# INTERNATIONAL JOURNAL AUTOMATION AUSTRIA

Heft/2/im Jahrgang/21 (2013)

Inhalt	Seite
STOLZ, M., HOFER, A., SAMS, Th.,	42
Ein praxisgerechter Vorschlag zur Luftpfadregelung eines Dieselmotors	
STEINBERGER, M., HORN, M.,	53
Regelung eines elektromechanischen Aktuators zur Durchführung von Schalt- und Kupplungsvorgängen	
WEINMANN, A.,	63
Efficiency-based discrete-time nonlinear control system with piecewise-linear controller	
HOFBAUR, M., HUBER, J.,	75
Overview and comparison of filtering approaches for probabilistic hybrid estimation	
SCHLACHER, K.,	95
Geometrie und Regelungstechnik	



"International Journal Automation Austria" (IJAA) publishes top quality, peer reviewed papers in all areas of automatic control concerning continuous and discrete processes and production systems.

Only original papers will be considered. No paper published previously in another journal, transaction or book will be accepted. Material published in workshops or symposia proceedings will be considered. In such a case the author is responsible for obtaining the necessary copyright releases. In all cases, the author must obtain the necessary copyright releases before preparing a submission. Papers are solicited in both theory and applications

Before preparing submissions, please visit our instructions to authors (see back cover) or web page.

Copyright © IFAC-Beirat. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored, transmitted or disseminated, in any form, or by any means, without prior written permission from IFAC-Beirat, to whom all requests to reproduce copyright material should be directed, in writing.

International Journal Automation Austria also is the official executive authority for publications of IFAC-Beirat Österreich.

Imprint:	Propagation of Automatic Control in Theory and Practice.		
Frequency:	Aperiodically, usually twice a year.		
Publisher:	ublisher: IFAC-Beirat Österreich, Peter Kopacek, Alexander Weinmann		
Editors in C	hief: Alexander Weinma	nn, Peter Kopacek	
Coeditors:	Dourdoumas, N. (A)	Fuchs, H. (D)	Horn, M. (A)
	Jakubek, S. (A)	Jörgl, H. P. (A)	Kugi, A. (A)
	Noe, D. (SLO)	Schaufelberger, W. (CH)	Schlacher, K. (A)
	Schmidt, G. (D)	Troch, I. (A)	Vamos, T. (H)
	Wahl, F. (D)		
Address: 1)	<ul> <li>dress: 1) Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (E376), TU Wien, A-1040 Wien, Gußhausstrasse 27-29, Austria Phone: +43 1 58801 37677, FAX: +43 1 58801 37699 email: <u>danzinger@acin.tuwien.ac.at</u> Homepage: <u>http://www.acin.tuwien.ac.at/publikationen/ijaa/</u></li> </ul>		
2)	<ol> <li>Intelligente Handhabungs- und Robotertechnik (E325/A6), TU Wien, A-1040 Wien, Favoritenstrasse 9-11, Austria email: <u>e318@ihrt.tuwien.ac.at</u></li> </ol>		
Layout: Printing:	Rainer Danzinger Grafisches Zentrum an de	er TU Wien	

## Ein praxisgerechter Vorschlag zur Luftpfadregelung eines Dieselmotors

M. Stolz	A. Hofer	Th. Sams
Das virtuelle Fahrzeug	Institut für Regelungs- und	AVL List GmbH
Forschungs-GmbH	Automatisierungstechnik	PTE
Inffeldgasse 21a/I	Technische Universität Graz	Hans List Platz 1
8010 Graz, Austria	Kopernikusgasse 24/II	8020 Graz, Austria
michael.stolz@v2c2.at	8010 Graz, Austria	theodor.sams@avl.com
	anton hofer@tugraz_at	

Gewidmet Herrn O.Univ.-Prof. Dr. Nicolaos Dourdoumas anlässlich seiner Emeritierung.

## Abstract

Eine Motorsteuerung koordiniert das Zusammenspiel zahlreicher Komponenten des Motors und prägt dessen dynamisches Verhalten. Die Einstellung der derzeit ca. 20.000 Parameter einer Motorsteuerung gestaltet sich immer aufwändiger, da sowohl die Anzahl als auch die gegenseitige Abhängigkeit der Parameter stetig zunehmen. Von einer praxistauglichen Regelung in einer Motorsteuerung wird daher eine Struktur mit möglichst wenigen Parametern, sowie eine gut automatisierbare Einstellung erwartet.

Dieser Beitrag liefert einen Vorschlag für ein schlankes modulares Regelungskonzept und zeigt am Beispiel einer Mehrgrößenregelung des Luftpfads eines Dieselmotors mögliche Vorteile für den Motorentwicklungsprozess auf. Diese ergeben sich aus der einfachen Einstellung physikalisch deutbarer Parameter und der unabhängig durchführbaren Feinjustierung der Einzelmodule über aussagekräftige Einstellparameter während des Betriebs. Darüber hinaus erlaubt der Vorschlag die dynamische Motoreinstellung ohne die sonst wiederholt notwendige Neueinstellung der Regelung.

## **1** Motivation

Die Abgasgesetzgebung stellt zunehmend strengere Anforderungen an Dieselmotoren in Nutzfahrzeugen – einerseits durch sinkende Emissionsgrenzwerte andererseits durch hochdynamische Abnahmeläufe (siehe Abbildungen 1a und 1b).

Die Luftpfadreglung war seit Einführung dynamischer Prüfzyklen innerhalb der Euro3-Norm im Jahr 2000 Gegenstand vielfältiger regelungstechnischer Untersuchungen, da sie Ansprechund Emissionsverhalten stark beeinflusst. Auffallend ist, dass die in der Praxis seit langem etablierten PI(D) Regelkerne noch immer das dominante Regelprinzip darstellen (Schwarzmann et al., 2006), obwohl neben neuen Einstellregeln auch zahlreiche neue Regelstrategien veröffentlicht wurden (Jankovic, 2000; Jung, 2003; Gayaka et al., 2006; Richert, 2006; Nitsche, R. et al., 2007; Alfieri et al., 2009).

Der Schwerpunkt des vorliegenden Vorschlags liegt deshalb speziell auf einer besonders praxis-



Abbildung 1: Europäische Emissionsgesetzgebung für schwere Nutzfahrzeuge mit Strassenzulassung www.dieselnet.com

gerechten Ausführung des verwendeten modellbasierten Ansatzes zur Mehrgrößenregelung mit dem Ziel, die kostenintensive Motorabstimmung schneller und direkter zu gestalten.

## **2** Der Luftpfad eines Dieselmotors

Um den erwähnten, immer strenger werdenden Anforderungen zu entsprechen, besitzen moderne Dieselmotoren einen zunehmend komplexen Aufbau, dessen Koordination eine elektronische Motorsteuerung (ECU) übernimmt.

Eine Teilaufgabe der ECU besteht in der Regelung und Steuerung von variabler Abgasturboaufladung und variabler Abgasrückführung, welche einerseits der Leistungs- und Effizienzsteigerung sowie andererseits der Reduktion abgegebener Schadstoffe dienen. Abbildung 2 zeigt schematisch den im Weiteren untersuchten Luftpfad. Die für die Verbrennung benötigte Frischluft wird dabei über einen Kompressor verdichtet und gelangt nach der Ladeluftkühlung über das Saugrohr in die Zylinder. Nach der Verbrennung leistet ein Teil des Abgases Arbeit an der Turbine, welche den Kompressor antreibt. Der restliche Teil des Abgases wird gekühlt, der Frischluft zugefügt und gelangt erneut in die Zylinder, wodurch eine Reduktion der Stickoxidemissionen erreicht wird.



Abbildung 2: Schema eines einstufig turboaufgeladenen Dieselmotors mit variabler Turbinengeometrie (VTG) und variabler Abgasrückführung (AGR).

Um vom aktuellen Betriebspunkt (durch Motordrehzahl und Motordrehmoment bestimmt) abhängige Sollwerte für Frischluftmassenstrom und Saugrohrdruck zu erreichen, besitzt die Luftpfadregelung zwei Stellglieder: die Abgasrückführung (*AGR*) und die variable Turbinengeometrie (*VTG*). Beide Steller beeinflussen beide Ausgänge, wie das in Abbildung 3 angedeutet und in Abbildung 4 aus der Messung erkennbar ist. In der Literatur finden sich vielfach (nichtlineare) mathematische Modelle, beispielsweise bei (Kolmanovsky et al., 1997; Jung, 2003; Richert, 2006), die den Dieselluftpfad üblicherweise mit 6 bis 8 Zuständen beschreiben.

Einer modellbasierten Abstimmung der Luftpfadregelung geht üblicherweise die Parametrierung des nichtlinearen Modells, die Linearisierung in Arbeitspunkten, eine Zeitdiskretisierung sowie eine Ordnungsreduktion voraus. Speziell die Abstimmung der nichtlinearen Bauteileigenschaften von Turbine, Kompressor, Motorreibung und Verbrennungstemperatur ist mit erheblichem Aufwand verbunden, da diese oft phänomenologisch modelliert werden (Guzzella & Onder, 2009; Zahn, 2010; Dinescu & Tazerout, 2010).



Abbildung 3: Blockschaltbild des zu regelnden Mehrgrößensystems

Abbildung 4: Wirkung sprungförmig variierender Eingangssignale (AGR- und VTG-Steller) auf Ausgänge von Strecke und Modell.

Mit Blick auf eine möglichst praxisgerechte (und leicht automatisierbare) Umsetzung wird hier ein direkter Weg eingeschlagen und die Parameter der benötigten linearen zeitinvarianten (*LZI*) Arbeitspunktmodelle aus entsprechenden Messungen (wie in Abbildung 4) mithilfe von Parameter-Identifikation ermittelt.

Untersuchungen an verschiedenen Arbeitspunkten zeigen, dass das Ein-Ausgangsverhalten der Strecke durch ein Modell 2-ter Ordnung ohne Durchgriff ausreichend genau abgebildet werden kann. Abbildung 4 verdeutlicht das anhand eines Vergleichs von Messung und Simulation bei gleicher Anregung.

## 3 Luftpfadregelung

Abbildung 5 zeigt den üblichen Aufbau einer PID-Struktur in Motorsteuerungen. Vorsteuerung und Reglerparameter werden meist abhängig vom Betriebspunkt (Motordrehzahl *n* und Motor-

moment M), vom Sollwert r und vom Sensorwert y über umfangreiche Kennfeldstrukturen angepasst. Das dynamische Verhalten ergibt sich im Zusammenspiel von Regler und Strecke. Eine Anpassung ist zwar theoretisch direkt möglich, aufgrund der Parameterfülle praktisch aber sehr aufwändig. Führungs- und Störverhalten hängen oft von gemeinsamen Parametern ab und stehen dadurch eng miteinander in Beziehung. Innerhalb der Motorentwicklung erweist sich der Umstand einer aufwändigen dynamischen Motorabstimmung zunehmend als Nachteil, weil gerade dem dynamischen Emissionsverhalten des Motors durch die transienten Testzyklen eine immer stärkere Bedeutung zukommt.





Abbildung 5: Struktur üblicher Eingrößen-(PID)-Regelung

Abbildung 6: Struktur modulare Mehrgrößen-Regelung

Abbildung 6 zeigt den Vorschlag für einen modularen Aufbau. Die einzelnen Module beeinflussen nahezu unabhängig voneinander jeweils nur bestimmte Eigenschaften des dynamischen Verhaltens und erlauben so eine sehr direkte Einstellung und Anpassung. Die Einzelmodule haben folgende Aufgaben:

- $R_{ffs}$  Die statische Vorsteuerung liefert die stationären vom momentanen Betriebspunkt [M, n] abhängigen Sollwerte  $\mathbf{y}_S$  (bzw. *r* in der konventionellen Struktur) und die entsprechenden notwendigen Stellerwerte  $\mathbf{u}_S$ . Die beiden Teile sind im Allgemeinen bereits in der konventionellen Struktur enthalten und können einfach übernommen werden.
- $R_{ffd}$  Die dynamische Vorsteuerung liefert einen gefilterten Sollwert  $\mathbf{y}_{ff}$ , der im idealen Fall dem Ausgang der Strecke entspricht, wenn die entsprechenden dynamischen Stellerwerte  $\mathbf{u}_{ff}$  am Streckeneingang wirken.
- $R_{fb}$  Der Regler ermöglicht stationäre Genauigkeit, auch wenn unbekannte Störungen  $\mathbf{q}^*$  auf die Strecke wirken oder das Streckenverhalten vom nominellen Verhalten abweicht. Bei einer Abweichung zwischen erwartetem Sensorwert  $\mathbf{y}_{ff}$  und (korrigiertem) Sensorwert  $\mathbf{y}_{nsat}$  besteht das Ausgabesignal  $\mathbf{u}_c$  aus dem momentanen Vorsteuerwert  $\mathbf{u}_{ff}$  erweitert um den Rückführanteil zur Korrektur der Abweichung.
- $R_{aw}$  Das Anti-Windup-System verhindert im Wesentlichen das unbegrenzte Anwachsen des Integrator-Teils im Regler, welches durch Stellerlimitierungen  $\mathbf{u}_{lim}$  verursacht werden kann (Gausch & Pristauz, 1993). Dies geschieht durch Ausgabe eines korrigierten Sensorwerts  $\mathbf{y}_{nsat}$ .

Da sie für den Entwurf der Regelung von entscheidender Bedeutung sind, wird im Folgenden zunächst auf die speziellen Eigenschaften des Modells eingegangen. Danach werden bis auf die stationäre Vorsteuerung, die Module einzeln für den zeitkontinuierlichen Fall erläutert. Der notwendige Übergang zu den jeweiligen zeitdiskreten Varianten erfolgt im Anschluss für alle Module gemeinsam.

### 3.1 Besondere Eigenschaften der linearisierten Streckenmodelle

Es werden nun die besonderen Eigenschaften der linearisierten Streckenmodelle kurz zusammengefasst, denn von diesen wird in weiterer Folge ausgiebig Gebrauch gemacht.

Das gewonnene Streckenmodell 2-ter Ordnung mit 2 Eingängen und 2 Ausgängen ohne Durchgriff besitzt für alle Arbeitspunkte folgende Eigenschaften: Die Eingangsmatrix hat vollen Spalten- und die Ausgangsmatrix vollen Zeilenrang. Darüber hinaus ist das System asymptotisch stabil, die beiden Eigenwerte von A besitzen also einen negativen Realteil. Aufgrund dieser Eigenschaften sind A, B, C quadratische, reguläre Matrizen gleicher Dimensionen und das Modell ist vollständig steuer- und beobachtbar. Obwohl in den Einzelübertragungspfaden Nullstellen vorkommen können (Kolmanovsky et al., 1997), besitzt das verwendete linearisierte Mehrgrößensystem mit den erwähnten Eigenschaften *keine* Nullstellen (Skogestad & Postlethwaite, 2005). Speziell die letzte Eigenschaft stellt eine große Freiheit bei der Reglerauslegung sicher, denn die interne Stabilität der geregelten Strecke ist nicht durch unerlaubte Kürzungen in der Übertragungsfunktionsmatrix gefährdet.

### 3.2 Dynamische Vorsteuerung

Ausgangspunkt ist das zeitkontinuierliche lineare Streckenmodell G im Zeitbereich:

$$G: \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{1}$$

Zeitliches Ableiten des Ausgangs y und Rückeinsetzen der Differentialgleichung führt auf

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right). \tag{2}$$

Wegen der Regularität von A, B und C lässt sich u in Abhängigkeit von y und y ausdrücken:

$$,,G^{-1}``: \qquad \mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{CB})^{-1}}_{=:\mathbf{P}_1} \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{(-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}}_{=:\mathbf{P}_2} \mathbf{y}$$
(3)

Nun wird der gewünschte Verlauf des Ausgangs und seiner zeitlichen Ableitung gemäß einer Solltrajektorie vorgegeben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_t \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}_t \tag{4}$$

Wird pro Kanal ein Tiefpassfilter 1-ter Ordnung mit stationärem Verstärkungsfaktor Eins vorgesehen, lässt sich die Solltrajektorie  $\mathbf{y}_t$  gemäß

$$T: \qquad \dot{\mathbf{y}}_{t} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{t,1} & 0\\ 0 & f_{t,2} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{F}_{t}} (\mathbf{y}_{S} - \mathbf{y}_{t}) \quad \text{mit} \quad f_{t,1}, f_{t,2} > 0$$
(5)

aus dem Verlauf der stationären Sollwerte  $\mathbf{y}_S$  im Betrieb erzeugen. Der Fein-Einstellparameter  $\mathbf{F}_t$  besitzt als Diagonalelemente die inversen Zeitkonstanten der beiden Kanäle und ermöglicht eine einfache, kanalweise unabhängige Einstellung des Sollverhaltens.

Der beschrieben Aufbau führt zu einer kanalweisen Entkoppelung der ursprünglich verkoppelten Übertragungspfade, da das System nun im nominellen Fall der (entkoppelten) Solltrajektorie folgt. Der Einfluss der bekannten Störgröße  $\mathbf{q} = [M, n]$ , der aufgrund von Betriebspunktwechseln (und der damit verbundenen geänderten stationären Vorsteuerung) auftritt, kann in ähnlich einfacher Weise durch ein Filter N berücksichtigt werden, wie das in Abbildung 7 gezeigt ist. Die zu Beginn erwähnte Trennung der Parameter wird nun offensichtlich:  $G^{-1}$  und N enthalten nur Streckenparameter, T besitzt nur Parameter der Solltrajektorien.



Abbildung 7: Vorsteuerung mit Störgrößenkompensation, Trajektorienfilter und "invertierter" Strecke



Abbildung 8: Regelkreis mit parametrisiertem Regler (Horn & Dourdoumas, 2004)

#### 3.3 Regler

Folgt man Abbildung 8 und setzt unter Berücksichtigung von (3) und (5) für die Steuerung

$$Q(s) = G^{-1}(s)T(s)$$
(6)

und ersetzt  $\mathbf{F}_t$  durch  $\mathbf{F}_{fb}$ , entsteht nach geeigneten Umformungen eine Regelung R(s) innerhalb von  $R_{fb}$ . Diese entspricht einem PI-Regler und ist über die Streckenparameter  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  sowie den Fein-Einstellparameter  $\mathbf{F}_{fb}$  parametrisiert:

$$\boldsymbol{R}(s) = \left(\mathbf{P}_1 + \frac{1}{s}\mathbf{P}_2\right)\mathbf{F}_{fb} \tag{7}$$

Die Diagonalelemente von  $\mathbf{F}_{fb}$  sind die Inversen der Zeitkonstanten mit denen pro Kanal der Messwert  $\mathbf{y}$  dem dynamischen Vorsteuerwert  $\mathbf{y}_{ff}$  folgt.

#### 3.4 Anti-Windup-System

Abbildung 9 zeigt das Anti-Windup-System  $R_{aw}$ . Es verhindert ein unbegrenztes Anwachsen des Integrators im Regler, indem es die Wirkung  $y_{\delta}$  der "*abgeschnittenen*" Stellersignale  $u_{\delta}$ über ein Modell berechnet und zum Messwert addiert. Aus Sicht des Reglers besitzt dadurch die Strecke *keine* Stellerbegrenzungen. Die Rückführung **K** der Modellausgänge holt "*Versäumtes*" auf, wenn dies die Begrenzungen zulassen. Es soll nun, um die Zahl der Parameter zu senken und die Einstellung zu erleichtern, die Rückführung **K** über die bereits verwendeten Basisparameter **P**<sub>1</sub>, **P**<sub>2</sub> und einen weiteren Fein-Einstellparameter **F**<sub>aw</sub> parametrisiert werden. Dazu wird (5) unter Berücksichtigung von (4) in (3) eingesetzt und **F**<sub>t</sub> durch **F**<sub>aw</sub> ersetzt. Nun lässt sich **u** abhängig von **y**<sub>s</sub> und **y**<sub>t</sub> beschreiben:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_1 \mathbf{F}_{aw} \mathbf{y}_S - (\mathbf{P}_1 \mathbf{F}_{aw} - \mathbf{P}_2) \mathbf{y}_t$$
(8)



Abbildung 9: Anti-Windup-System R<sub>aw</sub> zur Kompensation von Stellgrößenbeschränkungen (Schneider, 1986; Gausch & Pristauz, 1993; Teel & Kapoor, 1997)

Im Standardregelkreis mit Rückführung **K** und Vorfilter **V** berechnet sich **u** in Abhängigkeit von **r** (entspricht hier  $\mathbf{y}_S$ ) und **y** (entspricht hier  $\mathbf{y}_t$ ) zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{y}.\tag{9}$$

Ein Koeffizientenvergleich von (8) und (9) liefert die Rückführung

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_1 \mathbf{F}_{aw} - \mathbf{P}_2. \tag{10}$$

Auch das Modell *G* der Strecke innerhalb von  $R_{aw}$  kann mit  $P_1$  und  $P_2$  parametrisiert werden. Im Frequenzbereich lässt sich G(s) kompakt darstellen zu:

$$G(s) = \mathbf{P}_1^{-1} \left( s \mathbf{E} + \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^{-1} \right)^{-1}$$
(11)

**E** symbolisiert dabei die Einheitsmatrix der Dimension zwei. Somit lässt sich auch das Anti-Windup-System in Abhängigkeit der bereits verwendeten Basisparameter und zusätzlicher Fein-Einstellparameter darstellen<sup>1</sup>. Der Fein-Einstellparameter  $\mathbf{F}_{aw}$  legt im wesentlichen fest, wie schnell *"Veräumtes"* aufgeholt wird, beziehungsweise welcher Kanal im Fall von Stellerbegrenzungen zu bevorzugen ist. Die Diagonalelemente von  $\mathbf{F}_{aw}$  sind hier die inversen Zeitkonstanten mit denen die einzelnen Ausgänge  $\mathbf{y}_{\delta}$  des Modells aufgrund der Rückführung **K** abklingen.

#### 3.5 Zeitdiskrete Variante

Die bisherigen Betrachtungen waren zeitkontinuierlicher Natur. Eine konkrete Anwendung erfordert aber eine zeitdiskrete Umsetzung, wobei im vorliegenden Fall eine für alle Module einheitliche Abtastperiode  $\Delta$  angenommen wird. Dazu sei an dieser Stelle der Kürze wegen ohne Beweis folgendes angemerkt: Die Struktur der besprochenen zeitkontinuierlichen Module kann direkt auch für eine zeitdiskrete Regelung verwendet werden, wenn im Blockschaltbild Umformungen entsprechend Tabelle 1 vorgenommen werden. Die so erstellte zeitdiskrete Regelung erzeugt zu den Abtastzeitpunkten ein dem zeitkontinuierlichen Fall entsprechendes Systemverhalten.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Die Existenz von  $P_1^{-1}$  ist aufgrund der Regularität von **B** und **C** gesichert.

Verwendet man im zeitdiskreten Bildbereich dieselben Symbole wie im Zeitbereich und verzichtet auf die Erwähnung der Abhängigkeit von der komplexen Variable z, ergibt sich beispielsweise für den Ausgang des zeitdiskreten Reglermoduls  $R_{fb}$ 

$$\mathbf{u}_{c} = \mathbf{u}_{ff} + \left[\underbrace{\Delta(\mathbf{CB}_{d})^{-1}}_{\mathbf{P}_{1,d}} + \frac{\Delta}{z-1}\underbrace{\left(\mathbf{C}(\mathbf{E}-\mathbf{A}_{d})^{-1}\mathbf{B}_{d}\right)^{-1}}_{\mathbf{P}_{2,d}}\right]\underbrace{\frac{1}{\Delta}\left(\mathbf{E}-e^{-\mathbf{F}_{fb}\Delta}\right)}_{\mathbf{F}_{fb,d}}\underbrace{\left(\mathbf{y}_{ff}-\mathbf{y}_{nsat}\right)}_{e}, \quad (12)$$

wobei für die Parameter  $A_d$  und  $B_d$  der zeitdiskreten Strecke

$$\mathbf{A}_{d} = e^{\mathbf{A}\Delta} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{d} = \int_{0}^{\Delta} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau$$
(13)

gilt.

Block	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
Dyn. Element	$\frac{1}{s}$	$\frac{\Delta}{z-1}$
Fein-Einstellparameter	$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 & 0\\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$	$rac{1}{\Delta}\left(\mathbf{E}-e^{-\mathbf{F}\Delta} ight)$
$\mathbf{P}_1 = \left[\lim_{s \to \infty} sG(s)\right]^{-1}$	$(\mathbf{CB})^{-1}$	$\Delta(\mathbf{CB}_d)^{-1}$
$\mathbf{P}_2 = \left[\lim_{s \to 0} G(s)\right]^{-1}$	$-\left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}$	$= \left( \mathbf{C} \left( \mathbf{E} - \mathbf{A}_d \right)^{-1} \mathbf{B}_d \right)^{-1}$

 Tabelle 1: Korrespondenztabelle Implementierung.

#### 3.6 Einstellprozess

Aus der gezeigten linearen Regelung entsteht eine nichtlineare Regelung, indem alle Parameter über den in Motorsteuerungen seit langem etablierten Gain-Scheduling-Ansatz in Kennfeldern abhängig vom Betriebspunkt abgelegt und später im Betrieb abgerufen werden. Der Einstellprozess verläuft *sequenziell* in drei Schritten:

- *Messung:* Zu Beginn werden die zeitdiskreten Basisparameter  $\mathbf{P}_{1,d}$  und  $\mathbf{P}_{2,d}$  aus entsprechenden Messungen, beispielsweise wie in Abbildung 4 gezeigt, mithilfe von Parameteridentifikation ermittelt. Auch die Parameter des Störgrößenmodells werden aus Lastpunktänderungen bei lediglich stationärer Vorsteuerung bestimmt.
- *Reglereinstellung:* In einem zweiten Schritt erfolgt die Abstimmung der Bandbreite  $\mathbf{F}_{fb}$  der Regelung. Der Parameter  $\mathbf{F}_{aw}$  kann zu Beginn aus  $\mathbf{F}_{fb}$  übernommen und falls notwendig adaptiert werden.
- *Trajektorien:* Für diesen Schritt stehen die Parameter  $\mathbf{F}_t$  der Solltrajektorien zur gezielten Einstellung des Emissionsverhaltens innerhalb der Motorabstimmung zur Verfügung. Eine Verstellung von  $\mathbf{F}_t$  kann nun im Gegensatz zur Herangehensweise bei konventioneller Reglerstruktur *ohne* Neuauslegung der Gesamtregelung erfolgen und vermeidet dadurch eine wiederholte Ausführung von Schritt zwei.

## 4 Erprobung

Die vorgeschlagene Regelung wurde an einem Entwicklungsmotor (10 Liter Hubraum) erprobt. Die Abtastrate betrug wie in Motorsteuerungen üblich 10 *ms*. Abbildung 10a zeigt ein gutes Folgeverhalten bei variierendem Betriebspunkt.

Den Einfluss unterschiedlicher Parameter der Solltrajektorien auf das dynamische Verhalten bei Lastrampen und konstanter Drehzahl verdeutlicht Abbildung 10b. In allen drei Experimenten in Abbildung 10b wurden *gleiche Reglereinstellungen* und *gleiche stationäre Sollwerte* verwendet. Alleine durch die Änderung der Trajektorienparameter konnten so die  $NO_x$  Emissionen, die während der Lastrampe entstehen, angepasst werden.



(b) Einfluss unterschiedlicher Parameter der Solltrajektorien auf das Emssionsverhalten bei Lastrampen bei 1500 U/min

Abbildung 10: Ergebnisse der Erprobung an einem modifizierten Nutzfahrzeugmotor

Ein im Vergleich zum Ladedruckaufbau  $(f_{t,2} = 0.7s^{-1})$  schnellerer Aufbau des Luftmassenstromes  $(f_{t,1} = 1.6s^{-1})$  führt zu einer im Übergang niedrigen AGR-Rate und erhöht dadurch sowohl den Abgasmassenfluss als auch die Konzentration der Stickstoffoxide ( ---- ). Demgegenüber resultiert aus gleich schnellen Solltrajektorien  $(f_{t,1} = 1s^{-1}, f_{t,2} = 1s^{-1})$  für beide Kanäle eine geringere Konzentration der Stickstoffoxide im dynamischen Übergang ( ---- ). Die Anpassung des dynamischen Emissionsverhaltens allein über unterschiedlich schnelle Abstimmung der Kanaldynamiken erlaubt eine sehr übersichtliche Einstellung. Werden die Trajektorienparameter abhängig vom Betriebspunkt definiert, erlaubt das eine vom Betriebspunkt abhängige Anpassung der AGR-Rate im transienten Übergang. Eine derart einfache Einstellung ist mit einer konventionellen Reglerstruktur nicht möglich.

## 5 Zusammenfassung

In konventionellen Motorsteuerungen ist das Emissionsverhalten bei dynamisch wechselnden Betriebszuständen abhängig von den Parametern der Luftpfadregelung. Die sogenannte Verbrennungsentwicklung als Teilaufgabe im Motorabstimmungsprozess erfordert also zwangsläufig eine ständig neue Reglerauslegung für den Luftpfad. Die konventionelle Reglerstruktur führt so zu einer starken Verflechtung von Regelungsaufgaben und Verbrennungsentwicklung. Hier leistet die vorgelegte Arbeit einen Beitrag, den Prozess der Motorabstimmung zu verbessern, indem sie die beiden Teilaufgaben *Einstellung der Regelung* und *Einstellung der Solltrajektorien* (Verbrennungsentwicklung) separiert. Dadurch sinkt einerseits die Komplexität der Einzelaufgaben und andererseits wird die Abarbeitung besser automatisierbar. Die Auftrennung der Parameter des Regelkonzepts in Basisparameter und eigene Fein-Einstellparameter ist ein wesentlicher Beitrag dazu. Darüber hinaus ermöglicht die gezeigte Wiederverwendung der Basisparameter in den Modulen, die Gesamtzahl der einzustellenden Parameter stark zu senken. Die sehr geringe Anzahl der unabhängigen Parameter begünstigt eine effiziente und effektive

Abarbeitung der Motorabstimmung. Die physikalische Interpretierbarkeit erleichtert zusätzlich die Einstellarbeit. Die Einträge der Fein-Einstellparameter entsprechen inversen Zeitkonstanten. Die beiden Basisparameter lassen sich als die Inverse der Steigung der Sprungantwort und als die Inverse der stationären Streckenverstärkung interpretieren.

Das Konzept wurde erfolgreich im Prüfstandsbetrieb auf einem Nutzfahrzeugmotor erprobt, es eignet sich aber auch für die dynamische Regelung entsprechender Simulationsmodelle mithilfe einer *virtuellen* ECU.

#### Danksagung

Die Autoren danken dem COMET K2 Forschungsförderungs-Programm des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (BMVIT), des Österreichischen Bundesministeriums für Wirtschaft, Familie und Jugend (BMWFJ), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), des Landes Steiermark sowie der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG) für die finanzielle Unterstützung.

Ebenfalls danken wir dem wissenschaftlichem Projektpartner Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz und dem Industriepartner AVL List GmbH.

## Literatur

- Alfieri, E., Amstutz, A., & Guzzella, L. (2009). Gain-scheduled model-based feedback control of the air/fuel ratio in diesel engines. *Control Engineering Practice*, *17*(12), 1417–1425.
- Dinescu, D. C. & Tazerout, M. (2010). Mean Value Modeling of a Variable Nozzle Turbocharger (VNT). *Scientific Bulletin Series D*, 72(1).
- Gausch, F. & Pristauz, H. (1993). Kompensation von Stellgrössenbeschränkungen. *e&i Sonderheft Automatisierungstechnik*, 7/8, 392–397.
- Gayaka, S., Yao, B., & Meckl, P. H. (2006). A Multivariable Approach to EGR-VGT Actuator Control Problem. *ASME Conference Proceedings*, 2006(47683), 307–314.
- Guzzella, L. & Onder, C. H. (2009). *Introduction to modeling and control of internal combustion engine systems*. Berlin ; New York, NY: Springer.
- Horn, M. & Dourdoumas, N. (2004). Regelungstechnik, Rechnergestützer Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise. Pearson Studium.
- Jankovic (2000). Constructive Lyapunov Control Design for Turbocharged Diesel Engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2), 288 299.
- Jung, M. (2003). *Mean-Value Modelling and Robust Control of the Airpath of a Turbocharged Diesel Engine*. Ph.D. thesis, University of Cambridge.
- Kolmanovsky, I., Moraal, P., Van Nieuwstadt, M., & Stefanopoulou, A. G. (1997). Issues in Modelling and Control of Intake Flow In Variable Geometry Turbocharged Engines. In *Proceedings of the 18th IFIP conference on system modelling and optimisation*.
- Nitsche, R., Schwarzmann, D., & Hanschke, J. (2007). Modèle interne non-linéaire pour le contrôle des systèmes d'air dans les moteurs diesel. *Oil & Gas Science and Technology Rev. IFP*, 62(4), 501–512.
- Richert, F. (2006). *Objektorientierte Modellbildung und Nichtlineare Prädiktive Regelung von Dieselmotoren.* Ph.D. thesis, RWTH Aachen.
- Schneider, G. (1986). Was du heut' nicht kannst besorgen, das verschiebe halt auf morgen Eine generelle Methode zur Kompensation von Stellerbeschränkungen. *Automatisierungstechnik*, *34*(2), 59–65.
- Schwarzmann, D., Nitsche, R., & Lunze, J. (2006). Diesel boost pressure control using flatness-based internal model control. In *SAE 2006 World Congress & Exhibition, Detroit*. SAE International.
- Skogestad, S. & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2nd ed.). Wiley-Interscience.
- Teel, A. R. & Kapoor, N. (1997). The  $\mathscr{L}_2$  Anti-Windup Problem: Its Definition and Solution. In *Proceedings of the 4th European Control Conference, ECC'97.*
- www.dieselnet.com. zuletzt aufgerufen: 2.4.2013.
- Zahn, S. (2010). Mittelwert- und Arbeitstaktsynchrone Simulation von Dieselmotoren. In R. Isermann (Ed.), *Elektronisches Management motorischer Fahrzeugantriebe* (pp. 103). Vieweg+Teubner Verlag.

## Regelung eines elektromechanischen Aktuators zur Durchführung von Schaltund Kupplungsvorgängen

Martin Steinberger, Martin Horn

Institut für Intelligente Systemtechnologien Regelungstechnik und mechatronische Systeme Alpen-Adria Universität Klagenfurt Universitätsstraße 65-67, A-9020 Klagenfurt e-mail: martin.steinberger@ieee.com

Gewidmet Herrn Univ.-Prof. Nicolaos Dourdoumas zur Emeritierung

### Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der modellbasierten Regelung eines Aktuators zur Durchführung von Schalt- und Kupplungsvorgängen im Hauptgetriebe eines PKW. Grundlage für die Reglersynthese ist ein vereinfachtes mathematisches Streckenmodell, das aus einer analytischen Modellbildung hervorgeht. Für den Reglerentwurf wird ein auf Frequenzkennlinien basierendes Verfahren eingesetzt, welches die explizite Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen erlaubt. Die Leistungsfähigkeit des entworfenen Regelgesetzes wird an einem komplexen Simulationsmodell der Regelstrecke demonstriert.

## 1 Einleitung

Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der Regelung des in Abb. 1 gezeigten elektromechanischen Aktuators, der im Hauptgetriebe eines PKW eingesetzt wird. Er ermöglicht sowohl die Betätigung einer Kupplung als auch das mechanische Umschalten zwischen verschiedenen Getriebeübersetzungen. Die Wahl zwischen den beiden Betriebszuständen "Kuppeln" und "Schalten" erfolgt mittels eines Schaltmagneten. Im Betriebszustand "Kuppeln" wird über die Schaltklaue eine Verbindung zwischen dem Aktuatormotor und der Schaltnocke hergestellt. Durch die Rotation der Schaltnocke wird die Kupplungsdruckstange über einen Hebelmechanismus betätigt. Im Betriebszustand "Schalten" wird über die Schaltklaue eine Verbindung zwischen dem Aktuatormotor und der Schaltwalze hergestellt. Bei Drehung der Schaltwalze erfolgt ein Gangwechsel über zwei Schaltgabeln (Schaltgabel 1 für die Gänge 1 und 3, Schaltgabel 2 für die Gänge 2 und 4). Hierbei ist die Abfolge der Gangwechsel aufgrund der auf der Schaltwalze erkennbaren Kurvenbahnen fest vorgegeben.



Abbildung 1: Aufbau des Aktuators

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich der Betriebszustand "Schalten" betrachtet, d.h. Ziel ist die Regelung der Gangwechsel. Als Regelgröße dient somit der messbare Winkel der Schaltwalze. Im Hinblick auf eine praktische Realisierung und eine damit verbundene Implementierung des Regelgesetzes in einem Steuergerät soll das Regelgesetz möglichst einfach gehalten werden.

Der Aufsatz ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 wird die mathematische Nachbildung des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke erläutert. Dabei wird zwischen einem sehr detaillierten Simulationsmodell und einem vereinfachten Entwurfsmodell unterschieden. In Abschnitt 3 wird der Reglerentwurf mit Hilfe eines Frequenzkennlinienverfahrens unter Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen beschrieben. Die erzielten Ergebnisse werden in Abschnitt 4 diskutiert. Als Regelstrecke dient dabei das detaillierte Simulationsmodell, da ein Versuchsträger zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht zur Verfügung steht. Abschließend wird in Abschnitt 5 ein Ausblick auf zukünftige Aktivitäten gegeben.

## 2 Mathematisches Modell der Regelstrecke

## 2.1 Simulationsmodell

Das detaillierte Simulationsmodell wurde mit Hilfe des Softwarepaketes AMESim<sup>1</sup> erstellt. Dieses Programm erlaubt die Nachbildung komplexer mechanischer Gebilde. Die Platzierung und Verbindung der einzelnen Komponenten erfolgt auf graphischem Wege. Für die entsprechenden mathematischen Komponentenmodelle können verschiedene Detaillierungsgrade ausgewählt werden.

Im Simulationsmodell für das zu regelnde System werden die Dynamik des Aktuatormotors und des Schaltmagneten unter Berücksichtigung von Haftreibeffekten und

 $<sup>^{1}</sup>http://www.lmsintl.com/$  aufgerufen am 10.06.2013

mechanischen Anschlägen abgebildet. Zusätzlich sind der Antriebsstrang inklusive Differential und Charakteristik der verwendeten nassen Lamellenkupplung nachgebildet. Weiters modelliert sind die Schaltnocke sowie die Schaltwalze mit den entsprechenden Kurvenbahnen, auf denen sich die beiden Schaltgabeln bewegen. Hierbei werden alle Zahneingriffe bei der Umschaltung zwischen "Schalten" und "Kuppeln" beziehungsweise beim Einlegen der einzelnen Gänge berücksichtigt. Für jede zulässige Kombination der Gänge, z.B. Gang 1 und 2, ist ein mechanischer Einrastmechanismus vorgesehen. Die Parameter des detaillierten Simulationsmodells stammen dabei aus Konstruktionszeichnungen sowie aus Prüfstandstests einzelner Teilkomponenten.

## 2.2 Entwurfsmodell

In Abb. 2 ist das vereinfachte Ersatzschaltbild des Aktuators dargestellt. Beim Ak-



Abbildung 2: Ersatzschaltbild der Regelstrecke

tuatormotor handelt es sich um eine permanenterregte Gleichstrommaschine. Mit u wird die an den Motor angelegte Spannung bezeichnet, i ist der zugehörige Ankerstrom. Die konstanten Größe  $R_M$ ,  $L_M$  bzw.  $k_M$  kennzeichnen den Widerstand und die Induktivität des Ankerkreises bzw. die Maschinenkonstante. Mit  $\omega_M$  und  $\omega_L$  werden die Winkelgeschwindigkeiten von Motor- und Lastwelle bezeichnet, die entsprechenden Drehwinkel sind  $\varphi_M$  und  $\varphi_L$ . Der Winkel  $\varphi_L$  kennzeichnet dabei die Schaltwalzenposition. Die Größen  $J_M$ ,  $J_L$  symbolisieren die Trägheitsmomente von Motor- bzw. Lastwelle,  $k_G$  ist das Getriebeübersetzungsverhältnis.

Elementare Gesetzmäßigkeiten der Elektrotechnik und Mechanik führen unmittelbar auf das folgende System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L_M} \left( u - R_M i - k_M k_G \omega_L \right)$$
$$\frac{d\varphi_L}{dt} = \omega_L$$
$$\frac{d\omega_L}{dt} = \frac{1}{J} \left( k_M k_G i - k_\omega \omega_L \right)$$

Hierbei wird angenommen, dass das auf die Lastwelle wirkende Reibmoment eine lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_L$  ist, der Proportionalitätsfaktor wird mit  $k_{\omega}$  bezeichnet. Weitere Einflussfaktoren wie z.B. Haftreibungsphänomene werden im Entwurfsmodell nicht berücksichtigt. Man beachte, dass sich das auf die Lastwelle reduzierte Gesamtträgheitsmoment

$$J = J_L + k_G^2 J_M$$

sowie der Reibungskoeffizient  $k_{\omega}$  in Abhängigkeit des eingelegten Ganges ändern. Für den Reglerentwurf wird vereinfachend ein mathematisches Modell mit konstanten Koeffizienten herangezogen. Die konstanten Parameter dieses nominellen Streckenmodells sind in Tabelle 1 angegeben.

$R_M$	0.25	Ω
$L_M$	0.8	mH
$k_M$	0.035	$N  m  A^{-1}$
$k_G$	40	_
$k_{\omega}$	1.1	$Nmrad^{-1}$
$J_M$	$3.5\cdot10^{-5}$	$kgm^2$
$J_L$	$2.43\cdot 10^{-4}$	$kgm^2$

Tabelle 1: Parameter des Entwurfsmodells

Beim Entwurfsmodell handelt es sich somit um ein lineares zeitinvariantes System 3. Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße  $y = \varphi_L$ .

## 2.3 Modellvergleich

Abb. 3 zeigt den Vergleich zwischen dem Winkel  $\varphi_L$  des Simulationsmodells und der entsprechenden Größe des Entwurfsmodells. Dabei wird die Schaltwalze durch



Abbildung 3: Vergleich zwischen Simulations- und Entwurfsmodell

geeignete Wahl der Motorspannung u so bewegt, dass alle möglichen Gangwechsel durchgeführt werden. Die dazugehörigen Positionen der beiden Schaltgabeln sind in Abb. 4 dargestellt. Hierbei entsprechen Schaltgabelpositionen von 0 mm einer neutralen "Mittenposition", in der kein Gang eingelegt ist. Durch Positionierung der Schaltgabeln in die Stellungen  $\pm 6 mm$  werden Gänge vollständig eingelegt. Dabei sind die in Tabelle 2 dargestellten Kombinationen möglich.

Das lineare Entwurfsmodell mit den nominellen Parametern spiegelt das Verhalten des komplexen Simulationsmodells offensichtlich hinreichend gut wider und kann als Basis für den nachfolgenden Reglerentwurf dienen.

![](_page_17_Figure_3.jpeg)

Abbildung 4: Position der Schaltgabeln (Gangabfolge: neutral, 1, 1-2, 2, 2-3, 3, 3-4, 4, neutral, 4, 3-4, 3, 2-3, 2, 1-2, 1, neutral)

Position Schaltgabel 1	Position Schaltgabel 2	eingelegte Gänge
$0\mathrm{mm}$	$0\mathrm{mm}$	neutral
$-6 \mathrm{mm}$	$0 \mathrm{mm}$	1
$0\mathrm{mm}$	$+6\mathrm{mm}$	2
$+6~\mathrm{mm}$	$0\mathrm{mm}$	3
$0~\mathrm{mm}$	$-6 \mathrm{mm}$	4
$-6 \mathrm{mm}$	$+6\mathrm{mm}$	1  und  2
$+6~\mathrm{mm}$	$+6\mathrm{mm}$	2  und  3
$+6\mathrm{mm}$	$-6 \mathrm{mm}$	3  und  4

Tabelle 2: Zusammenhang zwischen den Schaltgabelpositionen und den eingelegten Gängen

## 3 Reglerentwurf

Um exakte Schaltmanöver durchführen zu können, darf der Winkel  $y = \varphi_L$  um maximal 3° von einem vorgegebenen Referenzwinkel r abweichen. Die maximale sinnvolle Anstiegsrate  $\dot{r}_{max}$  ist durch die konstruktive Auslegung des Aktuators auf  $\pm 5 \, rad \, s^{-1}$  beschränkt. Außerdem darf die Stellgröße u betragsmäßig einen Wert von  $u_{max} = 12 \, V$  nicht überschreiten.

*Eine* Möglichkeit, die oben genannten Wünsche zu erfüllen, ist die Anwendung eines Frequenzkennlinienverfahrens, bei dem harte Beschränkungen bestimmter Systemgrößen berücksichtigt werden können, in [1] bis [6] sind dazu nähere Details bzw. alternative Ansätze zu finden. Die dem gewählten Syntheseverfahren zugrunde liegende zeitdiskrete Regelkreisstruktur (Abtastzeit T = 2 ms) ist in Abb. 5 dargestellt.

Die Folgen  $(r_k)$ ,  $(e_k)$ ,  $(u_k)$  und  $(y_k)$  entsprechen der Referenzgröße, dem Regelfehler, der Stellgröße und der Regelgröße. Die z-Übertragungsfunktionen P(z) und R(z)repräsentieren die zeitdiskrete Regelstrecke und den zu entwerfenden Regler. Die

![](_page_18_Figure_1.jpeg)

Abbildung 5: Zeitdiskreter Regelkreis

Wahl der so genannten Filterübertragungsfunktion<sup>2</sup>

$$F(z) = \frac{\mathcal{Z}\left\{(r_k)\right\}}{\mathcal{Z}\left\{(\hat{r}_k)\right\}} = T \dot{r}_{max} \frac{z}{z-1}$$

erlaubt es, die beschränkte Anstiegsgeschwindigkeit der Referenzgröße in den Entwurf einzubeziehen. Die (fiktive) Eingangsfolge  $(\hat{r}_k)$  der Filterübertragungsfunktion ist betragsmäßig auf 1 beschränkt, d.h.  $|\hat{r}_k| \leq 1$  für alle  $k \geq 0$ .

Die Anwendung der so genannten q-Transformation [1]

$$q = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

ermöglicht es, den Entwurf des zeitdiskreten Reglers völlig analog zum zeitkontinuierlichen Fall mit Hilfe von Frequenzkennlinien durchzuführen. Hierfür ist  $q = j\Omega$  zu setzen, wobei  $\Omega$  die transformierte Frequenz darstellt [7]. Für die z-Übertragungsfunktionen

$$P(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{3.509 \cdot 10^{-5} (z + 3.154) (z + 0.2273)}{(z - 1) (z^2 - 1.372z + 0.5147)}, \qquad F(z) = \frac{0.01 z}{z - 1}$$

ergeben sich die zugehörigen q-Übertragungsfunktionen

$$P^{\star}(q) = \frac{1.01 \cdot 10^{-5} \left(q + 1588\right) \left(q - 1928\right) \left(q - 1000\right)}{q \left(q^2 + 336.2 \, q + 4.9 \cdot 10^4\right)}, \qquad F^{\star}(q) = \frac{0.005 \left(q + 1000\right)}{q}$$

Unter der Annahme, dass die Betragskennlinie des offenen Kreises  $L^{\star}(q) = R^{\star}(q) P^{\star}(q)$ vom einfachen Typ [8] ist und die Bedingungen

$$\begin{aligned} |L^{*}(j\Omega)| \gg 1 & \text{für} & \Omega \ll \Omega_{c} \\ |L^{*}(j\Omega)| = 1 & \text{für} & \Omega = \Omega_{c} \\ |L^{*}(j\Omega)| \ll 1 & \text{für} & \Omega \gg \Omega_{c} \end{aligned}$$

gelten, können die so genannten "approximierten Syntheseungleichungen" angegeben werden [1]. Diese lauten

$$1 \le \left| \frac{P^{\star}(j\Omega)}{F^{\star}(j\Omega)} \right| u_{max} \quad \text{und} \quad |L^{\star}(j\Omega)| \ge \frac{|F^{\star}(j\Omega)|}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad \Omega \ll \Omega_c \quad (1)$$

bzw.

$$|L^{\star}(j\Omega)| \leq \left|\frac{P^{\star}(j\Omega)}{F^{\star}(j\Omega)}\right| u_{max} \quad \text{und} \quad 1 \geq \frac{|F^{\star}(j\Omega)|}{\varepsilon} \quad \text{für} \quad \Omega \gg \Omega_c \;. \tag{2}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Mit  $\mathcal{Z}\{(f_k)\}$  wird hier die z-Transformierte einer Folge  $(f_k)$  bezeichnet, d.h.  $\mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ .

Um die erzielbare Regelgüte zu optimieren, muss die Größe  $\varepsilon$  minimiert werden. Das bedeutet, dass für  $\Omega \ll \Omega_c$  die Betragskennline des offenen Kreises möglichst weit "nach oben" geschoben werden soll, ohne eine der angegebenen Syntheseungleichungen (1), (2) zu verletzen. Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu gewährleisten, ist außerdem für eine ausreichende Phasenreserve zu sorgen, wobei nach [1] die Erfüllung der Bedingung

$$arc\{L^{\star}(j\Omega_c)\} = -120^{\circ}$$

anzustreben ist. Das Ziel des Reglerentwurfs besteht nun darin, einen geeigneten Ansatz für  $L^*(q)$  zu ermitteln. Um auch bei Parameterschwankungen und Störungen die Stabilität des Regelkreises zu gewährleisten, müssen jedenfalls *alle* in der rechten q-Halbebene liegenden Pole und Nullstellen von  $P^*(q)$  in  $L^*(q)$  übernommen werden.

Wie man in Abb. 6 erkennen kann, ist mit dem Ansatz

$$L^{\star}(q) = \frac{0.020251 \left(q + 1588\right) \left(q - 1928\right) \left(q - 1000\right)}{q \left(q + 1000\right) \left(q + 420\right)}$$

die Erfüllung der Syntheseungleichungen (1) und (2) sichergestellt. Zusätzlich zu

![](_page_19_Figure_9.jpeg)

Abbildung 6: Betragskennlinien zur Überprüfung des Entwurfes

 $|L^{\star}(j\Omega)|$  sind auch die Betragskennlinien von  $F^{\star}(j\Omega)$  und  $B^{\star}(j\Omega)$  dargestellt, wobei

$$B^{\star}(q) := \frac{P^{\star}(q)}{F^{\star}(q)} u_{max} = \frac{0.020235 \left(q + 1588\right) \left(q - 1928\right) \left(q - 1000\right)}{\left(q + 1000\right) \left(q^2 + 336.2 q + 4.947 \cdot 10^4\right)}$$

gilt. Der Betrag von  $L^{\star}(j\Omega)$  ist somit für "kleine" Frequenzen "hinreichend groß", für "große" Frequenzen schmiegt sich  $|L^{\star}(j\Omega)|$  dem Verlauf von  $|B^{\star}(j\Omega)|$  an. Darüber hinaus beträgt die Phasenreserve wie gewünscht 60°.

Die gesuchte Reglerübertragungsfunktion wird nun über die Relation

$$R(z) = \frac{\mathcal{Z}\{u_k\}}{\mathcal{Z}\{e_k\}} = \frac{L(z)}{P(z)} = \frac{976.6143(z^2 - 1.372z + 0.5147)}{z(z - 0.4085)}$$

berechnet. Über die entsprechenden Impulsantworten des geschlossenen Kreises können die maximal möglichen Beträge für die Stellgröße und den Regelfehler exakt berechnet werden [1]. Im vorliegenden Fall ergeben sich für diese Maximalwerte

$$\max_{k} |u_k| = 12.027 \, V \tag{3}$$

und

$$\max_{k} |e_k| = 0.0441 \, rad \approx 2.5^{\circ}. \tag{4}$$

Die Verletzung des vorgegebenen Stellgrößenmaximums von  $u_{max} = 12 V$  ist als unkritisch zu bewerten, da der in (3) angegebene Wert den *theoretisch* größtmöglichen Wert von  $|u_k|$  darstellt. Auch der Betrag des Regelfehlers wird im praktischen Betrieb i.A. deutlich unter dem Wert (4) liegen. Aus diesen Überlegungen kann gefolgert werden, dass der entworfene Regelkreis die vorgegebenen Spezifikationen vorbildlich erfüllt.

## 4 Ergebnisse

Abb. 7 bis 10 zeigen exemplarisch die mit der vorgeschlagenen Regelung erzielten Ergebnisse. Hierbei wird der Referenzwinkel laut Abb. 7 stufenweise, unter Berücksichtigung der maximal zulässigen Anstiegsrate, vorgegeben. Zur Beurteilung der

![](_page_20_Figure_8.jpeg)

Abbildung 7: Referenzverlauf für den Schaltwalzenwinkel

Regelgüte ist der resultierende Regelfehler in Abb. 8 dargestellt. Wird das Entwurfsmodell verwendet, weist der Regelkreis bei konstanter Referenzgröße aufgrund des hier vorhandenen Integrierers eine verschwindende bleibende Regelabweichung auf. Im Gegensatz dazu führen im detaillierten Simulationsmodell nachgebildete Effekte zu von Null verschiedenen Regelabweichungen.

Zusätzlich sind zwei stark ausgeprägte Störungen bei ca. 0.6 s bzw. ca. 1.1 s zu erkennen, die durch den Einlegevorgang von Gang 1 bzw. Gang 2 hervorgerufen werden. Beim Herausnehmen der Gänge, d.h. Lösen der Zahn-Zahn-Kontakte, tritt dieses Verhalten nicht auf. Abb. 9 zeigt die zugehörigen Positionen der beiden Schaltgabeln beim Einlegen bzw. Herausnehmen der Gänge. Der in Abb. 10 dargestellte

![](_page_21_Figure_3.jpeg)

Abbildung 9: Positionen der Schaltgabeln

Verlauf der Aktuatorspannung ähnelt dem Verlauf des Regelfehlers, wobei aber das Überschwingen bei schnellen Übergängen stärker ausgeprägt ist. Dennoch wird das Stellgrößenmaximum nur sehr kurz überschritten.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass der entworfene Regler - trotz zahlreicher, im Entwurfsmodell nicht modellierter Effekte - eine hervorragende Nachführung des Winkels der Schaltwalze ermöglicht. Dabei wird die Stellgrößenbeschränkung eingehalten und eine sehr gute Unterdrückung von Störungen erreicht.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Mit Hilfe von Frequenzkennlinien wurde ein Regelgesetz für einen elektromechanischen Aktuator entworfen. Der resultierende Regelkreis erfüllt alle vorgegebenen Spezifikationen und zeigt in einer aufwändigen numerischen Simulation ein sehr zufriedenstellendes Verhalten. Die praktische Erprobung des Konzepts an einem Prüf-

![](_page_22_Figure_1.jpeg)

Abbildung 10: Spannung am Aktuatormotor

stand ist allerdings noch ausständig. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass der entworfene Regler ohne Modifikation auch im Betriebszustand "Kuppeln" eingesetzt werden kann.

## Literatur

- [1] Gausch F., Hofer A., Schlacher K.: Digitale Regelkreise, Oldenbourg (1993)
- [2] Janschek, K.: Entwurf von linearen Abtastregelkreisen bei Begrenzungen, Dissertation, Technische Universität Graz (1982)
- [3] Dourdoumas N.: Prinzipien zum Entwurf linearer Regelkreise mit Beschränkungen - Eine Einführung, at-Automatisierungstechnik, 35 (8), 1987
- Schneider G.: Reglersynthese f
  ür Systeme mit Stellgrö
  ßenbeschr
  änkungen, Regelungstechnik, 25, 1977
- [5] Schneider G., Dourdoumas N.: Rechnerunterstützte Reglersynthese für Systeme mit Begrenzungen, Regelungstechnik, 25, 1977
- [6] Dourdoumas N., Hofer A.: Entwurf mehrschleifiger Regelsysteme mit beschränkten Systemgrößen, Internationales Symposium Measurement & Control, 1977
- [7] Schneider G.: Über die Beschreibung von Abtastsystemen im Frequenzbereich, Regelungstechnik 27, 1979
- [8] Horn M., Dourdoumas N.: Regelungstechnik Rechnerunterstützter Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise, Paerson Studium (2004)

## Efficiency-Based Discrete-Time Nonlinear Control Systems with Piecewise-Linear Controller

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE

Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control Gusshausstrasse 27-29/376, A-1040 Vienna / Austria Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699 email: weinmann@acin.tuwien.ac.at

Manuscript received September 5, 2012 Gewidmet Herrn O.Univ.Prof. Dr. Nicolaos Dourdoumas aus Anlass seiner Emeritierung

### Abstract

The control system design is focussed on a per-unit measure, termed efficiency, which corresponds to the maximum generalized eigenvalue of a linear closed-loop system. A gradient algorithm is presented to design the controller with respect to the optimal efficiency in the case of nonlinear systems with piecewise-linear controller. Output quality and actuating effort are balanced to each other.

Keywords: Per-unit performance weighting, piecewise-linear controller gain gradient, state-variable-dependent general dynamic state

## 1 Introduction

In a former paper (Weinmann, A., 2012), a per-unit measure, termed efficiency

$$r \stackrel{\triangle}{=} \frac{\dot{V}}{V} = -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} , \qquad (1)$$

is reduced to optimize the dynamic quality of a control system  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ;  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ . The efficiency r should be as low as possible in the space of negative numbers, where  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{Q}$  are positive definite matrices for stability reason.  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{Q}$  obey the algebraic Lyapunov equation  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . For linear systems, the generalized eigenvector is the optimal solution. Among several values r, the worst r should be reduced during the design process, that is,

$$r \stackrel{\Delta}{=} \max r_i = \max_i \left\{ \frac{-1}{\lambda_{Qi}[\mathbf{P}]} \right\} = -\min_i \left\{ \frac{1}{\lambda_{Qi}[\mathbf{P}]} \right\} = -1/\max_i \lambda_{Qi}[\mathbf{P}] , \qquad (2)$$

where, using MATLAB,  $\lambda_Q[\mathbf{P}] \stackrel{\triangle}{=} \mathsf{eig}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ . (3)

## 2 Lyapunov-Based Efficiency for Piecewise-Linear Discrete-Time Controller

Consider a discrete-time system at the sampling instant *i*, now. In what follows, always  $\Phi_i = \Phi_i(T_s)$ 

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{\Phi}_i \mathbf{x}_i , \quad \mathbf{\Phi} \in \mathcal{R}^{n \times n} .$$
 (4)

 $\mathbf{\Phi}_i(T_s)$  is the transition matrix at the sampling period  $T_s$ . Assume the Lyapunov function  $V_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} \mathbf{x}_i$  with  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ . Then, the increment of the Lyapunov function is

$$\Delta V = V_{i+1} - V_i = \mathbf{x}_i^T (\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{P} \mathbf{\Phi}_i - \mathbf{P}) \mathbf{x}_i .$$
(5)

Postulating a negative increment requires positive definiteness of

$$\mathbf{Q} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P} - \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{P} \mathbf{\Phi}_i > 0 \ . \tag{6}$$

Then,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ . Stability is guaranteed if  $\mathbf{P}$  is positive definite, having solved the Lyapunov equation, e.g., via the column operator col and the Kronecker product  $\otimes$ 

$$\operatorname{col} \mathbf{P} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_i^T \otimes \mathbf{\Phi}_i^T)^{-1} \operatorname{col} \mathbf{Q} , \qquad (7)$$

or via MATLAB  $\mathbf{P} = \mathtt{dlyap}(\mathbf{\Phi}_i^T, \mathbf{Q}).$ 

We now leave the necessary stability conditions based on pure definiteness. We consider the numerical values of  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  and  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  in the entire **x**-space. We have in mind to analyze nonlinear systems where the transition matrix  $\mathbf{\Phi}_i$  is a function of the state variable and differs from sampling instant to sampling instant. In order to utilize a state dependent stability efficiency r we define the efficiency in discrete time as in Eq.(2)

$$r \stackrel{\triangle}{=} \max r_j = \max_j \{-\frac{\Delta V}{V}\} = \max_j \{\frac{-1}{\lambda_{Qj}[\mathbf{P}]}\} \stackrel{\triangle}{=} -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} .$$
(8)

For  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$ , r results from the inverse Rayleigh quotient. Inside a given region  $\mathcal{X}$  of the state space, r < 0 is required. If  $\mathbf{\Phi}_i$  can be influenced by a state controller  $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ , that is,

$$\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_i \;, \tag{9}$$

we intend to decrease r by modifying the local  $\mathbf{K}_i$ , e.g., with a gradient-based algorithm. In order to obtain best dynamics, that is, to obtain steepest  $\dot{V}$  (best decrease  $\Delta V$ ) for a given  $\mathbf{P}$ , r should be minimum, as carried out in Eq.(26) of Weinmann, A., 2012.

## 3 Gradient Strategy with Respect to the Controller for Piecewise-Linear Nonlinear Systems

Replacing  $\mathbf{K}_i$  by  $\mathbf{K}_i + \Delta \mathbf{K}_i$ , one has, first,  $\Delta \Phi_i = \Psi \Delta \mathbf{K}_i$ , and, second, from Eq.(6)

$$(\boldsymbol{\Phi}_{0} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{K}_{i} + \boldsymbol{\Psi}\Delta\mathbf{K}_{i})^{T}(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P})(\boldsymbol{\Phi}_{0} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{K}_{i} + \boldsymbol{\Psi}\Delta\mathbf{K}_{i}) - \mathbf{P} - \Delta\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (10)$$
  
$$\Delta\mathbf{K}_{i}^{T}\boldsymbol{\Psi}^{T}\mathbf{P}(\boldsymbol{\Phi}_{0} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{K}_{i}) + (\boldsymbol{\Phi}_{0} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{K}_{i})^{T}\Delta\mathbf{P}(\boldsymbol{\Phi}_{0} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{K}_{i})$$

$$+(\boldsymbol{\Phi}_0 + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Psi} \Delta \mathbf{K}_i = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\operatorname{col}\Delta\mathbf{P} = [(\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_i)^T \otimes (\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_i)^T]^{-1} (\mathbf{F}_1 \operatorname{col}\Delta\mathbf{K}_i^T + \mathbf{F}_2 \operatorname{col}\Delta\mathbf{K}_i) .$$
(12)

In the previous equation, we use abbreviations  $\mathbf{F}_k$  and  $\mathbf{f}_k$  in what follows

$$\mathbf{F}_{0} \stackrel{\triangle}{=} [(\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_{i})^{T} \otimes (\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_{i})^{T}]^{-1} \in \mathcal{R}^{n^{2} \times n^{2}}$$
(13)

$$\mathbf{F}_{1} \stackrel{\simeq}{=} [(\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_{i})^{T}\mathbf{P}^{T}\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{I}_{n}] \in \mathcal{R}^{n^{2} \times nm}$$
(14)

$$\mathbf{F}_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{I}_n \otimes [(\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} \mathbf{\Psi}] \in \mathcal{R}^{n^2 \times nm}$$
(15)

$$\mathbf{f}_{3} \stackrel{\triangle}{=} \frac{\mathbf{x}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{T} \mathbf{P} \mathbf{x}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n^{2}}$$
(16)

$$\mathbf{f}_4 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_0^T \mathbf{f}_3 \in \mathcal{R}^{nm}$$
(17)

$$\mathbf{f}_5 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{F}_2^T \mathbf{F}_0^T \mathbf{f}_3 \in \mathcal{R}^{nm}$$
(18)

$$\mathbf{f}_{6} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{U}_{m,r}^{T} \mathbf{f}_{4} + \mathbf{f}_{5} \stackrel{(41)}{=} \mathbf{U}_{r,m} \mathbf{f}_{4} + \mathbf{f}_{5} \in \mathcal{R}^{nm}$$
(19)

and

$$\operatorname{col} \mathbf{K}_{i}^{T} = \mathbf{U}_{m,r} \operatorname{col} \mathbf{K}_{i} , \qquad \mathbf{K}_{i} \in \mathcal{R}^{m \times r} .$$

$$(20)$$

In general, **P** and  $\Delta$ **P** also vary with the sampling instant *i*. Expanding the efficiency quotient *r* for small increments  $\Delta r$ 

$$r + \Delta r = -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{P} \mathbf{x}} \doteq -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} (1 - \frac{\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{P} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}})$$
(21)

$$\Delta r \doteq \frac{\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{P} \, \mathbf{x}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \,. \tag{22}$$

Combining Eq.(22) and Eq.(12),

$$\Delta r \doteq \operatorname{col}\Delta r \stackrel{(36)}{=} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^2} (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^T) \operatorname{col}\Delta \mathbf{P}$$
(23)

$$\stackrel{(12)}{=} \mathbf{f}_3^T \mathbf{F}_0 (\mathbf{F}_1 \operatorname{col} \Delta \mathbf{K}_i^T + \mathbf{F}_2 \operatorname{col} \Delta \mathbf{K}_i)$$
(24)

$$\Delta r \doteq \mathbf{f}_4^T \operatorname{col}\Delta \mathbf{K}_i^T + \mathbf{f}_5^T \operatorname{col}\Delta \mathbf{K}_i = \mathbf{f}_6^T \operatorname{col}\Delta \mathbf{K}_i$$
(25)

$$\frac{\partial r}{\partial \operatorname{col} \mathbf{K}_i} = \mathbf{f}_6(\mathbf{K}_i) \tag{26}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \operatorname{col} \mathbf{K}_{i}} = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}_{h}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{x}_{h}}{\mathbf{x}_{h}^{T} \mathbf{P} \mathbf{x}_{h}} \left[ \{ [\mathbf{\Psi}^{T} \mathbf{P}(\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_{i})] \otimes \mathbf{I}_{n} \} \mathbf{U}_{m,r} + \mathbf{I}_{n} \otimes [\mathbf{\Psi}^{T} \mathbf{P}(\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_{i})] \right] \\ \times \left[ (\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_{i}) \otimes (\mathbf{\Phi}_{0} + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_{i}) \right]^{-1} (\mathbf{x}_{h} \otimes \mathbf{x}_{h}) , \\ \text{where } \mathbf{P}(\mathbf{x}_{h}) , \mathbf{\Phi}_{0}(\mathbf{x}_{h}) \\ \text{and } \mathbf{x}_{h} = \arg \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} r(\mathbf{x}) \text{ based on } r \text{ of Eq.}(8) . \end{cases}$$
(27)

At every sampling instant, the matrices  $\Phi_0(\mathbf{x}_i)$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)$  are renewed with the current and local  $\mathbf{x}_i$ . If the search  $\mathbf{x}_h = \arg \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} r(\mathbf{x}_i)$  is only carried out once in the entire region  $\mathcal{X}$ , the indices *i* can be omitted again.

The gradient of the controller matrix  $col\Delta \mathbf{K}_i$  or its column representative, is selected  $col\Delta \mathbf{K}_i \propto \mathbf{f}_6$  in that point of the state space where r is worst (maximum).

## 4 Controller

Consider an index of performance I, which weights both the control efficiency and the controller effort

$$I = w_1 r + w_2 \|\mathbf{K}\|_F^2 \tag{28}$$

$$\Delta I = w_1 \Delta r + w_2 \Delta \|\mathbf{K}\|_F^2 = w_1 \Delta r + 2w_2 (\operatorname{col}\Delta \mathbf{K})^T (\operatorname{col}\mathbf{K})$$
(29)

$$\frac{\partial I}{\partial \text{col}\mathbf{K}} = w_1 \frac{\partial r}{\partial \text{col}\mathbf{K}} + 2w_2(\text{col}\mathbf{K}) .$$
(30)

The maximum is obtained at

$$\frac{\partial I}{\partial \text{col}\mathbf{K}} = \mathbf{0} \quad \rightsquigarrow \quad \text{col}\mathbf{K} \stackrel{(27)}{=} -\frac{w_1}{w_2} \frac{\partial r}{\partial \text{col} \mathbf{K}} \;. \tag{31}$$

Eq.(31) presents the optimum controller balancing efficiency and controller norm referring to the weight factors optimally.

For increments  $\Delta \mathbf{K}$  we find

$$\Delta \mathbf{K} \stackrel{(28)}{\propto} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{K}} = -w_1 \frac{\partial r}{\partial \mathbf{K}} - w_2 \frac{\partial \|\mathbf{K}\|_F^2}{\partial \mathbf{K}} = -w_1 \frac{\partial r}{\partial \mathbf{K}} - w_2 \ 2\mathbf{K}$$
(32)

$$\operatorname{col}\Delta \mathbf{K} \stackrel{(27)}{=} -w_1 \frac{\partial r}{\partial \operatorname{col} \mathbf{K}} - 2w_2 \operatorname{col} \mathbf{K} .$$
 (33)

**Example 1:** Single-input single-output system of second order, n = 2, m = 1,  $\beta = 0.1$   $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ ;  $\mathbf{\Psi} = (1 \quad 0.5)^T$ ;  $\mathbf{K}_i = (0.2 \quad -0.5)$  initially and  $\mathbf{K}_i = (0.0473 \quad -0.1077)$  finally;  $\mathbf{A} \cdot T_s = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & (1 - \beta(\mathbf{x}^T \mathbf{x})) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P} = \mathtt{dlyap}((\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_i)', \mathbf{Q})$ ;  $\mathbf{\Phi}_0 = \mathtt{expm}(-\mathbf{A} \cdot T_s)$ . Within 25 gradient steps of Eq.(33), r is reduced from -0.27 to -0.46.

![](_page_27_Figure_4.jpeg)

Figure 1: Improvement of the initial-condition response having applied 25 gradient steps in Example 1

The change of the efficiency is illustrated in Fig. 2.

In a three-dimensional space  $[K_1, K_2, r]$  the convergence behavior of the successive gradient steps is outlined in Fig. 3. When the initial point is varied randomly, the number of steps did not suffice in any case.

Valuating the controller **K** and referring to Eq.(33) with  $w_1 = 0.08$  and  $w_2 = 0.45$ , the results are given and illustrated in Fig. 4.

**Example 2. State-Dependent Sampling Time:** Continuing Example 1 with the sampling time forced by the deviation  $T_s = 0.8/(1+3|x_1|)$ , the search for optimal efficiency r requires the adaptation of  $\mathbf{K}_i$  with sampling time  $iT_s$ . Search is repeated for each sampling instant. The results are depicted in Figs. 5 and 6.

With some different initial  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix}$  the results can be very different. Fig. 7 shows the benefit of efficiency improvement versus the case of fixed controller gain. In Fig. 8, the controller gain does not converge although a minimum of r is reached very soon.

![](_page_28_Figure_1.jpeg)

Figure 2: Efficiency  $r(x_1, x_2)$  in Example 1 before and after having applied 25 gradient steps, upper and lower part, respectively, intentionally with equal scale of r

![](_page_28_Figure_3.jpeg)

Figure 3: Gradient step progress in the Example 1 resulting from the search process Eq.(27)

![](_page_29_Figure_3.jpeg)

Figure 4: The influence of valuating the controller magnitude in Example 1

![](_page_29_Figure_5.jpeg)

Figure 5: Output y and deviation-dependent sampling interval  $T_s$  in Example 2

![](_page_30_Figure_1.jpeg)

Figure 6: The components of the controller  $\mathbf{K}$  and the resulting efficiency r in Example 2

![](_page_30_Figure_3.jpeg)

Figure 7: Comparison of the transients in Example 2 with the modification of K

![](_page_31_Figure_3.jpeg)

Figure 8: Controller gain drift versus benefit of efficiency in Example 2 with the modification of  ${\bf K}$ 

**Example 3. Bilinear System:** Nonlinear systems of the bilinear mode are considered in the structure

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_o + \mathbf{x}_k \mathbf{b}^T \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_o + \mathbf{x}_k \mathbf{b}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}_k$$
(34)

or 
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_o + \mathbf{B}_B \mathbf{x}_k u = \mathbf{\Phi}_o + \mathbf{B}_B \mathbf{x}_k \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$$
. (35)

Accordingly, the resulting system matrix  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Psi} \mathbf{K}_i$  has to be replaced in Eq.(27).

We select the case of Eq.(35), replace  $\Psi$  by  $\mathbf{B}_B \mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{K}_i$  by  $\mathbf{k}^T$ , col  $\mathbf{K}_i = \operatorname{col} [\mathbf{k}^T] = \mathbf{k}$ . Then,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ ;  $\mathbf{B}_B = -0.1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{K} = [-0.0974 \ 0.2400]$  is chosen. After five steps,  $r_{\max}$  is reduced from -0.0706 to -0.1644 and we finally get  $\mathbf{K} = [-0.1361 \ -0.2122]$ . Fig. 9 depicts the efficiency after the five steps, Fig. 10 shows the improvement of a step response, Fig. 11 the benefit of efficiency reduction.

nrc2.m figure(1), r, nue.fig

![](_page_32_Figure_7.jpeg)

Figure 9: Efficiency versus state plane in Example 3

![](_page_33_Figure_3.jpeg)

Figure 10: Step response improvement in the bilinear case of Example 3

![](_page_33_Figure_5.jpeg)

Figure 11: Benefit of efficiency in the Example 3 resulting from the search process  $\operatorname{Eq.}(27)$ 

## 5 Conclusion

The presented method is a general concept which is applicable to a manifold of nonlinear structures. As usual in the domain of gradient methods, a lot of items has to be chosen for the individual application under concern, such as the region of operation and attraction, the step size and the initial parameters.

#### References

Weinmann, A., 2012, Optimal efficiency for linear control systems, a design approach based on generalized eigenvalues Int. J. Automation Austria 20, pp. 121-143. See http://www.acin.tuwien.ac.at/de/Publikationen/Zeitschriften/IJAA

## **Appendix: Correspondences**

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \stackrel{(38)}{=} (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^T) \operatorname{col} \mathbf{P} = (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})^T \operatorname{col} \mathbf{P} .$$
(36)

$$\operatorname{col}(\mathbf{x}^T \mathbf{M}^T) = \mathbf{M}\mathbf{x} , \quad \operatorname{col}(\mathbf{x}^T) = \mathbf{x}$$
(37)

$$\operatorname{col}(\mathbf{ACB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \operatorname{col} \mathbf{C}$$
 (38)

Replacing 
$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$
 and  $\mathbf{A} = \mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}$  (39)

$$\operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{col}(\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}) = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}) \operatorname{col} \mathbf{I}_n \stackrel{(38)}{=} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x} . (40)$$

The matrix  $\mathbf{U}_{r,m}$  is the permutation matrix in Kronecker matrix sense; entries zero except one solitary digit one in *each* row and column.  $\mathbf{E}_{ij}$  is the Kronecker matrix with entries zero except a *solitary* digit one at position i, j

$$\mathbf{U}_{k,l} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{U}_{k,l}^{(kl\times kl)} \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{ij}^{(k\times l)} \otimes \mathbf{E}_{ji}^{(l\times k)} = \sum_{i}^{k} \sum_{j}^{l} \mathbf{E}_{ij}^{(k\times l)} \otimes \left(\mathbf{E}_{ij}^{(k\times l)}\right)^{T}.$$
 (41)

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{(k \times l)}}{\partial \mathbf{M}} = \bar{\mathbf{U}}_{k,l} = \bar{\mathbf{U}}_{k,l}^{(k^2 \times l^2)} \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} , \qquad (42)$$

e.g.,

## Overview and Comparison of Filtering Approaches for Probabilistic Hybrid Estimation

Michael Hofbaur, Johannes Huber Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik UMIT, E. Wallnöfer Zentrum 1, A-6060 Hall in Tirol e-mail: michael.hofbaur@umit.at, johannes.huber@umit.at

Gewidmet Herrn Univ.-Prof. Nicolaos Dourdoumas zur Emeritierung

#### Abstract

Many modern engineering artefacts exhibit complex behaviours due to numerous operational or fault modes with their associated continuously valued evolution of its physical entities. Advanced control and automation schemes that are employed to achieve a desired behaviour often require a detailed knowledge of the system's state both in terms of its mode of operation/failure and continuous evolution.

There exist several approaches for this task of hybrid estimation and diagnosis. The diversity of the algorithms is mostly due to complementary solutions for dealing with the high computational complexity of the hybrid estimation task. The algorithms also utilize dedicated instances of hybrid models that makes it difficult to directly compare the individual approaches and to cross-utilize the many improvements that are documented in literature.

This paper provides a representative set of five hybrid estimation and diagnosis algorithms and re-formulates them for a common hybrid model. This allows us to provide a comparison that captures the common and alternative aspects of the individual solutions. In that sense, the paper provides a basis for developing advanced hybrid estimation schemes that leverage off and improve on the individual research branches for hybrid estimation.

## 1 Introduction

Many modern mechatronic systems exhibit a complex behaviour where continuous evolution of the system is interwoven with discrete changes, for example due to commanded operational mode changes or also due to faults in the system. A pre-requisite for controlling such a system is to know its state, both in terms of the operational/fault mode and the continuously evolving physical entities, such as currents, voltages, acceleration, speed etc. Most likely, it is not possible to measure all physical entities and know the mode of operation/failure that determine the hy-brid state of the system. Therefore, it is inevitable to use an estimator or filter to

infer the hybrid state from noisy measurements and a *hybrid model* that combines a continuously-valued model (ODEs, difference equations) with a discretely-valued model (automaton).

To deal with real-world disturbances and faults, we will focus on probabilistic hybrid models that combine stochastic models for the continuous dynamics and probabilistic models for possible mode changes in the system. Several filtering and estimation approaches exist for such models and were successfully applied to a variety of applications. All of them use slightly different probabilistic hybrid models as basis what makes it difficult to provide a comprehensive comparison

The purpose of this paper is to frame 4 prominent hybrid estimation algorithms, the interacting multiple model algorithm (IMM) [7], particle filtering (PF) [11], Rao-Backwellised particle filtering (RBPF) [10] and probabilistic hybrid estimation (hME) [16] for a common model base. We will not present the theoretical backgrounds for all algorithms in detail. Many literature sources (referenced at the individual chapters) can be found for that. Instead, we present instances for their algorithmic formulation in a coherent form on a common hybrid model. To complete this picture on hybrid estimation we also present an approach that only estimates the mode of operation (discrete state) through so called analytic redundancy relations (ARR) [8].

This comprehensive presentation of alternative algorithms for hybrid estimation and hybrid diagnosis enables us to evaluate and compare the algorithms in detail and highlight similarities and analogies between the algorithms. The common model base and thus compatible algorithmic formulation will then enable us to combine the classical hybrid estimation algorithms with the consistency-based diagnosis algorithm to formulate a new set of enhanced algorithms for the difficult task of hybrid estimation.

## 2 Hybrid Model

In order to compare various filtering approaches, we restrict our model to a common class of a stochastic hybrid system with affine continuous dynamics and probabilistic mode transitions. In particular, we model a physical artefact using a stochastic hybrid discrete-time model (sampling-period  $T_s$ ) with continuously valued inputs  $\mathbf{u}_c = [u_{c1}, \ldots, u_{cn_u}]^T$ , observations  $\mathbf{y}_c = [y_{c1}, \ldots, y_{cn_y}]^T$  and discretely valued (command) inputs  $\mathbf{u}_d = [u_{d1}, \ldots, u_{dn_c}]^T$ . The mode of the hybrid model is captured by the discrete state variable  $x_d$  and has domain  $\mathcal{X}_d = \{m_1, \ldots, m_l\}$ . The continuous state variables  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, \ldots, x_{cn_x}]^T$  capture the continuously valued dynamic evolution of the hybrid model. Within this work we use affine stochastic difference equations

$$\mathbf{x}_{c,k} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{c,k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{s,k-1} + \mathbf{f}_i,$$
(1)

with observations

$$\mathbf{y}_{c,k} = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_{c,k} + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{G}_i \mathbf{v}_{o,k} + \mathbf{g}_i.$$
(2)

With  $\mathbf{x}_{c,k}$  and  $\mathbf{y}_{c,k}$  we denote the valuation of the continuous state and output at the time step k ( $t = T_s k$ ). The parameters ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ ) are selected according to the *active mode*  $x_{d,k}$  during the sampling-period k ( $T_s(k-1) < t \leq T_s k$ ), i.e.

$$x_{d,k} = m_i \to \{\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i\}$$
(3)

We assume Gaussian process and measurement noise  $\mathbf{v}_{s,k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \mathbf{v}_{o,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ and express the mode-dependency of the noise through the model parameters  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ . The affine model for the continuous evolution allows us to compare various approaches for hybrid estimation. In terms of the discrete evolution of the mode  $x_{d,k}$ we will use a similar strategy and use a common mode transition specification. In detail, we specify the mode transition probabilistically in terms of

$$x_{d,k} \sim P(x_{d,k}|x_{d,k-1}) =: P_{\mathcal{T}}(x_{d,k}, x_{d,k-1}).$$
 (4)

Thus, transitions are conditioned on the previous mode (i.e. discrete-state) only and not like in the probabilistic hybrid automaton or many other hybrid modeling schemes on the previous *hybrid state* (i.e. mode *and* continuous state) and the inputs of the model. With  $P_{\mathcal{T}} : \mathcal{X}_d \times \mathcal{X}_d \to [0 \ 1]$  we denote the *transition function* that specifies the probabilities for the transition.

## 3 Full Hypothesis Estimation

## 3.1 Kalman Filtering

Assuming we know the mode of the system for all time steps, we obtain a continuous estimation problem with a time variant plant, where the mode  $x_{d,k}$  determines the currently active dynamics. Given our setting, we can use the classic Kalman Filter [21, 12, 3, 14] to compute the distribution for the continuous state  $p_{c,k}$  based on the continuous inputs  $\mathbf{u}_{c,0}, \ldots, \mathbf{u}_{c,k}$ , the observations  $\mathbf{y}_{c,1}, \ldots, \mathbf{y}_{c,k}$ , and the initial state distribution  $p_{c,0}$  recursively. As a result, we obtain a Gaussian distribution for the state characterized in terms of the mean  $\hat{\mathbf{x}}_{c,k}$  and the covariance matrix  $\mathbf{P}_k$ 

$$p_{c,k} = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k}, \mathbf{P}_k),$$
  

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k} = E\{\mathbf{x}_{c,k}\}, \quad \mathbf{P}_k = E\{(\mathbf{x}_{c,k} - \hat{\mathbf{x}}_{c,k})(\mathbf{x}_{c,k} - \hat{\mathbf{x}}_{c,k})^T\}.$$
(5)

Kalman filtering at time step k for a system in mode  $m_i$ , i.e.  $x_{d,k} = m_i$ , is a two step process as follows:

#### 1. State extrapolation

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1} = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_{c,k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{f}_i$$
(6)

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_i \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T$$
(7)

$$\mathbf{r}_{k} = \mathbf{y}_{c,k} - \left(\mathbf{C}_{i}\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1} + \mathbf{D}_{i}\mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{g}_{i}\right)$$
(8)

$$\mathbf{S}_{k} = \mathbf{C}_{i} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_{i}^{T} + \mathbf{G}_{i} \mathbf{G}_{i}^{T}, \qquad (9)$$

where  $\{\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}\}$  specify the *prior* estimate with a prediction residual, or *innovation*  $\mathbf{r}_k$  with its associated covariance matrix  $\mathbf{S}_k$ .

#### 2. Estimation correction

$$K_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_i^T \mathbf{S}_k^{-1} \tag{10}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k} = \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1} + K_k \mathbf{r}_k \tag{11}$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - K_k \mathbf{S}_k K_k^T, \tag{12}$$

corrects mean and covariance according to the Kalman filter gain  $K_k$  and provides the refined estimate  $p_{c,k} = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k}, \mathbf{P}_k)$ .

## 3.2 Hypothesis Tracking

We allow our model to evolve both in terms of its mode  $x_d$  and its continuous state  $\mathbf{x}_c$ . Thus, a hybrid estimation scheme has to track both, continuous state and mode. This complicates the estimation process as we have to track, *every possible* mode sequence with its associated continuous evolution. Thus, we cannot provide a single estimate but have to deal with an *exponentially increasing (over time)* number  $\lambda_k$  of estimation hypotheses

$$\hat{X}_{k}^{(\zeta)} = \{ \hat{\mathbf{x}}_{0}^{(\gamma)}, \hat{\mathbf{x}}_{1}^{(\delta)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\zeta)} \}, \quad \zeta = 1, \dots, \lambda_{k}.$$
(13)

A hypothesis  $\hat{X}_k^{(\zeta)}$  specifies a possible hybrid evolution and has a *fringe* estimate for the hybrid state at time-step k

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\zeta)} := \langle \hat{x}_{d,k}^{(\zeta)}, p_{c,k}^{(\zeta)} \rangle.$$
(14)

with a continuous estimate

$$p_{c,k}^{(\zeta)} = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(\zeta)}, \mathbf{P}_k^{(\zeta)})$$
(15)

that is obtained through recursive Kalman Filtering  $p_{c,k-1}^{(i)} \to p_{c,k}^{(\zeta)}$ . More specifically, for a hybrid state  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}$  one determines a possible successor mode  $\hat{x}_{d,k}^{(\zeta)} = m_j$  and performs Kalman Filtering:

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} = \mathbf{A}_{j}\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)} + \mathbf{B}_{j}\mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{f}_{j} 
\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)} = \mathbf{A}_{j}\mathbf{P}_{k-1}^{(i)}\mathbf{A}_{j}^{T} + \mathbf{F}_{j}\mathbf{F}_{j}^{T} 
\mathbf{r}_{k} = \mathbf{y}_{c,k} - (\mathbf{C}_{j}\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} + \mathbf{D}_{j}\mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{g}_{j}) 
\mathbf{S}_{k} = \mathbf{C}_{j}\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)}\mathbf{C}_{j}^{T} + \mathbf{G}_{j}\mathbf{G}_{j}^{T} 
K_{k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)}\mathbf{C}_{j}^{T}\mathbf{S}_{k}^{-1} 
\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(\zeta)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} + K_{k}\mathbf{r}_{k} 
\mathbf{P}_{k}^{(\zeta)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)} - K_{k}\mathbf{S}_{k}K_{k}^{T}$$
(16)

The process of computing all possible estimation hypotheses builds a hypothesis tree that is depicted in Figure 1 for a system with two modes and an estimation over two time-steps (k = 2). One uses probabilistic measures to weight the individual

![](_page_38_Figure_11.jpeg)

Figure 1: Full hypothesis tree.

hypotheses and to select, for example, the most likely one as the preferred estimate at a particular time step. For this purpose, we associate a *belief*  $b_k^{(\zeta)}$ 

$$b_k^{(\zeta)} := P(\hat{X}_k^{(\zeta)} | Y_k, U_k) \tag{17}$$

with each trajectory hypothesis  $\hat{X}_{k}^{(\zeta)} = \{\dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\zeta)}\}$  or its fringe estimate  $\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\zeta)}$  ( $Y_{k}$  and  $U_{k}$  denote the combined sequences of measurements and inputs, respectively). For a given time-step k with  $\lambda_{k}$  estimation hypotheses, one can compute this belief recursively as

$$b_{k}^{(\zeta)} = \frac{1}{c} P_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)} P_{\mathcal{T},k}^{(\zeta)} b_{k-1}^{(i)}, \quad \zeta = 1, \dots, \lambda_{k}$$
(18)

with the normalization factor c so that  $\sum_{\zeta=1}^{\lambda_k} b_k^{(\zeta)} = 1$  and

$$P_{\mathcal{T},k}^{(\zeta)} = P(\hat{x}_{d,k}^{(\zeta)} | \hat{x}_{d,k-1}^{(i)})$$
(19)

$$P_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)} = \frac{1}{|2\pi\mathbf{S}_k|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{r}_k}, \qquad (20)$$

where  $P_{\mathcal{T},k}^{(\zeta)}$  denotes the transition probability through the *transition function* and the observation function  $P_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)}$  captures the level of agreement between the predicted output  $\hat{\mathbf{y}}_{c,k}^{(\zeta)}$  for hypothesis  $\zeta$  and the measurement  $\mathbf{y}_{c,k}$  through the innovation  $\mathbf{r}_k =$  $\mathbf{y}_{c,k} - \hat{\mathbf{y}}_{c,k}^{(\zeta)}$  and its covariance matrix  $\mathbf{S}_k$  from the associated Kalman Filter. Hybrid estimation, as introduced above, considers all possible mode transitions that can occur during the dynamic evolution of the system. This, however, is almost

always intractable because the number of trajectories becomes too large after only a few time steps as the number of possible trajectories grows exponentially with time:  $\lambda_k \leq l^k$  (see Figure 2 for a full hypothesis tree for a system with 60,000 modes and a prohibitively large number of 216,000,000,000,000 hypotheses after only 3 timesteps). As a consequence, one has to consider approximate methods in order to provide computationally feasible approaches for hybrid estimation.

![](_page_39_Figure_10.jpeg)

Figure 2: Full hypothesis tree after 3 time-steps for a system with 60,000 modes

## 4 Approximate Methods for Hybrid Estimation

## 4.1 Multiple-Model Estimation - the GPB-n and IMM Algorithm

The *multiple-model* estimation algorithms are powerful, but sub-optimal estimation algorithms that are mainly found in fields of aeronautics and aerospace, for example

for target tracking. The algorithms deal with the exponential growth of hypotheses over time by combining hypotheses and consider different mode sequences for the last N estimation steps only. The generalized pseudo Bayesian (GPB-N) algorithm [1], for example, aggregates the hybrid estimates at time step k - N into a single hybrid estimate and builds a full hypothesis tree of depth N to obtain  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

A good trade-off between computational cost and estimation quality is achieved by the *interacting multiple-model (IMM)* algorithm [7]. IMM provides an estimate with quality similar to GPB-2, but only requires as many concurrent filters as there are modes in the system (one filter per mode  $m_j$ , j = 1, ..., l of the hybrid model instead of  $l^2$  for GPB-2).

Each filter uses a different combination (mixing) of the previous mode-conditioned estimates

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(l)}\}$$
(21)

as initial value for the estimation at time-step k. The algorithm maintains l estimates, one estimate for each mode  $m_j \in \mathcal{X}_d$  of the model and we assume that the superscript index j of the estimate  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(j)}$  in (21) directly refers to the mode  $m_j$  of the estimate  $(\hat{x}_{d,k-1}^{(j)} = m_j)$ .

The algorithm can be interpreted as a two-step hidden Markov model (HMM) style belief-state update that determines the conditional probability distribution for the set of modes  $b_k^{(j)} = b_k(m_j), j = 1, ..., l$ , together with an associated continuous filtering operation. More precisely, IMM proceeds in two steps

1. State mixing: The first step calculates the *prior* belief  $b_{k|k-1}$  for being at a particular mode as

$$b_{k|k-1}^{(j)} = \sum_{i=1}^{l} P(m_j|m_i) \ b_{k-1}^{(i)}, \ j = 1, \dots, l.$$
(22)

and computes the  $l^2$  IMM mixing probabilities

$$\mu_{ij} = \frac{P(m_j | m_i) \ b_{k-1}^{(i)}}{b_{k|k-1}^{(j)}},\tag{23}$$

which specify the *level of interaction* among the modes. The values  $\mu_{ij}$  are then used to mix the mode-conditioned estimates  $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(j)})$  as follows

$$\bar{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} = \sum_{i=1}^{l} \mu_{ij} \hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)}, \bar{\mathbf{P}}_{k-1}^{(j)} = \sum_{i=1}^{l} \mu_{ij} \left[ \mathbf{P}_{k-1}^{(i)} + (\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)}) (\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)})^T \right].$$

$$(24)$$

2. Filtering and belief-state update: The mixed estimates  $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)}, \bar{\mathbf{P}}_{k-1}^{(j)})$  are then used to initialize the *l* mode-conditioned Kalman filters  $(\hat{x}_{d,k}^{(j)} = m_j)$ 

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{A}_{j} \bar{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} + \mathbf{B}_{j} \mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{f}_{j} 
\mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} = \mathbf{A}_{j} \bar{\mathbf{P}}_{k-1}^{(j)} \mathbf{A}_{j}^{T} + \mathbf{F}_{j} \mathbf{F}_{j}^{T} 
\mathbf{r}_{k} = \mathbf{y}_{c,k} - (\mathbf{C}_{j} \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} + \mathbf{D}_{j} \mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{g}_{j}) 
\mathbf{S}_{k} = \mathbf{C}_{j} \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{C}_{j}^{T} + \mathbf{G}_{j} \mathbf{G}_{j}^{T} 
K_{k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{C}_{j}^{T} \mathbf{S}_{k}^{-1} 
\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(j)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} + K_{k} \mathbf{r}_{k} 
\mathbf{P}_{k}^{(j)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} - K_{k} \mathbf{S}_{k} K_{k}^{T}$$
(25)

that provide the estimates

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(l)}\},$$
 (26)

along with the associated hybrid observation functions  $P_{\mathcal{O}_k}^{(j)}$ ,  $j = 1, \ldots, l$  (20). These hybrid observation functions are used to calculate the *posterior* belief  $b_k$  for the mode-conditioned estimates (26) at time-step k as

$$b_k^{(j)} = \frac{P_{\mathcal{O}_k^{(j)}} b_{k|k-1}^{(j)}}{\sum_{\nu=1}^l P_{\mathcal{O}_k^{(\nu)}} b_{k|k-1}^{(\nu)}} \propto P_{\mathcal{O}_k^{(j)}} b_{k|k-1}^{(j)}.$$
 (27)

## 4.2 Probabilistic Hybrid Estimation - hME

The application of the IMM algorithm becomes difficult, whenever the number of modes l becomes large, since IMM requires as many filters as there are modes in the model. As a consequence, IMM imposes an unnecessarily high computational load and deteriorates the estimation result as too many irrelevant filters compete against the small portion of relevant filters [22]. It is therefore advisable to *focus* estimation onto a subset of *most likely* hypotheses. Our hybrid estimation framework hME [16, 17, 15] takes this approach and re-formulates hybrid estimation as a search problem that utilizes a  $\kappa$ -best strategy that maintains the leading set of  $\kappa$  hypotheses at each time step. An underlying best-first search problem selectively expands a full-hypothesis tree originating from the estimates

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(1)},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\kappa)}\}$$

for N time-steps to provide a leading set of again  $\kappa$  hypotheses

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\kappa)}\}.$$

Figure 3:  $\kappa$  – best search over one time-step (1-step hybrid estimation).

In its simplest case, hME builds a hypothesis tree for one time-step (N = 1) as shown in Figure 3 for  $\kappa = 4$ . This specific hME instance has strong analogies to Rao-Backwellised particle filtering as we will see later. Therefore, we provide a description of hME that unfolds the underlying best-first search process into two distinct steps: transition expansion and continuous state estimation / filtering as shown in Figure 4 for a single estimate  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ . More specifically, the functionality of 1-step hME for our model (1-4) can be summarized as follows:

![](_page_42_Figure_1.jpeg)

transition expansion continuous state estimation

Figure 4: hME hypotheses expansion

1. Transition expansion: Starting from the  $\kappa$  estimates  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)}, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(\kappa)}\}$  with associated belief-values  $\{b_{k-1}^{(1)}, \ldots, b_{k-1}^{(\kappa)}\}$  generate the  $l \cdot \kappa$  intermediate hybrid states

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(\zeta)} = \langle m_j, \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(i)}) \rangle, \quad i = 1, \dots, \kappa, \ j = 1, \dots, l, \ \zeta = 1, \dots, l \cdot \kappa$$
(28)

and sort these states according to their associated prior belief-values

$$b_{k|k-1}^{(\zeta)} = P_{\mathcal{T}}(m_j, \hat{x}_{d,k-1}^{(i)}) \ b_{k-1}^{(i)} \tag{29}$$

so that  $b_{k|k-1}^{(1)} \ge b_{k|k-1}^{(2)} \ge \ldots \ge b_{k|k-1}^{(\kappa)} \ge \ldots b_{k|k-1}^{(l \cdot \kappa)}$ .

2. Selective continuous state estimation / filtering: Starting with  $\zeta = 1$ perform Kalman filtering  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(\zeta)} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(\zeta)}$  with  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(\zeta)} = \langle m_j, \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(i)}) \rangle$ 

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} = \mathbf{A}_{j}\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(i)} + \mathbf{B}_{j}\mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{f}_{j} 
\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)} = \mathbf{A}_{j}\mathbf{P}_{k-1}^{(i)}\mathbf{A}_{j}^{T} + \mathbf{F}_{j}\mathbf{F}_{j}^{T} 
\mathbf{r}_{k} = \mathbf{y}_{c,k} - (\mathbf{C}_{j}\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} + \mathbf{D}_{j}\mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{g}_{j}) 
\mathbf{S}_{k} = \mathbf{C}_{j}\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)}\mathbf{C}_{j}^{T} + \mathbf{G}_{j}\mathbf{G}_{j}^{T} 
K_{k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)}\mathbf{C}_{j}^{T}\mathbf{S}_{k}^{-1} 
\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(\zeta)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(\zeta)} + K_{k}\mathbf{r}_{k} 
\mathbf{P}_{k}^{(\zeta)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(\zeta)} - K_{k}\mathbf{S}_{k}K_{k}^{T}$$
(30)

and compute the associated un-normalized belief-value

$$\tilde{b}_{k}^{(\zeta)} = \tilde{P}_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)} \ b_{k|k-1}^{(\zeta)}, \tag{31}$$

where  $\tilde{P}_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)}$  denotes the un-normalized observation function<sup>1</sup>

$$\tilde{P}_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)} = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k}.$$
(32)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Maybeck and Stevens [23] reported in the context of multiple-model estimation that the normalization term in equation (20) represents an artificial bias that can lead to incorrect mode identifications. They explicitly suggest to omit the normalization term  $1/|2\pi \mathbf{S}_k|^{1/2}$ .

Sort the un-normalized belief-values and specify, once  $\zeta \geq \kappa$ , the variable  $\tilde{b}_{\text{bound}}$  as the value of the  $\kappa$ 'th best un-normalized belief. We found the  $\kappa$ -best estimates whenever

$$b_{k|k-1}^{(\zeta+1)} \le \tilde{b}_{\text{bound}} \tag{33}$$

holds since no other continuation will lead to an estimate with larger unnormalized belief as  $\tilde{P}_{\mathcal{O},k}^{(\zeta)} \leq 1$ . Otherwise, set  $\zeta = \zeta + 1$  and thus repeat the process (30-32) for the next hypothesis until the condition (33) holds.

#### 3. Belief update and hypotheses selection: Select the $\kappa$ -best estimates

$$\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(1)},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_k^{(\kappa)}\}$$

and compute their belief-values through normalization

$$b_k^{(i)} = \frac{\tilde{b}_k^{(i)}}{\sum_{\nu=1}^{\kappa} \tilde{b}_k^{(\nu)}}$$

......

Whenever one applies hME to systems with a a large number of modes (l > 100,000)it is important to carefully formulate the two central steps *transition expansion* and *filtering* as a search problem so that one obtains the  $\kappa$ -best estimates without having to consider the majority of (less likely) mode transitions in the system [16, 15]. This is particularly important when one uses hME to estimate multi-component systems where mode-transitions in individual components are conditionally independent. For example, in [18] we used hME to estimate a system with 450,000 modes in terms of 1-step hME with a fringe size of  $\kappa = 10$  and observed that we required in average 250 / worst case 5,000 Kalman filtering operations until search provided the leading 10 estimates. This is far off the theoretical bound of  $10 \times 450,000$  Kalman filtering operations!

## 4.3 Particle Filtering

Particle filters [11, 4] solve the estimation task through sequential Monte-Carlo methods and are particularly well suited for nonlinear filtering problems. Several works were devoted to applying this strategy for solving the hybrid estimation problem. One can view this approach as sampling the full hypothesis tree in both, continuous state and discrete state. Particle filtering is a recursive process that estimates  $\mathbf{x}_k$  in terms of a set of M particles

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(M)}\}$$
 (34)

where each particle  $\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(j)}$  is comprised of the mode  $\hat{x}_{d,k}^{(j)}$  and a *particular value*  $\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(j)}$  for the continuous state  $\mathbf{x}_{c,k}$ . More specifically, particle filtering proceeds in two steps as follows

1. Particle propagation (importance sampling step): For each particle with  $\langle \hat{x}_{d,k-1}^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} \rangle$  draw a successor mode according to the associated transition probability

$$\hat{x}_{d,k}^{(j)} = m_i \sim P_{\mathcal{T}}(m_i, \hat{x}_{d,k-1}^{(j)}), j = 1, \dots, M$$
(35)

as well as samples for the continuous disturbances

$$\mathbf{v}_{s,k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \mathbf{v}_{o,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$
 (36)

and perform the continuous evolution according to the model, in our case

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{A}_{i}\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} + \mathbf{B}_{i}\mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{F}_{i}\mathbf{v}_{s,k-1} + \mathbf{f}_{i} 
\hat{\mathbf{y}}_{c,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{C}_{i}\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} + \mathbf{D}_{i}\mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{G}_{i}\mathbf{v}_{o,k} + \mathbf{g}_{i}.$$
(37)

Additionally, evaluate and normalize the importance weights (likelihood values)

$$w^{(j)} \propto \frac{1}{|2\pi \mathbf{R}_i|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{r}_k},$$
 (38)

with

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_{c,k} - \hat{\mathbf{y}}_{c,k|k-1}^{(j)}, \ \mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T$$

2. Selection / re-sampling step: Use a re-sampling scheme, e.g. minimum variance sampling[9] to discard/multiply the particles  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)} = \langle \hat{x}_{d,k}^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} \rangle$  according to their importance weight and in order to obtain a new set of M equally likely particles

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(M)}\}.$$

Unlike Kalman filtering, that uses the innovation  $\mathbf{r}_k$  to refine the continuous estimate  $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)})$  for  $\mathbf{x}_k$  in terms of its numerical value, particle filtering achieves this task in multiplying (cloning) particles with high importance weights and discarding those with low weights so that the particles together form the updated estimate (distribution) for the hybrid state  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

#### 4.4 Rao-Backwellised Particle Filtering

Whenever one has linear (or affine) continuous dynamics and a pure probabilistic mode transition scheme (as in our assumption (1-4)) one can reduce the computational complexity of particle filtering by sampling mode transitions only and using traditional Kalman filtering for the continuous dynamics. This leads to so-called Rao-Backwellised particle filtering (RBPF)[2, 10]. Again, we start with *M particles* 

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(M)}\}.$$
 (39)

However, in contrast to standard particle filtering each particle  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(j)}$  describes a hybrid state in terms of its mode  $\hat{x}_{d,k-1}^{(j)}$  and the distribution  $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(j)})$  for the continuous state  $\mathbf{x}_{c,k-1}$ . Rao-Backwellised particle filtering proceeds as follows:

1. Particle propagation (importance sampling and Kalman Filter extrapolation step) For each particle with  $\langle \hat{x}_{d,k-1}^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} \rangle$  draw a successor mode according to the associated transition probability

$$\hat{x}_{d,k}^{(j)} = m_i \sim P_{\mathcal{T}}(m_i, \hat{x}_{d,k-1}^{(j)}), j = 1, \dots, M$$
(40)

and perform the Kalman Filter extrapolation step (Eq. 6-9 detailed)

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{A}_{i}\hat{\mathbf{x}}_{c,k-1}^{(j)} + \mathbf{B}_{i}\mathbf{u}_{c,k-1} + \mathbf{f}_{i} 
\mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} = \mathbf{A}_{i}\mathbf{P}_{k-1}^{(j)}\mathbf{A}_{i}^{T} + \mathbf{F}_{i}\mathbf{F}_{i}^{T} 
\mathbf{r}_{k} = \mathbf{y}_{c,k} - (\mathbf{C}_{i}\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} + \mathbf{D}_{i}\mathbf{u}_{c,k} + \mathbf{g}_{i}) 
\mathbf{S}_{k} = \mathbf{C}_{i}\mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)}\mathbf{C}_{i}^{T} + \mathbf{G}_{i}\mathbf{G}_{i}^{T},$$
(41)

and compute the importance weights

$$w^{(j)} \propto \frac{1}{|2\pi \mathbf{S}_k|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k}$$
 (42)

to define the weighted particles

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)} = \langle \hat{x}_{d,k|k-1}^{(j)}, \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)}), w^{(j)} \rangle, \quad j = 1, \dots, M .$$

2. Selection / re-sampling step: A re-sampling scheme uses the importance weights  $w^{(j)}$  to discard/multiply the weighted particles  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)}$  to obtain a new set of M equally likely particles<sup>2</sup>

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)} = \langle \tilde{x}_{d,k}^{(j)}, \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{(j)}) \rangle, \quad j = 1, \dots, M$$

$$(43)$$

with associated innovation and covariance

$$ilde{\mathbf{r}}_k^{(j)}, ilde{\mathbf{S}}_k^{(j)}$$

3. Particle refinement (Kalman Filter correction step): For all particles (j = 1, ..., M), compute the associated Kalman gain

$$K_k^{(j)} = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{C}_i^T \left( \tilde{\mathbf{S}}_k^{(j)} \right)^{-1}$$
(44)

according to the particle's mode  $\tilde{x}_{d,k}^{(j)} = m_i$  and update the continuous estimate through the Kalman Filter correction step

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,k}^{(j)} = \tilde{\mathbf{x}}_{c,k|k-1}^{(j)} + K_k^{(j)} \tilde{\mathbf{r}}_k^{(j)} 
\mathbf{P}_k^{(j)} = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{(j)} - K_k^{(j)} \tilde{\mathbf{S}}_k^{(j)} \left(K_k^{(j)}\right)^T.$$
(45)

The operation of the Rao-Backwellised particle filter can be seen as sampling the full hypothesis tree in terms of its estimation hypotheses. Furthermore, the selection and re-sampling step focuses estimation onto the most likely hypotheses in that it focuses particles to a limited set of estimation hypotheses. This process has strong analogies to our hME algorithm that selects the  $\kappa$ -best hypotheses for continuation. In fact, one can view RBPF as a sampled version of hME as we shall outline in the following section.

![](_page_46_Figure_1.jpeg)

Figure 5: Hypotheses expansion example

#### 4.5 Comparing hME and RBPF

Let us use a simple example with 3 modes (l = 3) to illustrate the common aspects of hME and RBPF. The full hypothesis tree starting at k-1 from a single estimate  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle$  (with belief-value  $b_{k-1}^{(1)} = 1$ ) is shown in Figure 5 (the transition probabilities suggest that modes  $m_1$  and  $m_2$  stand for nominal modes, whereas mode  $m_3$  represents a less likely fault mode). Let us assume the following setting for the algorithms: hME computes the 2-best estimates ( $\kappa = 2$ ), and RBPF with 100 particles (N=100). Both algorithms use corresponding operations, however, hME uses the un-normalized form of

$$\frac{1}{|\mathbf{S}_k|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k},\tag{46}$$

as observation function (32). Because both, the belief update step of hME and the particle propagation step of RBPF normalize the belief-values or importance weights, respectively, anyway we use the value of

$$e^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{r}_k} \tag{47}$$

for both, observation function  $(P_{\mathcal{O}}^{(j)})$  and importance weight  $(w^{(j)})$  computation.

Given the full-hypothesis tree and the valuations for  $P_{\mathcal{T}}$  and  $P_{\mathcal{O}}$  shown in Figure 5 the algorithms proceed as follows:

1. hME: The algorithm starts with the transition expansion step and generates three intermediate hybrid states

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(1)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle, \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(2)} = \langle m_2, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle, \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{\prime(3)} = \langle m_3, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle$$

with the associated prior belief-values (already sorted in descending order)

$$b_{k|k-1}^{(1)} = 0.59, \ b_{k|k-1}^{(2)} = 0.40, \ b_{k|k-1}^{(3)} = 0.01$$

The selective continuous estimation step iteratively performs Kalman filtering (30) starting with  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{'(1)}$  and deduces

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)} = \langle m_1, p_{c,k}^{(1)} \rangle, \quad \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(2)} = \langle m_2, p_{c,k}^{(2)} \rangle$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>One could associate each particle  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(j)}$  with the weight  $\tilde{w}^{(j)} = 1/M$ .

and the associated un-normalized belief-values (again, already sorted)

$$\tilde{b}_k^{(1)} = 0.8 \cdot 0.59 = 0.472, \quad \tilde{b}_k^{(2)} = 0.5 \cdot 0.40 = 0.2$$

and as  $\kappa = 2$  we can define:

$$b_{\text{bound}} = 0.2$$
 .

The iteration stops at this point since

$$\tilde{b}_{\text{bound}} \ge b_{k|k-1}^{(3)}$$

and it follows naturally, that the expansion of  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{'(3)}$  cannot provide an estimate with a belief-value larger than  $\tilde{b}_k^{(2)}$ . Therefore, we can terminate search after two Kalman Filter operations and provide the 2 best estimates

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{k}^{(2)}\}$$

with associated belief-values

$$b_k^{(1)} = 0.7024, \quad b_k^{(2)} = 0.2976.$$

2. **RBPF:** An RBPF would represent the unique initial state of our example  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle$  through *M* particles with replicated information, i.e. with M = 100 one would start off with the set

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(1)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle, \ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(2)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(100)} = \langle m_1, p_{c,k-1}^{(1)} \rangle \}.$$

The particle propagation step draws successor modes according to the transition probabilities and yields, for example<sup>3</sup>

$$\hat{x}_{d,k}^{(1)} = \ldots = \hat{x}_{d,k}^{(59)} = m_1, \quad \hat{x}_{d,k}^{(60)} = \ldots = \hat{x}_{d,k}^{(99)} = m_2, \quad \hat{x}_{d,k}^{(100)} = m_3.$$

The consecutive Kalman Filter extrapolation step (41) provides prior estimates for the continuous state  $p_{c,k|k-1}$  and the (normalized) importance weights

$$w^{(1)} = \dots = w^{(59)} = \frac{1}{c} 0.8 = 0.01185,$$
  

$$w^{(60)} = \dots = w^{(99)} = \frac{1}{c} 0.5 = 0.00741,$$
  

$$w^{(100)} = \frac{1}{c} 0.3 = 0.00444.$$

Given these weights, the selection and re-sampling step clones and discards particles, for example, one obtains 70 samples for particles at mode  $m_1$ , 30 samples for mode  $m_2$  and none for  $m_3$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(i)} = \langle m_{1}, p_{c,k|k-1}^{(j)} \rangle, \quad i = 1, \dots, 70, \ j = 1, \dots, 59$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{(i)} = \langle m_{2}, p_{c,k|k-1}^{(j)} \rangle, \quad i = 71, \dots, 100, \ j = 60, \dots, 99$$

Thus re-sampling focuses estimation on mode  $m_1$  and  $m_2$  and discards particles (hypotheses) with mode  $m_3$ . Consecutive particle refinement performs the Kalman Filter correction step (45) on all 100 particles and we obtain 70 particles at mode  $m_1$  and 30 particles at mode  $m_2$ .

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Of course, the values represent a specific outcome of the sampling process that draws random samples according to the transition probability  $P_{\tau}$ . As a consequence, slight variations of the presented numeric values can occur. The same argument holds for the selection/re-sampling step of the RBPF.

Both estimation procedures provide corresponding estimation results that specify a mode estimate of  $\hat{x}_{d,k} = m_1$  with 70% belief ( $b_k^{(1)} = 0.7024$  for hME versus 70 out of M = 100 particles for mode  $m_1$  for RBPF). The algorithms obtain this result with an analogous procedure. hME re-focuses estimation through the selection of the  $\kappa$ -best estimates and ignores less likely estimates. RBPF, on the other hand, re-focuses on the major part of the probability space through the selection/re-sampling procedure and discards less likely particles. As a consequence, we argue that RBPF represents the sampled variant of our 1-step hME algorithm.

RBPF is characterized in terms of the particle number M. The filter performs M Kalman Filter operations per time-step<sup>4</sup>. Contrarily, hME is determined through the number of leading estimates  $\kappa$ . hME executes a varying number of Kalman Filter operations that are required to determine the  $\kappa$  leading estimation hypotheses. The number  $\zeta$  of Kalman Filtering operations can be constrained through

$$\kappa \leq \zeta \leq l \cdot \kappa \; ,$$

where l denotes the number of modes of the model. As noted before, in average  $\zeta$  tends rather towards the lower limit but not the upper limit (in particular, when the number of modes in the system becomes very large). One can expect few Kalman Filter operations to focus estimation on nominal modes that a hybrid model characterizes through high transition probabilities, whereas we will require more Kalman Filter operations for fault modes that are characterized through low transition probabilities. For example, in the previous demonstration we required 2 Kalman Filter operations only.

A varying computational load with a possibly large upper bound  $l \cdot \kappa$  can be undesirable for a real time operation with stringent timing constraints. Moreover, deciding on a suitable *fixed* number for  $\zeta$  can be problematic. A simple example should highlight this issue.

Let us assume that we are interested in an estimate for the most likely mode that a system with 3 modes (l = 3) is in and use an hME estimator with  $\kappa = 2$ . Computing a full hypothesis tree starting from the 2 estimates at time-step k - 1 provides, for example, estimates as shown in Table 1

hypothesis	mode estimate	prior belief	belief-value
number $i$	$\hat{x}_{d,k}^{(i)}$	$ ilde{b}_k^{(i)}$	$b_k^{(i)}$
1	$m_1$	0.200	0.40
2	$m_2$	0.150	0.30
3	$m_2$	0.080	0.16
4	$m_3$	0.055	0.11
5	$m_1$	0.010	0.02
6	$m_1$	0.005	0.01

Table 1: Mode estimation example

If one considers the  $\kappa = 2$  estimates only, one would conclude that mode  $m_1$  is most likely. However, considering the leading 3 hypotheses leads to the (correct) answer that mode  $m_2$  is most likely since hypotheses 2 and 3 add up to the largest fraction

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Of course, this number is an upper bound since a good implementation of RBPF will recognize cloned particles and only execute one Kalman Filter for all cloned particles

of the probability space (46% compared to 43% for mode  $m_1$  and 11% for mode  $m_3$ ). A solution for this problem is to use an *adaptive fringe size*  $\kappa_k$  as suggested in [15]. The idea is to stop estimation once the number of hypotheses considered so far ( $\zeta$ ) is larger that a lower bound  $\kappa_{\min}$  and the difference of the accumulated un-normalized beliefs  $\tilde{b}_k$  for the leading two modes  $m^{(1)}$  and  $m^{(2)}$  is large enough, so that no change in the most likely mode cannot occur anymore. Let us illustrate this approach for the data shown in Table 1. After computing  $\zeta = 5$  hypotheses we obtain the following mode-ranking based on values for the accumulated un-normalized beliefs  $(\tilde{b}_k)$ :

$$m^{(1)} = m_2, \ \tilde{b}_k(m_2) = 0.230, \ (\text{hypotheses } 2, 3)$$
  
 $m^{(2)} = m_1, \ \tilde{b}_k(m_1) = 0.210, \ (\text{hypotheses } 1, 5, 6)$   
 $m^{(2)} = m_3, \ \tilde{b}_k(m_3) = 0.055, \ (\text{hypothesis } 4)$ 

Let  $\kappa_{k-1}$  denote the number of previously considered hypotheses. The upper bound for hypotheses at time step k is therefore given by  $l \cdot \kappa_{k-1}$  and can be used to formulate the following termination criterion

$$\tilde{b}_k(m^{(1)}) - \tilde{b}_k(m^{(2)}) > (l \cdot \kappa_{k-1} - \zeta) \tilde{b}_k^{(\zeta)}$$
 (48)

The intuition behind this criterion is as follows. After considering  $\zeta$  hypotheses, there are at most  $l \cdot \kappa_{k-1} - \zeta$  hypotheses left for evaluation. All of them have an un-normalized likelihood of at most  $\tilde{b}_k^{(\zeta)}$ . As soon as (48) holds, we can conclude that no change in the mode ranking can occur, since their accumulated fraction of the unconsidered belief space is smaller than the belief difference between the leading mode estimates. For our example for  $\zeta = 5$  we obtain:

$$0.23 - 0.21 > (6 - 5)0.01$$
.

Summing up, we have to conclude that when using hME it is essential to know what estimation result one is interested in: most likely hypothesis or most likely mode. hME with a fixed value for  $\kappa$  can only provide the most likely hypothesis. Estimating the most likely mode, however, requires an adaptive fringe size  $\kappa_k$ ! Nevertheless, our experimental evaluation shows that hME with a carefully selected  $\kappa$  can significantly outperform RBPF whilst providing a comparable estimation quality.

## 5 Hybrid Diagnosis

The presented algorithms estimate both, the continuous state  $\mathbf{x}_c$  and the mode or discrete state  $x_d$ . Hybrid diagnosis, on the other hand, only provides the most likely mode as its estimate. A prominent class of hybrid diagnosis algorithms is based on consistency-tests on residuals  $\mathbf{r}$  which provides  $\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$  for consistent mode hypotheses. A prominent scheme to compute residuals is to use so called *Analytic Redundancy Relations (ARR)* [13, 8, 5].

Analytic redundancy relations utilize the continuously valued inputs  $(\mathbf{u}_c)$  and observations  $(\mathbf{y}_c)$  over a limited time-horizon of length p + 1. Let us write

$$U_k := [\mathbf{u}_{c,k-p}^T, \dots, \mathbf{u}_{c,k}^T]^T, \quad Y_k := [\mathbf{y}_{c,k-p}^T, \dots, \mathbf{y}_{c,k}^T]^T,$$
(49)

for the stacked compound vectors of inputs and outputs over the observation horizon. Our model includes state noise  $\mathbf{v}_s$  and measurement noise  $\mathbf{v}_o$ . To simplify the following derivation we first stack both noise vectors to

$$\mathbf{v}_{c,k} = [\mathbf{v}_{s,k}, \mathbf{v}_{o,k}^T]^T \tag{50}$$

so that the matrices  $\mathbf{F}_i$  and  $\mathbf{G}_i$  become

$$\tilde{\mathbf{F}}_i := [\mathbf{F}_i \ \mathbf{0}], \quad \tilde{\mathbf{G}}_i := [\mathbf{0} \ \mathbf{G}_i]$$

$$\tag{51}$$

and stack the compound noise vector over the observation horizon analogously to (49) as

$$V_k := [\mathbf{v}_{c,k-p}^T, \dots, \mathbf{v}_{c,k}^T]^T$$

Assume that the system evolved according to the specific mode  $m_i$  for the last p+1 time steps, i.e.

$$x_{d,j} = m_i, j = k - p, \dots, k.$$
 (52)

We can always write the system's evolution within the observation horizon in terms of the state at the beginning of the observation horizon  $\mathbf{x}_{c,k-p}$  and the stacked I/O variables U, Y and V. This un-wraps the system's difference equation and provides an analytic equation of the form

-

$$Y_k = \mathbf{O}_i \mathbf{x}_{c,k-p} + \mathbf{L}_i U_k + \tilde{\mathbf{L}}_i V_k + \mathbf{m}_i$$
(53)

-

with the matrices

$$\mathbf{O}_{i} := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i} \\ \mathbf{C}_{i} \mathbf{A}_{i} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{i} \mathbf{A}_{i}^{p} \end{bmatrix},$$
(54)

$$\mathbf{L}_{i} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i}\mathbf{B}_{i} & \mathbf{D}_{i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i}\mathbf{A}_{i}^{p-1}\mathbf{B}_{i} & \cdots & \mathbf{C}_{i}\mathbf{B}_{i} & \mathbf{D}_{i} \end{bmatrix},$$
(55)

$$\tilde{\mathbf{L}}_{i} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i} \tilde{\mathbf{F}}_{i} & \tilde{\mathbf{G}}_{i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{i} \mathbf{A}_{i}^{p-1} \tilde{\mathbf{F}}_{i} & \cdots & \mathbf{C}_{i} \tilde{\mathbf{F}}_{i} & \tilde{\mathbf{G}}_{i} \end{bmatrix}$$
(56)

and the vector

$$\mathbf{m}_{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i} \\ \mathbf{C}_{i}\mathbf{f}_{i} + \mathbf{g}_{i} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{i}\mathbf{A}_{i}^{p-1}\mathbf{f}_{i} + \dots + \mathbf{C}_{i}\mathbf{f}_{i} + \mathbf{g}_{i} \end{bmatrix} .$$
 (57)

One can always select the observation horizon, or the parameter p, large enough to compute an orthogonal matrix  $\Omega_i$  for  $O_i$  so that

$$\mathbf{\Omega}_i \mathbf{O}_i = \mathbf{0}$$

This allows us to eliminate the continuous state  $(\mathbf{x}_{c,k-p})$  in (53) through left multiplication with  $\mathbf{\Omega}_i$  and provide the ARR for mode  $q_i$ 

$$\mathbf{\Omega}_{i}Y_{k} = \mathbf{\Omega}_{i}\mathbf{O}_{i}\mathbf{x}_{c,k-p} + \mathbf{\Omega}_{i}\mathbf{L}_{i}U_{k} + \mathbf{\Omega}_{i}\tilde{\mathbf{L}}_{i}V_{k} + \mathbf{\Omega}_{i}\mathbf{m}_{i}$$
(58)

$$\mathbf{\Omega}_i Y_k = \mathbf{\Omega}_i \mathbf{L}_i U_k + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{\tilde{L}}_i V_k + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{m}_i.$$
<sup>(59)</sup>

Using the known inputs U and observations Y we can define a residual vector  $\mathbf{r}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_r}$ 

$$\mathbf{\Omega}_i Y_k - \mathbf{\Omega}_i \mathbf{L}_i U_k - \mathbf{\Omega}_i \mathbf{m}_i =: \mathbf{r}_{i,k}.$$
 (60)

that can be used to test the mode hypothesis  $x_{d,k} = m_i$  or more specifically, the hypothesis for the entire observation horizon  $x_{d,j} = m_i, j = k - p, \ldots, k$  as given above in (52).

## 6 Discussion

The difficulty of hybrid estimation is due to the exponential explosion of estimation hypotheses over time. As a consequence, one has to apply sub-optimal approximate methods to deal with this computational complexity.

The interacting multiple-model (IMM) algorithm provides a well-trusted approach that merges/mixes the individual estimates for all l modes of the hybrid system. Its operation was shown to be conceptually equivalent to considering all ( $l^2$ ) estimation hypotheses with distinct two-step modes sequences and merging them into mode specific estimates. It thus provides, in a computationally efficient form, a ranked list of continuous estimates for all l modes of the system. Thus, the leading hypothesis provides the most *likely mode*, associated with its continuous state estimate. The algorithm utilizes the fixed and model determined number of l Kalman Filters for its operation and works well for systems with few modes (l < 100) of operation/failure. Applying IMM to systems with many modes (l > 1,000) imposes a high computational load and results in poor continuous estimation quality as too many irrelevant filters compete against few relevant ones [22].

Rao-Backwellised particle filtering (RBPF) provides a significant performance increase over standard particle filtering as one maintains the continuous state estimate through a mixture of Gaussians instead of many individual samples. This approach works well for hybrid systems with linear (mode-dependent) dynamics. Nevertheless, selecting a proper size M for the number of particles requires insight into the algorithm and its operation with respect to the hybrid model of the system under consideration. For example, one would use M > l samples for systems with few modes, but it is advisable to use M < l samples, whenever one tracks a system with many modes (l > 1,000). The selection of M directly influences the estimation quality but also the computational effort as the algorithm performs M (Kalman) filtering operations to compute the most-likely mode and its associated continuous estimate through Gaussian mixture.

Our hybrid estimation algorithm (hME) provides a computationally efficient scheme for focusing onto the ranked set of  $\kappa$  most likely estimation hypothesis. Thus, the estimation result is slightly different to IMM and RBPF which provide the most likely mode and its associated continuous estimate. Despite its high worst-case computational complexity (it performs at most  $\kappa \cdot l$  filter operations), hME focuses onto the leading set of hypotheses through considering only the relevant and typically small fraction of the large set of hypotheses. Even more, one can impose an upper bound on the computational delay due to the any-time nature of the best-first search procedure and thus provide a sub-optimal estimate for the hybrid state.

Providing a proper hybrid model is a critical issue for obtaining good estimation results. Despite using a common model paradigm, the hybrid automaton, it is evident, that the selection of the estimation algorithm directly affects the modeling task. In particular, selecting the a priori transition probabilities, that capture the discrete interaction among the modes in the system is non-trivial and directly influences the behaviour of the sub-optimal estimation algorithms. RBPF and hME, for example, obtain their computational efficiency through considering a limited number of leading hypotheses/samples only. The a priori transition probabilities represent a major guidance for this belief-oriented selection process. Standard approaches from reliability engineering [6] for transition probability modeling provides low probabilities for transitions to fault modes. As both hME and RBPF are conceptually similar in the sense that they only consider a limited number of hypotheses/samples is is evident that they suffer from a common problem. They can potentially miss lowprobability fault modes and thus can fail to provide trustworthy estimation results. Our recent refinement to the hME algorithm that merges hybrid estimation with ARR-style diagnosis aims to ease exactly this issue. The ARR evaluation process provides additional evidence to anticipate posterior transition probabilities to improve the focus for the dynamic search procedure [24]. It is evident that one can utilize this approach to enhance RBPF and IMM as well. The common description of the individual algorithms, as given in this paper, thus provides a solid basis for this and potential other cross utilization of algorithmic refinements.

## 7 Conclusion

Several lines of research in hybrid estimation and diagnosis developed complementary approaches for estimating the complex behaviour of modern engineering systems on the basis of hybrid models.

The specific modeling paradigms are very often tightly interlinked with the associated estimation algorithm. Thus, it is difficult to provide a detailed comparison of the different approaches. The aim of this paper was to provide instances of the individual algorithms, formulated for a common hybrid model, to enable a detailed comparison and evaluation. This paper focuses on analogies of the algorithmic formulation, in particular for the two advanced algorithms hME [16] and RBPF [10]. Although there exist many refinements for both algorithms, we decided to ground our investigation on the core-algorithms so that we can analyze their main aspects in detail. An exhaustive experimental evaluation would go beyond the scope of this paper and is thus subject of a supplementary publication (in preparation). Knowing the basic ingredients of all algorithms in detail, allows one to cross-utilize individual improvements of the algorithms. For example, we intend to apply our ARR-based transition detection scheme, that provides posterior transition probabilities for hybrid estimation, to RBPF and IMM, in particular.

Our motivation to improve the well-trusted IMM algorithm is due to an important engineering issue. System's monitoring and diagnosis is an essential component of a control system for safety-critical systems. When building such systems, however, one has to comply with very restrictive international standards [19, 20] that limit the scope of methods that can be applied to implement online diagnosis. This touches issues like modeling schemes, the necessity to verify models that are used for diagnosis, diagnosis algorithms, and in particular, their implementation. For example, the standards enforce strict design principles for software design and their implementation with consequences on the allowed data structures and language scope. These restrictions prevent one from utilizing many of the high-fidelity algorithmic features of approximate hybrid estimation algorithms, such as the dynamic best-first search procedure of hME! Our ongoing research endeavors, thus, consider these engineering constraints, whilst exploring the scientific challenges of hybrid estimation.

## References

- [1] G.A. Ackerson and K.S. Fu. On state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15:10–17, 1970.
- [2] H. Akashi and H. Kumamoto. Random sampling approach to state estimation in switching environments. *Automatica*, 13(4):429–434, 1977.
- [3] B. Anderson and J. Moore. *Optimal Filtering*. Information and System Sciences Series. Prentice Hall, 1979.
- [4] M. Aralampalam, D. Salmond, and A. Smith. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174–188, 2002.
- [5] M. Bayoudh, L. Travé-Massuyès, and X. Olive. Hybrid systems diagnosis by coupling continuous and discrete event techniques. In *Proceedings of the IFAC* World Congress, Seoul, Korea, pages 7265–7270, 2008.
- [6] A. Birolini. *Reliability Engineering*. Springer, 6 edition, 2010.
- [7] H.A.P. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:780–783, 1988.
- [8] V. Cocquempot, T. El Mezyani, and M. Staroswiecki. Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals. In 5th Asian Control Conference, 2004.
- [9] D. Crisan. Particle filters a theoretical perspective. In A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer Verlag, 2001.
- [10] N. de Freitas. Rao-blackwellised particle filtering for fault diagnosis. In Proceedings of the IEEE Aerospace Conference 2002, volume 4, pages 1767–1772, 2002.
- [11] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Springer Verlag, 2001.
- [12] A. Gelb. Applied Optimal Estimation. MIT Press, fifteenth printing, 1999 edition, 1974.

- [13] J. Gertler. Analytical redundancy methods in failure detection and isolation. In *Preprints of the IFAC SAFEPROCESS Symposium*, pages 9–21, 1991.
- [14] M. Grewal and A. Andrews. Kalman Filtering: Theory and Practice. Prentice Hall, 2 edition, 2001.
- [15] M. W. Hofbaur. Hybrid Estimation of Complex Systems, volume 319 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 2005.
- [16] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Mode estimation of probabilistic hybrid systems. In C.J. Tomlin and M.R. Greenstreet, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control, HSCC 2002*, volume 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–266. Springer Verlag, 2002.
- [17] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Hybrid estimation of complex systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 34(5):2178–2191, October 2004.
- [18] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Hybrid estimation of complex systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 34(5):2178–2191, October 2004.
- [19] International Electrotechnical Commission. IEC 61508 Functional Safety of Electrical/Electronic/Programmable Electronic Safety-Related Systems, Ed.: 2/2010. http://www.iec.ch/functionalsafety/. Accessed: 2013-05-27.
- [20] International Organization for Standardization. ISO 26262:2011 Road Vehicles Functional Safety, Ed.: 1/2011. http://www.iso.org. Accessed: 2013-05-27.
- [21] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. ASME Transactions, Journal of Basic Engineering, 82:35–50, 1960.
- [22] X.R. Li and Y. Bar-Shalom. Multiple-model estimation with variable structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:478–493, 1996.
- [23] P. Maybeck and R.D. Stevens. Reconfigurable flight control via multiple model adaptive control methods. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic* Systems, 27(3):470–480, 1991.
- [24] Th. Rienmüller, M. Hofbaur, L. Travé-Massuyès, and M. Bayoudh. Synergetic hybrid estimation. Journal of applied mathematics and computer science (AMCS), 23(1):131–144, March 2013.

## Geometrie und Regelungstechnik

Kurt Schlacher

Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung Johannes Kepler Universität Linz Altenbergerstraße 69, 4040, Österreich kurt.schlacher@jku.at

#### Gewidmet Herrn Univ.-Prof. Nicolaos Dourdoumas zur Emeritierung

#### Zusammenfassung

Methoden der Differentialgeometrie wurden in der Regelungstechnik populär, als gezeigt werden konnte, dass viele nichtlineare Entwurfsprobleme durch geeignete Koordinatentransformationen auf lineare transformierbar sind. Sie lassen sich aber auch sehr erfolgreich auf andere Probleme anwenden. Beispielhaft werden dazu implizite Systeme, hamiltonsche Systeme mit und ohne Eingang, sowie optimale Systeme in Form eines Überblicks behandelt.

#### 1 Einleitung

Dynamische Systeme, beschrieben durch gewöhnliche Differentialgleichungen, gehören zu den wichtigsten und meist betrachteten Objekten der Regelungstechnik. Meist wählt man Systeme von expliziten Differentialgleichungen der Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1}$$

$$y(t) = c(t, x(t)) \tag{2}$$

mit dem Zustand  $x(t) \in \mathcal{X}$ , dem Eingang  $u(t) \in \mathcal{U}$ , dem Ausgang  $y(t) \in \mathcal{Y}$  und der unabhängigen Variablen  $t \in \mathbb{R}$ . Die Zustands-, Eingangs- und Ausgangsmengen  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Y}$  werden dann dem jeweiligen Problem angepasst gewählt. Erfüllt nun (1) noch die Bedingungen des Satzes über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems, siehe z.B. [6], [7], dann erhält man ein wohl definiertes Objekt für die Regelkreissynthese. Man beachte, dass die Komponenten von  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  und  $y(\cdot)$  selbst noch Elemente geeigneter Funktionenräume sind.

Eine alternative Beschreibung des obigen dynamischen Systems erhält man durch die Beziehungen

$$x_t = f(t, x, u) \tag{3}$$

$$y = c(t, x) \tag{4}$$

mit  $x \in \mathcal{X}$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Während (1,2) Identitäten sind, handelt es sich bei (3,4) um einfach nach  $x_t$  und y aufgelöste algebraische Gleichungen. Beide Beschreibungen sind dann durch die Wertzuweisung

$$x = x(t), \quad x_t = \frac{d}{dt}x(t), \quad u = u(t), \quad y = y(t)$$

miteinander verbunden. Im Allgemeinen ist es ausreichend für  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Y}$  finit dimensionale abstrakte Mannigfaltigkeiten zu wählen. Die Beschreibung (3,4) hat folglich den Vorteil, dass infinit dimensionale Funktionenräume nicht auftreten. Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen, die im Besonderen auf geometrischen oder genauer differentialgeometrischen Methoden beruhen. Dabei handelt es sich um eine sehr subjektive Auswahl des Autors. Zur Erleichterung der Lesbarkeit wird die Standardtensornotation verwendet, sowie die einsteinsche Summenkonvention. In [3] findet man eine physikalisch motivierte Einführung in die Differentialgeometrie dazu, weiterführende Grundlagen auch betreffend pfaffsche Systeme werden in [2] präsentiert, Jet-Bündel und ihre Anwendungen sind in [4] zu finden. In [9] findet man Anwendungen von äußeren Systemen auf regelungstechnische Probleme.

## 2 Mannigfaltigkeit und Zustandsraum

Es sei  $\mathcal{X}$  eine abstrakte Mannigfaltigkeit mit (lokalen) Koordinaten  $(x^1, \ldots, x^n)$ . Im Weiteren beschränken wir uns auf glatte Mannigfaltigkeiten<sup>1</sup>. Ein Kartenwechsel oder eine Koordinatentransformation  $\varphi : X \to \overline{X}, X, \overline{X} \subset \mathbb{R}^n$  für einen Kartenwechsel,

$$\overline{x} = \psi(x) ,$$

erfolgt folglich mit einem Diffeomorphismus<sup>2</sup>. Die Koordinaten des Tangentialbündels<sup>3</sup>  $\mathcal{T}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\tau} \mathcal{X}$  von  $\mathcal{X}$  werden mit  $(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$  bezeichnet. Die Standardbasis von  $\mathcal{T}(\mathcal{X})$  ist  $\{\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}\}$ . Der Kartenwechsel<sup>4</sup> erfolgt gemäß den Beziehungen

$$\overline{x} = \psi(x) (\overline{x}, \dot{\overline{x}}) = (\psi(x), \partial_x \psi(x) \dot{x}) .$$

$$(5)$$

Ein Schnitt<sup>5</sup> von  $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ , also eine Wertezuweisung der Art

$$\dot{x}^{i} = f^{i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$
(6)

heißt auch Tangentialvektorfeld. Es erzeugt einen Fluss<sup>6</sup>  $\varphi_{\varepsilon} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ , der der Beziehung

$$\partial_{\tau}\varphi_{\tau}(x)|_{\tau=\varepsilon} = f \circ \varphi_{\varepsilon}(x)$$

genügt. Wählt man nun eine abstrakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{X}$  als Zustandsraum, dann eignen sich Tangentialvektorfelder, also Schnitte des Tangentialbündels  $\mathcal{T}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\tau} \mathcal{X}$  zur Darstellung expliziter autonomer Systeme. Die zu  $\mathcal{T}(\mathcal{X})$  duale Konstruktion ist das Kotangentialbündel  $\mathcal{T}^*(\mathcal{X}) \xrightarrow{\tau^*} \mathcal{X}$  mit Koordinaten  $(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}_1^*, \ldots, \dot{x}_n^*)$  und Standardbasis { $dx^1, \ldots, dx^n$ }. Der Kartenwechsel erfolgt so gemäß den Beziehungen

$$\overline{x} = \psi(x) (\overline{x}, \dot{\overline{x}}^*) = (\psi(x), \dot{x}^* (\partial_x \psi(x))^{-1}) ,$$

$$(7)$$

dass das kanonische Produkt von Vektor und Kovektor erhalten bleibt, es gilt  $\langle \dot{x}^*, \dot{x} \rangle = \langle \dot{\overline{x}}^*, \dot{\overline{x}} \rangle$ .

Nun bezeichne  $\mathcal{Z} \xrightarrow{\rho} \mathcal{X}$  ein Bündel mit lokalen Koordinaten  $(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m)$ . Schnitte von  $\mathcal{Z}$ sind Wertezuweisungen der Art u = u(x). Mit  $\rho^*(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$  wird das Bündel  $\mathcal{T}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}, \rho(x, u) = \tau(x, \dot{x}) = x$  mit Koordinaten  $(x, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$  bezeichnet. Ein Schnitt von  $\rho^*(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$ ,

$$\dot{x}^{i} = f^{i}(x, u), \quad i = 1, \dots, n$$
(8)

beschreibt dann offensichtlich ein zeitinvariantes Regelungssystem. Die Schreibweise  $\rho^*(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$  soll zum Ausdruck bringen, dass man durch Einsetzen eines Schnitts von  $\mathcal{Z}$  in (8) einen Schnitt von  $\mathcal{T}(\mathcal{X})$  erhält. Ein Kartenwechsel erfolgt somit gemäß den Beziehungen

$$\overline{x} = \psi_{\mathcal{X}}(x) 
(\overline{x}, \overline{u}) = \psi_{\mathcal{Z}}(x, u) 
(\overline{x}, \overline{u}, \dot{\overline{x}}) = (\psi_{\mathcal{Z}}(x, u), \partial_x \psi_{\mathcal{X}}(x) \dot{x}).$$
(9)

Eine natürliche Frage ist, ob es Karten oder Koordinaten gibt, in denen die Systeme (6,8) besonders einfache Formen annehmen. Eine Frage, die nur für (6) relativ einfach zu beantworten ist. Hier existiert nämlich lokal ein Kartenwechsel (5) so, dass (6) die spezielle Form

$$\dot{x}^1 = 1$$
 ,  $\dot{x}^i = 0$  ,  $i = 2, \dots, n$ 

 $<sup>^1</sup>$ In den meisten Fällen reichen k-fach stetig differenzierbare Funktionen aus, glatte werden hier gewählt, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

 $<sup>^2\</sup>mathrm{Ein}$  Diffeomorphismus ist eine glatte Abbildung mit glatter Inverser.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Ein Bündel  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$  ist eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{E}$ , auch als totale Mannigfaltigkeit bezeichnet, mit einer surjektiven Submersion  $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ , auch Projektion genannt, auf die Basis  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Der Kartenwechsel eines Bündels ist ein invertierbarer Bündelmorphismus. Ein Bündelmorphismus  $(\varphi_{\mathcal{B}}, \varphi_{\mathcal{E}}): (\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}) \to (\overline{\mathcal{E}} \xrightarrow{\overline{\pi}} \overline{\mathcal{B}})$  genügt der Beziehung  $\varphi_{\mathcal{B}} \circ \pi = \overline{\pi} \circ \varphi_{\mathcal{E}}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Ein Schnitt eines Bündels  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$  ist eine Abbildung  $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$  für die  $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$  gilt.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ein lokaler Fluss erfüllt noch die Beziehungen  $\varphi_0(x) = x$ ,  $\varphi_{\varepsilon_1} \circ \varphi_{\varepsilon_2}(x) = \varphi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(x)$  für alle  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [-a, a]$  und hinreichend kleines  $a \in \mathbb{R}^+$ .

annimmt, siehe [3], [6]. Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass zur Berechnung des Kartenwechsels die Lösung des Systems (6) bekannt sein muss.

Interessanterweise erfordert die Erweiterung des zeitinvarianten auf den zeitvarianten Fall weitere geometrische Strukturen. Dazu wähle man ein Bündel  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$  mit lokalen Koordinaten  $(t, x^1, \ldots, x^n)$  für  $\mathcal{E}$  und (t) für  $\mathcal{B}$ . Differenziert man einen glatten Schnitt  $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$  mit  $x^i = \sigma^i(t)$ , so erhält man die

Wertezuweisung  $x_t^i = \partial_t \sigma^i(t)$  mit den Jet-Koordinaten  $x_t$ . Man kann nun zeigen, dass  $J_0^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_0^1} \mathcal{E}$  wieder ein Bündel mit dem Kartenwechsel

$$t = \psi_{\mathcal{B}}(t)$$

$$(\overline{t}, \overline{x}) = \psi_{\mathcal{E}}(t, x)$$

$$(\overline{t}, \overline{x}, \overline{x}_{\overline{t}}) = (\psi_{\mathcal{E}}(t, x), (\partial_t \overline{x} \circ \psi_{\mathcal{E}}(t, x) + \partial_x \overline{x} \circ \psi_{\mathcal{E}}(t, x)x_t)/\partial_t \psi_{\mathcal{B}}(t))$$
(10)

ist, siehe [4]. Ein Schnitt von  $J_0^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_0^1} \mathcal{E}$ ,

$$x_t^i = f^i(t,x) , \qquad (11)$$

kann zur Darstellung eines freien Systems verwendet werden. Die Erweiterung eines Schnitts  $\sigma$  von  $\mathcal{E}$  auf  $J_0^1(\mathcal{E})$  durch Differenzieren wird mit  $j(\sigma)$  bezeichnet, er ist eine Lösung von (11), wenn gilt

$$j(\sigma) = f \circ \sigma$$
.

Betrachtet man zum Bündel  $\mathcal{E}$  das Tangentialbündel  $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}$  mit der Standardbasis  $\{\partial_t, \partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}\}$ sowie das Kotangentialbündel  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{E}}^*} \mathcal{E}$  mit der Standardbasis  $\{dt, dx^1, \ldots, dx^n\}$ , dann erhält man weitere Möglichkeiten zur Darstellung expliziter zeitvarianter Systeme. Man überzeugt sich leicht, dass die Transformationsvorschrift für Tensoren des Typs

$$dt \otimes (\partial_t + f^i(t, x)\partial_{x^i}) , \qquad (12)$$

also spezielle Schnitte von  $\mathcal{T}^*(\mathcal{B}) \otimes \mathcal{T}(\mathcal{E})$ , siehe [4], mit denen von  $J_0^1(\mathcal{E})$  übereinstimmt. Das gleiche gilt für die speziellen Schnitte

$$\omega^{i} = \mathrm{d}x^{i} - f^{i}(t, x)\mathrm{d}t \tag{13}$$

von  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E})$ . Man beachte, dass für die Kontraktion<sup>7</sup>

$$dt \otimes (\partial_t + f^i(t, x)\partial_{x^i}) \rfloor (dx^i - f^i(t, x)dt) = 0$$

gilt. Diese Betrachtungen zeigen, dass die Kartenwechsel bei zeitvarianten Systemen affine Transformationen sind, während sie bei zeitinvarianten lineare sind, was gerne übersehen wird. Mit Hilfe eines Schnitts  $\sigma$  von  $\mathcal{E}$  folgt für (13) noch

$$\sigma^*(\omega^i) = (\partial_t \sigma^i(t) - f^i \circ \sigma(t)) dt .$$

Die Forderung  $\sigma^*(\omega^i) = 0$  impliziert  $\partial_t \sigma^i(t) = f^i \circ \sigma(t)$  für  $dt \neq 0$ . Man beachte, dass man auf diese Weise auch zeitinvariante Systeme mit f(x) darstellen kann, die Wahl von  $\mathcal{E}$  ist jedoch wesentlich, denn auf  $\mathcal{X}$  von oben gelänge das nicht.

In diesem Abschnitt haben wir einige grundlegende geometrische Eigenschaften dynamischer Systeme definiert. Die Erweiterung der Betrachtungen auf zeitvariante Systeme mit Eingang ist gradlinig und bringt keine wesentlichen neuen geometrischen Konstruktionen mehr. Sie sei daher dem Leser überlassen. Um die Nützlichkeit dieser Konstruktionen zu zeigen, werden vorerst implizite Systeme untersucht.

#### 3 Implizite Systeme

Man betrachte nun ein implizites Differentialgleichungssystem der Art

$$a_{j}^{i}(t,z)z_{t}^{j} + b^{i}(t,z) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Bei der Kontraktion  $a \rfloor b$  zweier Tensoren a, b wird die äußerst rechte Komponente von a mit der äußerst linken von b kontrahiert, wobei gilt  $\partial_{x^i} \rfloor dx^j = \delta_i^j$ .

mit affinen Funktionen in den Jet-Koordinaten. Wählt man nun ein Bündel  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$  mit Koordinaten  $(t, z^1, \ldots, z^{n_z})$  und (t) für  $\mathcal{B}$ , dann kann man dieses System als Schnitt

$$\omega^i = a^i_j(t,z)\mathrm{d}z^j + b^i(t,z)\mathrm{d}t \,, \quad j = 1,\dots,n_z \tag{14}$$

des Bündels  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E})$  auffassen. Das System (14) definiert einen linearen Unterraum  $P^* = \operatorname{span}(\{\omega^1, \ldots, \omega^n\})$ von  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E})$ , wobei wir annehmen, dass die Dimension dieses Unterraums in der betrachteten Umgebung konstant ist. Das Kontangentialbündel  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E})$  besitzt ein weiteres Unterbündel<sup>8</sup>, das horizontale Bündel  $\mathcal{H}^*(\mathcal{E}) = \operatorname{span}(\{dt\})$ , siehe [4].

Das System  $P^*$ , siehe (14), wird im Weiteren auch pfaffsches System genannt, siehe [2]. Es heißt integrierbar, wenn es eine Basis mit vollständigen Differentialen  $P^* = \text{span}(\{df^1, \ldots, df^n\})$  mit Funktionen  $f^i = f^i(t, z)$  besitzt. Mittels der notwendigen und lokal hinreichenden Bedingung<sup>9</sup>

$$\mathrm{d}\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n = 0$$

kann Integrierbarkeit sehr einfach überprüft werden, siehe [2], [9].

Eine erste Frage ist nun, gibt es einen Bündeldiffeomorphismus der Art  $(\varphi_{\mathcal{B}}, \varphi_{\mathcal{E}}) : (\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}) \longleftrightarrow (\overline{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ so, dass mit den Koordinaten  $(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m)$  für  $\overline{\mathcal{E}}$  gilt

$$\overline{\omega}^{i} = \mathrm{d}x^{i} - b^{i}(t, x, u)\mathrm{d}t \,. \tag{15}$$

Einfach ausgedrückt, kann das System (14) auf Zustandsform durch Kartenwechsel übergeführt werden. Man überzeugt sich nun leicht, dass das pfaffsche System  $\overline{P}^* = \operatorname{span}(\{\overline{\omega}^1, \ldots, \overline{\omega}^n\})$  der Bedingung  $\overline{P}^* \cap \mathcal{H}^*(\overline{\mathcal{E}}) = \operatorname{span}(\{0\})$  genügt. In diesem Fall nennt man  $\overline{P}^*$  nicht degeneriert. Ebenso sieht man sofort, dass das System  $\overline{P}^* \oplus \mathcal{H}^*(\overline{\mathcal{E}})$  integrierbar ist. Diese beiden notwendigen Bedingungen sind nun lokal auch hinreichend, damit das System (14) durch Kartenwechsel auf Zustandsform, siehe (15), gebracht werden kann. Man beachte, dass das System (15) durchaus noch redundante Variablen enthalten kann. Dies wäre hier der Fall, wenn Vektorfelder der Form  $v = v^1(t, x, u)\partial_{u^1} + \cdots + v^m(t, x, u)\partial_{u^m}$  so existieren, dass  $v(\overline{\omega}^i) = 0$  gilt.

Einen weiteren interessanten Fall erhält man, wenn das System (14) zwar nicht degeneriert ist, es aber obige Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. Gesucht ist dann ein Kartenwechsel so, dass man die Darstellung

$$\overline{\omega}^{i} = a_{l}^{i}(t, x, u) \mathrm{d}x^{l} - b^{i}(t, x, u) \mathrm{d}t$$
(16)

mit  $l = 1, \ldots, n_x$  und zeilenregulärer Matrix  $a_l^i$  und minimalem  $n_x$  bekommt. Den obigen Fall erhält man mit der Wahl  $n = n_x$ . Man beachte, dass prinzipiell  $n_x \ge n$  gelten muss. Eine allgemeine Lösung zu diesem Problem für n > 1 ist dem Autor derzeit nicht bekannt. Der Sonderfall n = 1 kann mit dem Satz von Pfaff behandelt werden, siehe [9]. Es sei  $n_x$  die kleinste Zahl für die mit  $\omega = a_i^1(t, z)dz^j$  gilt

$$\underbrace{\mathrm{d}\omega\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\omega}_{n_x\,\mathrm{mal}}\wedge\omega = 0$$

Dann kann man das System (14) mit Hilfe des Satzes von Pfaff auf die Form

$$\overline{\omega} = \mathrm{d}x^1 + u^1 \mathrm{d}x^2 + \dots + u^{n_x - 1} \mathrm{d}x^{n_x}$$

$$\overline{\omega}^1 = \overline{\omega} - b^1(t, x, u) \mathrm{d}t$$
(17)

bringen. Mittels der Ergänzung

$$\overline{\omega}^j = \mathrm{d}x^j - v^{j-1}\mathrm{d}t, \quad j = 2, \dots, n_x$$

erhält man dann eine mögliche Zustandsform mit dem Zustand x und Eingang (u, v), wobei eine Darstellung mit weniger Zuständen nicht existiert.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Ein Unterbündel behält seine Struktur bei jedem Kartenwechsel. So ist bekannt, dass  $\mathcal{H}^*(\mathcal{E})$  kein ausgezeichnetes Komplement  $C(\mathcal{H}^*(\mathcal{E}))$ , es gilt  $\mathcal{H}^*(\mathcal{E}) \oplus C(\mathcal{H}^*(\mathcal{E})) = \mathcal{T}^*(\mathcal{E})$ , mit dieser Eigenschaft besitzt.

 $<sup>^9\</sup>mathrm{Mit}$ d wird die äußere Ableitung und mit  $\wedge$  das Grassmann-Produkt bezeichnet.

Abschließend soll noch der Fall untersucht werden, wenn das System (14) degeneriert ist, es gilt  $P^* \cap \mathcal{H}^*(\mathcal{E}) \neq \operatorname{span}(\{0\})$ . Es gelte

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n \wedge \mathrm{d}t = 0 ,$$

das Gleichungssystem  $\lambda_i^{\nu}(t, z) = 0$  hat also  $\kappa_1 \ge 1, \nu = 1, \dots, \kappa_1$  funktional unabhängige Lösungen. Damit erhält man aber die algebraischen Gleichungen

$$g^{\nu}(t,z) = \lambda_i^{\nu}(t,z)b^i(t,z) = 0.$$
 (18)

Nun bilde man das bezüglich der Dimension maximale System  $\tilde{P}^* = \operatorname{span}(\{\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^{n-\kappa}\}) \subset P^*$  mit

$$\tilde{\omega}^{\tilde{i}} = \tilde{a}^{\tilde{i}}_{j}(t,z)\mathrm{d}z^{j} + \tilde{b}^{\tilde{i}}(t,z)\mathrm{d}t , \quad j = 1, \dots, n_{z} , \quad \tilde{i} = 1, \dots, n-\kappa ,$$

das der Bedingung  $\tilde{P}^* \cap \mathcal{H}^*(\mathcal{E}) = \operatorname{span}(\{0\})$  genügt. Das System  $\tilde{P}^*$  ist ein pfaffsches System, das auf eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{T}^*(\mathcal{E})$ , die durch die Gleichungen (18) beschrieben wird, beschränkt ist. Um ein dynamisches System zu erhalten, wird im Weiteren vorausgesetzt, dass (18) in jeder Faser, also für festes t, eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n_z - \kappa$  beschreibt. Nun wird das System  $\tilde{P}^*$  mittels der Differentiale von (18) erweitert, und man untersucht nun  $P_1^* = \tilde{P}^* \oplus \operatorname{span}(\{\operatorname{dg}^1, \ldots, \operatorname{dg}^{\kappa}\})$ . Im Prinzip wird nun das Verfahren einfach wiederholt. Dazu bildet man nun die Paare  $(P^*, \{\}), (P_1^*, \{g^1, \ldots, g^{\kappa_1}\})$  bis  $(P_r^*, \{g^1, \ldots, g^{\kappa_r}\})$ , wobei beim letzten Paar keine weiteren Gleichungsbeschränkungen mehr auftreten. Man überzeugt sich einfach, dass unter sehr milden Regularitätsannahmen dieses System existieren muss. Verbleibt noch die Aufgabe, die durch die Beschränkungen festgelegten Koordinaten zu eliminieren. Dies erreicht man aber einfach mit der Transformation

$$\bar{z}^i = h^i(t, z) , \quad i = 1, \dots, n_z - \kappa_r 
s^j = g^j(t, z) , \quad j = 1, \dots, \kappa_r ,$$

wobei die Funktionen  $h^i$  so gewählt werden, dass die Transformation bezüglich z invertierbar ist. Das so erhaltene System kann dann mit den vorher vorgestellten Methoden weiter untersucht werden.

## 4 Hamiltonsche Systeme mit Eingang

Wir beschränken uns hier vorerst auf den zeitinvarianten Fall, denn in der Mechanik werden oftmals hamiltonsche Systeme auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  mit (lokalen) Koordinaten  $(q^1, \ldots, q^m)$ betrachtet. Für das Kotangentialbündel  $\mathcal{T}^*(\mathcal{Q})$  werden in diesem Zusammenhang üblicherweise die Koordinaten  $(q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$  verwendet. Auf  $\mathcal{T}^*(\mathcal{Q})$  wird nun die kanonische Form

$$\begin{aligned}
\omega &= p_i dq^i \\
d\omega &= dp_i \wedge dq^i
\end{aligned} (19)$$

betrachtet. Es sei die Hamiltonfunktion H eine glatte Funktion auf  $\mathcal{T}^*(\mathcal{Q})$ , dann genügt ein hamiltonsches Vektorfeld  $v_H$  der Beziehung

$$v_H \rfloor \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}H = 0 \tag{20}$$

oder

$$\dot{q}^{i} = \partial_{p^{i}} H(q, p) 
\dot{p}_{i} = -\partial_{x_{i}} H(q, p) , \quad i = 1, \dots, m.$$
(21)

Man überzeugt sich leicht, dass  $v_H(H) = 0$  gilt, oder die Hamiltonfunktion H ist eine Konstante der Bewegung. Man beachte auch die formale Ähnlichkeit der Formen (17) und (19).

Obige Betrachtungen lassen sich nun einfach verallgemeinern, siehe [2], Man wählt dazu eine abstrakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{X}$  mit (lokalen) Koordinaten  $(x^1, \ldots, x^n)$ , sowie eine Zweiform  $\Omega$ ,

$$\Omega = \Omega_{ij} \mathrm{d} x^i \wedge \mathrm{d} x^j \, ,$$

die noch der Bedingung d $\Omega = 0$  genügt. Die Matrix  $\Omega_M = [\Omega_{ij}]$  wird auch Strukturmatrix genannt. So eine Mannigfaltigkeit bezeichnet man als symplektisch, siehe [2]. Das hamiltonsche Vektorfeld zur Hamiltonfunktion H genügt der Beziehung

$$v_H \rfloor \Omega + \mathrm{d}H(x) = 0.$$
<sup>(22)</sup>

Gelingt es, diese Beziehungen nach  $v_H$  aufzulösen<sup>10</sup>, dann erhält man die hamiltonschen Gleichungen in der Form

$$\dot{x}^i = v^i_H(x) .$$

Die Hamiltonfunktion H ist eine Konstante der Bewegung, dies folgt direkt aus der Beziehung  $v_H(H) = v_H \lfloor dH = v_H \rfloor v_H \rfloor \Omega = 0.$ 

Nun betrachten wir den Sonderfall, dass  $\Omega_M$  invertierbar ist. In diesem Fall muss *n* gerade sein. Mit der zu  $\Omega_M$  Inversen  $S_M = [S^{ij}]$  bildet man den Bivektor S, siehe [4],

$$S = S^{ij}\partial_{x^i} \wedge \partial_{x^j}$$

mit dessen Hilfe man die Klammer

$$\{f,g\} = (S \rfloor df) \rfloor dg$$

für glatte Funktionen auf  $\mathcal{X}$  erhält. Diese Klammer wird auch Poissonklammer<sup>11</sup> genannt, und eine Mannigfaltigkeit mit Poissonklammer als Poissonmannigfaltigkeit bezeichnet, [2]. Mit der Hamiltonfunktion H lauten die hamiltonschen Gleichungen dann

$$\dot{x}^{i} = \{x^{i}, H\}.$$

Wegen  $\{H, H\} = 0$  sieht man sofort, dass H eine Konstante der Bewegung ist. Man beachte, dass der Wechsel von einer Poissonmannigfaltigkeit zu einer symplektischen und vice versa bei regulären Strukturmatrizen sehr einfach ist. Im singulären Falle trifft dies nicht mehr zu, dafür lassen sich dann Systeme mit neuen Eigenschaften modellieren.

Hamiltonsche Systeme haben nun eine kanonische Darstellung. Denn der Satz von Darboux, siehe [2], besagt, dass man im regulären Fall, nur dieser wird hier betrachtet, lokal immer Koordinaten  $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ so finden kann, dass  $\Omega$  die einfache Form

$$\overline{\Omega} = d\overline{\omega}$$

$$\overline{\omega} = d\overline{x}^{n/2+1} \wedge d\overline{x}^1 + \dots + d\overline{x}^n \wedge d\overline{x}^{n/2}$$
(23)

mit der Strukturmatrix

$$\overline{\Omega}_M = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -I \\ I & 0 \end{array} \right]$$

annimmt. Das hamiltonsche Vektorfeld  $v_H$  mit

$$v_H |\overline{\Omega} + \mathrm{d}\overline{H} = 0 \tag{24}$$

hat dann die kanonische Form

$$v_H = \partial_{\overline{x}^{n/2+1}} H \partial_{\overline{x}^1} + \dots + \partial_{\overline{x}^n} H \partial_{\overline{x}^{n/2}} - \partial_{\overline{x}^1} H \partial_{\overline{x}^{n/2+1}} \dots - \partial_{\overline{x}^{n/2}} H \partial_{\overline{x}^n}$$

und erzeugt die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\bar{x}}^{i} = \partial_{\bar{x}^{n/2+1}} H \dot{\bar{x}}^{i+n/2} = -\partial_{\bar{x}^{i}} H , \quad i = 1, \dots, n/2 .$$
(25)

Man vergleiche nun formal die Beziehungen (19), (20) und (21) mit (23), (24) und (25). Die dazugehörige Poissonklammer erhält man einfach mit der Strukturmatrix

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

 $<sup>^{10}\</sup>mathrm{Es}$  wird nicht gefordert, dass man das Gleichungssystem eindeutig lösen kann.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Die Poissonklammer erfüllt die Beziehungen  $\{aF+bG, H\} = a\{F, H\}+b\{F, H\}, a, b \in \mathbb{R}$  (Bilinearität),  $\{F, G\}+\{G, F\} = 0$  (Schiefsymmetrie),  $\{F, GH\} = H\{F, G\} + G\{F, H\}$  (Produktregel) sowie  $\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$  (Jacobi Identität) für alle glatten Funktionen auf  $\mathcal{X}$ .

Als nächstes werden die vorgestellten hamiltonschen Systeme um Eingänge erweitert, wobei wir uns hier auf den Fall von Systemen auf Poissonmannigfaltigkeiten mit regulärer Strukturmatrix beschränken. Dazu führt man die erweiterte hamiltonsche Funktion H, [8],

$$H = H_0(x) - H_j(x)u^j, \quad j = 1, \dots, m,$$

ein, und gelangt damit zu den Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}^{i} = \{H_{0}, x^{i}\} - \{H_{j}, x^{i}\} u^{j} .$$
(26)

Hier existiert eine spezielle Wahl des Ausgangs, die des kollokierten Ausgangs  $y_i^c$ ,

$$y_j^c = \{H_0, H_j\}.$$
 (27)

Für die Anderung von  $H_0$  entlang der Lösungen von (26) folgt dann

$$\{H_0 - H_j u^j, H_0\} = \{H_0, H_j\} u^j$$
  
=  $y_i^c u^j$ .

Mittels eines einfachen Regelgesetzes der Art

$$u^j = -S^{jk}(x)y_k^c , (28)$$

mit positiv definiter Matrix  $S = [S^{jk}]$  kann folglich einfach Dämpfung in das System eingebracht werden.

Einfache mechanische Systeme erfüllen noch die Beziehung  $\{H_j, H_k\} = 0$ . Damit hat man eine weitere spezielle Wahl für den Ausgang, den natürlichen Ausgang  $y_j^n$ ,

$$y_j^n = H_j . (29)$$

Nun modifizieren wir die Hamiltonfunktion zu  $H = H_0 + P(H_1, \ldots, H_m)$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion P. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}^{i} = \{H_{0} + P, x\}$$
  
=  $\{H_{0} + P, x\} + \{H_{j}, x\}\partial_{H_{j}}P$ 

und deren Vergleich mit (26) zeigen, dass das Regelgesetz

$$u^j = -\partial_{H_j} P \tag{30}$$

nur die Hamiltonfunktion modifiziert. Mit P wird folglich die Hamiltonfunktion und mit  $S = [S^{jk}]$  ihre Änderung modifiziert. Gelingt es  $H_0 + P$  positiv definit zu machen und wählt man S positiv (semi) definit, dann ist der geschlossene Kreis stabil im Sinne von Liapunov, siehe [5]. Mit Hilfe des Satzes von LaSalle, siehe [7], kann man dann das System noch weiter untersuchen. Bei mechanischen Systemen sind die Ausgänge (29) Funktionen der Lagekoordinaten und die Ausgänge (27) ihre totalen zeitlichen Ableitungen. Wählt man noch  $P = 1/2H_jR^{ij}H_j$ ,  $R^{ij} \in \mathbb{R}$ , dann entartet (30) zu einem P-Regler. Die Kombination von (28) mit (30) führt folglich auf ein PD-Gesetz.

Es hat sich herausgestellt, dass die Klasse obiger Systeme trotz ihrer systemtheoretischen Eleganz nur eingeschränkt zur Modellierung vieler technisch relevanter Regelstrecken geeignet ist, da Dissipation nicht enthalten ist. Diese Nachteile wurden mit der Einführung der PCHD-Systeme (**p**ort **c**ontrolled **h**amiltonian system with dissipation) großteils eliminiert. Aus Platzgründen muss der Leser hier aber auf die Literatur verwiesen werden, z.B. [10].

#### 5 Optimale Systeme

Hier beschränken wir uns auf die einfache Optimierungsaufgabe, siehe [1],

$$J(t_0, x) = \min_{u} \int_{t_0}^{t_1} l(t, x, u) \mathrm{d}t$$

für die Regelstrecke

$$\mathrm{d}x^i - f^i(t, x, u)\mathrm{d}t \;, \quad i = 1, \dots, n \;,$$

die bereits in pfaffscher Form dargestellt ist. Für den Anfangswert gilt  $x(t_0) = x$ . Dabei muss die Stellgröße aus einem geeigneten festgelegten Funktionenraum gewählt werden. Man beachte, dass wir hier weder Existenz noch Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems prüfen, sondern einfach beides als gegeben annehmen. Dies erlaubt uns nun das Optimalitätsprinzip in der Form so anzuwenden, dass eine Funktion V(t, x) mit

$$V(t,x) = \min_{u} \int_{t}^{t_{1}} l \circ \sigma(\tau) \mathrm{d}\tau , \qquad (31)$$

für einen Schnitt  $x = x(t) = x \circ \sigma(t)$  mit

$$\sigma^*(\mathrm{d}x^i - f^i(t, x, u)\mathrm{d}t) = 0 \tag{32}$$

existiert. Das Optimalitätsprinzip, siehe [1], besagt nun, dass

$$V(t,x) = \min_{u} \int_{t}^{t+\tau} l \circ \sigma(\nu) d\nu + V \circ \sigma(t+\tau)$$

für alle  $t, \tau \in [t_0, t_1], t \leq \tau$  gilt. Im Grenzfall erhält man dann die Beziehung

$$\min(\partial_t V + \partial_{x^i} V f^i + l) = 0.$$

Es bezeichne nun  $\hat{u} = u(t, x, \partial_t V, \partial_x V)$  denjenigen Eingang, für den der Ausdruck  $\partial_t V + \partial_{x^i} V f^i + l$  sein Minimum annimmt. Dann gelangt man zur Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, siehe [1],

$$\partial_t V(t,x) + \partial_{x^i} V(t,x) f^i(t,x,\hat{u}) + l(t,x,\hat{u}) = 0, \qquad (33)$$

einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung noch den Bedingungen  $V(t_1, x) = 0$ ,  $\partial_{x^i} V(t_1, x) = 0$  genügt.

Zur weiteren Untersuchung von (33) führen wir ein Bündel  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$  mit Koordinaten  $(t, x^1, \ldots, x^n, z)$ für  $\mathcal{E}$  und  $(t, x^1, \ldots, x^n)$  für  $\mathcal{B}$  ein. Die Koordinaten des zugehörigen Jet-Bündels  $J_0^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_0^1} \mathcal{E}$  sind dann  $(t, x^1, \ldots, x^n, z, z_t, z_1, \ldots, z_n)$ . Anstelle von (33) untersuchen wir nun die Beziehung

$$z_t + z_i f^i(t, x, \hat{u}) + l(t, x, \hat{u}) = 0$$
  

$$z_t + H(t, x, \hat{u}) = 0,$$
(34)

wobei wir bereits die Hamiltonfunktion  $H = l + z_i f^i$  eingeführt haben. Man beachte, dass jede Lösung von (33) auch die Form<sup>12</sup>  $\omega_C = dz - z_t dt - z_i dx^i$  zu Null machen muss. Mit voriger Gleichung erhalten wir nun

$$\omega_C = dz + H dt - z_i dx^i$$
  
$$d\omega_C = dH \wedge dt - dz_i \wedge dx^i$$

Als nächstes berechnen wir das hamiltonsche Vektorfeld  $v_H$  gemäß der Beziehungen

$$\begin{array}{rcl} v_H \rfloor \omega_C &=& 0 \\ v_H \rfloor \mathrm{d}\omega_C &=& 0 \end{array}$$

und erhalten die hamiltonschen Gleichungen<sup>13</sup>

$$\dot{x}^{i} = \partial_{z_{i}}H = f^{i}(t, x, \hat{u}) 
\dot{z}_{i} = -\partial_{x^{i}}H = \partial_{x^{i}}(l(t, x, \hat{u}) + f^{j}(t, x, \hat{u})z_{j}) 
\dot{t} = 1$$
(35)

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Formen dieses Typs werden auch Kontaktformen genannt. Jeder zulässige Schnitt erfüllt sie.

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Man beachte, dass  $\partial_{u^l} H(t, x, u) du^l$ , l = 1, ..., m für alle zulässigen Variationen von u wegen der Minimierung verschwindet.

sowie die weitere Beziehung

$$\dot{z} = -l(t, x, \hat{u}).$$
 (36)

Man kann folglich die hamiltonschen Gleichungen (35), es sind gewöhnliche Differentialgleichungen<sup>14</sup> unabhängig von z, zuerst lösen und dann (36) einfach integrieren. Die Größe  $z_t$  folgt dann direkt aus (34). Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass dabei durchaus sehr schwierige Zweipunkt-Randwertprobleme auftreten.

### 6 Zusammenfassung

Methoden aus der Differentialgeometrie wurden vor ca. 30 Jahren in der Regelungstechnik und -theorie populär, als gezeigt werden konnte, dass viele nichtlineare Entwurfsprobleme durch geeignete Koordinatentransformationen auf lineare transformierbar sind. Man darf ohne weiteres festhalten, dass diese Methoden es erlauben, strukturelle Eigenschaften dynamischer Systeme besonders effizient zu untersuchen. Die bekanntesten Beispiele dazu sind Beobachtbarkeit, Erreichbarkeit oder auch Flachheit. Wie man diese Methoden z.B. auf implizite Systeme anwendet, wurde auch hier gezeigt. Eine Alternative zur Bestimmung struktureller Eigenschaften ist, mit dynamischen Systemen zu beginnen, die selbst eine reichhaltige Struktur aufweisen. Als Beispiele dazu wurden hier hamiltonsche Systeme behandelt, und zwar auf symplektischen und auf Poissonmannigfaltigkeiten, wo spezielle Reglerentwürfe direkt aus der differentialgeometrischen Struktur folgen. Dass auch allgemeine Probleme auf ganz spezielle Strukturen führen, konnte an Hand des Entwurfs optimaler Regelungen gezeigt werden, wo hamiltonsche Gleichungen als charakteristisches System der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung auftreten.

## Danksagung

Der Autor bedankt sich herzlich bei Herrn Bernd Kolar für die Hilfe und sorgfältige Kontrolle bei der Erstellung dieses Manuskripts.

## Literatur

- [1] A. E. Bryson Jr. and Y.-C. Ho, Applied Optimal Control. Taylor and Francis, 1975.
- [2] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette, Analysis, Manifolds and Physics. North-Holland, 1982.
- [3] T. Frankel, The Geometry of Physics: An Introduction. Cambridge University Press, 1997.
- [4] G. Giachetta, G. Sardanashvily, and L. Mangiarotti, New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory. World Scientific Pub. Co & Inc., 1997.
- [5] W. Hahn, Stability of Motion. Springer Verlag, 1967.
- [6] M. W. Hirsch and S. Smale, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, 1974.
- [7] H. Khalil, Nonlinear Systems. Prentice Hall, 2002.
- [8] H. Nijmeijer and A. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer, New York, USA, 1990.
- [9] S. Sastry, Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Springer Verlag, 1999.
- [10] S. Stramigioli, V. Duindam, A. Macchelli and H. Bruyninckx, Modeling and Control of Complex Physical Systems - The Port-Hamiltonian Approach. Springer, 2009.

 $<sup>^{14}</sup>$ Wegen $\dot{t}=1$ kann man $\dot{x}^i,\,\dot{z}_i$ durch die Jet-Variablen $\dot{x}^i_t,\,\dot{z}_{i,t}$ in (35) ersetzen.

# Instruction to authors – presented as a pattern paper (18 pt)

A. Maier, F. Huber (12 pt) Department ...., Vienna, Austria

Received April 8, 1999

## Abstract

This paper shows ..... (italics, 12 pt)

## 1 General (14 pt)

Authors should prepare their manuscript camera ready, format A 4, 12 typeface and must present their manuscript in good quality. At the left/right edge 2.5 cm, at the to/bottom edge 3 cm. Authors are invited to use papers of this journal as a sample. Please do not use an eraser or erasing fluid. Footnotes should be avoided if possible. Authors are expected to submit their paper to one of the publishers (O.Univ.Prof.Dr. Peter Kopacek, Intelligent Handling Devices and Robotics, Vienna University of Technology, Favoritenstrasse 9-11, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801-31899 or O.Univ.Prof.Dr. Alexander Weinmann, Institute of Automation and Control, Vienna University of Technology, Gusshausstr. 27-29, A-1040 Vienna, Austria, Fax: +43 1 58801 37699).

Email address for submitting pdf-manuscripts: weinmann@acin.tuwien.ac.at

## 2 References (14 pt)

Within the paper references should appear in the following form: (Mayer, H., 1990) or (*Mayer, H., 1990*) (12 pt); Mayer, H., 1990, discovered that....

## **3** Figures and Tables (14 pt)

Figures and Tables should be integrated in the paper and have to be referred to as Fig. 4.1 or Tab. 5.2.

## **4** References

References are to be listed alphabetically according to first author. (11 pt)

## 5 Word Processing System/Editor

Microsoft Word 2000 or higher; TeX or LaTeX.

Wenn unzustellbar, retour an:

IFAC-Beirat Österreich (E318 / E376) Favoritenstraße 9-11, A-1040 Wien Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien