich der Vektor durch einen komplexen Zeiger zur Festlegung von Richtung und Amplitude ersetzen. Die Summenwirkung der einzelnen Stränge ergibt sich mittels der Superposition der Einzelgrößen. Analog zum Stromraumzeiger lassen sich damit formal auch Raumzeiger für die Spannungen und Flüsse definieren.

Die Grundgleichungen der Asynchronmaschine werden in einem Bezugskoordinatensystem betrachtet. Bei der Wahl der Umlaufgeschwindigkeit dieses Koordinatensystems $\omega_k(t)$ ist man im Allgemeinen frei. Zwei übliche Werte sind $\omega_k(t) = 0$ für ein statorfestes und $\omega_k(t) = \omega_s(t)$ für ein drehfeldfestes Koordinatensystem. Für die weiteren Betrachtungen wird das statorfeste System gewählt. Die Indizes a und b werden dabei zur Kennzeichnung des Real- und Imaginärteiles einer Größe verwendet. Die Spannungs- und Flussverketzungsgleichungen ergeben sich unter diesen Voraussetzungen wie folgt (Leonhard, 2001).

In den Statorspannungsgleichungen werden die Komponenten des Statorspannungsraumzeigers $\underline{u}_s(t) = u_{sa}(t) + ju_{sb}(t)$ aus den Abfällen der Statorstromkomponenten $\underline{i}_s(t) = i_{sa}(t) + ji_{sb}(t)$ am Statorwiderstand r_s und die durch den Statorfluss $\underline{\psi}_s(t) = \psi_{sa}(t) + j\psi_{sb}(t)$ induzierten Spannungen gebildet

$$u_{sa} = r_s i_{sa} + \dot{\psi}_{sa} \quad (1a)$$

$$u_{sb} = r_s i_{sb} + \dot{\psi}_{sb}. \quad (1b)$$

Der Rotorspannungsraumzeiger $\underline{u}_r(t) = u_{ra}(t) + j u_{rb}(t)$ ist für den betrachteten Maschinentyp (Käfig- bzw. Kurzschlussläufer) null. Zusätzlich zu den zur Statorspannungsgleichung äquivalenten Termen aus Rotorstromraumzeiger $\underline{i}_r(t) = i_{ra}(t) + j i_{rb}(t)$, Rotorwiderstand r_r und Rotorflussraumzeiger $\underline{\psi}_r(t) = \psi_{ra}(t) + j \psi_{rb}(t)$, treten durch die Relativbewegung zwischen Stator und Rotor Terme auf, die von der mechanischen Drehzahl $\omega_m(t)$ abhängen

$$u_{ra} = 0 = r_r i_{ra} + \dot{\psi}_{ra} + \omega_m \psi_{rb} \quad (2a)$$

$$u_{rb} = 0 = r_r i_{rb} + \dot{\psi}_{rb} - \omega_m \psi_{ra}. \quad (2b)$$

Durch die Flussverkettungsgleichungen wird die Verkopplung der Flüsse im Stator und Rotor ermittelt. Die einzelnen Komponenten werden aus den Stator- und Rotorströmen sowie der Stator-, Rotor- und Hauptfeldinduktivität l_s , l_r und l_h berechnet

$$\psi_{sa} = l_s i_{sa} + l_h i_{ra} \quad (3a)$$

$$\psi_{sb} = l_s i_{sb} + l_h i_{rb} \quad (3b)$$

$$\psi_{ra} = l_h i_{sa} + l_r i_{ra} \quad (4a)$$

$$\psi_{rb} = l_h i_{sb} + l_r i_{rb}. \quad (4b)$$

Zur Vereinfachung wird im Folgenden auch der Streufaktor σ verwendet. Er ist durch das Verhältnis der Hauptfeld- zur Stator- und Rotorinduktivität festgelegt

$$\sigma = 1 - \frac{l_h^2}{l_r l_s}. \quad (5)$$

Das elektrische Moment $m_E(t)$ wird aus dem Kreuzprodukt von Statorfluss und Statorstrom gebildet. Die mechanische Drehzahl ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz des Rotors unter Berücksichtigung des Lastmomentes $m_L(t)$ und des Trägheitsmomentes des Rotors θ_m

$$\theta_m \dot{\omega}_m = m_E - m_L = \psi_{sa} i_{sb} - \psi_{sb} i_{sa} - m_L. \quad (6)$$

Eine übersichtliche Darstellung der Gleichungen des elektrischen Systems erhält man auch in der Zustandsraumdarstellung. Als Zustandsgrößen werden die Statorstrom- und Rotorflusskomponenten gewählt. Als Bezugskoordinatensystem dient wieder das drehfeldfeste Koordinatensystem. Aufgrund der mechanischen Gegebenheiten kann dabei die Dynamik der Drehzahl im Vergleich zur Dynamik der Zustandsgrößen vernachlässigt werden. Die Drehzahl lässt sich somit als konstant betrachten ($\bar{\omega}_m$), wodurch das System eine lineare Struktur der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\bar{\omega}_m) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}_s \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (8)$$

mit

$$\mathbf{x} = [i_{sa} \ i_{sb} \ \psi_{ra} \ \psi_{rb}]^T, \quad \mathbf{u}_s = [u_{sa} \ u_{sb}]^T, \quad \mathbf{y} = \mathbf{i}_s = [i_{sa} \ i_{sb}]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{r_s}{\sigma l_s} + \frac{r_r(1-\sigma)}{\sigma l_r}\right) & 0 & \frac{l_h r_r}{\sigma l_s l_r^2} & \frac{l_h \bar{\omega}_m}{\sigma l_s l_r} \\ 0 & -\left(\frac{r_s}{\sigma l_s} + \frac{r_r(1-\sigma)}{\sigma l_r}\right) & -\frac{l_h \bar{\omega}_m}{\sigma l_s l_r} & \frac{l_h r_r}{\sigma l_s l_r^2} \\ \frac{l_h r_r}{l_r} & 0 & -\frac{r_r}{l_r} & -\bar{\omega}_m \\ 0 & \frac{l_h r_r}{l_r} & \bar{\omega}_m & -\frac{r_r}{l_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma l_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma l_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

annimmt.

Die Beobachtbarkeit des elektrischen Modells kann nach Kalman mit der Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{S}_B überprüft werden, siehe z. B. (Weinmann, 1995).

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Für technisch realisierbare Maschinen ($l_h \neq 0$) entspricht der Rang dieser Matrix der Ordnung n des Systems und somit ist die vollständige Beobachtbarkeit garantiert.

3 Methoden zur Flussschätzung

Für die Flussschätzung gibt es zwei Modelle, die bei der Drehzahlbeobachtung häufig Anwendung finden. Sie beruhen auf den Stator- bzw. Rotorspannungsgleichungen (1) und (2) und werden daher auch als Stator- bzw. Rotormodell bezeichnet.

Statormodell

Die Ermittlung der geschätzten Statorflüsse $\hat{\psi}_{sa}$ und $\hat{\psi}_{sb}$ erfolgt beim Statormodell durch Integration der Statorspannungsgleichung (1)

$$\hat{\psi}_{sa} = \int_0^{t_f} (u_{sa} - r_s i_{sa}) dt \quad (11a)$$

$$\hat{\psi}_{sb} = \int_0^{t_f} (u_{sb} - r_s i_{sb}) dt. \quad (11b)$$

Daraus werden mit Hilfe der Flussverkettungsgleichungen (3) und (4) die geschätzten Rotorflüsse $\hat{\psi}_{ra}$ und $\hat{\psi}_{rb}$ bestimmt

$$\hat{\psi}_{ra} = \frac{l_r}{l_h} \left(\hat{\psi}_{sa} - \sigma l_s i_{sa} \right) \quad (12a)$$

$$\hat{\psi}_{rb} = \frac{l_r}{l_h} \left(\hat{\psi}_{sb} - \sigma l_s i_{sb} \right). \quad (12b)$$

Der Vorteil dieses Modells liegt darin, dass die mechanische Drehzahl nicht zur Berechnung des Flusses benötigt wird. Aufgrund der offenen Integration in den ersten beiden Gleichungen kann es durch einen Offset zum Abdriften der geschätzten Größen kommen. Parameter- und Messfehler haben daher bei kleinen Drehzahlen einen großen Einfluss auf das Ergebnis. Dies gilt vor allem für temperaturbedingte Änderungen des Statorwiderstandes.

Ersetzt man den Integrator näherungsweise durch ein PT1-Glied mit sehr niedriger Grenzfrequenz, so kann die Stabilität erhöht werden (Hurst u. a., 1998). Dieser Ansatz verliert aber bei Signalen mit Frequenzen die kleiner als diese Grenzfrequenz sind ihre Gültigkeit.

Rotormodell

Das Rotormodell ergibt sich durch Umformen der Rotorspannungsgleichung (2) und den Flussverkettungsgleichungen (3) und (4)

$$\hat{\psi}_{ra} = \int_0^{t_f} \left(\frac{r_r l_s}{l_h} i_{sa} - \frac{r_r}{l_h} \hat{\psi}_{sa} - \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{rb} \right) dt \quad (13a)$$

$$\hat{\psi}_{rb} = \int_0^{t_f} \left(\frac{r_r l_s}{l_h} i_{sb} - \frac{r_r}{l_h} \hat{\psi}_{sb} + \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{ra} \right) dt. \quad (13b)$$

Bei diesem Modell wird die geschätzte mechanische Drehzahl $\hat{\omega}_m$ zur Berechnung der Rotorflüsse benötigt. Selbst bei optimaler Schätzung ist das Modell sehr sensitiv gegenüber Fehlern des temperaturabhängigen Rotorwiderstandes.

4 Methoden zur Drehzahlschätzung

Im folgenden Abschnitt werden die drei wichtigsten Beobachteransätze beschrieben und die jeweiligen Vor- und Nachteile im praktischen Betrieb erläutert. Am einfachsten ist die Klasse der direkten Drehzahlschätzung, bei der das Ergebnis unmittelbar aus den umgeformten Maschinengleichungen resultiert. Da es dabei keine Rückkopplungen der berechneten Größen gibt, können Parameterabweichungen zu erheblichen Schätzfehlern führen. Als zweite Klasse werden die sogenannten MRAS-Modelle vorgestellt, die durch Vergleich einer Referenzgröße mit einer adjustierbaren Größe die Drehzahl anpassen. Die Klasse der Luenberger-Beobachter nutzt schließlich das vollständige Maschinenmodell. Aus der Differenz zu den Messgrößen wird daraus über einen Adaptionsalgorithmus die geschätzte Drehzahl ermittelt.

4.1 Direkte Drehzahlschätzung

Bei der direkten Schätzung wird die Drehzahl aus den Maschinengleichungen berechnet. Wie in Abb. 3 dargestellt muss aus den Statorströmen und -spannungen zuerst der aktuelle Flussvektor in der Maschine geschätzt werden. Durch unterschiedliche Ansätze kann man daraus mit Hilfe der gemessenen Statorströme die geschätzte Drehzahl $\hat{\omega}_m$ ermitteln. Mögliche Berechnungsschemas sind z. B. in (Schauder, 1989; Baader u. a., 1992; Fratta u. a., 1988; Kanmachi u. Takahashi, 1995) beschrieben.

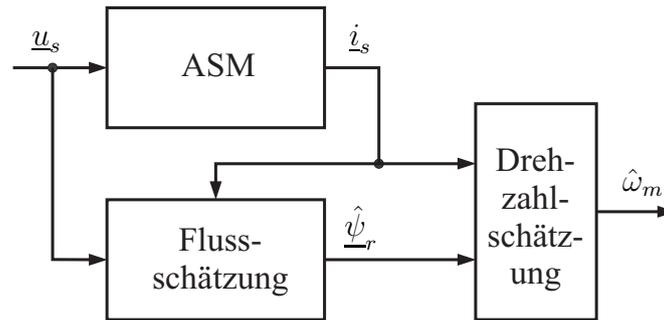


Abb. 3: Blockschaltbild der direkten Drehzahlschätzung

Methode nach Schauder (direkt)

Für den direkten Beobachter erfolgt in (Schauder, 1989) die Herleitung des Berechnungsschemas der Drehzahl über den Winkel $\varphi(t)$ des Rotorflussraumzeigers

$$\varphi = \arctan \left\{ \frac{\psi_{rb}}{\psi_{ra}} \right\}. \quad (14)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Rotorflussraumzeigers entspricht dabei der Drehfeldfrequenz. Sie lässt sich durch die zeitliche Ableitung des Winkels ermitteln

$$\omega_s = \dot{\varphi} = \frac{\psi_{ra}\dot{\psi}_{rb} - \psi_{rb}\dot{\psi}_{ra}}{\psi_{ra}^2 + \psi_{rb}^2}. \quad (15)$$

In dieser Gleichung werden dann die Ableitungen der Rotorflusskomponenten durch Umformen der Rotorspannungsgleichung (2) und die darin vorkommenden Rotorstromkomponenten durch Umformen der Flussverkettungsgleichung (4) ersetzt. Damit ergibt sich folgender Zusammenhang für die gesuchte Drehzahl

$$\hat{\omega}_m = \omega_s - \frac{l_h r_r}{l_r} \left(\frac{\hat{\psi}_{ra} \dot{i}_{sb} - \hat{\psi}_{rb} \dot{i}_{sa}}{\hat{\psi}_{ra}^2 + \hat{\psi}_{rb}^2} \right). \quad (16)$$

Die zur Ermittlung der geschätzten Drehzahl benötigten Rotorflusskomponenten werden durch das Statormodell berechnet. Daher gelten für diese Methode die vorher beschriebenen Nachteile der offenen Integration der Statorspannungsgleichungen.

Methode nach Kanmachi

In (Kanmachi u. Takahashi, 1995) wird die Drehzahl aus dem Rotormodell Gl.(13) ermittelt. Da zwei Gleichungen für eine Unbekannte zur Verfügung stehen, kann man den Rotorwiderstand herauskürzen

$$\hat{\omega}_m = \frac{\left(\hat{\psi}_{sa} - l_s i_{sa}\right) \dot{\hat{\psi}}_{rb} - \left(\hat{\psi}_{sb} - l_s i_{sb}\right) \dot{\hat{\psi}}_{ra}}{\left(\hat{\psi}_{sa} - l_s i_{sa}\right) \hat{\psi}_{ra} + \left(\hat{\psi}_{sb} - l_s i_{sb}\right) \hat{\psi}_{rb}}. \quad (17)$$

Dadurch entfallen die negativen Auswirkungen durch Parameterabweichungen des Rotorwiderstandes. Die benötigten Stator- und Rotorflüsse erhält man auch hier aus den Gln.(11) und (12) des Statormodells. Als Nebenprodukt kann ein geschätzter Rotorwiderstand

$$\hat{r}_r = \frac{-l_h \hat{\psi}_{ra} \dot{\hat{\psi}}_{ra} - l_h \hat{\psi}_{rb} \dot{\hat{\psi}}_{rb}}{\left(\hat{\psi}_{sa} - l_s i_{sa}\right) \hat{\psi}_{ra} + \left(\hat{\psi}_{sb} - l_s i_{sb}\right) \hat{\psi}_{rb}} \quad (18)$$

berechnet werden. Dies ermöglicht bei Temperaturänderungen eine Nachführung des Parameters in der Regelung.

4.2 Model Reference Adaptive System

Beim Model Reference Adaptive System (MRAS) nach Abb.4 wird eine adjustierbare Größe mit einer Referenzgröße verglichen. Aus der Differenz der beiden erhält man dann mit Hilfe eines Adaptionalgorithmus die Drehzahl. MRAS-Verfahren werden in zahlreichen Arbeiten mit unterschiedlichen Modellen und unterschiedlichen Adaptionmechanismen untersucht, siehe dazu unter anderem (Ohtani u. a., 1992; Peng u. Fukao, 1994; Zhen u. Xu, 1998; Park u. Kwon, 2004; Schauder, 1989).

Im Gegensatz zur direkten Drehzahlschätzung kommt es bei den MRAS-Modellen zu einer Rückkopplung der berechneten Größen. Die Schwachpunkte sind allerdings auch hier die geringe stationäre Genauigkeit und das oft schlechte dynamische Verhalten.

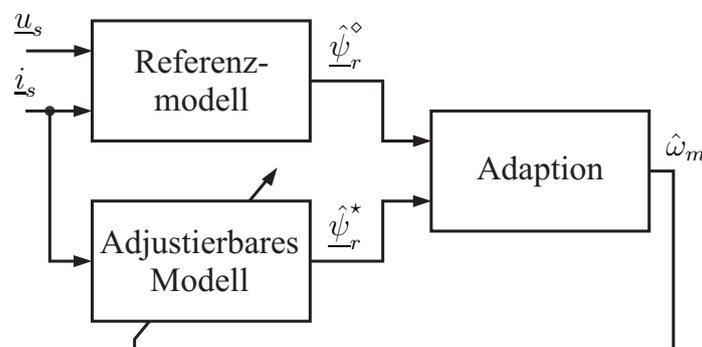


Abb. 4: Blockschaltbild eines Model Reference Adaptive Systems

Methode nach Schauder (MRAS)

Für das Referenzmodell werden im MRAS-Modell von Schauder die Rotorflüsse wieder durch das Statormodell berechnet (Schauder, 1989)

$$\hat{\psi}_{ra}^{\diamond} = \frac{l_r}{l_h} \left[\int_0^{t_f} (u_{sa} - r_s i_{sa}) dt - \sigma l_s i_{sa} \right] \quad (19a)$$

$$\hat{\psi}_{rb}^{\diamond} = \frac{l_r}{l_h} \left[\int_0^{t_f} (u_{sb} - r_s i_{sb}) dt - \sigma l_s i_{sb} \right]. \quad (19b)$$

Durch den Index \diamond wird gekennzeichnet, dass es sich um die Größen des Referenzmodells handelt. Das adjustierbare Modell wird aus den Rotorspannungs- und den Flussverkettungsgleichungen gebildet. Die Größen werden mit dem Index $*$ versehen.

$$\hat{\psi}_{ra}^* = \int_0^{t_f} \frac{r_r}{l_r} \left(l_h i_{sa} - \hat{\psi}_{ra}^* - \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{rb}^* \right) dt \quad (20a)$$

$$\hat{\psi}_{rb}^* = \int_0^{t_f} \frac{r_r}{l_r} \left(l_h i_{sb} - \hat{\psi}_{rb}^* + \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{ra}^* \right) dt \quad (20b)$$

Im Gegensatz zum Referenzmodell kommt hier die geschätzte Drehzahl in der Gleichung vor. Stimmt diese nicht mit der tatsächlichen Drehzahl überein, entsteht ein Fehler zwischen den beiden Modellen. Der Adaptionalgorithmus führt damit die geschätzte Geschwindigkeit an die gesuchte Geschwindigkeit heran. Die Struktur wird so bestimmt, dass für das Fehlersystem das Popov-Kriterium für Hyperstabilität von zeitvarianten Systemen, siehe (Landau, 1979), erfüllt ist

$$\hat{\omega}_m = k_P \left(\hat{\psi}_{rb}^{\diamond} \hat{\psi}_{ra}^* - \hat{\psi}_{ra}^{\diamond} \hat{\psi}_{rb}^* \right) + k_I \int_0^{t_f} \left(\hat{\psi}_{rb}^{\diamond} \hat{\psi}_{ra}^* - \hat{\psi}_{ra}^{\diamond} \hat{\psi}_{rb}^* \right) dt. \quad (21)$$

Methode nach Peng

Die Methode nach Peng (Peng u. Fukao, 1994) verwendet dasselbe Prinzip wie das MRAS-Modell nach Schauder. Es werden allerdings nicht die Rotorflüsse für die Adaption der Drehzahl herangezogen, sondern die Komponenten der elektromotorischen Kraft

$$e_{ma} = \frac{l_h}{l_r} \dot{\psi}_{ra} \quad \text{und} \quad e_{mb} = \frac{l_h}{l_r} \dot{\psi}_{rb}. \quad (22)$$

Das Referenzmodell wird durch Umformen aus der Statorspannungsgleichung (1) und den Flussverkettungsgleichungen (3) und (4) gebildet

$$\hat{e}_{ma}^{\diamond} = u_{sa} - r_s i_{sa} - \sigma l_s \dot{i}_{sa} \quad (23a)$$

$$\hat{e}_{mb}^{\diamond} = u_{sb} - r_s i_{sb} - \sigma l_s \dot{i}_{sb}. \quad (23b)$$

Die Ermittlung des adjustierbaren Modells erfolgt aus der Rotorspannungsgleichung (2) und der Rotorflussverkettungsgleichung (4)

$$\hat{e}_{ma}^* = \frac{l_h}{l_r} \left[\frac{r_r l_h}{l_r} i_{sa} - \int_0^{t_f} \left(\frac{r_r}{l_h} \hat{e}_{ma}^* + \frac{l_r}{l_h} \hat{\omega}_m \hat{e}_{mb}^* \right) dt \right] \quad (24a)$$

$$\hat{e}_{mb}^* = \frac{l_h}{l_r} \left[\frac{r_r l_h}{l_r} i_{sb} - \int_0^{t_f} \left(\frac{l_r}{l_h} \hat{\omega}_m \hat{e}_{ma}^* + \frac{r_r}{l_h} \hat{e}_{mb}^* \right) dt \right]. \quad (24b)$$

Damit ergibt sich für die Berechnung der geschätzten Drehzahl, unter Berücksichtigung des Popov-Kriteriums für Hyperstabilität, folgende Gleichung

$$\hat{\omega}_m = k_P (\hat{e}_{mb}^\diamond \hat{e}_{ma}^* - \hat{e}_{ma}^\diamond \hat{e}_{mb}^*) + k_I \int_0^{t_f} (\hat{e}_{mb}^\diamond \hat{e}_{ma}^* - \hat{e}_{ma}^\diamond \hat{e}_{mb}^*) dt. \quad (25)$$

Mit diesem Ansatz kommt es weder im Referenzmodell noch im adjustierbaren Modell zu einer direkten Integration der gemessenen Statorströme. Dadurch werden die zuvor beschriebenen Probleme der offenen Integration vermieden. Allerdings müssen für das Referenzmodell die Ableitungen der gemessenen Statorstromkomponenten ermittelt werden, wodurch neue Störungen in Abhängigkeit des Rauschens der Messung auftreten.

Methode nach Park

Beim MRAS-Beobachter nach Park (Park u. Kwon, 2004) werden die Statorströme als Vergleichsgrößen verwendet. Als Referenzgrößen dienen die gemessenen Statorstromkomponenten $i_{sa}^\diamond = i_{sa}$ und $i_{sb}^\diamond = i_{sb}$. Der Rotorfluss für das adjustierbare Modell wird wieder durch das Spannungsmodell berechnet. Die geschätzten Flüsse werden anschließend in das adjustierbare Modell eingesetzt und daraus die Komponenten des geschätzten Statorstromraumzeigers \hat{i}_{sa}^* und \hat{i}_{sb}^* bestimmt. Das verwendete Modell ergibt sich aus der Rotorspannungsgleichung (2) und der Flussverkettungsgleichung (4)

$$\hat{i}_{sa}^* = \frac{1}{l_h} \left(\hat{\psi}_{ra} + \frac{l_r}{r_r} \dot{\hat{\psi}}_{ra} - \frac{l_r}{r_r} \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{rb} \right) \quad (26a)$$

$$\hat{i}_{sb}^* = \frac{1}{l_h} \left(\hat{\psi}_{rb} + \frac{l_r}{r_r} \dot{\hat{\psi}}_{rb} + \frac{l_r}{r_r} \hat{\omega}_m \hat{\psi}_{ra} \right). \quad (26b)$$

Aus der Abweichung zu den tatsächlichen Statorströmen wird die Drehzahl ermittelt

$$\hat{\omega}_m = k_P \left[\left(i_{sa}^\diamond - \hat{i}_{sa}^* \right) \hat{\psi}_{rb} - \left(i_{sb}^\diamond - \hat{i}_{sb}^* \right) \hat{\psi}_{ra} \right] + k_I \int_0^{t_f} \left[\left(i_{sa}^\diamond - \hat{i}_{sa}^* \right) \hat{\psi}_{rb} - \left(i_{sb}^\diamond - \hat{i}_{sb}^* \right) \hat{\psi}_{ra} \right] dt. \quad (27)$$

Der Vorteil dieser MRAS-Methode, gegenüber den bereits vorgestellten Methoden von Schauder und Peng, ist die größere Robustheit bei Parameteränderungen. Außerdem ist durch den Einsatz dieses Beobachters eine dynamischere Regelung der Maschine möglich.

4.3 Luenberger-Beobachter

Ein weiterer Ansatz zur Drehzahlschätzung von Asynchronmaschinen ist der vollständige Beobachter. Die einzelnen Modelle unterscheiden sich dabei durch ihre Beobachtermatrizen und ihre Adaptionmechanismen für die Drehzahl, siehe z. B. (Kubota u. a., 1993; Tursini u. a., 2000; Hofmann u. Sanders, 1998; Griva u. a., 2001; Yang u. Chin, 1993).

Für den Luenberger-Beobachter werden die Maschinengleichungen der Asynchronmaschine in der Zustandsraumdarstellung nach Gln.(7)-(9) betrachtet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\bar{\omega}_m) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}_s \quad (28)$$

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{C} \mathbf{x}. \quad (29)$$

Wie in Abb. 5 dargestellt, dient die Differenz zwischen den gemessenen und geschätzten Statorströmen als Eingang für ein Adaptionsschema. Gemeinsam mit den geschätzten Rotorflüssen kann daraus die Drehzahl berechnet werden. Durch die Rückkopplung zum Beobachter erfolgt die Anpassung der Zustandsgrößen.

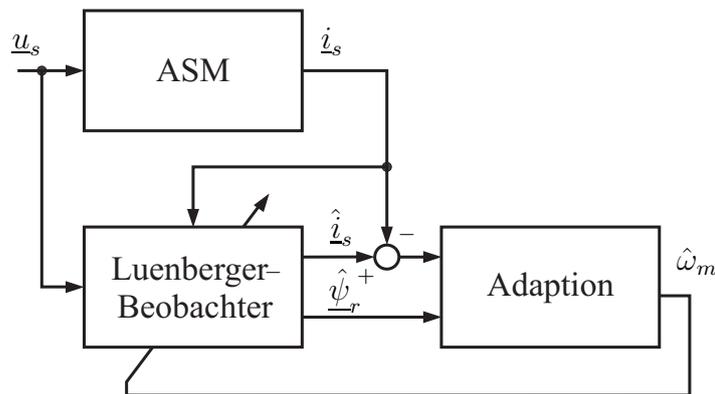


Abb. 5: Blockschaltbild der Drehzahlschätzung mit einem Luenberger-Beobachter

Vollständige adaptive Beobachter werden aufgrund ihrer Genauigkeit und Vielseitigkeit am häufigsten angewandt. Ein großer Nachteil ist allerdings die im Vergleich zu den anderen Methoden aufwändige Implementierung. Außerdem benötigen sie im Mikroprozessor der Regelung erheblich mehr Rechenleistung.

Methode nach Kubota

Der Beobachteransatz von Kubota, (Kubota u. a., 1993), ist in der Form

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u}_s + \mathbf{G} (\hat{\mathbf{i}}_s - \mathbf{i}_s) \quad (30)$$

gegeben. Die Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ entspricht dabei weitgehend der Systemmatrix \mathbf{A} . Für die tatsächliche Drehzahl $\bar{\omega}_m$ wird jedoch der geschätzte Wert $\hat{\omega}_m$ eingesetzt, d.h. $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\hat{\omega}_m)$.

Für den Schätzfehler $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ergibt sich dadurch folgender Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e} - \Delta\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}. \quad (31)$$

Unter der Annahme, dass die Drehzahl annähernd konstant ist ($\dot{\omega}_m = 0$), kann mit einem Lyapunov-Ansatz aus den Beobachtergleichungen die geschätzte Drehzahl in der Form

$$\hat{\omega}_m = c \frac{l_h}{\sigma l_s l_r} \int_0^{t_f} \left[(i_{sx} - \hat{i}_{sx}) \hat{\psi}_{ry} - (i_{sy} - \hat{i}_{sy}) \hat{\psi}_{rx} \right] dt \quad (32)$$

ermittelt werden.

Methoden nach Tursini

Der vollständige Beobachter dient auch als Basis für den Sliding-Mode-Beobachter in (Tursini u. a., 2000). Es wird allerdings nicht die Differenz zwischen geschätztem und tatsächlichem Statorstrom, sondern die zugehörige Signumfunktion als Rückführung verwendet

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\omega}_m) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u}_s + \mathbf{N} \operatorname{sign} \left\{ \mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s \right\}. \quad (33)$$

Als Schätzfehlergleichung ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \Delta\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N} \operatorname{sign} \left\{ \mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s \right\}. \quad (34)$$

Daraus wird entsprechend dem Vorgehen für das Modell von Kubota wieder der Fehler zwischen geschätzter und tatsächlicher Drehzahl ermittelt und einem Integrator zugeführt

$$\hat{\omega}_m = \mu\nu \int_0^{t_f} \left[k_{N1} \operatorname{sign} \left\{ i_{sx} - \hat{i}_{sx} \right\} \hat{\psi}_{ry} - k_{N2} \operatorname{sign} \left\{ i_{sy} - \hat{i}_{sy} \right\} \hat{\psi}_{rx} \right] dt. \quad (35)$$

Der Sliding-Mode-Beobachter weist gegenüber dem Modell von Kubota ein robusteres Verhalten auf. Die Schaltglieder verursachen jedoch störende Einflüsse, die sich in den Systemgrößen bemerkbar machen.

Kalman-Filter

Als Erweiterung des Luenberger-Ansatzes sei noch das Kalman-Filter genannt. Aufgrund der Nichtlinearität der Maschinengleichungen wird meist ein Extended-Kalman-Filter mit einer Linearisierung im Arbeitspunkt verwendet. Als Grundlage für diese Methode dient ebenfalls das vollständige Maschinenmodell. Die Fehlerfunktion berechnet sich wie beim Luenberger-Beobachter aus den Zustandsgrößen. Es wird allerdings das Messrauschen der Eingangs- und Ausgangsgrößen berücksichtigt, siehe z. B. (Weinmann, 1995).

Durch den statistischen Ansatz des Kalman-Filters vermindert sich die Sensitivität auf Parameteränderungen. Es ist aber zu erwähnen, dass die Lage der Eigenwerte des Beobachters nicht mehr frei gewählt werden kann (Garcia-Soto u. a., 1999; Kim u. a., 1994).

5 Zusammenfassung und Ausblick

In Tab. 1 sind die Vor- und Nachteile der gezeigten Methoden noch einmal zusammengefasst. Die Stärke der direkten Drehzahlschätzung und des MRAS sind die einfache Realisierung. Sie bieten allerdings eine geringe Stationärgenauigkeit, eine große Abhängigkeit des Ergebnisses von den Maschinenparametern und ein oft schlechtes dynamisches Verhalten. Vollständige Luenberger-Beobachter werden aufgrund ihrer Genauigkeit und Vielseitigkeit häufiger eingesetzt. Sie sind jedoch aufwändiger in der Implementierung und verursachen einen höheren Rechenaufwand. In Zukunft wird dieser Nachteil durch die eingesetzte Hardware aber immer weniger problematisch.

	Vorteile	Nachteile
DIREKTER DREHZAHL-SCHÄTZER	<ul style="list-style-type: none"> • Einfache Realisierung • Geringer Rechenaufwand • Kanmachi: Schätzung des Rotorwiderstandes 	<ul style="list-style-type: none"> • Keine Rückkopplung der Ergebnisse • Offene Integration der Messgrößen
MRAS	<ul style="list-style-type: none"> • Einfache Realisierung • Geringer Rechenaufwand • Adaptive Anpassung der Drehzahl • Peng: Keine Integration der Messgrößen • Park: Robust gegenüber Parameteränderungen 	<ul style="list-style-type: none"> • Schauder, Peng: Geringe Dynamik • Schauder, Park: Offene Integration der Messgrößen
LUENBERGER BEOBACHTER	<ul style="list-style-type: none"> • Genauigkeit der Schätzung • Vielseitigkeit • Adaptive Anpassung der Drehzahl • Tursini: Robustes Verhalten 	<ul style="list-style-type: none"> • Aufwendige Realisierung • Hoher Rechenaufwand • Tursini: Störende Einflüsse durch das Schaltglied

Tab. 1: Vor- und Nachteile der Beobachteransätze

Der Großteil der Beobachter die auf den Maschinengleichungen beruhen, haben Stabilitätsprobleme im niedrigen Drehzahlbereich. Dies gilt vor allem im generatorischen Betrieb und bei Statorfrequenz null. Ansätze zur Vermeidung der Probleme im generatorischen Bereich gehen zu Lasten des dynamischen Verhaltens. Bei stehendem Statorspannungsraumzeiger kann eine konstante Drehzahl generell nicht aus den Statorströmen berechnet werden. Als Lösung müssen für diese Bereiche zusätzlich Methoden mit Signaleinspeisungen bzw. Auswertungen von Nichtlinearitäten in der Maschine zur Drehzahlermittlung verwendet werden. Da Parameterabweichungen sowohl zu Schätzfehlern als auch zu Instabilitäten führen, wird meist zusätzlich zur Beobachtung der Drehzahl eine Adaption der temperaturabhängigen Stator- und Rotorwiderstände durchgeführt.

6 Literaturverzeichnis

- [Asher 2000] ASHER, G. M.: Sensorless induction motor drives. In: *IEE Colloquium (Digest)* (2000), Mai, Nr. 72, S. 27–31. – ISSN 0963–3308
- [Baader u. a. 1992] BAADER, U. ; DEPENBROCK, M. ; GIERSE, G.: Direct self control (DSC) of inverter-fed induction machine: A basis for speed control without speed measurement. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28 (1992), Mai–Jun, Nr. 3, S. 581–588. – ISSN 0093–9994
- [Blasco-Gimenez 1995] BLASCO-GIMENEZ, R.: *High performance sensorless vector control of induction motor drives*, Universität Nottingham, Diss., 1995
- [Elbuluk u. Kankam 1997] ELBULUK, M.E. ; KANKAM, M.D.: Speed sensorless induction motor drives for electrical actuators: Schemes, trends and tradeoffs. In: *National Aerospace and Electronics Conference, Proceedings of the IEEE* 1 (1997), S. 137–144
- [Fratta u. a. 1988] FRATTA, A. ; VAGATI, A. ; VILLATA, F.: Vector control of induction motors without shaft transducers. In: *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference* 2 (1988), Apr, S. 839–846
- [Garcia-Soto u. a. 1999] GARCIA-SOTO, G. ; MENDES, E. ; RAZEK, A.: Reduced-order observers for rotor flux, rotor resistance and speed estimation for vector controlled induction motor drives using the extended Kalman filter technique. In: *IEE Proceedings: Electric Power Applications* 146 (1999), Mai, Nr. 3, S. 282–288. – ISSN 1350–2352
- [Griva u. a. 2001] GRIVA, G. ; PROFUMO, F. ; BOJOI, R. ; BOSTAN, V. ; CUIBUS, M. ; ILAS, C.: General adaptation law for MRAS high performance sensorless induction motor drives. In: *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference* 2 (2001), S. 1197–1202. – ISSN 0275–9306
- [Hinkkanen 2004] HINKKANEN, M.: *Flux estimators for speed-sensorless induction motor drives*, Technische Universität Helsinki, Diss., 2004
- [Hofmann u. Sanders 1998] HOFMANN, H. ; SANDERS, S.R.: Speed-sensorless vector torque control of induction machines using a two-time-scale approach. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 34 (1998), Jan–Feb, Nr. 1, S. 169–177. – ISSN 0093–9994
- [Holtz 2002] HOLTZ, J.: Sensorless control of induction motor drives. In: *Proceedings of the IEEE* 90 (2002), Nr. 8, S. 1359–1394. – ISSN 0018–9219
- [Hurst u. a. 1998] HURST, K.D. ; HABETLER, T.G. ; GRIVA, G. ; PROFUMO, F.: Zero-speed tacholless IM torque control: Simply a matter of stator voltage integration. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 34 (1998), Jul–Aug, Nr. 4, S. 790–795. – ISSN 0093–9994
- [Ilas u. a. 1994] ILAS, C. ; BETTINI, A. ; FERRARIS, L. ; GRIVA, G. ; PROFUMO, F.: Comparison of different schemes without shaft sensors for field oriented control drives. In: *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)* 3 (1994), S. 1579–1588

- [Jansen u. Lorenz 1995] JANSEN, P.L. ; LORENZ, R.D.: Transducerless field orientation concepts employing saturation-induced saliencies in induction machines. In: *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)* 1 (1995), S. 174–181. – ISSN 0197–2618
- [Kanmachi u. Takahashi 1995] KANMACHI, T. ; TAKAHASHI, I.: Sensor-less speed control of an induction motor. In: *IEEE Industry Applications Magazine* 1 (1995), Jan-Feb, Nr. 1, S. 22–27. – ISSN 1077–2618
- [Kim u. a. 1994] KIM, Y.-R. ; SUL, S.-K. ; PARK, M.-H.: Speed sensorless vector control of induction motor using extended Kalman filter. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 30 (1994), Sept–Okt, Nr. 5, S. 1225–1233. – ISSN 0093–9994
- [Kleinrath 1980] KLEINRATH, H.: *Stromrichtergespeiste Drehfeldmaschinen*. Springer Wien New York, 1980. – ISBN 3–211–81565–1
- [Kubota u. a. 1993] KUBOTA, H. ; MATSUSE, K. ; NAKANO, T.: DSP-based speed adaptive flux observer of induction motor. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 29 (1993), Mar–Apr, Nr. 2, S. 344–348. – ISSN 0093–9994
- [Kuchar u. a. 2004] KUCHAR, M. ; BRANDSTETTER, P. ; KADUCH, M.: Sensorless induction motor drive with neural network. In: *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference* 5 (2004), S. 3301–3305. – ISSN 0275–9306
- [Landau 1979] LANDAU, Y.D.: *Adaptive Control - The Model Reference Approach*. Marcel Dekker Inc. New York and Basel, 1979. – ISBN 0–8247–6548–6
- [Leonhard 2001] LEONHARD, W.: *Control of Electrical Drives*. Third Edition. Springer Berlin, 2001. – ISBN 3–540–41820–2
- [Ohtani u. a. 1992] OHTANI, T. ; TAKADA, N. ; TANAKA, K.: Vector control of induction motor without shaft encoder. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28 (1992), Jan–Feb, Nr. 1, S. 157–164. – ISSN 0093–9994
- [Ohyama u. a. 2006] OHYAMA, K. ; ASHER, G. M. ; SUMNER, M.: Comparative analysis of experimental performance and stability of sensorless induction motor drives. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 53 (2006), Feb, Nr. 1, S. 178–186. – ISSN 0278–0046
- [Park u. Kwon 2004] PARK, C.-W. ; KWON, W.-H.: Simple and robust speed sensorless vector control of induction motor using stator current based MRAC. In: *Electric Power Systems Research* 71 (2004), Nov, Nr. 3, S. 257–266. – ISSN 0378–7796
- [Peng u. Fukao 1994] PENG, F.-Z. ; FUKAO, T.: Robust speed identification for speed-sensorless vector control of induction motors. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 30 (1994), Sept–Okt, Nr. 5, S. 1234–1240. – ISSN 0093–9994
- [Profumo u. a. 1993] PROFUMO, F. ; GRIVA, G. ; PASTORELLI, M. ; MOREIRA, J.C.: Universal field oriented controller with indirect speed sensing based on the saturation third harmonic voltage. In: *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference* 1 (1993), S. 948–955. – ISSN 0275–9306
- [Schauder 1989] SCHAUDER, C.: Adaptive speed identification for vector control of induction motors without rotational transducers. In: *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)* (1989), Nr. 1, S. 493–499. – ISSN 0160–8592

- [Schroedl 1997] SCHROEDL, M.: Sensorless control of AC machines at low speed and standstill based on the 'INFORM' method. In: *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)* 1 (1997), S. 270–277. – ISSN 0197–2618
- [Simoies u. Bose 1994] SIMOES, M.G. ; BOSE, B.K.: Neural network based estimation of feedback signals for a vector controlled induction motor drive. In: *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)* 1 (1994), S. 471–479. – ISSN 0197–2618
- [Tursini u. a. 2000] TURSINI, M. ; PETRELLA, R. ; PARASILITI, F.: Adaptive sliding-mode observer for speed-sensorless control of induction motors. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 36 (2000), Sept, Nr. 5, S. 1380–1387. – ISSN 0093–9994
- [Vas u. a. 1995] VAS, P. ; STRONACH, A.F. ; NEUROTH, M.: Fuzzy-controlled speed-sensorless induction motor drive with flux estimators. In: *IEE Conference Publication* (1995), Nr. 412, S. 315–319. – ISSN 0537–9987
- [Weinmann 1995] WEINMANN, A.: *Regelungen – Analyse und technischer Entwurf Bd.2*. 3.Aufl. Springer Wien New York, 1995. – ISBN 3–211–82632–7
- [Yang u. Chin 1993] YANG, G. ; CHIN, T.-H.: Adaptive-speed identification scheme for a vector-controlled speed sensorless inverter-induction motor drive. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 29 (1993), Jul–Aug, Nr. 4, S. 820–825. – ISSN 0093–9994
- [Zhen u. Xu 1998] ZHEN, L. ; XU, L.: Sensorless field orientation control of induction machines based on a mutual MRAS scheme. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 45 (1998), Okt, Nr. 5, S. 824–831. – ISSN 0278–0046

Gradients of Lyapunov Subdeterminants Preparing State Controller Design

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE

Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control

Gusshausstrasse 27-29/376

A-1040 Vienna / Austria

Phone: +43 1 58801 37611 Fax: +43 1 58801 37699

email: `weinmann@acin.tuwien.ac.at`

Manuscript received January 21, 2008

Abstract

The Lyapunov determinant, its subdeterminants and their corresponding derivatives with respect to the state controller matrix are addressed. Comprehensively, the entire set of differential quotients is investigated and prepared for designing the state controller matrix. In addition, the maximum admissible process uncertainty with Frobenius norm limit is carried out.

Keywords: Lyapunov matrix, Lyapunov determinant, gradients with respect to the controller matrix, maximum admissible plant uncertainty

1 Introduction

For linear time-invariant dynamical systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, the Lyapunov criterion for global asymptotic stability requires the selection of a symmetric positive definite matrix $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ to solve the Lyapunov equation

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \tag{1}$$

with respect to \mathbf{P} . If \mathbf{P} is positive definite the origin in \mathbf{x} -space is globally asymptotically stable. The appropriate Lyapunov function is $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ and \mathbf{P} can also be expressed

as $\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt$. [Remember: For a stable \mathbf{A} and arbitrary $\mathbf{P} > 0$, \mathbf{Q} need not be positive definite (*Föllinger, O., 1993; Franklin, G.F., et al., 2002; Slotine, J.-J., and Weiping, L., 1991; Weinmann, A., 1995*)]. For a closed-loop dynamical system, \mathbf{A} is replaced by $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$, where \mathbf{A} is the open-loop process matrix, \mathbf{B} is an input matrix and the state controller is termed \mathbf{K} .

In this paper, the binary fact of \mathbf{P} being positive definite or not is extended to the expression of the quantity of \mathbf{P} . The Lyapunov matrix \mathbf{P} and all its northwest submatrices $\mathbf{P}_{n-i} \forall i = \{1, n-1\}$ are quantified as far as the *amounts* of $\det \mathbf{P}_n$ and $\det \mathbf{P}_{n-i} \forall i = \{1, n-1\}$ are concerned.

Apart from the fact that \mathbf{P}_n does not exist at the stability border (since it tends to ∞ in Eq.(1)), the details are investigated which is the functional dependence between the determinants mentioned above and the eigenvalues $\lambda_i[\mathbf{A}]$. The interrelation is studied when the eigenvalues are crossing the imaginary axis in the s -plane. An interesting behavior is offered by the inverses $1/\det \mathbf{P}_{n-i} \forall i = \{0, n-1\}$ when one of the eigenvalues crosses the imaginary axis. The inverse determinants incorporate a smooth crossover at the zero level. This leads to the idea of utilizing this fact to prepare and find a stabilization algorithm. The gradients of $1/\det \mathbf{P}_{n-i}$ with respect to the controller matrix are evaluated and prepared to determine steps $\Delta \mathbf{K}$ to stabilize the system.

In three simple examples, it is demonstrated how to stabilize an unstable plant or to improve the stability degree in a straightforward manner .

2 Lyapunov Determinant Increments Triggered by the Controller Matrix

The issue is to find the increments of the Lyapunov matrices $\Delta \mathbf{P}_n$ triggered by increments of the controller matrix $\Delta \mathbf{K}$.

2.1 Determinant of the Original Lyapunov Matrix

Now, the increment of \mathbf{P}_n caused by an increment of \mathbf{K} is studied. Anticipating further requirements, \mathbf{P} in Eq.(1) is equated with \mathbf{P}_n . Starting from Eq.(1)

$$\mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n \mathbf{A}_{cl} = -\mathbf{Q} \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = -\mathbf{Q} \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n \mathbf{B} \Delta \mathbf{K} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \Delta \mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$(\mathbf{P}_n \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n) \text{col} \Delta \mathbf{K}^T + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_n \mathbf{B}) \text{col} \Delta \mathbf{K}$$

$$+[\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \otimes \mathbf{I}_n] \text{col} \Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\text{col} \Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{H}_n \text{col} \Delta \mathbf{K}, \quad (6)$$

where (Weinmann, A., 2008)

$$\mathbf{H}_P \triangleq [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \otimes \mathbf{I}_n] \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_n \triangleq -\mathbf{H}_P^{-1} \{[(\mathbf{P}_n \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n] \mathbf{U}_{n,m} + [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{P}_n \mathbf{B})]\} \quad (8)$$

and $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $\mathbf{H}_P \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2}$, $\mathbf{U}_{n,m} \in \mathcal{R}^{mn \times mn}$. The latter matrix is the permutation matrix

$$\mathbf{U}_{k,l} \triangleq \mathbf{U}_{k,l}^{(kl \times kl)} \triangleq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes \mathbf{E}_{ji}^{(l \times k)} = \sum_i^k \sum_j^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes (\mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)})^T, \quad (9)$$

where \mathbf{E}_{ij} is the Kronecker matrix. Furthermore, for the sake of survey, one has $(\mathbf{P}_n \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n \in \mathcal{R}^{n^2 \times mn}$, $\mathbf{h}_n^T \in \mathcal{R}^{1 \times mn}$, $\frac{\partial \text{col} \Delta \mathbf{K}}{\partial \Delta \mathbf{K}} \in \mathcal{R}^{m^2 n \times n}$, $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{h}_n^T \in \mathcal{R}^{m \times m^2 n}$, $\frac{\partial \det \mathbf{P}_n}{\partial \mathbf{K}} \in \mathcal{R}^{m \times n}$.

For the corresponding determinants, expansion and first-order truncation yields

$$\det(\mathbf{P}_n + \mathbf{E}_{ij} \Delta P_{n,ij}) \stackrel{(60)}{=} \det \mathbf{P}_n + \text{tr}[\mathbf{E}_{ij} \mathbf{P}_n^{-1}] \det \mathbf{P}_n \Delta P_{n,ij} \quad (10)$$

$$\det(\mathbf{P}_n + \mathbf{E}_{ij} \Delta P_{n,ij}) = \det \mathbf{P}_n + (\mathbf{P}_n^{-1})_{ji} \det \mathbf{P}_n \Delta P_{n,ij} \quad (11)$$

$$\det(\mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n) = \det \mathbf{P}_n + \sum_{ij} (\mathbf{P}_n^{-1})_{ji} \det \mathbf{P}_n \Delta P_{n,ij} \quad (12)$$

$$\det(\mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n) = \det \mathbf{P}_n + \det \mathbf{P}_n [\text{col}(\mathbf{P}_n^{-T})]^T \text{col} \Delta \mathbf{P}_n \quad (13)$$

$$\det(\mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n) = \det \mathbf{P}_n \{1 + [\text{col}(\mathbf{P}_n^{-T})]^T \text{col} \Delta \mathbf{P}_n\} \quad (14)$$

$$\Delta \det \mathbf{P}_n = (\det \mathbf{P}_n) \cdot [\text{col}(\mathbf{P}_n^{-T})]^T \text{col} \Delta \mathbf{P}_n \quad (15)$$

$$\Delta \det \mathbf{P}_n \stackrel{(6)}{=} (\det \mathbf{P}_n) \cdot [\text{col}(\mathbf{P}_n^{-T})]^T \mathbf{H}_n \text{col} \Delta \mathbf{K} \quad (16)$$

$$\Delta \det \mathbf{P}_n \stackrel{(21)}{=} \mathbf{h}_n^T \text{col} \Delta \mathbf{K} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_n}{\partial \mathbf{K}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \mathbf{h}_n^T \text{col} \Delta \mathbf{K} = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{h}_n^T) \frac{\partial \text{col} \Delta \mathbf{K}}{\partial \mathbf{K}} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_n}{\partial \mathbf{K}} \stackrel{(57)}{=} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{h}_n^T) (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{U}_{n,m}) [(\text{col} \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n] \quad (19)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_n}{\partial \mathbf{K}} = [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{h}_n^T \mathbf{U}_{n,m})] [(\text{col} \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n], \quad (20)$$

where

$$\mathbf{h}_n^T \triangleq (\det \mathbf{P}_n) [\text{col}(\mathbf{P}_n^{-T})]^T \mathbf{H}_n. \quad (21)$$

2.2 Determinant of Lyapunov Submatrices

The derivation is now repeated for $\Delta \mathbf{P}_{n-1}$. The column $\text{col} \Delta \mathbf{P}_{n-1}$ is easily achieved from $\text{col} \Delta \mathbf{P}_n$ with the help of a reduction matrix \mathbf{R}_n

$$\text{col} \Delta \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{R}_n \text{col} \Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{H}_n \text{col} \Delta \mathbf{K}. \quad (22)$$

An example for the reduction matrix is given in Fig. 1.

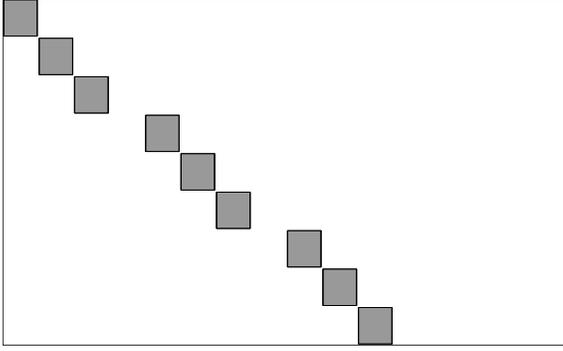


Figure 1: Reduction matrix \mathbf{R}_4 for $n = 4$. Zeros correspond to white background, ones to grey shaded

Repeating the derivation from Eq.(10) to Eq.(20), a replacement n by $n - 1$ and \mathbf{H}_n by $\mathbf{R}_n \mathbf{H}_n$ is required

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_{n-1}}{\partial \mathbf{K}} = [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{h}_{n-1}^T \mathbf{U}_{n,m})][(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n], \quad (23)$$

where

$$\mathbf{h}_{n-1}^T \triangleq \{\text{col } [\text{adj} \mathbf{P}_{n-1}]^T\}^T \mathbf{R}_n \mathbf{H}_n \in \mathcal{R}^{1 \times n^2}, \quad \mathbf{R}_n \in \mathcal{R}^{(n-1)^2 \times n^2} \quad (24)$$

and $(\det \mathbf{P}_n) \mathbf{P}_n^{-1}$ was replaced by $\text{adj } \mathbf{P}_n$.

The next step to $n - 2$ yields

$$\mathbf{h}_{n-2}^T \triangleq \{\text{col } [\text{adj} \mathbf{P}_{n-2}]^T\}^T \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{R}_n \mathbf{H}_n \in \mathcal{R}^{1 \times n^2}. \quad (25)$$

In such a way, derivations $\partial \mathbf{P}_{n-i} / \partial \mathbf{K}$ are carried out up to $i = n - 1$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_{n-i}}{\partial \mathbf{K}} = [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{h}_{n-i}^T \mathbf{U}_{n,m})][(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n] \quad (26)$$

$$\mathbf{h}_{n-i}^T \triangleq \{\text{col } [\text{adj} \mathbf{P}_{n-i}]^T\}^T \prod_{\nu=1}^i \mathbf{R}_{n-\nu+1} \mathbf{H}_n \in \mathcal{R}^{1 \times n^2}, \quad \mathbf{R}_n \in \mathcal{R}^{(n-1)^2 \times n^2}, \quad (27)$$

where

$$\mathbf{P}_{n-i} = \mathbf{P}([1 : n - i], [1 : n - i]) \quad \forall i = \{1, n - 1\} \quad (28)$$

is the $n - 1$ northwest main minor of \mathbf{P}_n .

A general algorithm is: For the smallest item out of the following set $\min\{\det \mathbf{P}_n, \det \mathbf{P}_{n-i}\}$, select

$$\Delta \mathbf{K} \propto \frac{\partial \frac{1}{\det \mathbf{P}_n}}{\partial \mathbf{K}} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \frac{1}{\det \mathbf{P}_{n-i}}}{\partial \mathbf{K}}, \quad (29)$$

where

$$\frac{\partial \frac{1}{\det \mathbf{P}_n}}{\partial \mathbf{K}} = -\frac{1}{(\det \mathbf{P}_n)^2} [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{h}_n^T \mathbf{U}_{n,m})] [(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n], \quad (30)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{\det \mathbf{P}_{n-i}}}{\partial \mathbf{K}} = -\frac{1}{(\det \mathbf{P}_{n-i})^2} [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{h}_{n-i}^T \mathbf{U}_{n,m})] [(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n]. \quad (31)$$

Rephrasing Eqs. (21) and (27), one has

$$\mathbf{h}_n^T \triangleq \text{col}^T(\text{adj} \mathbf{P}_n^T) \mathbf{H}_n \quad (32)$$

$$\mathbf{h}_{n-i}^T \triangleq \text{col}^T(\text{adj} \mathbf{P}_{n-i}^T) \prod_{\nu=1}^i \mathbf{R}_{n-\nu+1} \mathbf{H}_n. \quad (33)$$

3 Maximum Change of the Lyapunov Subdeterminant for Norm-Limited Uncertainty

Find the process uncertainty $\Delta \mathbf{A}$, limited in Frobenius norm, such that the increase of $\det \mathbf{P}_{n-i} \forall i = \{0, n-1\}$ is maximum

$$(\mathbf{A}_{cl} + \Delta \mathbf{A})^T (\mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n) + (\mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n) (\mathbf{A}_{cl} + \Delta \mathbf{A}) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (34)$$

$$\Delta \mathbf{A}^T \mathbf{P}_n + \mathbf{A}_{cl}^T \Delta \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_n \Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{A}_{cl} = \mathbf{0} \quad (35)$$

$$\text{col } \Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{J}_n \text{col } \Delta \mathbf{A}, \quad (36)$$

where

$$\mathbf{J}_n \triangleq -\check{\mathbf{A}}^{-T} [(\mathbf{P}_n \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U}_{n,n} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}_n)] \quad (37)$$

and the Kronecker sum with identical operands $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ is termed

$$\check{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{A} \oplus \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2}. \quad (38)$$

Defining

$$\mathbf{j}_{n-i}^T \triangleq \{\text{col} [\text{adj}^T(\mathbf{P}_{n-i})]\}^T \mathbf{R}_{n-i+1} \dots \mathbf{R}_n \mathbf{J}_n \quad \forall i = \{0, n-1\} \quad (39)$$

$$\Delta \det \mathbf{P}_{n-i} = \mathbf{j}_{n-i}^T \text{col } \Delta \mathbf{A}. \quad (40)$$

Optimization with norm a_0 , in order to obtain the maximum admissible uncertainty, yields

$$\Delta \det \mathbf{P}_{n-i} + \lambda \|\Delta \mathbf{A}\|_F^2 \rightarrow \max_{\text{col } \Delta \mathbf{A}} \quad (41)$$

$$\mathbf{j}_{n-i} + 2\lambda \text{col } \Delta \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (42)$$

$$\text{col } \Delta \mathbf{A} = \frac{a_0}{\sqrt{\mathbf{j}_{n-i}^T \mathbf{j}_{n-i}}} \mathbf{j}_{n-i} \quad \forall i = \{0, n-1\}. \quad (43)$$

Alternatively written,

$$\text{col } \Delta \mathbf{A} = -\frac{a_0}{\sqrt{(\text{col } \mathbf{P}_n^{-T})^T \mathbf{J}_n \mathbf{J}_n^T \text{col } \mathbf{P}_n^{-T}}} \mathbf{J}_n \text{col } \mathbf{P}_n^{-T}. \quad (44)$$

For the sensitivity with respect to the uncertainty, one finds

$$\Delta \det \mathbf{P}_n = (\det \mathbf{P}_n) (\text{col } \mathbf{P}_n^T)^T \text{col } \Delta \mathbf{P}_n \quad (45)$$

$$\Delta \det \mathbf{P}_n = (\det \mathbf{P}_n) (\text{col } \mathbf{P}_n^T)^T \mathbf{J}_n \text{col } \Delta \mathbf{A} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}_{n-i}}{\partial \Delta \mathbf{A}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{j}_{n-i}^T) \frac{\partial \text{col } \Delta \mathbf{A}}{\partial \Delta \mathbf{A}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{j}_{n-i}^T) (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{U}_{n,m}) (\text{col } \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_n). \quad (47)$$

4 Increments of $\det \mathbf{P}$ Triggered by \mathbf{Q}

From Eq.(1) one has

$$\check{\mathbf{A}}^T \text{col } \mathbf{P} = -\text{col } \mathbf{Q} \quad (48)$$

$$\text{col } \mathbf{P} = -\check{\mathbf{A}}^{-T} \text{col } \mathbf{Q} \quad (49)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \text{col } \Delta \mathbf{P}} \stackrel{(14)}{=} \det \mathbf{P} \cdot (\text{col } \mathbf{P}^{-T}) \quad (50)$$

$$\det(\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}) \stackrel{(15),(48)}{=} \det \mathbf{P} \cdot [1 + (\text{col } \mathbf{P}^{-T})^T (-\check{\mathbf{A}}^{-T} \text{col } \Delta \mathbf{Q})] \quad (51)$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \text{col } \mathbf{Q}} = -(\det \mathbf{P}) \check{\mathbf{A}}^{-1} \text{col } \mathbf{P}^{-T} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \ln \det \mathbf{P}}{\partial \text{col } \mathbf{Q}} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \text{col } \mathbf{P}} = -\check{\mathbf{A}}^{-1} \text{col } \mathbf{P}^{-T}. \quad (53)$$

By determining

$$\Delta \text{col } \mathbf{Q} \triangleq \alpha \frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \text{col } \mathbf{Q}} = -\alpha (\det \mathbf{P}) \check{\mathbf{A}}^{-1} \text{col } \mathbf{P}^{-T}, \quad (54)$$

$$\Delta \det \mathbf{P} \stackrel{(51)}{=} (\det \mathbf{P}) (\text{col } \mathbf{P}^{-T}) \check{\mathbf{A}}^{-T} \Delta \text{col } \mathbf{Q} \quad (55)$$

$$= -\alpha (\det \mathbf{P})^2 (\check{\mathbf{A}}^{-1} \text{col } \mathbf{P}^{-T})^T (\check{\mathbf{A}}^{-1} \text{col } \mathbf{P}^{-T}) < 0, \quad (56)$$

a check for guaranteed decrease is available.

5 Examples

Example 1. Sweeping the eigenvalues:

For a system $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -3.5a \end{pmatrix}$, the parameter a is increased from -4.9 to 9.9 . For $\mathbf{Q} = \text{diag}[-2 \quad -3]$ the Lyapunov matrix and its submatrix are calculated and their determinants are given in Fig. 2. In addition, the inverses are shown in the right-hand figure. A logarithmic-oriented saturation function is applied. The inverses of the determinants do not increase arbitrarily. Hence, shifting the poles of \mathbf{A} arbitrarily to the left is limited as can be seen in the right-hand part of Fig. 2. For $a = 1.8$ the maximum is reached. For the sake of illustration, in Fig. 3, left-hand part, $\lambda_{1,2}[\mathbf{A}]$ are presented versus the parameter a ; in the right-hand part, the step response for $a = 1.8$ is depicted, which would be a good choice for the design.

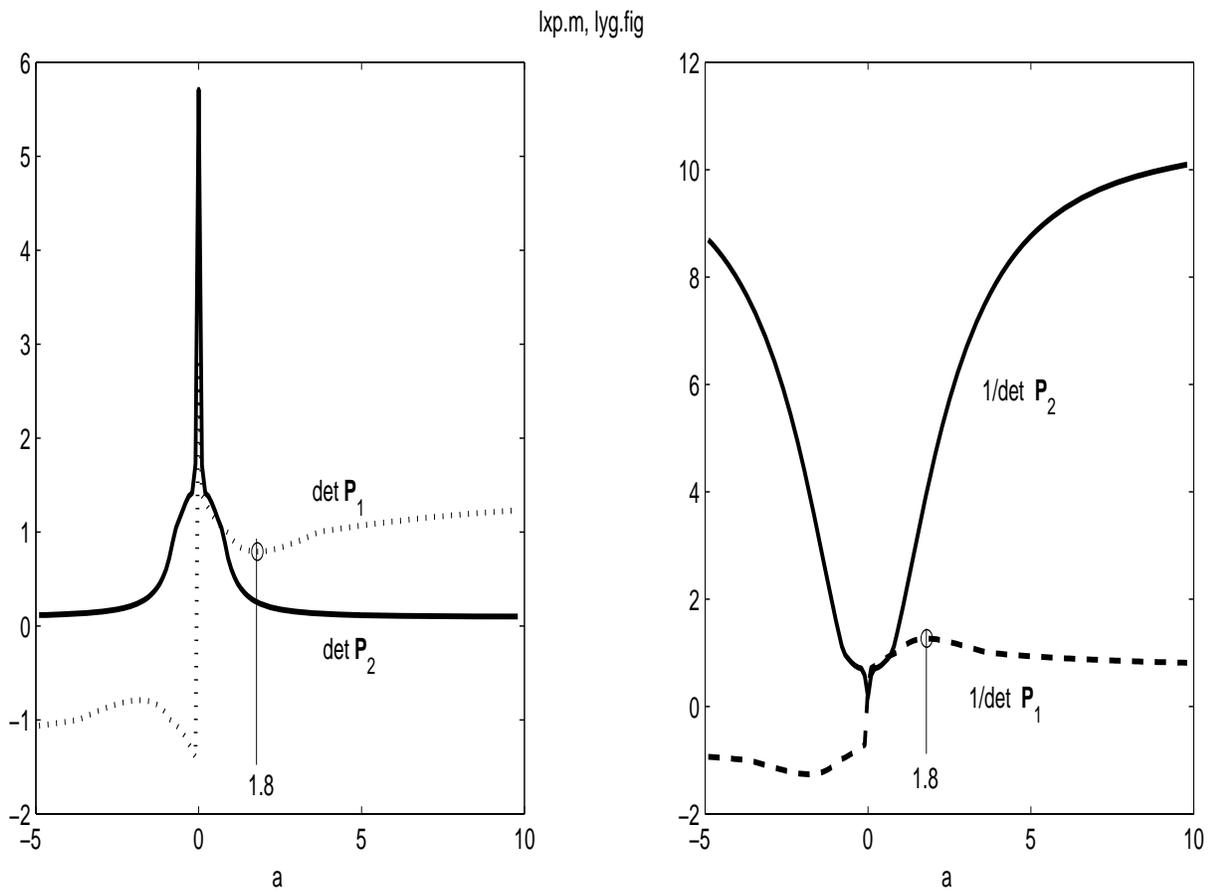


Figure 2: Determinant of the Lyapunov matrix and submatrix and their inverse for Example 1

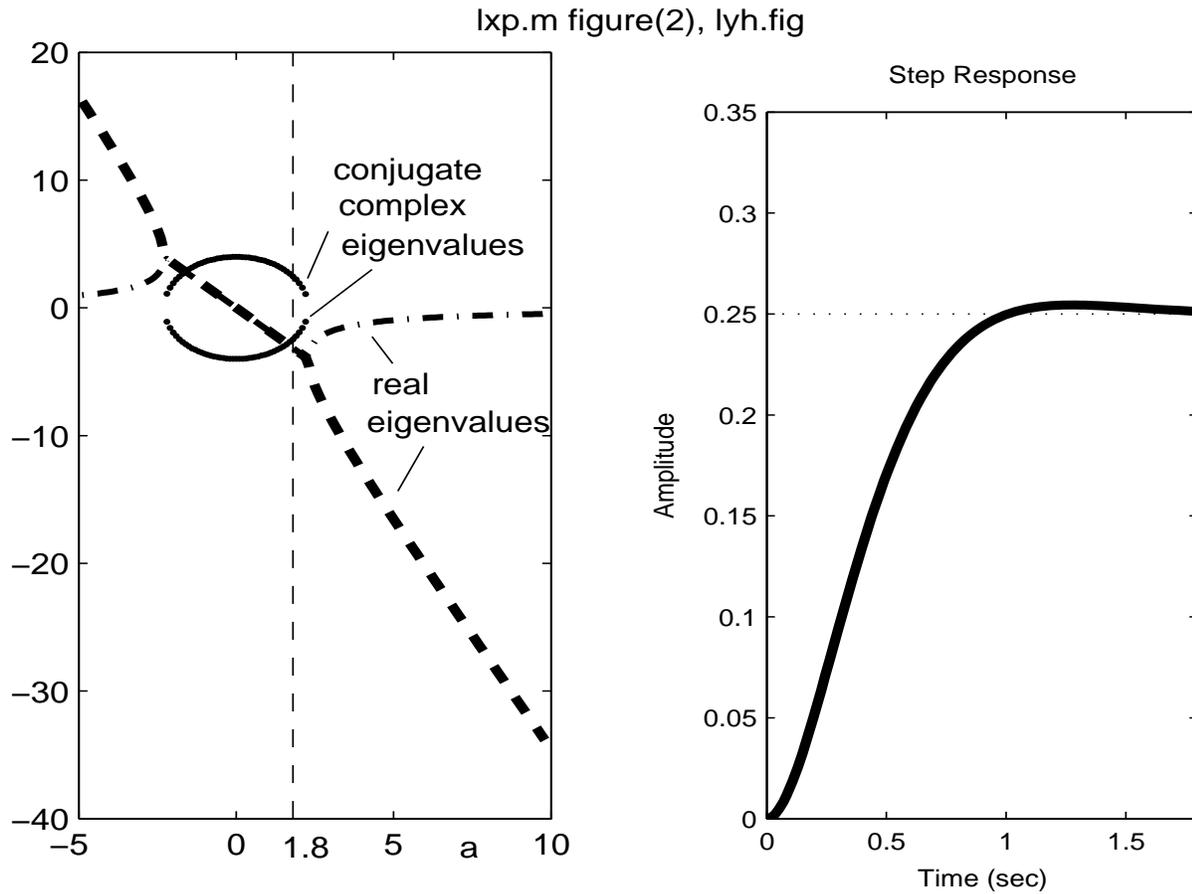


Figure 3: Eigenvalues and step response for the second-order Example 1. The left-hand diagram displays (1) the real eigenvalues on the ordinate and (2) the conjugate complex values (for $-8/3.5 < a < +8/3.5$) by their imaginary part on the circle and the real part on the line which is continued dashed for $|a| > 8/3.5$

Example 2. Gradients for a second-order system:

Starting with an unstable plant \mathbf{A} and the MATLAB notation setup

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 10 * [0 & 1; & -1 & 0.03] & \mathbf{B} &= [0; 1] \\ \mathbf{Q} &= - \text{diag}([\text{linspace}(1,2,2)]) & \mathbf{K} &= [0 & 0], \end{aligned}$$

seven steps are executed following the gradient of Eq.(32) and (33). The resulting determinants of the Lyapunov matrices are depicted in Fig. 4.

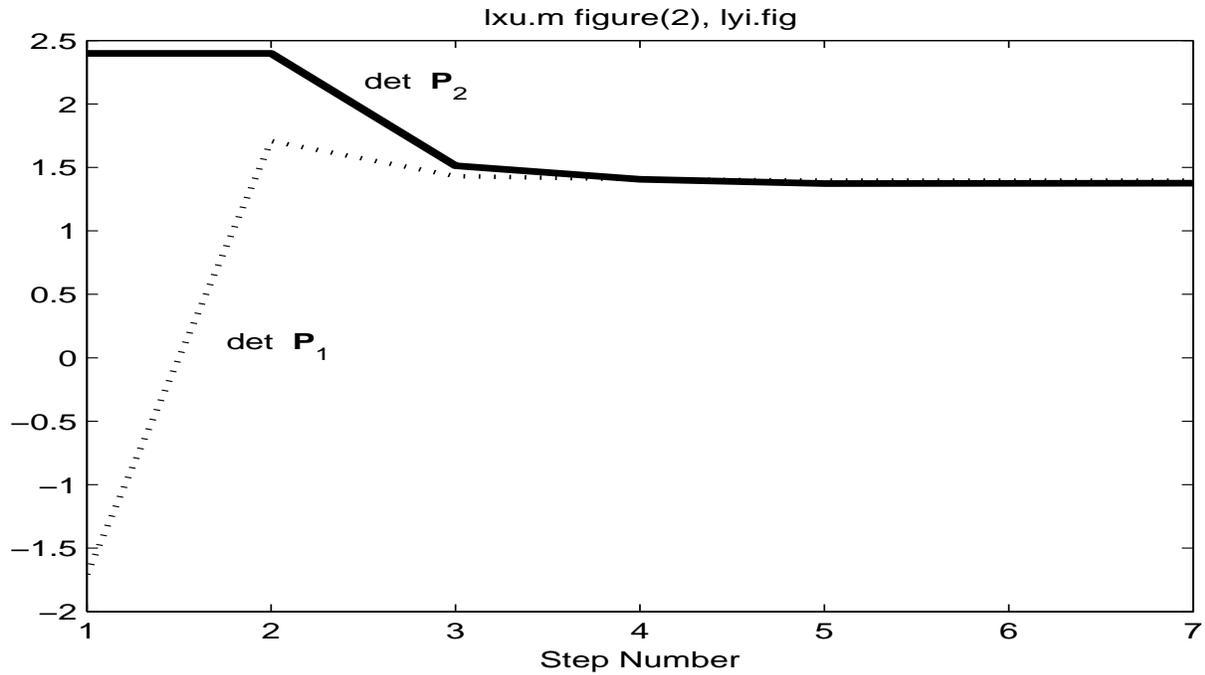


Figure 4: Determinant of Lyapunov matrices for the second-order Example 2

Example 3. Third-order system:

For the setup of an unstable plant \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0.2 & -0.03 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = -\text{diag}([\text{linspace}(1,2,3)]) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

three steps following the gradient are carried out. The resulting change in the closed-loop eigenvalues of $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ is given in the tabular in what follows

-0.9428	-0.3999	-0.3594
$0.4564 + 0.9232i$	$-0.1344 + 1.3495i$	$-0.2346 + 1.4630i$
$0.4564 - 0.9232i$	$-0.1344 - 1.3495i$	$-0.2346 - 1.4630i$

The determinants of the Lyapunov matrices are shown in Fig. 5. The optimum final \mathbf{K} is $\mathbf{K} = (0.43 \quad -2.52 \quad -0.83)$. The number of gradient-guided steps is left to the choice of the designer. The algorithm is self-stabilizing. However, for a superfluous number of steps it converges to 0, $-0.29 \pm j 1.71$ with monotonically increasing determinant and subdeterminants.

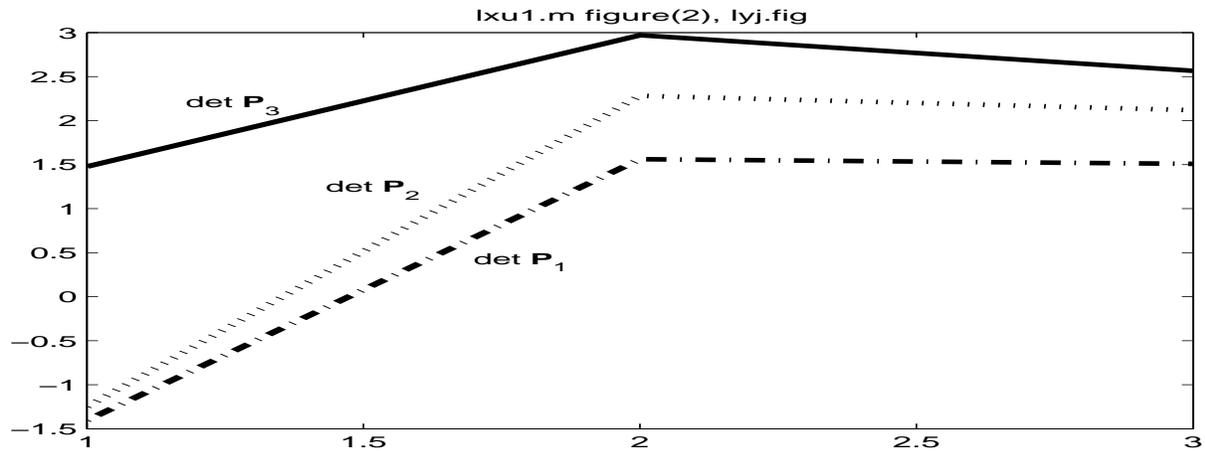


Figure 5: Determinant of Lyapunov matrices for the third-order Example 3

6 Conclusion

With the help of matrix analysis, the partial differential quotients of Lyapunov determinant and its subdeterminants with respect to the state controller matrix are derived. In such a way, the local vicinity of the stability boundary is investigated, both in the weakly stable and unstable range. The inverse of the Lyapunov determinant and its subdeterminants and their differential quotients are well prepared for a state controller design algorithm.

The maximum admissible Frobenius norm-limited uncertainty of the plant is also carried out and given by the property of producing the maximum change of the Lyapunov determinant.

References

- Föllinger, O., 1993,* Nichtlineare Regelungen I, 7. Auflage, (München, Wien: R. Oldenbourg)
- Franklin, G. F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A., 2002,* Feedback Control of Dynamic Systems, 4th edition (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall)
- Slotine, J.J., Weiping, Li, 1991,* Applied Nonlinear Control, (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall)
- Weinmann, A., 1995,* Regelungen, Band 2, 3. Auflage (Wien, New York: Springer)
- Weinmann, A., 2008,* Performance gradients in automatic control analysis, a catalogue of correspondences. *Int. J. Automation Austria* **16**, No. 1/2, pp. 1-59. See <http://www.acin.tuwien.ac.at/de/Publikationen/Zeitschriften/IJAA>

Appendix. Correspondences

The self-derivative of a columnized matrix is

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{col } \mathbf{K} = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{U}_{r,m})[(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r] \quad \left[\begin{array}{c} \text{(only for } m=1) \\ \mathbf{I}_r \end{array} \right]. \quad (57)$$

Taylor expansion of the determinant:

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{V}\Delta p) \Big|_{\Delta p \ll 1} \doteq \det \mathbf{A} + \frac{\partial \det(\mathbf{A} + \mathbf{V}\Delta p)}{\partial \Delta p} \Delta p \quad (58)$$

$$\doteq \det \mathbf{A} + \text{tr}[\mathbf{V} \text{adj} \mathbf{A}] \Delta p \quad (59)$$

$$\doteq \det \mathbf{A} + \text{tr}[\mathbf{V} \mathbf{A}^{-1}] \cdot \det \mathbf{A} \cdot \Delta p. \quad (60)$$

Numerically, the gradient is

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \mathbf{K}} = \text{matrix}_{ij} \left[\frac{\det[\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}(\Delta K_{ij})] - \det \mathbf{P}}{\Delta K_{ij}} \right]. \quad (61)$$

Instruction to authors – presented as a pattern paper (18 pt)

A. Maier, F. Huber (12 pt)
Department, Vienna, Austria

Received April 8, 1999

Abstract

This paper shows (italics, 12 pt)

1 General (14 pt)

Authors should prepare their manuscript camera ready, format A 4, 12 typeface and must present their manuscript in good quality. At the left/right edge 2.5 cm, at the top/bottom edge 3 cm. Authors are invited to use papers of this journal as a sample. Please do not use an eraser or erasing fluid. Footnotes should be avoided if possible. Authors are expected to submit their paper to one of the publishers (O.Univ.Prof.Dr. Peter Kopacek, Intelligent Handling Devices and Robotics, Vienna University of Technology, Favoritenstrasse 9-11, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801-31899 or O.Univ.Prof.Dr. Alexander Weinmann, Institute of Automation and Control, Vienna University of Technology, Gusshausstr. 27-29, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801 37699).

Email address for submitting pdf-manuscripts: weinmann@acin.tuwien.ac.at

2 References (14 pt)

Within the paper references should appear in the following form:

(Mayer, H., 1990) or (*Mayer, H., 1990*) (12 pt);

Mayer, H., 1990, discovered that....

3 Figures and Tables (14 pt)

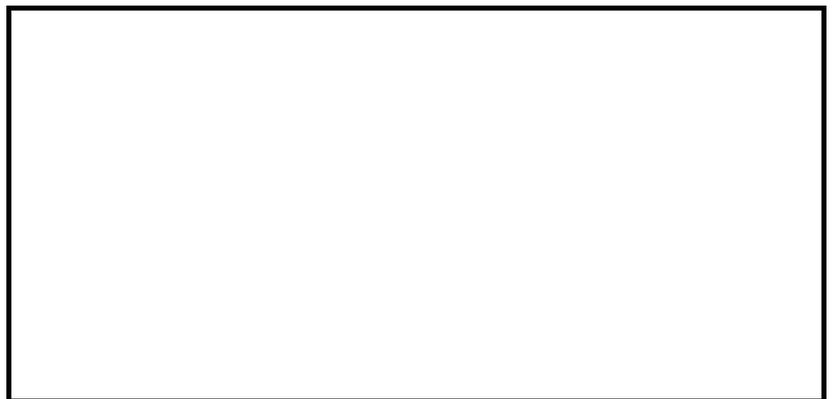
Figures and Tables should be integrated in the paper and have to be referred to as Fig. 4.1 or Tab. 5.2.

4 References

References are to be listed alphabetically according to first author. (11 pt)

5 Word Processing System/Editor

Microsoft Word for Windows 1.1 or higher; Microsoft Word 5.0; TeX or LaTeX.



Wenn unzustellbar, retour an:

IFAC-Beirat Österreich (E318 / E376)
Favoritenstraße 9-11, A-1040 Wien /
Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien