

**A U T O M A T I S I E R U N G**

**VORLESUNG und ÜBUNG**

**Stand: WS 2009/2010**

**Univ.-Prof. Dr.techn. Andreas KUGI**

**TU WIEN**

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Systeme und Systemmodelle</b>	<b>1</b>
1.1	Der Systembegriff . . . . .	1
1.2	Elektrisches System . . . . .	4
1.3	Mechanisches System . . . . .	7
1.4	Elektromechanisches System . . . . .	9
1.5	Hydraulisches System . . . . .	12
1.6	Biologisches System . . . . .	13
1.7	Diskretes System . . . . .	14
1.8	Strukturschaltbilder . . . . .	16
1.9	Literatur . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Systemeigenschaften</b>	<b>19</b>
2.1	Linearität . . . . .	19
2.2	Zeitinvarianz . . . . .	21
2.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	22
2.4	Die Transitionsmatrix . . . . .	24
2.5	Linearisierung nichtlinearer Systeme . . . . .	28
2.5.1	Begriff der Ruhelage . . . . .	28
2.5.2	Linearisierung um eine Ruhelage . . . . .	30
2.5.3	Linearisierung um eine Trajektorie . . . . .	33
2.6	Literatur . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Lineare dynamische Systeme</b>	<b>37</b>
3.1	Zustandstransformation . . . . .	37
3.2	Jordansche Normalform . . . . .	38
3.2.1	Diagonalform . . . . .	39
3.2.2	Notwendigkeit von Hauptvektoren . . . . .	41
3.2.3	Reelle Jordansche Normalform . . . . .	42
3.2.4	Zusammenfassung . . . . .	44
3.3	Allgemeines Lösungsverhalten . . . . .	47
3.4	Eingangs-Ausgangsverhalten . . . . .	49
3.4.1	Übertragungsfunktion . . . . .	49
3.4.2	Zusammenschaltung von Übertragungsfkt. . . . .	52
3.4.3	Übertragungsmatrix . . . . .	54
3.5	Realisierungsproblem . . . . .	57
3.6	BIBO-Stabilität . . . . .	61
3.7	Kontinuierlicher Frequenzgang . . . . .	63

3.7.1	Nyquist-Ortskurve . . . . .	65
3.7.2	Bode-Diagramm . . . . .	66
3.8	Regelungstechnische Übertragungsglieder . . . . .	73
3.8.1	Verzögerungsglied 1-ter Ordnung (P-T <sub>1</sub> -Glied) . . . . .	74
3.8.2	Verzögerungsglied 2-ter Ordnung (P-T <sub>2</sub> -Glied) . . . . .	75
3.8.3	Proportional-Glied (P-Glied, P-Regler) . . . . .	76
3.8.4	Integrator (I-Glied, I-Regler) . . . . .	76
3.8.5	Proportional-Integral-Glied (PI-Glied, PI-Regler) . . . . .	77
3.8.6	Differenzierer (D-Glied, D-Regler, D-T <sub>1</sub> -Glied) . . . . .	77
3.8.7	Proportional-Differential-Glied (PD-Glied, PD-Regler) . . . . .	78
3.8.8	Lead-Glied (PD-T <sub>1</sub> -Glied) . . . . .	79
3.8.9	Proportional-Differential-Integral-Glied (PID-Glied, PID-Regler) . . . . .	80
3.8.10	Totzeit-Glied . . . . .	80
3.9	Schaltungstechnische Realisierung . . . . .	80
3.10	Pol-Nullstellen Diagramm . . . . .	83
3.11	Literatur . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Der Regelkreis</b> . . . . .	<b>86</b>
4.1	Aufgaben der Regelung . . . . .	90
4.2	Steuerungen . . . . .	91
4.2.1	Einfache Steuerung . . . . .	92
4.2.2	Steuerung mit Störgrößenaufschaltung . . . . .	92
4.3	Regelungen . . . . .	93
4.3.1	Regelung mit einem Freiheitsgrad . . . . .	94
4.3.2	Regelung mit zwei Freiheitsgraden . . . . .	100
4.3.3	Kaskadenregelung . . . . .	101
4.4	Stabilitätskriterien . . . . .	101
4.4.1	Numerisches Verfahren von Routh-Hurwitz . . . . .	102
4.4.2	Graphisches Verfahren: Kriterium von Michailov . . . . .	104
4.4.3	Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium . . . . .	106
4.5	Literatur . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Das Frequenzkennlinienverfahren</b> . . . . .	<b>112</b>
5.1	PI-Reglerentwurf . . . . .	117
5.2	Lead-Lag-Reglerentwurf . . . . .	119
5.3	Kompensationsreglerentwurf . . . . .	121
5.4	Literatur . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Der Digitale Regelkreis</b> . . . . .	<b>129</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	129
6.2	Abtastsysteme . . . . .	131
6.2.1	Der nichtlineare Fall . . . . .	132
6.2.2	Der lineare, zeitinvariante Fall . . . . .	133
6.3	Die Transitionsmatrix . . . . .	135
6.4	Eingangs-Ausgangsverhalten . . . . .	136

6.4.1	Die $z$ -Übertragungsfunktion . . . . .	137
6.4.2	Wahl der Abtastzeit . . . . .	142
6.4.3	Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen . . . . .	143
6.4.4	Realisierungsproblem . . . . .	144
6.4.5	BIBO-Stabilität . . . . .	146
6.5	Diskreter Frequenzgang . . . . .	147
6.6	Tustin-Transformation . . . . .	150
6.7	Stabilitätskriterien . . . . .	156
6.7.1	Numerisches Verfahren von Jury . . . . .	156
6.7.2	Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium . . . . .	159
6.8	Das FKL Verfahren für Abtastsysteme . . . . .	161
6.8.1	Einige Übertragungsglieder . . . . .	165
6.8.2	PI-Reglerentwurf im $q$ -Bereich . . . . .	166
6.9	Literatur . . . . .	170
<b>7</b>	<b>Erreichbarkeit/Beobachtbarkeit</b>	<b>171</b>
7.1	Erreichbarkeit (zeitkont. Fall) . . . . .	173
7.2	Erreichbarkeit (zeitdiskreter Fall) . . . . .	176
7.3	Steuerbarkeit . . . . .	177
7.4	Beobachtbarkeit (zeitkont. Fall) . . . . .	178
7.5	Beobachtbarkeit (zeitdiskreter Fall) . . . . .	180
7.6	Einfluss der Abtastung . . . . .	182
7.7	Dualitätsprinzip . . . . .	184
7.8	Minimalrealisierung . . . . .	184
7.8.1	Markov-Parameter und Hankelmatrizen . . . . .	187
7.9	Der PBH-Test . . . . .	188
7.10	Literatur . . . . .	191
<b>8</b>	<b>Zustandsregler/Zustandsbeobachter</b>	<b>192</b>
8.1	Zustandsregler . . . . .	192
8.1.1	Dead-Beat Regler . . . . .	201
8.2	Der PI-Zustandsregler . . . . .	202
8.3	Zustandsbeobachter . . . . .	204
8.3.1	Trivialer Beobachter (Simulator) . . . . .	204
8.3.2	Vollständiger Luenberger Beobachter . . . . .	205
8.4	Separationsprinzip . . . . .	208
8.5	Literatur . . . . .	211
<b>A</b>	<b>Die Laplace-Transformation</b>	<b>1</b>
A.1	Literatur . . . . .	7
<b>B</b>	<b>Die <math>z</math>-Transformation</b>	<b>1</b>
B.1	Literatur . . . . .	7
<b>C</b>	<b>Beweise</b>	<b>1</b>

# 1. SYSTEME UND SYSTEMMODELLE

## 1.1. Der Systembegriff

Der Begriff eines *Systems* wird in den verschiedensten wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Bereichen verwendet, wobei dessen Bedeutung oft nicht klar definiert ist. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher Komponenten, die miteinander in Interaktion stehen, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1. Die Eingangsgrößen

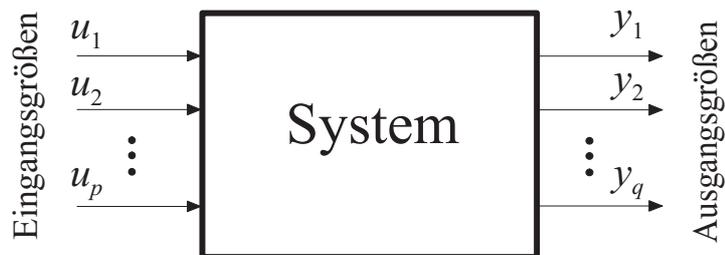


Abbildung 1.1: Zum Systembegriff.

$u_1, u_2, \dots, u_p$  sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße  $i(t)$  (Strom), der Ausgangsgröße  $u(t)$  (Spannung) und der Zeit  $t$ . Beim Widerstand  $R$  ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch die Eingangsgröße zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = Ri(t) . \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Im Gegensatz dazu muss zur Berechnung der Spannung  $u(t)$  des Kondensators  $C$  zum Zeitpunkt  $t$  der Eingangsstrom

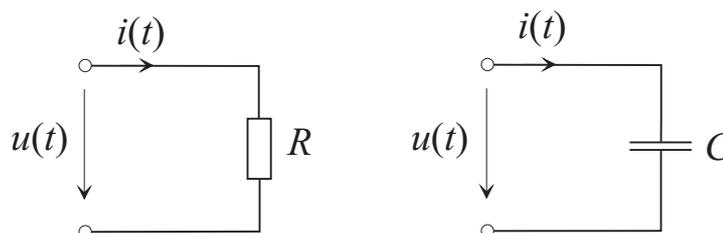


Abbildung 1.2: Zu statischen und dynamischen Systemen.

$i(\tau)$  für die gesamte Vergangenheit  $\tau \leq t$  bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße  $i(\tau)$  lediglich für das Zeitintervall  $t_0 \leq \tau \leq t$ , dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anfangsbedingung  $u(t_0) = u_0$  bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit  $\tau < t_0$ . Man sagt auch,  $u(t_0)$  beschreibt den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt  $t_0$ . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.1, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zum Zeitpunkt  $t$  ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  für  $\tau \leq t$  abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

**Definition 1.1. (Zustand)** Existieren für ein dynamisches System Größen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  auf dem Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und den Werten von  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  für ein beliebiges  $t_0$  festgelegt sind, dann heißen die Größen  $x_1, \dots, x_n$  Zustandsgrößen des Systems.

**Aufgabe 1.1.** Welche Größe wählen Sie als Zustandsgröße bei einer Induktivität? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:** Strom durch die Induktivität.

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl  $n$  von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand* der *Ordnung*  $n$  bezeichnet. Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt, werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir

uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \quad , \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\
 \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \quad , \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\
 &\vdots \\
 \frac{d}{dt}x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \quad , \quad x_n(t_0) = x_{n,0}
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Zustandsdifferentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\
 y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\
 &\vdots \\
 y_q &= h_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t)
 \end{aligned}$$

Ausgangsgleichungen

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
 \tag{1.4}$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von  $\frac{d}{dt}$  einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

angeben. Die Größen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}$  werden einfach als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen Systems bezeichnet.

Wird der Zustand  $\mathbf{x}$  als Element eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t$  kann dann als Punkt im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit  $t$  in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum. In den Abschnitten 1.2 - 1.7 werden einige Beispiele dynamischer Systeme mit finitem Zustand diskutiert.

Vollständigkeitshalber sollte noch erwähnt werden, dass *Systeme mit infinit-dimensionalem Zustand*, auch *verteilt-parametrische Systeme* genannt, durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispiele dazu wären Balken, Platten, Membranen, elektromagnetische Felder etc..

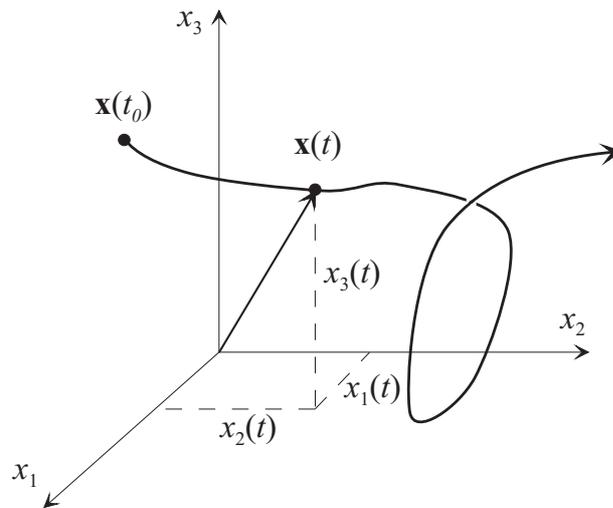


Abbildung 1.3: Zum Begriff der Trajektorie.

## 1.2. Elektrisches System

Abbildung 1.4 zeigt einen Serienschwingkreis mit der Eingangsspannung  $u(t)$  und der Ausgangsspannung  $y(t)$ . Das mathematische Modell kann unmittelbar aus den Kirchhoff-

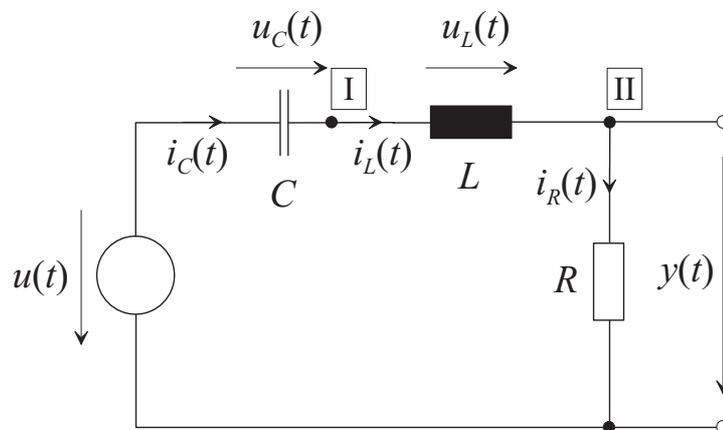


Abbildung 1.4: Serienschwingkreis.

schen Gesetzen

$$\begin{aligned}
 \text{Maschengleichung:} & \quad -u(t) + u_C(t) + u_L(t) + y(t) = 0 \\
 \text{Knotengleichung I:} & \quad i_C(t) - i_L(t) = 0 \\
 \text{Knotengleichung II:} & \quad i_L(t) - i_R(t) = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

und den Bauelementgleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{Kondensator } C: & \quad C \frac{d}{dt} u_C(t) = i_C(t) \quad \text{mit} \quad u_C(0) = u_{C,0} \\
 \text{Induktivität } L: & \quad L \frac{d}{dt} i_L(t) = u_L(t) \quad \text{mit} \quad i_L(0) = i_{L,0} \\
 \text{Widerstand } R: & \quad R i_R(t) = y(t)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

hergeleitet werden. Wählt man als Zustandsgrößen den Strom  $i_L(t)$  durch die Induktivität und die Spannung  $u_C(t)$  am Kondensator, dann erhält man unmittelbar die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \tag{1.8}$$

und die Ausgangsgleichung

$$y(t) = [0 \ R] \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen für  $u(t) = 0$  unter den Anfangsbedingungen  $u_C(0) = u_{C,0}$  bzw.  $i_L(0) = i_{L,0}$  lautet

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \exp(-\tau t) \left( \left( \frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_{L,0} \right) \sin(\omega t) + u_{C,0} \cos(\omega t) \right) \\
 i_L(t) &= -\exp(-\tau t) \left( \left( \frac{\tau}{\omega} i_{L,0} + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sin(\omega t) - i_{L,0} \cos(\omega t) \right)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

mit

$$\tau = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2}. \tag{1.11}$$

Bei der Darstellung von (1.10) wurde bereits vorausgesetzt, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} > \frac{R}{2L} \tag{1.12}$$

gilt. In Abbildung 1.5 ist die Trajektorie für die Parameter  $R = L = C = 1$  und die Anfangsbedingungen  $u_{C,0} = 2$ ,  $i_{L,0} = 1$  für das Zeitintervall  $0 \leq t \leq 10$  dargestellt.

**Aufgabe 1.2.** Wie sehen die Lösungen der Zustandsdifferentialgleichungen (1.8) aus, wenn gilt  $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$ ? Zeichnen Sie für beide Fälle die Trajektorien für das Zeitintervall  $0 \leq t \leq 10$ , die Anfangsbedingungen  $u_{C,0} = 2$ ,  $i_{L,0} = 1$  und die Parameter  $L = C = 1$ ,  $R = 3$  für den ersten Fall und  $L = C = 1$ ,  $R = 2$  für den zweiten Fall.

**Lösung:** Für  $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$ :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \exp(-\tau t) \left( \left( \frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_{L,0} \right) \sinh(\omega t) + u_{C,0} \cosh(\omega t) \right) \\
 i_L(t) &= -\exp(-\tau t) \left( \left( \frac{\tau}{\omega} i_{L,0} + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sinh(\omega t) - i_{L,0} \cosh(\omega t) \right)
 \end{aligned}$$

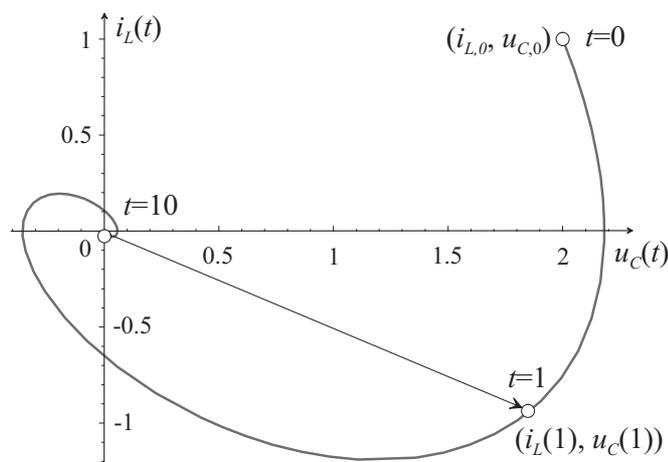


Abbildung 1.5: Trajektorie des Serienschwingkreises.

Für  $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$ :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left( \left( \frac{1}{C}i_{L,0} + \frac{2}{RC}u_{C,0} \right) t + u_{C,0} \right)$$

$$i_L(t) = -\exp\left(-\frac{2}{RC}t\right) \left( \left( \frac{2}{RC}i_{L,0} + \frac{4}{R^2C}u_{C,0} \right) t - i_{L,0} \right)$$

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (z.B. in MAPLE den Befehl `dsolve`)!

**Aufgabe 1.3.** Berechnen Sie zum elektrischen System nach Abbildung 1.6 die Zustandsdifferentialgleichung(en) und die Ausgangsgleichung.

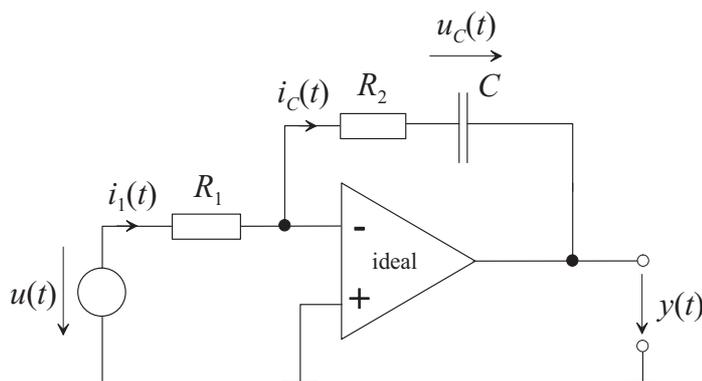


Abbildung 1.6: Elektronische Schaltung eines PI-Reglers.

**Lösung:**

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = \frac{1}{R_1C}u(t)$$

$$y(t) = -u_C(t) - \frac{R_2}{R_1}u(t)$$

### 1.3. Mechanisches System

In Abbildung 1.7 ist ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer System mit einer auf die Masse  $m$  in  $x$ -Richtung wirkenden externen Kraft  $F(t)$  dargestellt.

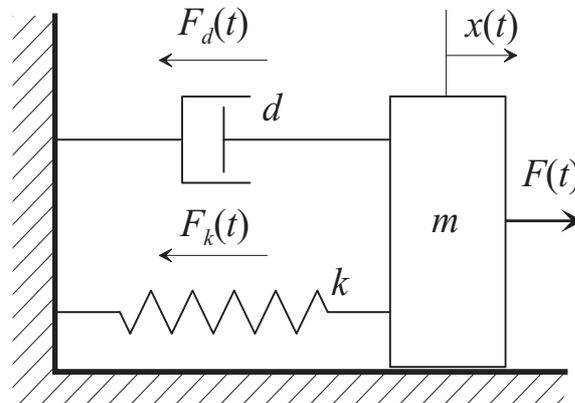


Abbildung 1.7: Einfaches Feder-Masse-Dämpfer System.

Für die Rückstellkraft der Feder gelte die Beziehung

$$F_k(t) = kx(t) \quad (1.13)$$

und die Dämpfungskraft lautet

$$F_d(t) = d \frac{d}{dt} x(t) . \quad (1.14)$$

Damit erhält man das mathematische Modell unmittelbar aus dem Impulserhaltungssatz in  $x$ -Richtung zu

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -kx(t) - d \frac{d}{dt} x(t) + F(t) . \quad (1.15)$$

Wählt man als Eingangsgröße des Systems die Kraft  $F(t)$  und als Zustandsgrößen die Position  $x(t)$  und die Geschwindigkeit  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$  der Masse  $m$ , so lauten die zugehörigen Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) . \quad (1.16)$$

Vergleicht man das mathematische Modell (1.16) mit jenem des elektrischen Serienschwingkreises (1.8), so erkennt man, dass diese die gleiche Struktur besitzen. Die zum mechanischen System analogen Größen im Serienschwingkreis lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Mechanische Größe:	äquivalent zu	Elektrische Größe:
Weg: $x(t)$		Ladung: $q_C(t) = C u_C(t)$
Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$		Strom: $i_C(t) = \frac{d}{dt}q_C(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t)$
Kraft: $F(t)$		Eingangsspannung: $u(t)$
Masse: $m$		Spule (Induktivität): $L$
Federkonstante: $k$		Kondensator(1/Kapazität): $1/C$
Dämpfungs-konstante: $d$		Widerstand: $R$

**Aufgabe 1.4.** Zeigen Sie mit Hilfe obiger Tabelle, dass man durch Ersetzen der mechanischen Größen durch die äquivalenten elektrischen Größen in (1.16) unmittelbar (1.8) erhält. Bestimmen Sie die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (1.16) für  $F(t) = 0$  und die Anfangswerte  $x(0) = x_0$  sowie  $v(0) = v_0$  mit Hilfe von (1.10), (1.11) sowie Aufgabe 1.2.

Man beachte, dass die Wahl der Zustandsgrößen keinesfalls eindeutig ist. Betrachten Sie dazu folgende Aufgabe:

**Aufgabe 1.5.** Gegeben ist das mathematische Pendel mit dem masselosen Stab der Länge  $l$  und der Punktmasse  $m$  von Abbildung 1.8. Berechnen Sie die Zustandsdifferential-

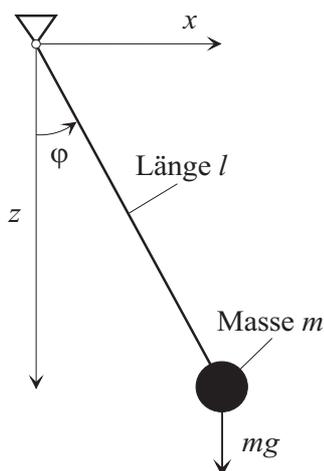


Abbildung 1.8: Mathematisches Pendel.

gleichungen und die Ausgangsgleichung, wenn als Ausgangsgröße  $y$  die Auslenkung der Punktmasse  $m$  von der unteren Ruhelage in  $z$ -Richtung herangezogen wird. Es wird dabei angenommen, dass der Winkel  $\varphi$  des Pendels aus Konstruktionsgründen nur im Bereich

$-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  auftreten kann. Wählen Sie zuerst als Zustandsgrößen den Winkel  $\varphi(t)$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$  und anschließend die Auslenkung der Masse  $m$  in  $x$ -Richtung  $x(t)$  und deren zeitliche Ableitung  $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ .

**Lösung:** Zustandsvektor:  $\mathbf{x}^T = [\varphi, \omega]$ :

Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi &= \omega \\ \frac{d}{dt}\omega &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi)\end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$y = -l(1 - \cos(\varphi))$$

Zustandsvektor:  $\mathbf{x}^T = [x, v]$ :

Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= v \\ \frac{d}{dt}v &= -\frac{xv^2}{(l^2 - x^2)} - \frac{xg}{l^2}\sqrt{l^2 - x^2}\end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$z = \sqrt{l^2 - x^2} - l$$

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (z.B. MAPLE)!

## 1.4. Elektromechanisches System

Abbildung 1.9 zeigt die schematische Darstellung einer fremderregten Gleichstrommaschine, die über eine Seiltrommel eine Last bewegt. Es soll nun ein geeignetes mathematisches Modell zur Beschreibung dieses Systems erstellt werden. Es sei erwähnt, dass die Darstellung der fremderregten Gleichstrommaschine in Form des einfachen Ersatzschaltbildes von Abbildung 1.9 bereits eine Reihe von Modellannahmen impliziert, nämlich

- die räumlich verteilten Wicklungen können als konzentrierte Induktivitäten in den jeweiligen Wicklungsachsen modelliert werden,
- die um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten Induktivitäten im Anker- und Erregerkreis deuten bereits an, dass eine vollkommene Entkopplung zwischen Anker- und Erregerfeld angenommen wird,
- die Widerstände im Anker- und Erregerkreis seien konstant,
- es werden keine Eisenverluste berücksichtigt,
- es gibt keine Sättigungserscheinungen im Ankerkreis und
- die Kommutierung werde als ideal vorausgesetzt (keine Drehmomentenwelligkeit).

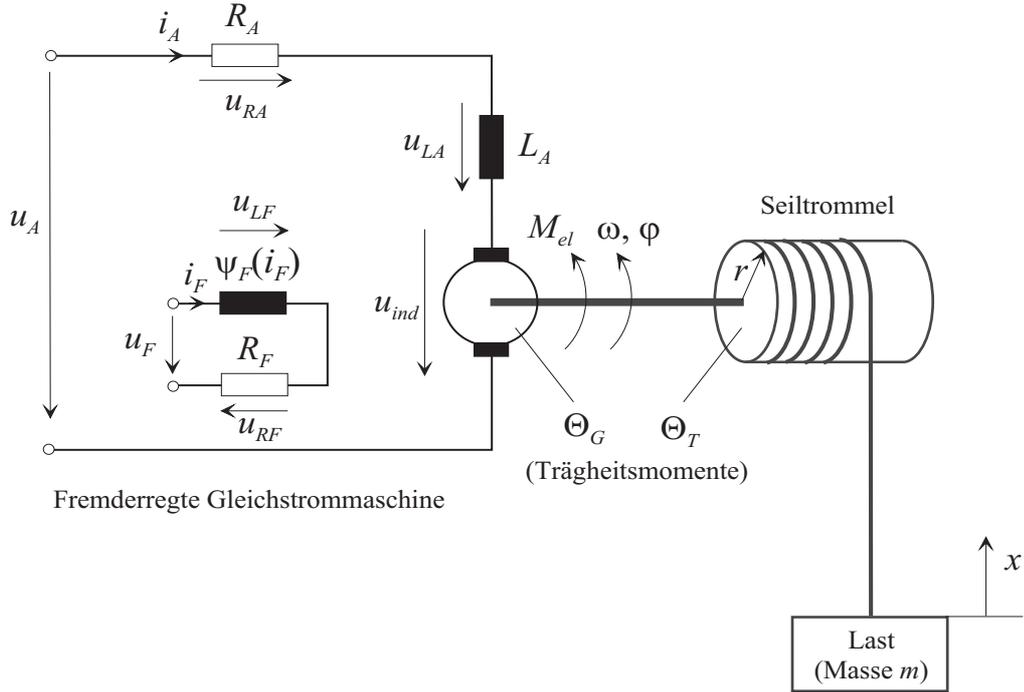


Abbildung 1.9: Fremderregte Gleichstrommaschine mit Seiltrommel und Last.

Weiters wird angenommen, dass das Seil masselos und nicht dehnbar ist sowie dass sich der Seiltrommelradius  $r$  durch das Auf- bzw. Abwickeln des Seiles nicht ändert. Das mathematische Modell der Gleichstrommaschine ergibt sich unmittelbar aus den Maschengleichungen im Anker- und Erregerkreis

$$\begin{aligned} \text{Masche Ankerkreis: } & -u_A + R_A i_A + u_{LA} + u_{ind} = 0 \\ \text{Masche Erregerkreis: } & -u_F + R_F i_F + u_{LF} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

mit

$$u_{LA} = L_A \frac{d}{dt} i_A, \quad u_{LF} = \frac{d}{dt} \psi_F(i_F) = \frac{d}{dt} (L_F(i_F) i_F) \quad (1.18)$$

sowie der induzierten Spannung

$$u_{ind} = k \psi_F(i_F) \omega \quad (1.19)$$

zu

$$\begin{aligned} L_A \frac{d}{dt} i_A &= u_A - R_A i_A - k \psi_F(i_F) \omega \\ \frac{\partial}{\partial i_F} \psi_F(i_F) \frac{d}{dt} i_F &= u_F - R_F i_F. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dabei bezeichnen  $i_A$  und  $i_F$  den Anker- bzw. Erregerstrom,  $u_A$  und  $u_F$  die Anker- bzw. Erregerspannung,  $R_A$  und  $R_F$  die Wicklungswiderstände der Anker- bzw. Erregerwicklung,  $\psi_F(i_F)$  den verketteten Fluss der Erregerwicklung,  $L_A$  die Ankerinduktivität,  $k$  die Ankerkreisconstante und  $\omega$  die Drehwinkelgeschwindigkeit des Rotors. Führt man nun

gemäß Abbildung 1.10 die Seilkraft  $F_s$  ein, so erhält man durch Anwendung des Drehimpulserhaltungssatzes für die Seiltrommel die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi &= \omega \\ (\Theta_G + \Theta_T) \frac{d}{dt}\omega &= M_{el} - F_s r \end{aligned} \quad (1.21)$$

mit dem Drehwinkel  $\varphi$ , dem elektrischen Moment der Gleichstrommaschine

$$M_{el} = k\psi_F(i_F) i_A \quad (1.22)$$

und den Trägheitsmomenten  $\Theta_G$  und  $\Theta_T$  des Rotors der Gleichstrommaschine und der Seiltrommel. Auf analoge Art und Weise liefert der Impulserhaltungssatz für die Last mit der Masse  $m$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= v \\ m \frac{d}{dt}v &= F_s - mg \end{aligned} \quad (1.23)$$

mit der Erdbeschleunigung  $g$  sowie der Position  $x$  und der Geschwindigkeit  $v$  der Last.

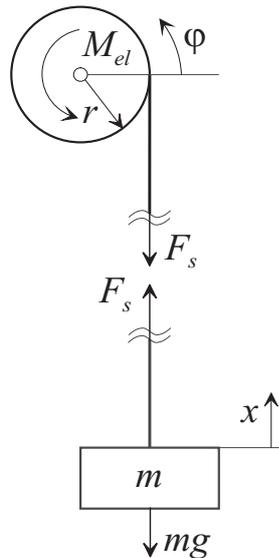


Abbildung 1.10: Zum mechanischen Teilsystem.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Zwangsbedingung

$$\underbrace{r \frac{d}{dt}\varphi}_{\omega} = \underbrace{\frac{d}{dt}x}_v \quad (1.24)$$

kann man die Seilkraft  $F_s$  aus (1.23) berechnen und in (1.21) einsetzen. Damit ergeben sich die Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}i_A &= \frac{1}{L_A} (u_A - R_A i_A - k\psi_F(i_F)\omega) \\ \frac{d}{dt}i_F &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial i_F}\psi_F(i_F)} (u_F - R_F i_F) \\ \frac{d}{dt}\varphi &= \omega \\ \frac{d}{dt}\omega &= \frac{1}{\Theta_G + \Theta_T + mr^2} (k\psi_F(i_F)i_A - mgr)\end{aligned}\tag{1.25}$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x}^T = [i_A, i_F, \varphi, \omega]$  sowie dem Eingang  $\mathbf{u}^T = [u_A, u_F]$  und die Ausgangsgleichung lautet

$$y = r\varphi .$$

## 1.5. Hydraulisches System

Ein Speiserohr fördert einen Volumenstrom  $q$  in einen Behälter, dessen Pegelhöhe mit  $h_1$  bezeichnet wird. Aus diesem Behälter fließt durch ein Abflussrohr der Volumenstrom  $q_1$  in einen zweiten Behälter mit der Pegelhöhe  $h_2$ , aus dem wieder ein Abfluss  $q_2$  strömt (siehe Abbildung 1.11). Die Eingangsgröße des Systems ist der Volumenstrom  $q$  und als

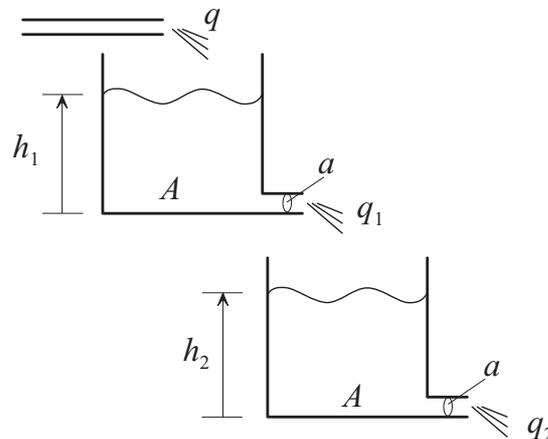


Abbildung 1.11: Zwei-Tank-System.

Ausgangsgröße wird der Abfluss aus dem zweiten Behälter  $q_2$  gewählt. Einfachheitshalber sei angenommen, dass sämtliche Behälter die gleiche Querschnittsfläche  $A$  haben und die Querschnitte der Abflussrohre generell den gleichen Wert  $a$  aufweisen. Die Bilanzgleichun-

gen für die beiden Behälter lauten dann

$$\begin{aligned} A \frac{d}{dt} h_1 &= q - q_1 \\ A \frac{d}{dt} h_2 &= q_1 - q_2 . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Der Zusammenhang zwischen Pegelhöhe und Abfluss sei durch eine nichtlineare Kennlinie der Form

$$\begin{aligned} q_1 &= a\sqrt{2gh_1}, & h_1 &\geq 0 \\ q_2 &= a\sqrt{2gh_2}, & h_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

gegeben, wobei  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Damit errechnen sich die Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\begin{aligned} A \frac{d}{dt} h_1 &= -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q & h_1 &\geq 0 \\ A \frac{d}{dt} h_2 &= a\sqrt{2g}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) & h_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

und die Ausgangsgleichung ergibt sich in der Form

$$q_2 = a\sqrt{2gh_2} . \quad (1.29)$$

**Aufgabe 1.6.** *Erweitern Sie das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.11 um einen dritten Tank zu einem Drei-Tank-System. Nehmen Sie dabei an, dass  $A_3$  die Fläche und  $h_3$  die Pegelhöhe des dritten Behälters ist und dass das Abflussrohr aus dem dritten Behälter eine Querschnittsfläche  $a_3$  aufweist. Berechnen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung für den Abfluss  $q_3$  aus dem dritten Behälter.*

**Lösung:** Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} A \frac{d}{dt} h_1 &= -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q & h_1 &\geq 0 \\ A \frac{d}{dt} h_2 &= a\sqrt{2g}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) & h_2 &\geq 0 \\ A_3 \frac{d}{dt} h_3 &= \sqrt{2g}(a\sqrt{h_2} - a_3\sqrt{h_3}) & h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$q_3 = a_3\sqrt{2gh_3}$$

## 1.6. Biologisches System

Betrachtet man die Räuber-Beute-Beziehung zweier Populationen, so kann die dynamische Populationsentwicklung mit Hilfe der Lotka-Volterra-Differentialgleichungen beschrieben werden. Das mathematische Modell beruht dabei auf der Annahme, dass die Anzahl der Beutetiere exponentiell mit der Wachstumsrate  $a > 0$  zunimmt, wenn keine Räuber vorhanden sind. Umgekehrt nimmt man an, dass bei Nicht-Vorhandensein von Beutetieren die Anzahl der Räuber exponentiell mit der Rate  $c > 0$  abnimmt. Für den Fall, dass beide

Populationen vorhanden sind, setzt man die Anzahl der "feindlichen" Begegnungen proportional dem Produkt der beiden Populationen an. Dabei liegt dem Modell der Ansatz zu Grunde, dass die Anzahl der Beutetiere mit den "feindlichen" Begegnungen dezimiert (Proportionalitätskonstante  $b > 0$ ) und die Anzahl der Räuber erhöht (Proportionalitätskonstante  $d > 0$ ) werden.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Beutetiere mit  $x_1$  und die der Räuber mit  $x_2$ , dann lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -cx_2 + dx_1x_2\end{aligned}\tag{1.30}$$

**Aufgabe 1.7.** Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage(n)  $(x_{1,s}, x_{2,s})$  des Systems (1.30), indem Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}ax_{1,s} - bx_{1,s}x_{2,s} &= 0 \\ -cx_{2,s} + dx_{1,s}x_{2,s} &= 0\end{aligned}$$

lösen.

**Lösung:**  $x_{1,s} = x_{2,s} = 0$  und  $x_{1,s} = \frac{c}{d}$ ,  $x_{2,s} = \frac{a}{b}$

Abbildung 1.12 zeigt das Verhalten der Populationen für die spezielle Wahl  $a = b = c = d = 1$  und  $x_1(0) = x_2(0) = 2$  in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Wie man erkennt, weist für diesen Fall das Räuber-Beute-Modell eine *geschlossene Trajektorie*, auch *Grenzzyklus* genannt, auf.

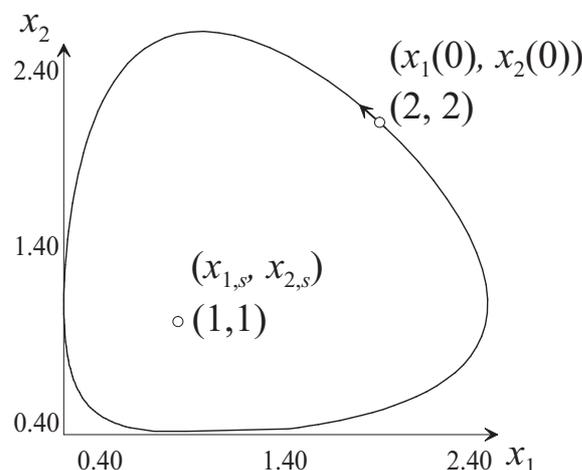


Abbildung 1.12: Zum Räuber-Beute-Modell.

## 1.7. Diskretes System

Die bisher behandelten Systeme gehören alle zur Klasse der *zeitkontinuierlichen Systeme*, d.h., die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen sind Funktionen der kontinuierlichen

Zeit  $t \in \mathbb{R}$ . Im Gegensatz dazu gibt es auch so genannte *zeitdiskrete Systeme*, die durch eine *Folge* von Punkten  $x(k)$  bzw.  $x_k$ , die mit einem fortlaufenden Index  $k \in \mathbb{Z}$  versehen sind, beschrieben werden. Diese Folgenwerte können beispielsweise zu *äquidistanten Zeitabschnitten*, wie dies bei Regelungsaufgaben mit digitalen Prozessoren in Kombination mit A/D- und D/A-Wandlern der Fall ist, oder auch ohne genau festgelegte zeitliche Abfolge auftreten. Der erstere Fall ist für die digitale Regelung von essentieller Bedeutung und wird im Detail noch behandelt. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen, wo die zugehörigen mathematischen Modelle auf Differentialgleichungen basieren, werden im zeitdiskreten Fall *Differenzgleichungen* zur Modellierung herangezogen.

Als einfaches Beispiel wird im Folgenden die Verzinsung eines Bankguthabens durch ein zeitdiskretes mathematisches Modell beschrieben. Es sei angenommen, dass  $x(k)$  das Bankguthaben im Monat  $k$  bezeichnet und dass die Bank das Guthaben monatlich zu einem festen Zinssatz von  $p\%$  verzinst.

Zahlt man nun monatlich einen Betrag  $u(k)$  auf das Konto ein, dann lautet das Guthaben im nächsten Monat  $k+1$  wie folgt

$$x(k+1) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x(k) + u(k) . \quad (1.31)$$

Natürlich kann mit Hilfe dieser Differenzgleichung bei gleichbleibenden Bedingungen das Guthaben der folgenden Monate ebenfalls einfach errechnet werden.

Für die Spieler unter den Lesern ist folgende Aufgabe wärmstens empfohlen:

**Aufgabe 1.8.** (*Gambler's Ruin*) Angenommen ein Spieler  $A$  geht ins Casino  $B$  um Roulette zu spielen. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  gewinnt sei  $p$ ,  $0 < p < 1$  und die Wahrscheinlichkeit, dass das Casino gewinnt, ist entsprechend  $q = 1 - p$ . Am Beginn des Spiels hätte der Spieler  $A$  die Anzahl von  $a$  und das Casino  $b$  Chips. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler  $A$  alle Chips  $B$  des Casinos gewinnt?

Um diese Aufgabe zu lösen, nehmen wir an, der Spieler  $A$  hätte  $0 \leq k \leq a + b$  und das Casino entsprechend  $a + b - k$  Chips. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler  $A$  im Besitz von  $k$  Chips gewinnt, bezeichne man mit  $x(k)$ . Je nachdem ob der Spieler  $A$  verliert oder gewinnt, hat er nach diesem Spiel  $(k-1)$  oder  $(k+1)$  Chips.

Damit muss aber  $x(k)$  der Differenzgleichung

$$x(k) = px(k+1) + qx(k-1)$$

genügen. Weiters gelten natürlich die Zusatzbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x(a+b) = 1 .$$

Berechnen Sie die Lösung dieser Differenzgleichung? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler  $A$  alle Chips  $B$  des Casinos gewinnt, wenn  $a = 100$ ,  $b = 10^4$ ,  $p = 18/37$  und  $q = 19/37$  (rot, schwarz, Null bei Roulette)?

**Lösung:**

$$x(k) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Wahrscheinlichkeit für den Spieler die "Bank zu brechen":  $x(a) = 1.538 \times 10^{-235}$

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (z.B. in MAPLE den Befehl `rsolve`)!

## 1.8. Strukturschaltbilder

Obwohl das dynamische Systemverhalten sehr gut durch die mathematischen Modelle (Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichung) beschrieben werden, ist es oft zweckmäßig, das mathematische Modell in Form von *Strukturschaltbildern* zu visualisieren.

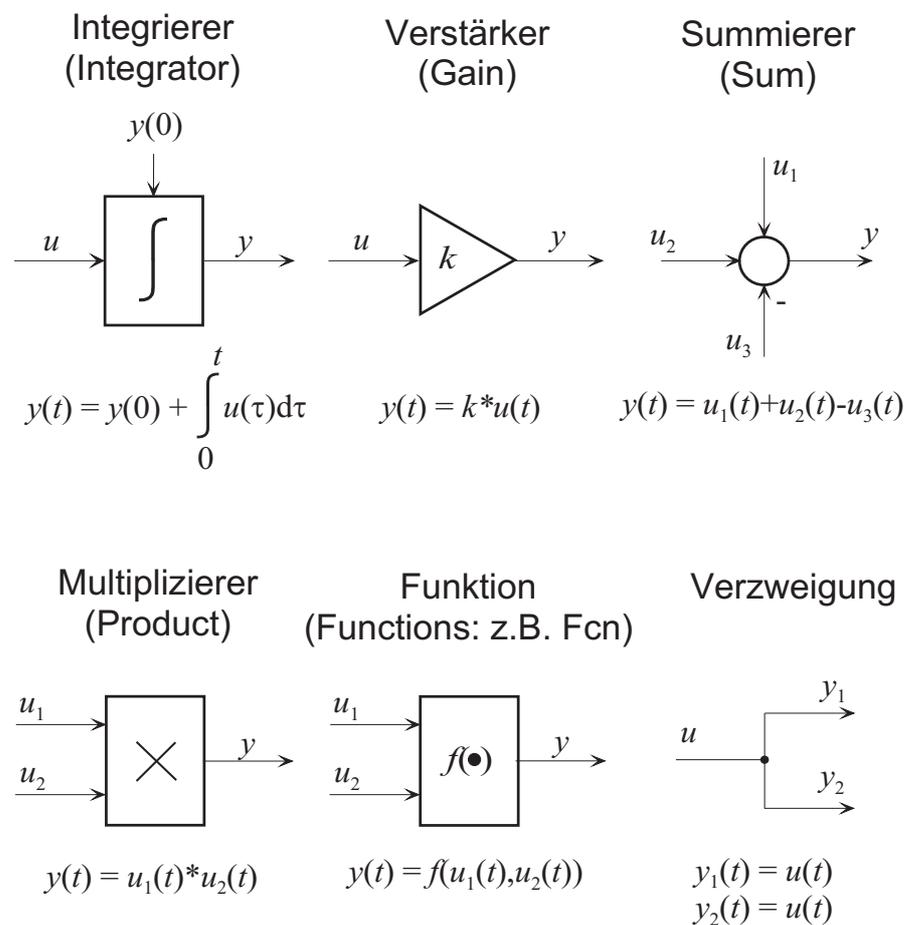


Abbildung 1.13: Die graphische Darstellung und deren Bedeutung einiger wesentlicher Blöcke für Strukturschaltbilder.

Ursprünglich wurde diese grafische Darstellung zur Simulation der Zustandsdifferentialgleichungen am Analogrechner entwickelt - heute bieten viele Simulationsprogramme am Digitalrechner (z.B. MATLAB/SIMULINK) sowie industrielle Automatisierungssysteme die Möglichkeit einer blockorientierten Eingabe des mathematischen Modells. Aus diesem Grund sollte an dieser Stelle kurz auf diese Darstellung eingegangen werden. Abbildung

1.13 zeigt einige gängige Symbole und deren Bedeutung. In runder Klammer ist auch die Bezeichnung des jeweiligen Blocks im für regelungstechnische Anwendungen wohl am meisten verbreiteten Simulationsprogramm MATLAB/SIMULINK angegeben.

Als Beispiel betrachte man die Zustandsdifferentialgleichungen (1.25) des elektromechanischen Systems vom Abschnitt 1.4 und schreibe diese im ersten Schritt als Integralgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}
 i_A(t) &= i_A(0) + \frac{1}{L_A} \int_0^t (u_A(\tau) - R_A i_A(\tau) - k\psi_F(i_F(\tau)) \omega(\tau)) d\tau \\
 i_F(t) &= i_F(0) + \int_0^t \frac{1}{\tilde{\psi}_F(i_F(\tau))} (u_F(\tau) - R_F i_F(\tau)) d\tau \\
 \varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \\
 \omega(t) &= \omega(0) + \frac{1}{\tilde{\Theta}} \int_0^t (k\psi_F(i_F(\tau)) i_A(\tau) - mgr) d\tau
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{\Theta} = \Theta_G + \Theta_T + mr^2 \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}_F(i_F) = \frac{\partial}{\partial i_F} \psi_F(i_F) \tag{1.33}$$

um. Das zugehörige Strukturschaltbild ist Abbildung 1.14 zu entnehmen.

**Aufgabe 1.9.** Zeichnen Sie die Strukturschaltbilder des elektrischen Systems (1.8), (1.9) vom Abschnitt 1.2, des mechanischen Systems (1.16) vom Abschnitt 1.3 und des hydraulischen Systems (1.28) vom Abschnitt 1.5.

## 1.9. Literatur

1. Cellier F.E., *Continuous System Modeling*, Springer, New York, (1991).
2. Director S.W., Rohrer R.A., *Introduction to System Theory*, McGraw-Hill, New York, (1972).
3. Föllinger O., Franke D., *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*, Oldenbourg, München Wien, (1982).
4. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1*, Springer, Berlin Heidelberg, (1995).
5. Luenberger D.G., *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1979).
6. Padulo L., Arbib M.A., *System Theory*, W.B. Saunders Company, Philadelphia, (1974).
7. Shearer J.L., Kulakowski B.T., *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, (1990).

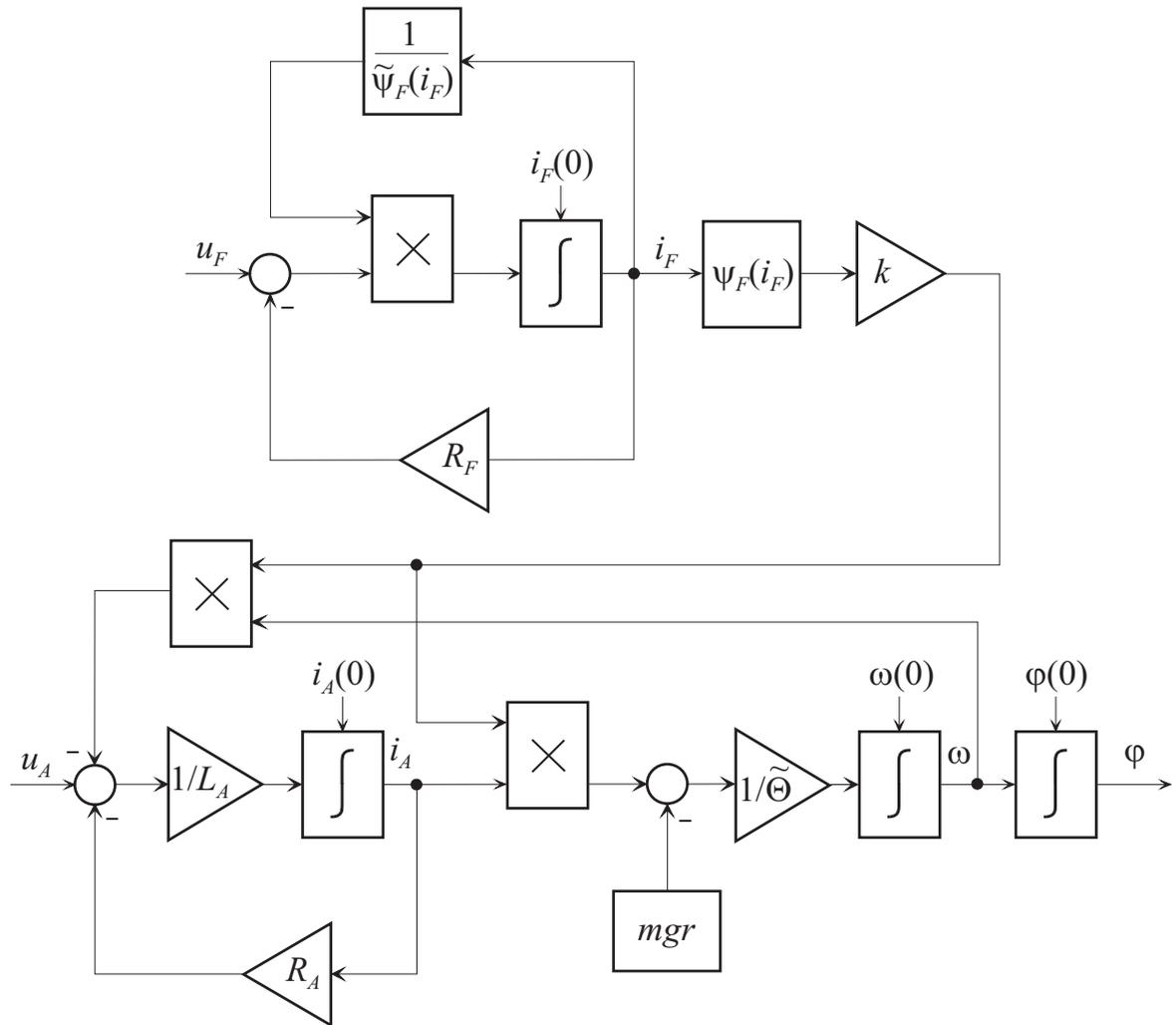


Abbildung 1.14: Strukturschaltbild des elektromechanischen Systems vom Abschnitt 1.4.

## 2. SYSTEMEIGENSCHAFTEN

Wie man sich an Hand des Beispiels von Abbildung 2.1 einfach überzeugen kann, ist es nicht möglich, die Linearität eines Systems in der Form zu beurteilen, dass man sagt "Ein System ist nichtlinear, wenn es ein nichtlineares Element beinhaltet".

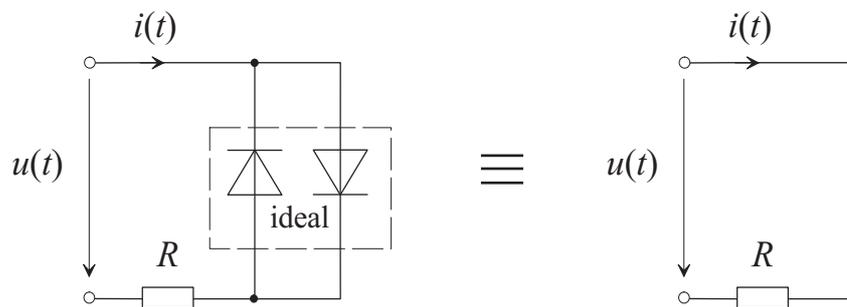


Abbildung 2.1: Äquivalente Schaltungen.

Daher wollen wir am Beginn dieses Kapitels mathematisch korrekt klassifizieren, wann ein System der Form (siehe auch (1.5))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  und dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  linear ist.

### 2.1. Linearität

Es sei angenommen, dass  $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t)$  die Lösung der Differentialgleichung (2.1) zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ , bezeichnet.

**Definition 2.1. (Linearität)** Das System (2.1), (2.2) nennt man linear, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt  $t_0 \geq 0$  die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t), \mathbf{u}(t), t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \geq t_0$  die Bedingungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{0}, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) \\ (2) \quad & \mathbf{y}(\mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \\ (3) \quad & \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) + \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  erfüllt.

Dabei bezeichnet man die Eigenschaft (1) auch als *Superpositionsprinzip* oder *Zerlegungseigenschaft* hinsichtlich der Anfangswerte (*Nulleinganglinearität*), (2) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen (*Nullzustandslinearität*) und (3) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen mit den Anfangswerten (siehe auch die Vorlesung Signale und Systeme 1).

**Aufgabe 2.1.** Ist das System

$$\dot{x} = 2 + u$$

$$y = x$$

mit dem Eingang  $u$ , dem Ausgang  $y$  und dem Zustand  $x$  linear?

**Lösung:** Nein.

Es gilt nun folgender Satz:

**Satz 2.1.** Das System (2.1), (2.2) ist genau dann linear, wenn es sich in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x} + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.4}$$

überführen lässt.

Dabei bezeichnet die Matrix  $\mathbf{A}(t)$  eine  $(n \times n)$ -Matrix,  $\mathbf{B}(t)$  eine  $(n \times p)$ -Matrix,  $\mathbf{C}(t)$  eine  $(q \times n)$ -Matrix und  $\mathbf{D}(t)$  eine  $(q \times p)$ -Matrix, deren Einträge lediglich von der Zeit  $t$  abhängen dürfen.

**Aufgabe 2.2.** Sind die Systeme der Abschnitte 1.2 - 1.6 linear oder nichtlinear?

**Aufgabe 2.3.** Geben Sie ein System erster Ordnung an, das die Eigenschaft (1) von (2.3) erfüllt, aber nichtlinear ist.

**Aufgabe 2.4.** Wie können Sie bei linearen elektrischen Netzwerken mit mehreren Strom- und Spannungsquellen das Superpositionsprinzip nutzen? Wenden Sie dies auf das Netzwerk von Abbildung 2.2 an und berechnen Sie den Spannungsabfall am Widerstand  $R_3$  zufolge der Spannung  $u_0$  der Spannungsquelle und des Stromes  $i_0$  der Stromquelle.

**Lösung:** Spannung  $u_{R_3}$  am Widerstand  $R_3$ :

$$u_{R_3} = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} i_0 + \frac{R_3}{R_3 + R_1} u_0$$

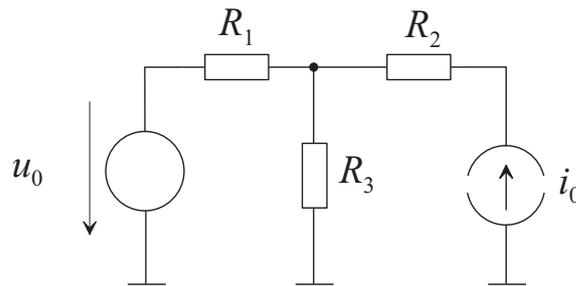


Abbildung 2.2: Einfaches Netzwerk mit Strom- und Spannungsquelle.

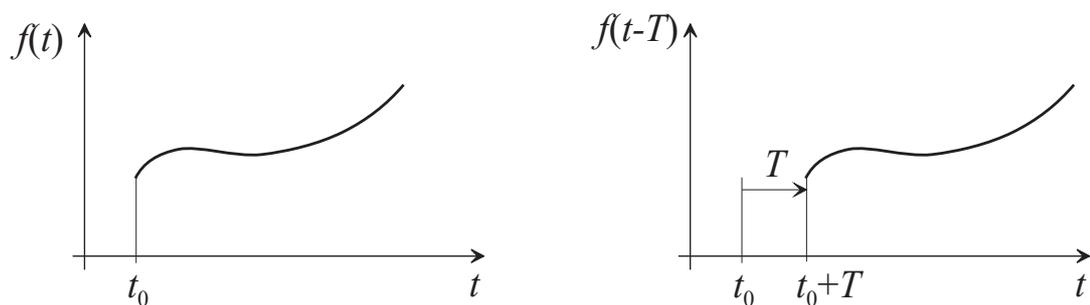


Abbildung 2.3: Zur Verschiebung einer Zeitfunktion.

## 2.2. Zeitinvarianz

Bevor der Begriff der Zeitinvarianz erläutert wird, sei festgehalten, dass mit  $f(t-T)$ ,  $T > 0$ , im Folgenden die um die Zeit  $T$  nach rechts verschobene Zeitfunktion  $f(t)$  gemeint ist, siehe dazu Abbildung 2.3.

**Definition 2.2. (Zeitinvarianz)** Man nennt nun das System (2.1), (2.2) zeitinvariant, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt  $t_0 \geq 0$  nachfolgende Bedingung für alle  $t \geq t_0$  erfüllt ist: Bezeichnet  $\mathbf{y}(t)$  die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ , dann ist  $\mathbf{y}(t-T)$  die Ausgangsgröße des Systems für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0+T) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau-T)$ ,  $t_0+T \leq \tau \leq t+T$ .

**Aufgabe 2.5.** Ist das System

$$\dot{x} = 2 + u$$

$$y = x$$

mit dem Eingang  $u$ , dem Ausgang  $y$  und dem Zustand  $x$  zeitinvariant?

**Lösung:** Ja.

Es gilt nun nachstehender Satz:

**Satz 2.2.** Das System (2.1), (2.2) ist genau dann linear und zeitinvariant, wenn es sich in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.5}$$

überführen lässt.

**Aufgabe 2.6.** Sind die Systeme der Abschnitte 1.2 - 1.6 zeitvariant oder zeitinvariant?

**Aufgabe 2.7.** Zeigen Sie an Hand der Definition der Zeitinvarianz, dass das System

$$\dot{x} = -tx$$

zeitvariant ist.

**Aufgabe 2.8.** Betrachten Sie ein Förderband. Die am Bandanfang pro Zeiteinheit aufgebrauchte Materialmenge wird mit  $u(t)$  bezeichnet, die am Ende pro Zeiteinheit abgeworfene mit  $x(t)$ . Für den Transportvorgang vom Bandanfang bis zum Bandende benötigt das Material die Zeit  $t_T$  (Totzeit). Das System lässt sich vereinfacht durch die Gleichung  $x(t) = u(t - t_T)$  beschreiben. Ist das System linear und zeitinvariant?

**Lösung:** Ja

Lässt es sich durch ein mathematisches Modell der Form (2.1), (2.2) beschreiben?

**Lösung:** Nein

## 2.3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wann die Lösung eines Differentialgleichungssystems überhaupt existiert und unter welchen Voraussetzungen diese Lösung eindeutig ist. Dazu sollen im ersten Schritt noch ein paar Begriffe eingeführt werden. Sind  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{h}$  in (2.1), (2.2) nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängig, dann ist das System zeitinvariant. Ein *zeitinvariantes, nichtlineares* System hat also die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\tag{2.6}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tag{2.7}$$

Wirken auf das System (2.1), (2.2) keine Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  ein, oder ist der zeitliche Verlauf der Eingangsgrößen festgelegt, dann heißt das System *frei*.

Ein *freies, nichtlineares* System kann man also in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\tag{2.8}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)\tag{2.9}$$

anschreiben. Ist das System (2.1), (2.2) frei und zeitinvariant, dann nennt man es *autonom*, und es hat die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\tag{2.10}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) .\tag{2.11}$$

Im Folgenden betrachte man das freie, nichtlineare System (2.8). Ohne Beweis sei festgehalten, dass die Stetigkeit von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  in den Argumenten  $\mathbf{x}$  und  $t$  zwar die Existenz einer Lösung garantiert, aber diese keinesfalls eindeutig sein muss.

Dazu betrachte man das System

$$\dot{x} = x^{1/3} \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 = 0. \quad (2.12)$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $x^{1/3}$  zwar stetig ist, aber die Differentialgleichung (2.12) zwei Lösungen, nämlich

$$x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \quad \text{und} \quad x(t) = 0, \quad (2.13)$$

zulässt. Der nachstehende Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.8) an:

**Satz 2.3. (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)** *Es sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  stückweise stetig in  $t$  und genüge der Abschätzung (Lipschitz-Bedingung)*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad 0 < L < \infty \quad (2.14)$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$  und alle  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.15)$$

genau eine Lösung für  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  besitzt. Dabei wird  $L$  auch als Lipschitz-Konstante bezeichnet.

Für das Beispiel (2.12) findet man in der Nähe von  $x_0 = 0$  tatsächlich keine Lipschitz-Konstante  $L$ , für die gilt  $|x^{1/3}| \leq L|x|$ .

Wenn  $\mathbf{x}(t)$  Lösung des Differentialgleichungssystems (2.8) ist, genau dann genügt diese auch der Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für die *Methode der sukzessiven Approximation nach Picard*. Erfüllt nämlich  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  von (2.8) die Bedingungen von Satz 2.3, dann konvergiert die nachstehende Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau), \tau) d\tau \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(\tau), \tau) d\tau \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}(\tau), \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

gegen die eindeutige Lösung von (2.8), es gilt also

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) . \quad (2.18)$$

Als Beispiel berechne man die Lösung des Systems

$$\dot{x} = ax \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall die Folge von Funktionen gemäß (2.17) wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 d\tau = x_0(1 + at) \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0(1 + a\tau) d\tau = x_0 \left( 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2} \right) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_k(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 \left( 1 + a\tau + \dots + a^{k-1} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \right) d\tau . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Damit erhält man unmittelbar für  $k \rightarrow \infty$  die bekannte Lösung

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0 \left( \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!} \right) = x_0 \exp(at) . \quad (2.21)$$

**Aufgabe 2.9.** Berechnen Sie für das lineare, zeitvariante System

$$\dot{x} = -\sin(t)x \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

einmal die Lösung exakt und bestimmen Sie anschließend mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard eine Näherungslösung. Vergleichen Sie die Näherungslösung mit der exakten Lösung für verschiedene Iterationsschritte. Verwenden Sie zur Lösung das Computeralgebraprogramm MAPLE.

**Lösung:** Exakte Lösung:

$$x(t) = x_0 \exp(\cos(t) - 1)$$

Näherungslösung für  $k = 3$ :

$$x_3(t) = x_0 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{6} (\cos(t))^3 \right)$$

## 2.4. Die Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man das lineare, autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \quad (2.22)$$

Wegen der Zeitinvarianz darf man hier den Anfangszeitpunkt  $t_0$  beliebig festlegen, weshalb er einfachheitshalber im Folgenden auf  $t_0 = 0$  gesetzt wurde. Aus

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.23)$$

mit  $\|\mathbf{A}\|$  als der induzierten Matrixnorm der Matrix  $\mathbf{A}$  ist es unmittelbar einsichtig, dass das System (2.22) mit der Lipschitz-Konstanten  $L = \|\mathbf{A}\|$  die Lipschitz-Bedingung (2.14) von Satz 2.3 erfüllt.

Damit lässt sich nach der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0 d\tau = (\mathbf{E} + \mathbf{A}t) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{A}\tau) \mathbf{x}_0 d\tau = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2}\right) \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

die Lösung von (2.22) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}_0 \quad (2.25)$$

anschreiben.

Die  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{\Phi}(t)$  wird als *Transitionsmatrix* bezeichnet. Wegen der großen Ähnlichkeit zur Exponentialreihe (2.21) schreibt man auch

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t) . \quad (2.26)$$

Als Beispiel berechne man die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} . \quad (2.27)$$

Die Exponentialreihe (2.21) liefert unmittelbar das Ergebnis

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2}}_{=0} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.28)$$

**Aufgabe 2.10.** Berechnen Sie die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

**Lösung:**

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{bmatrix}$$

Die Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  erfüllt nun folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Phi(0) &= \mathbf{E} \\ (2) \quad \Phi(t+s) &= \Phi(t)\Phi(s) \\ (3) \quad \Phi^{-1}(t) &= \Phi(-t) \\ (4) \quad \frac{d}{dt}\Phi(t) &= \mathbf{A}\Phi(t) . \end{aligned} \tag{2.29}$$

**Aufgabe 2.11.** *Beweisen Sie die Eigenschaften (2.29) der Transitionsmatrix und überlegen Sie sich ein geometrisches Bild, das diese Eigenschaften beschreibt.*

Der nächste Satz gibt nun die allgemeine Lösung eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (siehe auch (2.5))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.30}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.31}$$

an.

**Satz 2.4.** *Die allgemeine Lösung des Systems (2.30), (2.31) lautet*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  von (2.26).

**Beweis:** Der Beweis des Satzes erfolgt über die so genannte *Methode der Variation der Konstanten*. Dazu setzt man in (2.30) die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems mit der zeitabhängigen Größe  $\mathbf{x}_0(t)$  der Form

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0(t) \tag{2.33}$$

ein.

Damit erhält man

$$\dot{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) + \Phi(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.34}$$

bzw. mit  $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)$  (Eigenschaft (4) von (2.29)) ergibt sich

$$\Phi(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.35}$$

und mit  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$  (Eigenschaft (3) von (2.29)) folgt

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \Phi(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t) . \tag{2.36}$$

Durch Integration von (2.36) errechnet sich  $\mathbf{x}_0(t)$  zu

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(0) + \int_0^t \Phi(-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

bzw. wegen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\Phi(t) \Phi(-\tau) = \Phi(t-\tau)$  (Eigenschaft (2) von (2.29)) folgt unmittelbar das Ergebnis zu

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.38)$$

Vollständigkeitshalber sei erwähnt, dass für lineare, zeitvariante Systeme der Form (2.4) vollkommen analoge Überlegungen angestellt werden können. Nachfolgende Aufgabe soll zeigen, wie man die Transitionsmatrix in diesem Fall berechnen kann. ■

**Aufgabe 2.12.** Gegeben ist das lineare, zeitvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Es sei angenommen, dass die Elemente von  $\mathbf{A}(t)$  im betrachteten Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  beschränkt sind. Zeigen Sie, dass das System im betrachteten Zeitintervall eine eindeutige Lösung besitzt und sich in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  errechnet, wobei die Transitionsmatrix durch die so genannte Peano-Baker-Reihe

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \dots$$

dargestellt werden kann.

**Aufgabe 2.13.** Betrachten Sie das elektrische System von Abbildung 1.6 mit dem zugehörigen mathematischen Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_C(t) &= \frac{1}{R_1 C} u(t) \\ y(t) &= -u_C(t) - \frac{R_2}{R_1} u(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie allgemein den Verlauf der Ausgangsgröße  $y(t)$  nach Satz 2.4 für beliebige (zulässige) Eingangsgrößen  $u(t)$ .

**Lösung:**

$$y(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t u(\tau) d\tau - \frac{R_2}{R_1} u(t)$$

## 2.5. Linearisierung nichtlinearer Systeme

Wie sich im Rahmen dieser Vorlesung noch zeigen wird, ist die gezielte Beeinflussung linearer, zeitinvarianter Systeme durch Regelung bzw. Steuerung um Größenordnungen einfacher als die nichtlinearer Systeme. Falls jedoch nur kleine Auslenkungen des nichtlinearen Systems um eine *Ruhelage* bzw. einen *Arbeitspunkt* oder von einer *Solltrajektorie* betrachtet werden, kann das nichtlineare System sehr häufig durch ein lineares mathematisches Modell hinreichend gut angenähert werden.

### 2.5.1. Begriff der Ruhelage

In einem ersten Schritt betrachte man das freie, nichtlineare System nach (2.8) der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.39)$$

**Definition 2.3. (Ruhelage)** Man sagt  $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$  ist eine Ruhelage des Systems (2.39), wenn die Bedingung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, t) = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

für alle Zeiten  $t \geq 0$  erfüllt ist.

Wie man erkennt, hat die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  die Eigenschaft, dass das System (2.39) für alle Zeiten  $t \geq 0$  in dieser Ruhelage verharrt, sofern man in der Ruhelage startet. Nichtlineare Systeme können eine beliebige Anzahl von Ruhelagen aufweisen.

Als Beispiele betrachte man das nichtlineare System erster Ordnung

$$\dot{x} = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad (2.41)$$

mit den drei Ruhelagen  $x_{R,1} = 1$ ,  $x_{R,2} = 2$ ,  $x_{R,3} = 3$ , das nichtlineare System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \exp(-x_1) \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

mit unendlich vielen Ruhelagen

$$\mathbf{x}_R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \text{ ist beliebig} \}, \quad (2.43)$$

oder das nichtlineare System erster Ordnung

$$\dot{x} = (x^2 + 1), \quad (2.44)$$

das keine Ruhelage besitzt.

Bei linearen, zeitinvarianten autonomen Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.45)$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und der  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  gibt es *entweder genau eine* Ruhelage, nämlich  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ , oder *unendlich viele* Ruhelagen, wobei man die zwei Fälle wie folgt unterscheidet:

$\mathbf{A}$ ist regulär	$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist die einzige Ruhelage
$\mathbf{A}$ ist singulär	$\det(\mathbf{A}) = 0$	es gibt unendlich viele Ruhelagen

**Aufgabe 2.14.** Berechnen Sie die Ruhelage(n) des mathematischen Pendels von Abbildung 1.8.

**Lösung:** Mathematisch erhält man:  $\omega_R = 0$  und  $\varphi_R = \pm k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Physikalisch können jedoch nur zwei Ruhelagen unterschieden werden, nämlich  $\omega_R = 0$ ,  $\varphi_R = 0$  und  $\omega_R = 0$ ,  $\varphi_R = \pi$ .

**Aufgabe 2.15.** Berechnen Sie die Ruhelage(n) des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

mit den reellen Parametern  $a, b$ .

**Lösung:**

$$ba \neq 1 \quad : \quad \mathbf{x}_R = \mathbf{0}$$

$$ba = 1 \quad : \quad \mathbf{x}_R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_{1,R} = -ax_{2,R} \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig} \}$$

Im Falle von nichtlinearen Systemen (2.6) mit einem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  muss man zur Bestimmung der Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  für ein festgelegtes konstantes  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$  die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

bestimmen. In diesem Fall nennt man das Paar  $(\mathbf{u}_R, \mathbf{x}_R)$  auch einen *Arbeitspunkt* des Systems (2.6). Bei linearen, zeitinvarianten Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.47)$$

gelten zur Bestimmung der Ruhelagen für konstantes  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$  die folgenden Bedingungen:

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_R$ einzige Ruhelage
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt unendlich viele Ruhelagen
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) \neq \text{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt keine Ruhelage

**Aufgabe 2.16.** Wie lauten die Ruhelage(n) des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

mit den reellen Parametern  $a, b$  und der Eingangsgröße  $u = u_R$ .

**Lösung:**

$$b \neq -2a \quad : \quad \text{keine Ruhelage}$$

$$b = -2a \quad : \quad \mathbf{x}_R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_{1,R} = -2x_{2,R} - au_R \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig} \}$$

**Aufgabe 2.17.** Wie groß muss die stationäre Ankerspannung  $u_{A,R}$  sein, damit für die vorgegebene konstante Erregerspannung  $u_F = u_{F,R}$  die fremderregte Gleichstrommaschine von Abbildung 1.9 die Seiltrommel in einer konstanten Position halten kann? Wie lautet die zugehörige Ruhelage?

**Lösung:** Stationäre Ankerspannung:  $u_{A,R} = \frac{R_A m g r}{k \psi_F (u_{F,R}/R_F)}$

Ruhelage:  $i_{A,R} = \frac{m g r}{k \psi_F (u_{F,R}/R_F)}$ ,  $i_{F,R} = u_{F,R}/R_F$ ,  $\omega_R = 0$  und  $\varphi_R$  ist beliebig.

### 2.5.2. Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im Folgenden einige Abkürzungen vereinbart. Für die partielle Ableitung einer Funktion  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $x_i$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  schreibt man einfach

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}_R) . \quad (2.48)$$

Die Ableitung der skalaren Funktion  $f(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  ist der Zeilenvektor

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_R) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}_R), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}_R), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}_R) \right] \quad (2.49)$$

und die Ableitung einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an einer Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ , also die *Jacobimatrix* von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , ist durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}_R), & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\mathbf{x}_R), & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\mathbf{x}_R) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\mathbf{x}_R), & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}_R), & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(\mathbf{x}_R) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\mathbf{x}_R), & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(\mathbf{x}_R), & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\mathbf{x}_R) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

gegeben.

Für die Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine Ruhelage oder Trajektorie wird noch nachstehender Satz benötigt:

**Satz 2.5. (Taylorformel zweiter Ordnung)** Es sei angenommen, dass die vektorwertige Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  als offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  zweifach stetig differenzierbar ist und die Punkte  $\mathbf{x}_R$  sowie  $\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}$  mitsamt ihrer Verbindungsstrecke in  $\mathcal{D}$  liegen. Dann ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta \mathbf{x}) , \quad (2.51)$$

wobei für das Restglied  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta \mathbf{x})$  eine Konstante  $K$  so existiert, dass folgende Abschätzung

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta \mathbf{x})\| \leq K \|\Delta \mathbf{x}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta \mathbf{x})\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0 \quad (2.52)$$

gilt.

Als Nächstes betrachte man das zeitinvariante, nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \text{mit} & & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (2.53)$$

mit der Ruhelage (Arbeitspunkt)  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ , die definitionsgemäß die Gleichungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_R = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \quad (2.54)$$

erfüllt. Betrachtet man nun nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, dann lassen sich die Größen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ , und  $\mathbf{y}$  in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y}(t) \quad (2.55)$$

anschreiben, wobei  $\Delta$  die jeweiligen Abweichungen von der Ruhelage symbolisieren.

Setzt man (2.55) in (2.53) ein, erhält man mit der abgekürzten Schreibweise  $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned}\underbrace{\dot{\mathbf{x}}_R}_{=0} + \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}) & \text{mit} & & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u})\end{aligned}\quad (2.56)$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 2.5 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{A}}\Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}, & \Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 = \\ & & \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R & \\ \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{y}_R} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{C}}\Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{D}}\Delta\mathbf{u}.\end{aligned}\quad (2.57)$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz formulieren:

**Satz 2.6.** *Es sei  $\mathbf{x}_R, \mathbf{y}_R$  eine Ruhelage des Systems (2.53) für  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ . Die Änderung der Lösung  $\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}$  bei hinreichend kleinen Abweichungen  $\Delta\mathbf{u}$  von  $\mathbf{u}_R$  und  $\Delta\mathbf{x}_0$  von  $\mathbf{x}_R$  wird durch das lineare, zeitinvariante System*

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} & \text{mit} & & \Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.58)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), & \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \\ \mathbf{C} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), & \mathbf{D} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)\end{aligned}\quad (2.59)$$

beschrieben. Das System (2.58), (2.59) wird auch als Linearisierung von (2.53) um die Ruhelage (Arbeitspunkt)  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  bezeichnet.

Als Beispiel betrachte man das mathematischen Pendel von Abbildung 1.8 mit dem mathematischen Modell in Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi &= \omega \\ \frac{d}{dt}\omega &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi)\end{aligned}\quad (2.60)$$

und der Position der Pendelspitze in  $x$ -Richtung als Ausgangsgröße

$$x = l \sin(\varphi) . \quad (2.61)$$

Die Ruhelagen errechnen sich zu  $\varphi_{R,1} = 0, \omega_{R,1} = 0$  (Pendel in der unteren Ruhelage) und  $\varphi_{R,2} = \pi, \omega_{R,2} = 0$  (Pendel in der oberen Ruhelage). Gemäß (2.58), (2.59) erhält man für die Linearisierung um eine allgemeine Ruhelage  $\varphi_R, \omega_R$  das linearisierte Modell in der Form

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\Delta\varphi \\ \frac{d}{dt}\Delta\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\varphi_R) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \\ \Delta x &= [l \cos(\varphi_R) \ 0] \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} .\end{aligned}\quad (2.62)$$

Durch Einsetzen von  $\varphi_{R,1} = 0, \omega_{R,1} = 0$  in (2.62) ergibt sich das linearisierte Modell um die untere Ruhelage zu

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\Delta\varphi \\ \frac{d}{dt}\Delta\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \\ \Delta x &= [l \ 0] \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.63)$$

und analog erhält man für die obere Ruhelage  $\varphi_{R,2} = \pi, \omega_{R,2} = 0$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\Delta\varphi \\ \frac{d}{dt}\Delta\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \\ \Delta x &= [-l \ 0] \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} .\end{aligned}\quad (2.64)$$

Man beachte, dass die oft übliche Näherung für kleine Winkel  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  und  $\cos(\varphi) \approx 1$  nur für Betrachtungen um die Ruhelage  $\varphi = 0$  gültig ist!

**Aufgabe 2.18.** Berechnen Sie für das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.11 die Ruhelage für einen stationären Zufluss  $q_R$ . Linearisieren Sie das System (1.28), (1.29) um diese Ruhelage.

**Lösung:** Ruhelage  $h_{1,R} = h_{2,R} = \frac{q_R^2}{2ga^2}$  und Linearisierung

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Delta h_1 \\ \frac{d}{dt} \Delta h_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{Aq_R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta q$$

$$\Delta q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 g}{q_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

### 2.5.3. Linearisierung um eine Trajektorie

Neben der Linearisierung um eine Ruhelage ist auch die Linearisierung um eine Trajektorie von Bedeutung. Dabei wird die Abweichung eines nichtlinearen Systems der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \text{mit} & & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

von einer vorgegebenen Lösungskurve (Trajektorie) betrachtet. Sind für (2.65) die Bedingungen von Satz 2.3 erfüllt, dann weiß man, dass für eine vorgegebene Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$  auf einem Intervall  $0 \leq t \leq T$  und einen vorgegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$  die Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  von (2.65) eindeutig festliegt. Es gelten also die Beziehungen

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}). \quad (2.66)$$

Für hinreichend kleine Abweichungen der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  und des Anfangswertes  $\mathbf{x}_0$  von  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  bzw.  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  stellen sich nur kleine Abweichungen der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  von  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  im Intervall  $0 \leq t \leq T$  ein. Schreibt man  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \Delta \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \Delta \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \Delta \mathbf{y}(t) \quad (2.67)$$

und setzt dies in (2.65) ein, dann erhält man mit  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x}(t)$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} + \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}) & \text{mit} & & \mathbf{x}(t_0) &= \tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \Delta \mathbf{x}(t_0) \\ \tilde{\mathbf{y}} + \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 2.5 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} + \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{=\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{x}}_{=\mathbf{A}(t)} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u}}_{=\mathbf{B}(t)} & \text{mit} & & \Delta \mathbf{x}(t_0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \\ & & & & \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{y}} + \Delta \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{=\tilde{\mathbf{y}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{x}}_{=\mathbf{C}(t)} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u}}_{=\mathbf{D}(t)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz angeben:

**Satz 2.7.** Es sei  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  eine Trajektorie des Systems (2.65) für eine vorgegebene Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$  und einen vorgegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ . Die Änderung der Lösung  $\Delta\mathbf{x}(t)$ ,  $\Delta\mathbf{y}(t)$  bei hinreichend kleinen Abweichungen  $\Delta\mathbf{u}(t)$  von  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  und  $\Delta\mathbf{x}_0$  von  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  wird durch das lineare, zeitvariante System

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u} & \text{mit} & \quad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.70}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) , & \mathbf{B}(t) &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) , \\ \mathbf{C}(t) &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) , & \mathbf{D}(t) &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})\end{aligned}\tag{2.71}$$

beschrieben. Das System (2.70), (2.71) wird auch als Linearisierung von (2.65) um die Trajektorie  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  bezeichnet.

Man beachte, dass die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems der Form (2.53) *um eine Ruhelage* auf ein *zeitinvariantes*, lineares System führt, wohingegen die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems *um eine Solltrajektorie* im Allgemeinen ein *zeitvariantes*, lineares System ergibt.

Als Beispiel betrachte man eine einstufige Rakete mit der zeitlich veränderlichen Masse  $m(t) = m_0 - m_f(t)$ , wobei  $m_0$  das Gewicht der Rakete vor dem Start (Eigenmasse + Traglast + Treibstoffmenge) und  $m_f(t)$  die zeitlich abnehmende Treibstoffmasse bezeichnen. Nimmt man an, dass die Treibstoffmasse  $m_f(t)$  mit der Ausstoßrate  $\dot{m}(t) = -\dot{m}_f(t)$  mit konstanter Relativgeschwindigkeit  $w > 0$  von der Rakete ausgestoßen wird, dann lauten die Bewegungsgleichungen der Rakete in einem Schwerfeld mit der Gravitationskonstanten  $g$

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{m(t)}(wu(t) - m(t)g) \\ \dot{m}(t) &= -u(t) .\end{aligned}\tag{2.72}$$

Dabei beschreiben die Größen  $h(t)$  die Höhe der Rakete gemessen von der Erdoberfläche,  $v(t)$  die Raketengeschwindigkeit,  $m(t)$  die Raketenmasse und  $u(t)$  die Treibstoffausstoßrate. Im ersten Schritt berechnet man sich für eine konstante Treibstoffausstoßrate  $\tilde{u}(t) = k$  und die Anfangswerte  $\tilde{h}(0) = \tilde{h}_0 = 0$ ,  $\tilde{v}(0) = \tilde{v}_0 = 0$  sowie  $\tilde{m}(0) = \tilde{m}_0 = m_0$  die Trajektorie

$$\begin{aligned}\tilde{m}(t) &= m_0 - kt \\ \tilde{v}(t) &= -gt - w \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right) \\ \tilde{h}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + wt - w \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right)\left(t - \frac{m_0}{k}\right)\end{aligned}\tag{2.73}$$

Linearisiert man das System (2.72) um die Trajektorie (2.73), dann erhält man das lineare, zeitvariante System

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}(t) \\ \Delta \dot{v}(t) \\ \Delta \dot{m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-w\tilde{u}(t)}{\tilde{m}(t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w}{\tilde{m}(t)} \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u(t) \quad (2.74)$$

bzw. eingesetzt für die Trajektorien ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}(t) \\ \Delta \dot{v}(t) \\ \Delta \dot{m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-wk}{(m_0 - kt)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-w}{m_0 - kt} \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u(t) . \quad (2.75)$$

**Aufgabe 2.19.** Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \alpha \omega_2(t) \omega_3(t) + u_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= -\alpha \omega_1(t) \omega_3(t) + u_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) &= u_3(t) \end{aligned}$$

mit dem konstanten Parameter  $\alpha > 0$ . Bestimmen Sie für die Eingangsgrößen  $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t) = \tilde{u}_3(t) = 0$  und die Anfangsbedingungen  $\tilde{\omega}_1(0) = \tilde{\omega}_{1,0} = 0$ ,  $\tilde{\omega}_2(0) = \tilde{\omega}_{2,0} > 0$  und  $\tilde{\omega}_3(0) = \tilde{\omega}_{3,0} > 0$  die Trajektorie  $\tilde{\mathbf{x}}(t)^T = [\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t), \tilde{\omega}_3(t)]$  und linearisieren Sie das System um diese Trajektorie.

**Lösung:** Trajektorie:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1(t) &= \tilde{\omega}_{2,0} \sin(\alpha \tilde{\omega}_{3,0} t) \\ \tilde{\omega}_2(t) &= \tilde{\omega}_{2,0} \cos(\alpha \tilde{\omega}_{3,0} t) \\ \tilde{\omega}_3(t) &= \tilde{\omega}_{3,0} \end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega}_1(t) \\ \Delta \dot{\omega}_2(t) \\ \Delta \dot{\omega}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \tilde{\omega}_3 & \alpha \tilde{\omega}_2 \\ -\alpha \tilde{\omega}_3 & 0 & -\alpha \tilde{\omega}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_1(t) \\ \Delta \omega_2(t) \\ \Delta \omega_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \Delta u_3(t) \end{bmatrix}$$

## 2.6. Literatur

1. Director S.W., Rohrer R.A., *Introduction to System Theory*, McGraw-Hill, New York, (1972).
2. Föllinger O., Franke D., *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*, Oldenbourg, München Wien, (1982).

3. Khalil H.K., *Nonlinear Systems*, Macmillan Pub. Company, New York, (1992).
4. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1*, Springer, Berlin Heidelberg, (1995).
5. Luenberger D.G., *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1979).
6. Padulo L., Arbib M.A., *System Theory*, W.B. Saunders Company, Philadelphia, (1974).
7. Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York, (1991).
8. Rugh W.J., *Linear System Theory*, Prentice Hall, New Jersey, (1993).

### 3. LINEARE DYNAMISCHE SYSTEME

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Konzepte zur Beschreibung linearer zeitinvarianter dynamischer Systeme behandelt. Die theoretischen Grundlagen dazu wurden bereits ausführlich in den Vorlesungen Mathematik 2 für ET und Signale und Systeme 1 diskutiert. Zur leichteren Lesbarkeit des Skriptums werden im Folgenden unter anderem einige bekannte Ergebnisse dieser Vorlesungen wiederholt.

#### 3.1. Zustandstransformation

Im Kapitel 1.1 wurde bereits erwähnt, dass die Wahl der Zustandsgrößen keinesfalls eindeutig ist (siehe auch Aufgabe 1.5). Mit Hilfe einer *regulären Zustandstransformation* der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \tag{3.1}$$

mit einer regulären  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{V}$  lässt sich das lineare, zeitinvariante System (siehe auch (2.30) und (2.31))

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{C}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit dem *neuen Zustand*  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  überführen.

Man sagt dann auch, die beiden mathematischen Beschreibungen  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  von (3.2) und  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$  von (3.3) sind *äquivalent*. Man beachte, dass in diesem Fall die beiden quadratischen *Dynamikmatrizen*  $\mathbf{A}$  und  $\tilde{\mathbf{A}}$  gemäß Definition ähnlich sind (siehe Kapitel 2 Skriptum Mathematik 2 für ET).

**Aufgabe 3.1.** Zeigen Sie, dass die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$  mit der regulären  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{V}$  die gleichen Eigenwerte besitzen.

**Hinweis:** Es gelten die Beziehungen

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{V}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{V}) \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{E} .$$

Zeigen Sie weiters, dass  $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{v}_k$  ein Eigenvektor von  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$  ist, wenn  $\mathbf{v}_k$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  ist.

Man könnte nun diese Transformation zu einem neuen Zustand  $\mathbf{z}$  insofern nutzen, als man die Lösung des Systems (3.2) gemäß Satz 2.4

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t),\end{aligned}\quad (3.4)$$

insbesondere die Berechnung der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$ , unter Verwendung einer geeigneten Transformation, auf einfache Art und Weise bestimmen kann. Dazu wählt man die Zustandstransformation (3.1) so, dass die Struktur von  $\tilde{\mathbf{A}}$  des transformierten Systems (3.3) eine einfache Berechnung der Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  von (3.3) zulässt. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn  $\tilde{\mathbf{A}}$  Diagonalstruktur aufweist oder in *Jordanscher Normalform* vorliegt.

Die Lösung des transformierten Systems (3.3) lautet dann

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \tilde{\Phi}(t) \mathbf{z}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-\tau) \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{u}(t) .\end{aligned}\quad (3.5)$$

Transformiert man (3.5) mit der Vorschrift (3.1) in den Zustand  $\mathbf{x}$  unter Verwendung der Ausdrücke für  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}$  von (3.3) zurück, erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t-\tau) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) .\end{aligned}\quad (3.6)$$

Durch Vergleich mit (3.4) ergibt sich der Zusammenhang zwischen  $\Phi(t)$  und  $\tilde{\Phi}(t)$  zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} . \quad (3.7)$$

Abbildung 3.1 veranschaulicht grafisch diese Vorgangsweise.

## 3.2. Jordansche Normalform

In Mathematik 2 für ET (Kapitel 5) wurde gezeigt, dass jede  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  durch eine Ähnlichkeitstransformation  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$  auf Jordansche Normalform transformiert werden kann. Die Jordansche Normalform einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist bis auf die Reihenfolge der so genannten Jordanblöcke eindeutig bestimmt. Zur Formulierung der Jordanschen Normalform werden im Folgenden einige Begriffe aus Mathematik 2 für ET wiederholt. Das *charakteristische Polynom*  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  der Matrix  $\mathbf{A}$  habe  $m$  verschiedene Wurzeln  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  mit den entsprechenden Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_m$ . Dann bezeichnet die Zahl  $n_j$  die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  und die *geometrische Vielfachheit*  $g_j$  des Eigenwertes  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  ist definiert als die *Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda_j$* , d.h.  $g_j = \dim(\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}))$ . Für die geometrische Vielfachheit  $g_j$  eines Eigenwertes  $\lambda_j$  gilt  $1 \leq g_j \leq n_j$ .

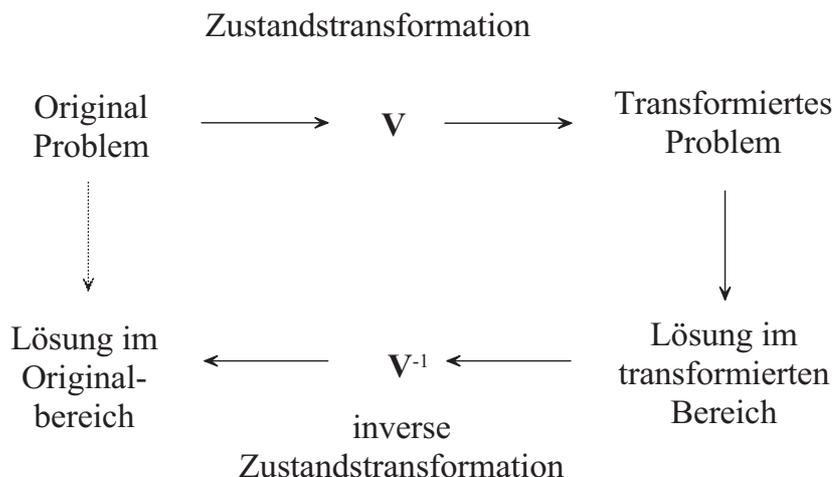


Abbildung 3.1: Zur regulären Zustandstransformation.

### 3.2.1. Diagonalform

Eine  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich nun genau dann durch eine Ähnlichkeitstransformation auf *Diagonalform* transformieren, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit gleich sind. In diesem Fall spannen die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  den  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  auf und bilden eine Eigenbasis der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform erfolgt über die Transformationsmatrix  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  sind. Liegt die Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$  des transformierten Systems in Diagonalform

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

vor, so kann man die transformierte Transitionsmatrix gemäß (2.27) direkt in der Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(d_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(d_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(d_n t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

berechnen und die Transitionsmatrix des Originalproblems erhält man aus (3.7). Beachten Sie, dass die Diagonalelemente  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gerade den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  entsprechen.

**Aufgabe 3.2.** Zeigen Sie, dass für den Fall einer  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit  $n$  paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear unabhängig sind und damit eine Eigenbasis von  $\mathbf{A}$  bilden.

**Hinweis:** Führen Sie den Beweis durch Widerspruch.

Als Beispiel betrachte man das autonome lineare zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.10)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  lauten  $\lambda_1 = 3$  mit der algebraischen Vielfachheit 1 und  $\lambda_2 = 1$  mit der algebraischen Vielfachheit 2. Wegen  $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = 2$  und  $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) = 1$  folgt unmittelbar die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_1$  zu 1 und von  $\lambda_2$  zu 2. Da die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gleich sind, existiert eine Eigenbasis der Matrix  $\mathbf{A}$ . Der Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 3$  folgt aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

zu  $\mathbf{v}_1^T = [1, 0, 0]$  und die Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 1$  errechnen sich aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad , \quad k = 2, 3 \quad (3.12)$$

zu  $\mathbf{v}_2^T = [0, 1, 1]$  und  $\mathbf{v}_3^T = [-1, 1, 0]$ . Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ergibt sich das System (3.10) im transformierten Zustand  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t)$  zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad , \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (3.14)$$

Die Transitionsmatrix des transformierten Systems (3.14) lautet dann

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(3t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und damit errechnet sich die Transitionsmatrix des Originalsystems (3.10) zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(3t) & \exp(3t) - \exp(t) & \exp(t) - \exp(3t) \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2. Notwendigkeit von Hauptvektoren

Ist für einen Eigenwert  $\lambda_j$  die geometrische Vielfachheit  $g_j$  echt kleiner als die algebraische Vielfachheit  $n_j$ , so muss man zusätzlich zu den Eigenvektoren die *entsprechenden Hauptvektoren* berechnen. Die Gesamtheit aller Eigen- und Hauptvektoren zu einem Eigenwert  $\lambda_j$  nennt man den *algebraischen Eigenraum*, dessen Dimension gleich der *algebraischen Vielfachheit*  $n_j$  des Eigenwertes  $\lambda_j$  ist.

Angenommen,  $\lambda$  sei ein Eigenwert der  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit der algebraischen Vielfachheit  $n$  und der geometrischen Vielfachheit 1. Neben dem Eigenvektor  $\mathbf{v}_1$ , der definitionsgemäß die Beziehung

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

erfüllt, existieren in diesem Fall  $(n - 1)$  linear unabhängige *Hauptvektoren*  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ , die Lösungen der Gleichungen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.18)$$

sind. Aus (3.17) und (3.18) folgt nun unmittelbar die Beziehung

$$\mathbf{A} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \lambda [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] + [\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}] \quad (3.19)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \underbrace{\mathbf{V}(\lambda \mathbf{E} + \mathbf{N})}_{=\mathbf{S}} \quad (3.20)$$

mit  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  und der  $(n \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.21)$$

Die Matrix  $\mathbf{N}$  hat nun eine ganz spezielle Struktur, sie ist nämlich *nilpotent der Ordnung*  $n$ . Dazu folgende Definition:

**Definition 3.1. (Nilpotente Matrix)** Man nennt eine  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{N}$  nilpotent der Ordnung  $k$ , wenn gilt  $\mathbf{N}^{k-1} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$ .

Man erkennt unmittelbar aus (3.20), dass sich durch die Wahl der Transformationsmatrix  $\mathbf{V}$  mit dem Eigenvektor und den zugehörigen Hauptvektoren als Spalten die Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  des transformierten Systems zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ergibt.

Die Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  des transformierten Systems mit der Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}$  von (3.22) lässt sich sehr einfach in geschlossener Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \underbrace{\exp((\lambda \mathbf{E} + \mathbf{N})t)}_{(*)} = \exp(\lambda \mathbf{E}t) \exp(\mathbf{N}t) = \exp(\lambda \mathbf{E}t) \left( \mathbf{E} + \mathbf{N}t + \dots + \frac{\mathbf{N}^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad (3.23)$$

bzw.

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & t \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

anschreiben. Man beachte, dass die Gleichung (\*) in (3.23) nur deshalb gilt, da die Matrizen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{N}$  kommutieren, d.h., die Beziehung  $\mathbf{E}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{E}$  erfüllen. Lösen Sie dazu folgende Aufgabe.

**Aufgabe 3.3.** Zeigen Sie, dass

$$\exp((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t) = \exp(\mathbf{A}_1t) \exp(\mathbf{A}_2t)$$

gilt, wenn die beiden Matrizen  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  die Bedingung  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$  erfüllen.

**Lösung:** Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

**Aufgabe 3.4.** Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

auf die Form von (3.22). Berechnen Sie anschließend die Transitionsmatrix.

**Lösung:** Die Transformationsmatrix  $\mathbf{V}$  und die Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  des transformierten Systems lauten

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontrollieren Sie die Transitionsmatrix mit MAPLE mit Hilfe des Befehls `MatrixExponential` in dem `LinearAlgebra` package.

### 3.2.3. Reelle Jordansche Normalform

Man überzeugt sich leicht, dass eine  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit reellen Koeffizienten nur Eigenwerte besitzen kann, die *entweder reell* oder *konjugiert komplex* sind. Man kann natürlich

die soeben besprochene Methode der Diagonalisierung bzw. die Konstruktion der Hauptvektoren auch für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten anwenden. Es sei aber an dieser Stelle angemerkt, dass in diesem Fall sowohl die Transformationsmatrix  $\mathbf{V}$  als auch die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  komplexwertige Matrizen sind. Dies stört zwar nicht weiters, doch besteht oft der Wunsch, dass die Matrizen des transformierten Systems  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$  von (3.3) ebenfalls reellwertig sind. Wie diese Transformation dann im Detail aussieht, wird im Folgenden anhand einer Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  besprochen, die  $r = n/2$  paarweise verschiedene konjugiert komplexe Eigenwerte der Form  $\lambda_j = \alpha_j + I\beta_j$  mit dem konjugiert komplexen  $\lambda_j^* = \alpha_j - I\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  besitzt. Es gilt nun folgender Satz:

**Satz 3.1.** *Besitzt eine Matrix  $\mathbf{A}$  einen konjugiert komplexen Eigenwert, dann sind auch die zugehörigen Eigenvektoren konjugiert komplex.*

**Aufgabe 3.5.** *Beweisen Sie Satz 3.1.*

Wählt man als Transformationsmatrix  $\bar{\mathbf{V}}$  die mit der regulären Matrix  $\mathbf{T}$  von rechts multiplizierte Matrix  $\mathbf{V}$  der konjugiert komplexen Eigenvektoren

$$\bar{\mathbf{V}} = \underbrace{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_r^*]}_{\mathbf{V}} \mathbf{T} = \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^*)}_{\text{Re}(\mathbf{v}_1)}, \underbrace{\frac{I}{2}(\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1)}_{\text{Im}(\mathbf{v}_1)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r^*)}_{\text{Re}(\mathbf{v}_r)}, \underbrace{\frac{I}{2}(\mathbf{v}_r^* - \mathbf{v}_r)}_{\text{Im}(\mathbf{v}_r)} \right] \quad (3.25)$$

mit

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -I \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & I & -I \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

dann errechnet sich die Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  des transformierten Systems zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}}_{=\Lambda} \mathbf{T} = \Omega \quad (3.27)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + I\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - I\beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r + I\beta_r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r - I\beta_r \end{bmatrix}}_{\Lambda} \mathbf{T} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  des transformierten Systems mit der Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega}$  von (3.28) lässt sich sehr einfach in geschlossener Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{\Omega}t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

angeben.

**Aufgabe 3.6.** Berechnen Sie die Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Lösung:** Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \cos(2t) & \frac{1}{2} \exp(t) \sin(2t) \\ -2 \exp(t) \sin(2t) & \exp(t) \cos(2t) \end{bmatrix}$$

### 3.2.4. Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Abschnitte 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 lassen sich nun wie folgt für ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System (3.2) kombinieren.

**Satz 3.2. (Reelle Jordansche Normalform)** Es sei die reellwertige  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  die Dynamikmatrix des linearen, zeitinvarianten Systems (3.2). Angenommen,  $\mathbf{A}$  habe  $k$  reelle und  $(n - k) / 2$  konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form (3.1)

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_{k+1}), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_r), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_r)] \quad (3.30)$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  mit  $r = (n + k) / 2$  so, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems folgende Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

annimmt. Dabei bezeichnen  $\mathbf{J}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  die so genannten Jordanblöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte  $\lambda_i$  in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte  $\alpha_i \pm I\beta_i$  in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

gegeben ist.

Als Beispiel betrachte man das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 8 & 12 & 15 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -4 & -\frac{9}{4} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.35)$$

mit dem reellen Eigenwert  $\lambda_1 = -3$  der algebraischen Vielfachheit 1 und dem konjugiert komplexen Eigenwert  $\lambda_2 = 1 \pm I2$  der algebraischen Vielfachheit 2 und geometrischen Vielfachheit 1. Der Eigenvektor zu  $\lambda_1 = -3$  lautet

$$\mathbf{v}_1^T = \left[ 0, 0, 0, -\frac{5}{4}, 1 \right], \quad (3.36)$$

und der Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 1 + I2$  ergibt sich zu

$$\mathbf{v}_2^T = \left[ -\frac{2}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3} + I\frac{1}{6}, 0 \right]. \quad (3.37)$$

Den Hauptvektor  $\mathbf{v}_3$  erhält man aus der Beziehung (3.18) mit

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \quad (3.38)$$

zu

$$\mathbf{v}_3^T = \left[ -\frac{8}{9}, 1, I\frac{2}{3}, -\frac{5}{18} - I\frac{5}{18}, 0 \right]. \quad (3.39)$$

Damit lautet die Transformationsmatrix  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_2), \operatorname{Re}(\mathbf{v}_3), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_3)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{18} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

und die transformierte Dynamikmatrix in der reellen Jordanschen Normalform errechnet sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_2) & \operatorname{Im}(\lambda_2) \\ -\operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

Aus den Überlegungen der Abschnitte 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 folgt die Transitionsmatrix des transformierten Systems zu

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) & te^t \sin(2t) \\ 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) & -te^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) \\ 0 & 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

bzw. für das Originalsystem (3.35) nach (3.7)

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \quad (3.43)$$

mit  $\mathbf{V}$  von (3.40).

**Aufgabe 3.7.** Berechnen Sie die reelle Jordansche Normalform des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Lösung:** Jordansche Normalform

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3.8.** Berechnen Sie die reelle Jordansche Normalform des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Lösung:** Jordansche Normalform

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Allgemeines Lösungsverhalten

Aus dem bisher Gesagten lässt sich auf einfache Art und Weise das Lösungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten autonomen Systems der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.44)$$

angeben.

**Satz 3.3.** Jede Lösung  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  des Systems (3.44) ist eine Linearkombination der Funktionen

$$t^{k_1} e^{\lambda t}, \quad t^{k_2} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{und} \quad t^{k_3} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (3.45)$$

für die reellen Eigenwerte  $\lambda$ , die konjugiert komplexen Eigenwerte  $\alpha \pm I\beta$  und  $k_1, k_2, k_3 = 0, \dots, (r-1)$  mit  $r$  als der jeweiligen Dimension der Jordanblöcke.

Aus Satz 3.3 kann man schließen, dass die Trajektorien eines linearen zeitkontinuierlichen Systems der Form (3.44) weder in endlicher Zeit nach Null noch nach Unendlich streben können. Dies gilt nicht für nichtlineare und zeitdiskrete Systeme.

Als direkte Konsequenz von Satz 3.3 lässt sich noch folgender Satz angeben:

**Satz 3.4. (Globale asymptotische Stabilität)** Für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  gilt genau dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

wenn alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  negativen Realteil besitzen. Man sagt dann auch, die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  ist global asymptotisch stabil.

**Aufgabe 3.9.** Beweisen Sie Satz 3.4.

**Aufgabe 3.10.** Ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

global asymptotisch stabil?

**Lösung:** Nein

**Aufgabe 3.11.** Ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

global asymptotisch stabil?

**Lösung:** Nein

Zur geometrischen Interpretation des Eigenvektors wird im Folgenden der Begriff eines *invarianten Unterraums* definiert.

**Definition 3.2.** Es sei  $\mathcal{V}$  ein linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$ . Man nennt  $\mathcal{V}$  invariant gegenüber einer  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , wenn für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  auch  $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  gilt.

Aus der Definition des Eigenvektors  $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$  zu einem Eigenwert  $\lambda_j$  sieht man unmittelbar, dass  $\mathbf{v}_j$  invariant gegenüber  $\mathbf{A}$  ist. Mit anderen Worten heißt dies, dass wenn man mit einem Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  auf einem Eigenvektor startet, also z.B.

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_0\mathbf{v}_1, \quad \gamma_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.47)$$

dann verbleibt die Trajektorie für alle Zeiten in dieser Richtung des Eigenvektors, d.h. die Lösung hat die Form

$$\mathbf{x}(t) = \gamma(t)\mathbf{v}_1. \quad (3.48)$$

Um dies zu zeigen, setzt man (3.48) in das System (3.44) ein und erhält

$$\dot{\gamma}(t)\mathbf{v}_1 = \gamma(t)\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \gamma(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad (3.49)$$

bzw.

$$(\dot{\gamma}(t) - \gamma(t)\lambda_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.50)$$

Da der Eigenvektor  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$  ist, muss demnach gelten

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)\lambda_1 \quad (3.51)$$

bzw.

$$\gamma(t) = \gamma_0 \exp(\lambda_1 t). \quad (3.52)$$

Dies bedeutet, dass sich das System entlang eines Eigenvektors durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben lässt. Die spezielle Lösung (3.48) mit (3.52)

$$\mathbf{x}(t) = \gamma_0 \exp(\lambda_1 t)\mathbf{v}_1 \quad (3.53)$$

wird auch als *Eigenschwingung des Systems* (3.44) bezeichnet.

Als Beispiel betrachte man folgendes System zweiter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.4 & -1.2 \\ -1.2 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.54)$$

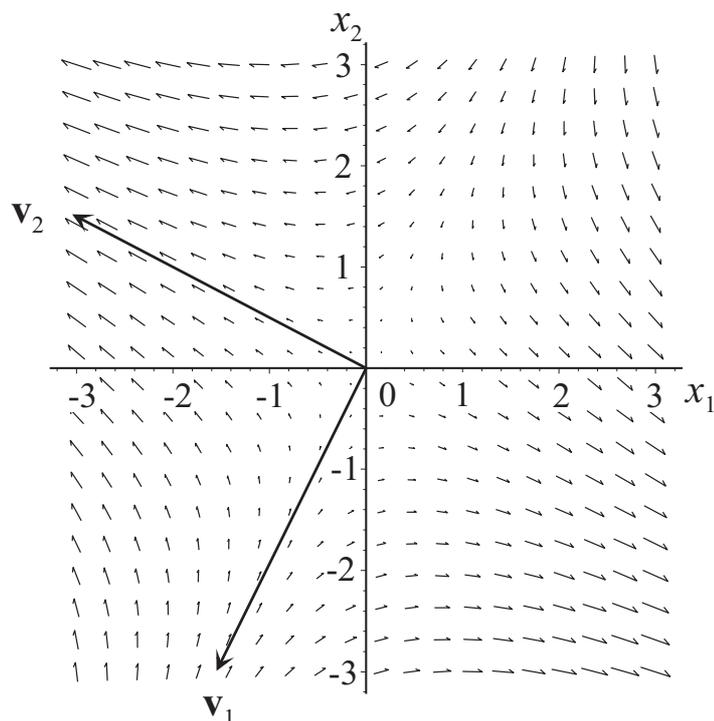
Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  errechnen sich zu  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 2$ , die Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

und die zugehörige Jordansche Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der Trajektorien mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$ .

Abbildung 3.2: Verlauf der Trajektorien für  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 2$ .

### 3.4. Eingangs-Ausgangsverhalten

Neben der bisher behandelten mathematischen Formulierung linearer, zeitinvarianter Systeme in Form von Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichungen (siehe (3.2)) ist sehr häufig eine Beschreibung des Systemverhaltens vom Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  zum Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  ohne Kenntnis des Zustandes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gewünscht. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann dieses so genannte *Eingangs-Ausgangsverhalten* in Form von Übertragungsfunktionen im Eingrößenfall ( $p = q = 1$ ) bzw. Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall beschrieben werden. Die hierfür erforderlichen Grundlagen der Laplace-Transformation  $\mathcal{L}$  wurden bereits in Signale und Systeme 1 (Kapitel 7) besprochen und sind der Vollständigkeit halber im Anhang A nochmals zusammengefasst. Im weiteren Verlauf des Skriptums werden Laplace-transformierte Zeitsignale immer mit einem  $\hat{\cdot}$  versehen, d.h.  $\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s)$ .

#### 3.4.1. Übertragungsfunktion

Wendet man die Laplace-Transformation auf das lineare zeitinvariante Eingrößensystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem skalaren Eingang  $u \in \mathbb{R}$  und dem skalaren Ausgang  $y \in \mathbb{R}$  an, so erhält man

$$\begin{aligned} s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(s) + d\hat{u}(s) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Berechnet man nun aus der ersten Gleichung von (3.58) die Größe  $\hat{\mathbf{x}}(s)$

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\hat{u}(s) \quad (3.59)$$

und setzt dies in die zweite Gleichung ein, ergibt sich

$$\hat{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d) \hat{u}(s) . \quad (3.60)$$

Daraus lässt sich unmittelbar der Begriff der *Übertragungsfunktion* definieren:

**Definition 3.3. (Übertragungsfunktion)** Für das lineare zeitinvariante Eingrößensystem von (3.57) mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}$  und der Ausgangsgröße  $y \in \mathbb{R}$  gelte  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Die von der speziellen Wahl von  $u$  unabhängige Funktion  $G(s)$

$$\hat{y}(s) = G(s) \hat{u}(s) \quad (3.61)$$

heißt Übertragungsfunktion von (3.57).

Im Abschnitt 2.4, Satz 2.4, haben wir festgestellt, dass sich die allgemeine Lösung von (3.57) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  anschreiben lässt. Wendet man nun auf die erste Zeile von (3.62) die Laplace-Transformation an, so ergibt sich unter Verwendung des Faltungssatzes X aus Anhang A die Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \hat{\Phi}(s) \mathbf{x}_0 + \hat{\Phi}(s) \mathbf{b}\hat{u}(s) . \quad (3.63)$$

Durch Vergleich von (3.59) mit (3.63) zeigt sich unmittelbar, dass sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  in der Form

$$\hat{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3.64)$$

errechnet.

**Aufgabe 3.12.** Berechnen Sie die Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

**Lösung:** Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \cos(2t) & \frac{1}{2} \exp(t) \sin(2t) \\ -2 \exp(t) \sin(2t) & \exp(t) \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Damit ist neben der im vorigen Kapitel diskutierten Transformation auf Jordansche Normalform eine weitere Möglichkeit zur effizienten Berechnung der Transitionsmatrix gegeben.

**Satz 3.5. (Übertragungsfunktion)** Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des linearen, zeitinvarianten Eingrößensystems (3.57) errechnet sich zu

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.65)$$

mit den Polynomen  $z(s)$  und  $n(s)$ . Sind die Polynome  $z(s)$ , auch Zählerpolynom genannt, und  $n(s)$ , auch Nennerpolynom genannt, teilerfremd, dann gilt  $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s)) \leq n$  und die Nullstellen des Nennerpolynoms  $n(s)$ , die so genannten Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$ , sind auch Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Der Grad des Nennerpolynoms  $\text{grad}(n(s))$  gibt auch die Ordnung der Übertragungsfunktion  $G(s)$  an.

**Beweis:** Den Beweis für die Beziehung (3.65) erhält man unmittelbar indem man in (3.60)  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  setzt. Die Inverse der Matrix  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  lässt sich in der Form

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \quad (3.66)$$

anschreiben, wobei mit  $\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  die *adjungierte Matrix* der Matrix  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  bezeichnet wird. (**Anmerkung:** Die Elemente  $A_{ij}$  der adjungierten Matrix  $\text{adj}(\mathbf{A}) = [A_{ij}]$  einer Matrix  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  entsprechen den Subdeterminanten der  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrizen von  $\mathbf{A}$ , die durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte hervorgehen, multipliziert mit dem Faktor  $(-1)^{i+j}$ .) Setzt man (3.66) in die Übertragungsfunktion (3.65) ein

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}, \quad (3.67)$$

erkennt man unmittelbar, dass

- die Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  auch Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind, da  $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  dem charakteristischen Polynom der Matrix  $\mathbf{A}$  entspricht,
- das Nennerpolynom  $n(s)$  von  $G(s)$  maximal die Ordnung  $n$  haben kann und
- der Grad des Zählerpolynoms  $z(s)$  kleiner oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms  $n(s)$  sein muss, da  $\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  zufolge der Definition lediglich aus Polynomen  $(n-1)$ -ter Ordnung in  $s$  besteht. ■

**Aufgabe 3.13.** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des linearisierten Zweitanksystems von Aufgabe 2.18

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Delta h_1 \\ \frac{d}{dt} \Delta h_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{A q_R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta q$$

$$\Delta q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 g}{q_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

mit der Eingangsgröße  $\Delta q$  und der Ausgangsgröße  $\Delta q_2$ .

**Lösung:** Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1}{\left(s \frac{Aq_R}{a^2 g} + 1\right)^2} .$$

**Aufgabe 3.14.** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des elektrischen Systems von Abbildung 1.6 mit der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ .

**Lösung:** Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = -\frac{1 + sCR_2}{sR_1C} .$$

### 3.4.2. Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen

Mit Übertragungsfunktionen kann sehr einfach das Übertragungsverhalten zusammengesetzter Systeme aufgrund der Kenntnis des Übertragungsverhaltens ihrer Komponenten bestimmt werden. Dazu betrachte man die Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$  zweier Eingrößensysteme mit

$$\hat{y}_1 = G_1(s) \hat{u}_1 \quad \text{und} \quad \hat{y}_2 = G_2(s) \hat{u}_2 . \quad (3.68)$$

Als *Hintereinanderschaltung* oder *Serienschaltung* bezeichnet man das System von Abbildung 3.3 mit der Eingangsgröße  $\hat{u} = \hat{u}_1$ , der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \hat{y}_2$  und der Zusammenschaltungsbedingung  $\hat{u}_2 = \hat{y}_1$ .

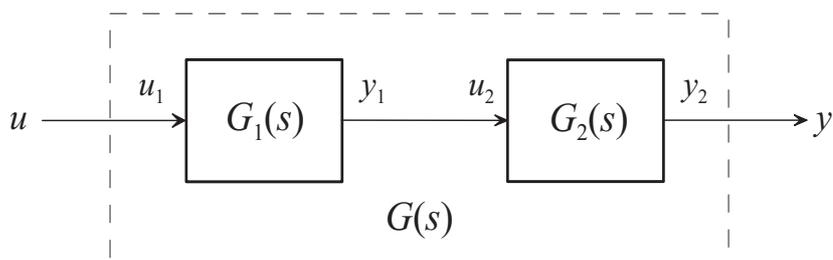


Abbildung 3.3: Serienschaltung zweier Übertragungsfunktionen.

Für das Gesamtsystem mit der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = G_2(s) G_1(s) . \quad (3.69)$$

Man beachte, dass die Beziehung (3.69) nur dann gültig ist, wenn die Zusammenschaltung von Abbildung 3.3 *rückwirkungsfrei* ist.

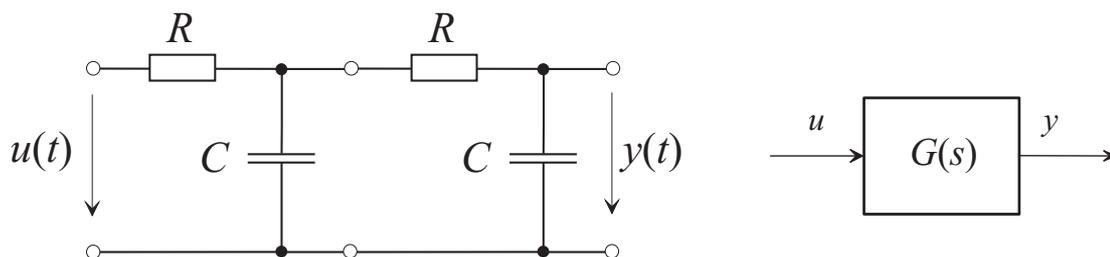


Abbildung 3.4: Elektrisches Netzwerk.

Zur Erläuterung betrachte man das elektrische System von Abbildung 3.4. Die Übertragungsfunktion errechnet sich zu

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1} \quad (3.70)$$

und dies entspricht offensichtlich nicht der Serienschaltung zweier Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  nach Abbildung 3.5

$$G(s) \neq G_1(s) G_1(s) = \frac{1}{(sCR + 1)^2} . \quad (3.71)$$

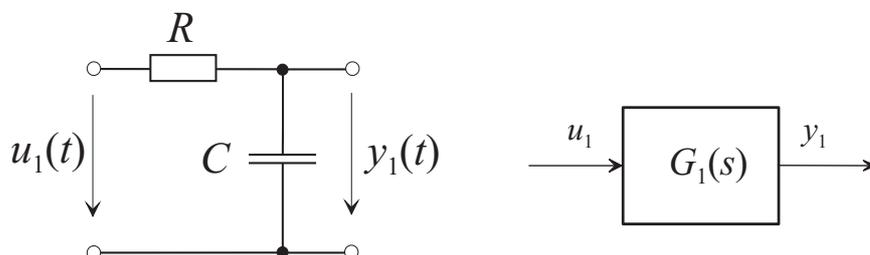


Abbildung 3.5: Teilnetzwerk von Abbildung 3.4.

Der Grund liegt darin, dass die Zusammenschaltung zweier Netzwerke nach Abbildung 3.5 nicht rückwirkungsfrei ist. Man kann die Rückwirkungsfreiheit beispielsweise dadurch erreichen, dass man die Teilnetzwerke durch einen Spannungsfolger gemäß Abbildung 3.6 trennt.

Als *Parallelschaltung* bezeichnet man das System von Abbildung 3.7 mit der Eingangsgröße  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}$  und der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ . Für die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung folgt unmittelbar

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = G_1(s) + G_2(s) . \quad (3.72)$$

Die so genannte *Gegenkopplung (Mithkopplung)* oder *Rückkopplung mit negativem Vorzeichen (mit positivem Vorzeichen)* ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Übertragungsfunk-

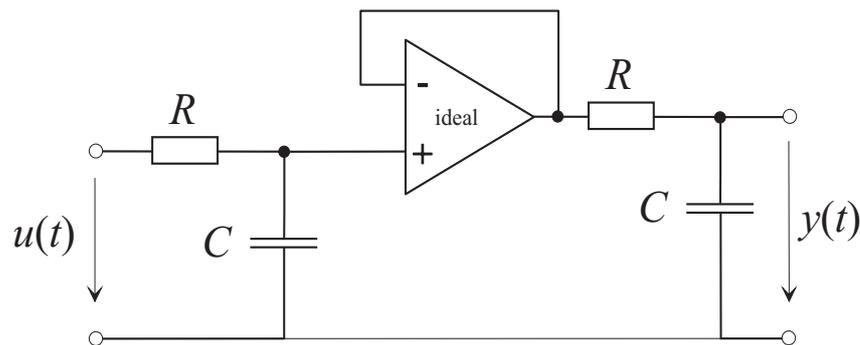


Abbildung 3.6: Auftrennung der Teilnetzwerke durch einen Spannungsfolger.

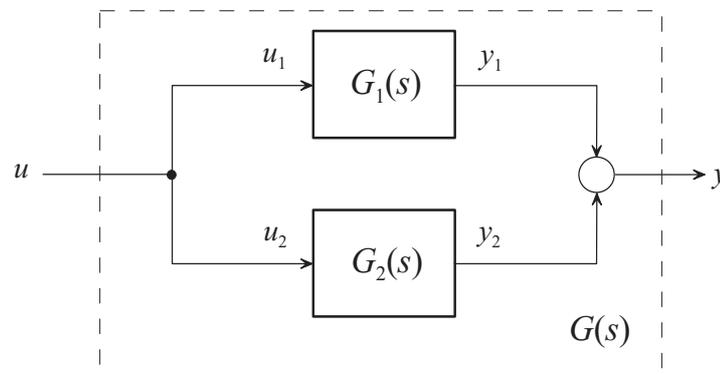


Abbildung 3.7: Parallelschaltung zweier Übertragungsfunktionen.

tion des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße  $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ , der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \hat{y}_1$  und der Zusammenschaltungsbedingung  $\hat{u}_2 = \hat{y}_1$  folgt zu

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = (1 + G_1(s) G_2(s))^{-1} G_1(s) . \quad (3.73)$$

**Aufgabe 3.15.** Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen  $G_{r,y}(s)$ ,  $G_{r,u}(s)$ ,  $G_{d,y}(s)$ ,  $G_{d,u}(s)$ ,  $G_{n,y}(s)$  sowie  $G_{n,u}(s)$  des Regelkreises von Abbildung 3.9 mit der Führungsgröße  $r$ , der Störgröße  $d$ , dem Messrauschen  $n$ , der Stellgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Beachten Sie, dass mit  $G_{\eta,\chi}(s)$  die Übertragungsfunktion vom Eingang  $\eta$  zum Ausgang  $\chi$  gemeint ist. **Lösung:** (für drei Übertragungsfunktionen)

$$G_{r,y} = \frac{VG_1}{1 + G_1R}, \quad G_{r,u} = \frac{V}{1 + G_1R}, \quad G_{d,u} = \frac{-G_2R}{1 + G_1R}$$

### 3.4.3. Übertragungsmatrix

Im Mehrgrößenfall ( $p$  Eingänge und  $q$  Ausgänge) tritt an Stelle der Übertragungsfunktion  $G(s)$  die so genannte Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$ . Die Herleitung erfolgt vollkommen analog zur Übertragungsfunktion und wird wegen der Ähnlichkeit zu Abschnitt 3.4.1 relativ kurz gehalten. Die Laplace-Transformation angewandt auf das lineare, zeitinvariante

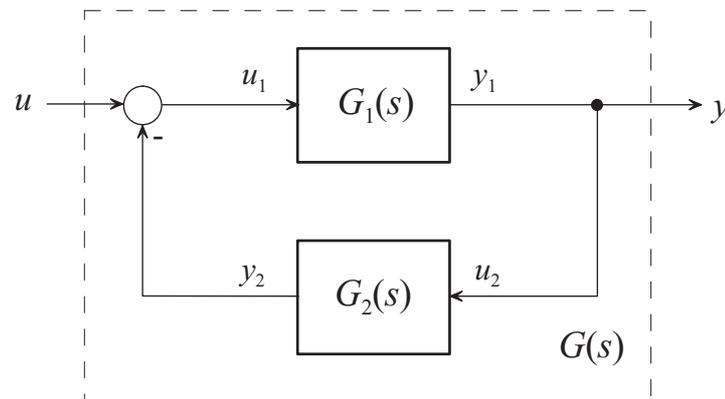


Abbildung 3.8: Gegenkopplung zweier Übertragungsfunktionen.

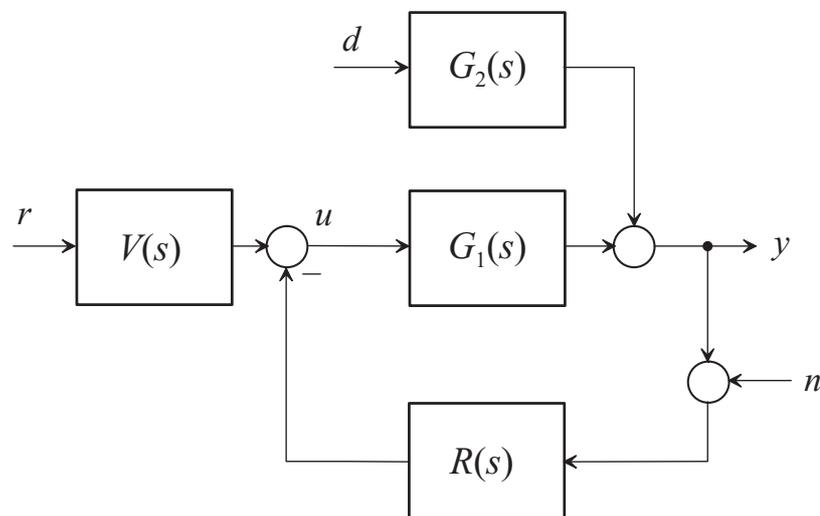


Abbildung 3.9: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.74}$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  und dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  ergibt

$$\begin{aligned}s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} .\end{aligned}\tag{3.75}$$

Durch Elimination der Größe  $\hat{\mathbf{x}}$  mit

$$\hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0\tag{3.76}$$

folgt unmittelbar

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0,\tag{3.77}$$

und für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  erhält man die  $(q \times p)$ -Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\hat{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.78)$$

**Aufgabe 3.16.** Betrachten Sie das elektromechanische System vom Abschnitt 1.4 mit der Zustandsdifferentialgleichung (1.25) und der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ M_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\varphi \\ k\psi_F(i_F) i_A \end{bmatrix}.$$

Linearisieren Sie das System für  $\psi_F(i_F) = L_F i_F$  mit konstantem  $L_F$  und  $u_F = u_{F,R}$  um den Arbeitspunkt

$$u_{A,R} = \frac{R_A R_F m g r}{k L_F u_{F,R}}, \quad i_{A,R} = \frac{R_F m g r}{k L_F u_{F,R}}, \quad i_{F,R} = \frac{u_{F,R}}{R_F}, \quad \omega_R = 0, \quad \varphi_R = \text{const.}$$

und berechnen Sie die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  des linearisierten Systems vom Eingang  $\Delta \mathbf{u}^T = [\Delta u_A, \Delta u_F]$  zum Ausgang  $\Delta \mathbf{y}^T = [\Delta x, \Delta M_{el}]$ .

**Lösung:** Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  lautet

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{r k u_{F,R} R_F L_F}{\tilde{n}(s)} & \frac{(s L_A + R_A) m g r^2 R_F^3}{s (s L_F + R_F) \tilde{n}(s) u_{F,R}} \\ \frac{s k L_F u_{F,R} R_F \tilde{\Theta}}{\tilde{n}(s)} & \frac{s (s L_A + R_A) m g r R_F^3 \tilde{\Theta}}{(s L_F + R_F) \tilde{n}(s) u_{F,R}} \end{bmatrix}$$

mit

$$\tilde{n}(s) = s^2 R_F^2 \tilde{\Theta} L_A + s R_F^2 \tilde{\Theta} R_A + k^2 L_F^2 u_{F,R}^2 \quad \text{und} \quad \tilde{\Theta} = (\Theta_G + \Theta_T + m r^2).$$

**Aufgabe 3.17.** Zeigen Sie, dass äquivalente mathematische Beschreibungen eines linearen, zeitinvarianten Systems  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  (siehe (3.2)) und  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$  (siehe (3.3)) die gleiche Übertragungsmatrix besitzen.

Man beachte, dass bei der Zusammenschaltung von Übertragungsmatrizen wegen der Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation die Reihenfolge der Teilübertragungsmatrizen entscheidend ist. Die Ergebnisse für die Serienschaltung (3.69) sowie für die Rückkopplung (3.73) von Abschnitt 3.4.2 wurden bereits so angeschrieben, dass sie auch im Mehrgrößenfall gültig sind.

**Aufgabe 3.18.** Berechnen Sie die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  der Serienschaltung, der Parallelschaltung und der Rückkopplung zweier Übertragungsmatrizen  $\mathbf{G}_1(s)$  und  $\mathbf{G}_2(s)$ . Wie müssen die Dimensionen der Matrizen aussehen, damit die einzelnen Zusammenschaltungen überhaupt möglich sind.

### 3.5. Realisierungsproblem

Im Satz 3.5, im Speziellen (3.65), wurde gezeigt, dass es sehr einfach ist, zu einem linearen, zeitinvarianten Eingrößensystem (3.57) die Übertragungsfunktion  $G(s)$  zu berechnen. Unter dem *Realisierungsproblem* versteht man die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einer gegebenen Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine Zustandsdarstellung der Form (3.57) mit den Größen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $d$  zu suchen. Jene Zustandsrealisierungen, die eine minimale Anzahl von Zuständen haben, werden auch als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion  $G(s)$  bezeichnet. Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  natürlich keinesfalls eindeutig ist (siehe dazu auch Aufgabe 3.17).

**Satz 3.6. (Realisierbarkeit)** Eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} \quad (3.79)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom  $z(s)$  und  $n(s)$  ist genau dann realisierbar, wenn  $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s))$  oder äquivalent dazu

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| < \infty \quad (3.80)$$

gilt.

In der englischsprachigen Literatur bezeichnet man eine Übertragungsfunktion (3.79) mit  $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s))$  auch als *proper* bzw. für  $\text{grad}(z(s)) < \text{grad}(n(s))$  als *strictly proper*. Durch Polynomdivision von  $z(s)$  durch  $n(s)$  ist es unmittelbar einsichtig, dass für  $\text{grad}(z(s)) > \text{grad}(n(s))$  in der zugehörigen Zustandsdarstellung Ableitungen der Eingangsgröße  $u$  auftreten müssen, und man somit nicht mehr direkt die Struktur von (3.57) erhält. Um für  $G(s)$  von (3.79) eine Minimalrealisierung zu finden, müssen die Polynome  $z(s)$  und  $n(s)$  teilerfremd sein.

Im Folgenden werden zwei *kanonische Minimalrealisierungen* der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{z(s)}{n(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (3.81)$$

angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass die Polynome  $z(s)$  und  $n(s)$  teilerfremd sind, und das Nennerpolynom *monisch* ist, d.h. der höchstwertigste Koeffizient von  $n(s)$  ist 1. Führt man für (3.81) eine Polynomdivision in der Form

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(b_0 - a_0b_n) + (b_1 - a_1b_n)s + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} + b_n \quad (3.82)$$

durch und vergleicht diesen Ausdruck mit (3.65), dann erhält man unmittelbar

$$d = b_n . \quad (3.83)$$

Für den echt rationalen Anteil von (3.82) folgt durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} & a_0 (\hat{y} - b_n \hat{u}) + a_1 s (\hat{y} - b_n \hat{u}) + \dots + s^n (\hat{y} - b_n \hat{u}) \\ &= (b_0 - a_0 b_n) \hat{u} + (b_1 - a_1 b_n) s \hat{u} + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} \hat{u} \end{aligned} \quad (3.84)$$

bzw. mit

$$\hat{x}_n = \hat{y} - b_n \hat{u} \quad \text{und} \quad \tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.85)$$

folgt

$$a_0 \hat{x}_n + a_1 s \hat{x}_n + \dots + a_{n-1} s^{n-1} \hat{x}_n + s^n \hat{x}_n = \tilde{b}_0 \hat{u} + \tilde{b}_1 s \hat{u} + \dots + \tilde{b}_{n-1} s^{n-1} \hat{u}. \quad (3.86)$$

Formt man (3.86) in der Form

$$a_0 \frac{1}{s^n} \hat{x}_n + a_1 \frac{1}{s^{n-1}} \hat{x}_n + \dots + a_{n-1} \frac{1}{s} \hat{x}_n + \hat{x}_n = \tilde{b}_0 \frac{1}{s^n} \hat{u} + \tilde{b}_1 \frac{1}{s^{n-1}} \hat{u} + \dots + \tilde{b}_{n-1} \frac{1}{s} \hat{u} \quad (3.87)$$

bzw.

$$\hat{x}_n = \underbrace{\left( \dots \left( (\tilde{b}_0 \hat{u} - a_0 \hat{x}_n) \frac{1}{s} + \tilde{b}_1 \hat{u} - a_1 \hat{x}_n \right) \frac{1}{s} + \dots \right)}_{n \text{ mal}} \frac{1}{s} + \underbrace{\tilde{b}_{n-1} \hat{u} - a_{n-1} \hat{x}_n}_{n \text{ mal}} \frac{1}{s} \quad (3.88)$$

um und führt die Größen

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{1}{s} (\tilde{b}_0 \hat{u} - a_0 \hat{x}_n) \\ \hat{x}_2 &= \frac{1}{s} (\hat{x}_1 + \tilde{b}_1 \hat{u} - a_1 \hat{x}_n) \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= \frac{1}{s} (\hat{x}_{n-1} + \tilde{b}_{n-1} \hat{u} - a_{n-1} \hat{x}_n) \end{aligned} \quad (3.89)$$

ein, so erhält man unmittelbar das System

$$\begin{aligned} s \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \hat{u} \\ \hat{y} &= \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{b_n}_{\mathbf{d}} \hat{u}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

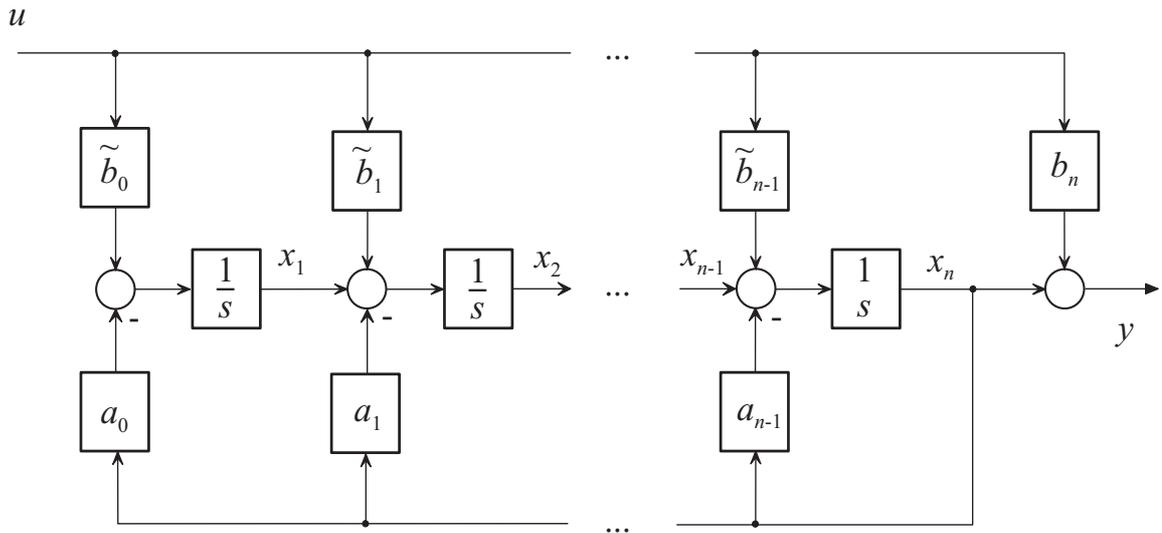


Abbildung 3.10: Beobachtbarkeitsnormalform oder 2-te Standardform.

Durch die inverse Laplace-Transformation von (3.90) ist aber unmittelbar eine Zustandsrealisierung der Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.81) gefunden. Man nennt diese Realisierung auch *2-te Standardform* oder *Beobachtbarkeitsnormalform*. Abbildung 3.10 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild.

Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  als skalare rationale Funktion in  $s$  bleibt unverändert, wenn man sie transponiert, d.h.

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = (\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d)^T = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (3.91)$$

Gleichung (3.91) besagt offensichtlich, dass das Eingrößensystem (3.57) und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{b}^T \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (3.92)$$

die gleiche Übertragungsfunktion  $G(s)$  haben. Das System (3.92) nennt man auch das zu (3.57) *duale System*. Wendet man dies auf (3.90) an, erhält man die Realisierung

$$\begin{aligned} s \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \hat{u} \\ \hat{y} &= \underbrace{[\tilde{b}_0 \ \tilde{b}_1 \ \dots \ \tilde{b}_{n-2} \ \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{b}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{b_n}_{d} \hat{u}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Das zugehörige Strukturschaltbild ist Abbildung 3.11 zu entnehmen. Die Form (3.93) heißt auch *1-te Standardform* oder *Steuerbarkeitsnormalform*.

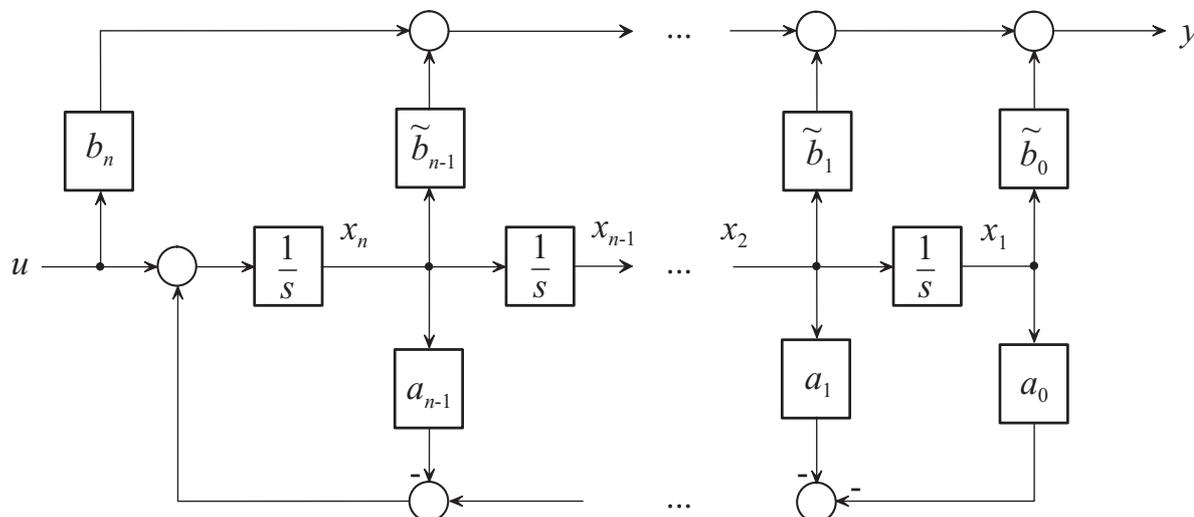


Abbildung 3.11: Steuerbarkeitsnormalform oder 1-te Standardform.

Als Beispiel bestimme man für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{u}}{\hat{y}} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)(-2+3s)(s+1)} \quad (3.94)$$

die 1-te Standardform. Dazu zerlegt man die Übertragungsfunktion in einen konstanten und einen echt rationalen Anteil in der Form

$$G(s) = \frac{\frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}s}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}(-\frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3})}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{9}s^2 + s - \frac{2}{9}}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} + \frac{1}{3}. \quad (3.95)$$

Die 1-te Standardform lässt sich nun unmittelbar aus (3.95) ablesen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y \\ u &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}y. \end{aligned} \quad (3.96)$$

**Aufgabe 3.19.** Bestimmen Sie die 2-te Standardform für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{u}}{\hat{y}} = \frac{-3s + 1}{2s^2 + 3s + 1}.$$

**Lösung:** Die 2-te Standardform lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} y$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

**Aufgabe 3.20.** Starten Sie das Programm MATLAB und tippen Sie `help control` ein. Studieren Sie die Befehle `tf`, `tfdata`, `canon`, `ss2tf`, `tf2ss`, `feedback` etc.

### 3.6. BIBO-Stabilität

Die *globale asymptotische Stabilität der Ruhelage* nach Satz 3.4 bezieht sich auf ein lineares, zeitinvariantes, autonomes System. Mit Hilfe der so genannten *BIBO-Stabilität* (**BIBO** - **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) lässt sich die Stabilität des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (3.57) beurteilen.

**Definition 3.4. (BIBO-Stabilität)** Für ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem (3.57) mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  gelte  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Das System heißt BIBO-stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfunktion  $u(t)$  eine beschränkte Ausgangsfunktion  $y(t)$  gehört, d.h. zu jedem finiten  $a > 0$  mit  $|u(t)| \leq a$  existiert ein finites  $b > 0$  so, dass  $|y(t)| \leq b$  gilt.

Die BIBO-Stabilität lässt sich nun sehr einfach anhand der so genannten Impulsantwort

$$g(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}(G(s) 1) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} , \quad t > 0 \quad (3.97)$$

der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \underbrace{\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}}_{\hat{g}(s)} + d \quad (3.98)$$

mit  $\delta(t)$  als der Dirac Delta-Funktion (siehe Anhang A) überprüfen - es gilt nämlich folgender Satz:

**Satz 3.7. (BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort)** Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (3.57) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort  $g(t)$  nach (3.97) absolut integrierbar ist, d.h. die Ungleichung

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (3.99)$$

erfüllt ist.

**Beweis:** siehe Anhang C

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität erfolgt über die Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.65).

**Satz 3.8. (BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion)** Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (3.57) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für alle Pole  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  der zugehörigen Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.65) gilt

$$\operatorname{Re}(s_i) = \alpha_i < 0. \quad (3.100)$$

**Beweis:** siehe Anhang C

Da nach Satz 3.5 jeder Pol von  $G(s)$  ein Eigenwert der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  ist folgt aus der *globalen asymptotischen Stabilität* der Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  des autonomen Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  (siehe Satz 3.4), dass das System auch *BIBO-stabil* ist. Die Umkehrung gilt nur dann, wenn die Ordnung der Übertragungsfunktion  $G(s)$  und die des Systems übereinstimmen.

**Aufgabe 3.21.** Geben Sie für das nicht BIBO-stabile, lineare, zeitinvariante Eingrößensystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

eine beschränkte Eingangsgröße  $u(t)$  so an, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  unbeschränkt ist.

**Lösung:**  $u(t) = A \sin(t)$

**Aufgabe 3.22.** Überprüfen Sie anhand der Sätze 3.7 und 3.8, ob die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad G_3(s) = s, \quad G_4(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

BIBO-stabil sind.

**Lösung:**  $G_1(s)$ ,  $G_3(s)$  nicht BIBO-stabil,  $G_2(s)$ ,  $G_4(s)$  BIBO-stabil

**Aufgabe 3.23.** Ist das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}u$$

BIBO-stabil?

**Lösung:** Ja.

### 3.7. Kontinuierlicher Frequenzgang

Schaltet man auf ein lineares zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.101)$$

auf und nimmt an, dass  $G(s)$  BIBO-stabil ist, dann erhält man für die Ausgangsgröße  $y(t)$  im *eingeschwungenen Zustand* (d.h. nach Abklingen der transienten Vorgänge) wieder eine harmonische Funktion mit identischer Frequenz  $\omega_0$  aber veränderter Phase und Amplitude (siehe auch Kapitel 4 von Signale und Systeme 1)

$$y(t) = A_0 |G(I\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(G(I\omega_0))) . \quad (3.102)$$

Wertet man die Übertragungsfunktion  $G(s)$  entlang der imaginären Achse  $s = I\omega$  aus, so ist mit  $G(I\omega)$  eine Abbildung der imaginären Achse  $I\omega$  mit der reellen Größe  $\omega$  in die komplexen Zahlen gegeben. Man nennt nun die Funktion  $G(I\omega)$  den *Frequenzgang* der Übertragungsfunktion  $G(s)$  und die reellwertigen Funktionen  $|G(I\omega)|$  bzw.  $\arg(G(I\omega))$  bezeichnet man als *Betragsfrequenzgang* oder *Amplitudengang* bzw. *Winkelfrequenzgang* oder *Phasengang* von  $G(s)$ .

Als Beispiel berechne man für das elektrische System von Abbildung 3.12 die Ausgangsspannung  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsspannung

$$u(t) = 3 \sin(2t + 15^\circ) . \quad (3.103)$$

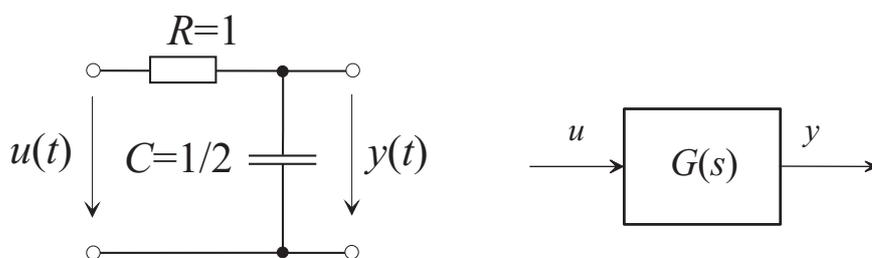


Abbildung 3.12: Einfaches elektrisches System.

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + \frac{s}{2}} \quad (3.104)$$

und damit errechnet sich der komplexe Frequenzgang zu

$$G(I\omega) = \frac{1}{1 + I\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}} e^{-I \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)} . \quad (3.105)$$

Da  $G(s)$  BIBO-stabil ist, lautet die Ausgangsspannung  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand mit  $\omega_0 = 2$

$$y(t) = 3 |G(I2)| \sin(2t + 15^\circ + \arg(G(I2))) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(2t - 30^\circ) . \quad (3.106)$$

**Aufgabe 3.24.** Bestimmen Sie für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s - \sqrt{3}}{s^2 + s + 1}$$

die Ausgangsgröße  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsgröße

$$u(t) = 10 \cos(t - 10^\circ) + \exp(-3t) .$$

**Ergebnis:** Die Ausgangsgröße  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand lautet

$$y(t) = 20 \cos(t + 50^\circ) .$$

**Aufgabe 3.25.** Das mechanische System von Abschnitt 1.3 (Abbildung 1.7 und Gleichung (1.16)) wird mit einer harmonischen Kraft der Form

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

angeregt. Berechnen Sie die Kreisfrequenz  $\omega_0$  so, dass die mittlere Leistung im eingeschwungenen Zustand

$$p_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) v(t) dt \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  maximal wird.

**Lösung:** Die Kreisfrequenz lautet  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  und die zugehörige mittlere Leistung im eingeschwungenen Zustand ergibt sich zu  $p_m = \frac{F_0^2}{2d}$ .

Aus der Berechnung des eingeschwungenen Zustandes ist es bereits naheliegend, wie man den Frequenzgang  $G(I\omega)$  einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion  $G(s)$  punktweise messtechnisch ermitteln kann. Dazu schaltet man einfach auf das System eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.107)$$

auf, wartet ab, bis sämtliche transienten Vorgänge abgeklungen sind, und misst anschließend die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) . \quad (3.108)$$

Aus dieser Messung erhält man den Punkt  $\omega = \omega_0$  des Frequenzganges  $G(I\omega)$  über die Beziehungen

$$|G(I\omega_0)| = \frac{Y_0}{U_0} \quad \text{und} \quad \arg(G(I\omega_0)) = \varphi_0 . \quad (3.109)$$

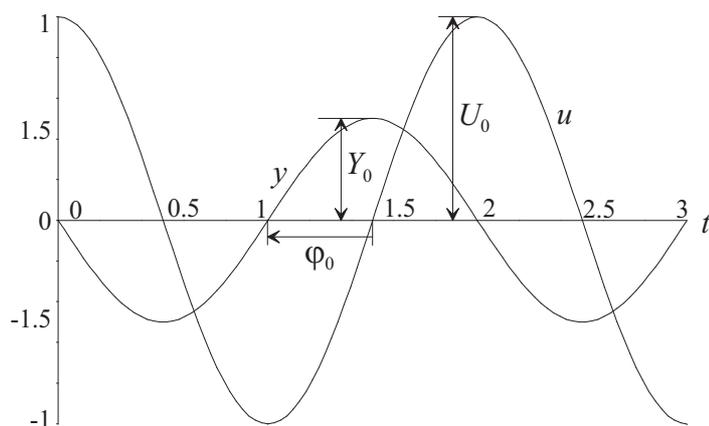


Abbildung 3.13: Zur punktwweisen Aufnahme des Frequenzganges.

In Abbildung 3.13 ist diese Vorgangsweise grafisch veranschaulicht.

Die Aufgabe, aus Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen das mathematische Modell des zugehörigen Systems zu ermitteln, wird als *Identifikationsaufgabe* bezeichnet. Eine einfache Möglichkeit, den Frequenzgang eines linearen, zeitinvarianten Systems punktwweise zu bestimmen, wurde soeben gezeigt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es zur Identifikation des Frequenzganges wesentlich intelligentere Methoden gibt, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt werden. Für nähere Details dazu sei auf die Vorlesung Prozessidentifikation im Masterstudiengang Automatisierungstechnik verwiesen.

### 3.7.1. Nyquist-Ortskurve

Wie bereits erwähnt, ist der Frequenzgang  $G(I\omega)$  eine Abbildung von den reellen in die komplexen Zahlen. Eine Möglichkeit den Frequenzgang grafisch zu veranschaulichen, besteht darin, den Graphen  $(\text{Re}(G(I\omega)), \text{Im}(G(I\omega)))$  in Abhängigkeit des Parameters  $\omega$  in der komplexen Ebene zu zeichnen. Diese Art der Darstellung nennt man *Nyquist-Ortskurve* und diese ist für viele weitere Betrachtungen im Rahmen der Regelung linearer, zeitinvarianter Systeme von essentieller Bedeutung.

Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des elektrischen Systems von Abbildung 3.12 mit dem zugehörigen Frequenzgang

$$G(I\omega) = \frac{1}{1 + I\frac{\omega}{2}} = \underbrace{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}_{\text{Re}(G(I\omega))} + I \underbrace{\frac{-\frac{\omega}{2}}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}_{\text{Im}(G(I\omega))}. \quad (3.110)$$

Aus der Beziehung

$$\left(\text{Re}(G(I\omega)) - \frac{1}{2}\right)^2 + \text{Im}(G(I\omega))^2 = \frac{1}{4} \quad (3.111)$$

überzeugt man sich leicht, dass die Nyquist-Ortskurve von (3.110) ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  und dem Radius  $\frac{1}{2}$  ist (siehe Abbildung 3.14).

Abbildung 3.15 zeigt als zweites Beispiel die Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s^2 + 15s + 10}{s^2 + s + 3}. \quad (3.112)$$

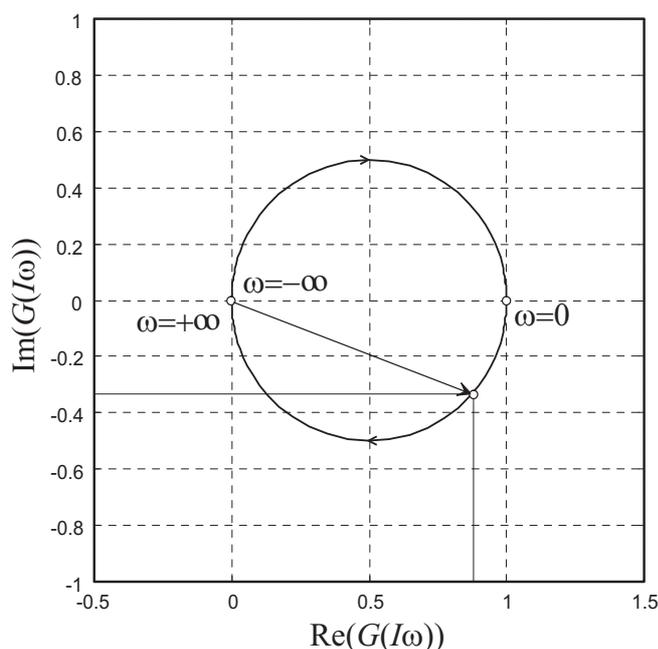


Abbildung 3.14: Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion von Abbildung 3.12.

**Aufgabe 3.26.** Berechnen Sie für die Nyquist-Ortskurve von Abbildung 3.15 die Kreisfrequenz  $\omega_0$ .

**Lösung:**  $\omega_0 = \sqrt{7}$

**Aufgabe 3.27.** Zeichnen Sie die Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{s}{s+2}, \quad G_4(s) = \frac{3}{s}, \quad G_5(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Welche Nyquist-Ortskurven beschreiben als geometrischen Ort einen Kreis? Geben Sie die zugehörigen Kreisgleichungen an.

**Hinweis:** Versuchen Sie den prinzipiellen Verlauf der Ortskurve mit der Hand zu skizzieren und vergleichen Sie anschließend das Ergebnis mit MATLAB (Befehl `nyquist`).

### 3.7.2. Bode-Diagramm

Neben der soeben besprochenen Nyquist-Ortskurve zur Darstellung des Frequenzganges  $G(j\omega)$  einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  sind die so genannten *Logarithmischen Frequenzkennlinien* oder *Bode-Diagramme* von essentieller Bedeutung. Zur Definition der Bode-Diagramme wird im Nachfolgenden der Begriff einer einfach- und doppellogarithmischen Darstellung eines Graphen erläutert. Man nennt den Graphen einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *einfach logarithmisch*, wenn er in der Parameterdarstellung  $(\log(x), f(x))$  mit dem Parameter  $x$  gezeichnet wird, man nennt ihn *doppellogarithmisch*, wenn man die Darstellung  $(\log(x), \log(f(x)))$  wählt. Bei den Bode-Diagrammen ist es im Rahmen der doppellogarithmischen Darstellung üblich, auf der Ordinate anstelle von  $\log(f(x))$  die Größe

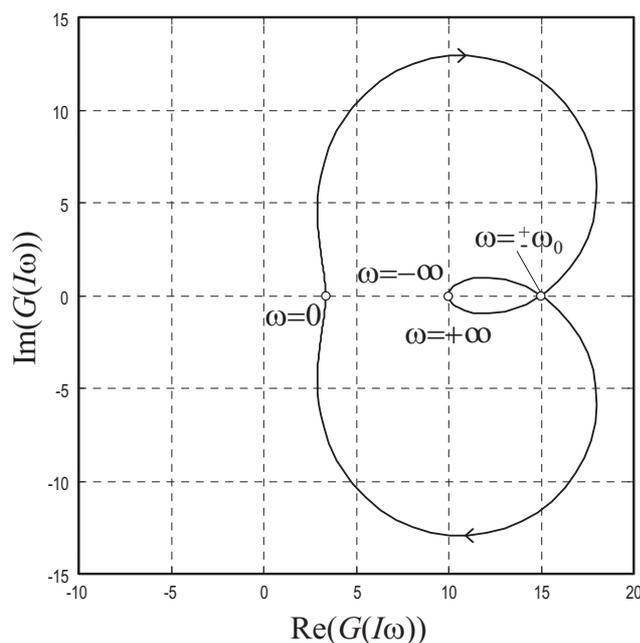


Abbildung 3.15: Nyquist-Ortskurve zum zweiten Beispiel.

$20 \log(f(x))$  aufzutragen. Man sagt dann auch, die Größe  $f(x)$  liege in *Dezibel* ( $f(x)$  in dB) vor mit  $(f(x))_{\text{dB}} = 20 \log(f(x))$ .

**Definition 3.5. (Bode-Diagramm)** Unter dem Bode-Diagramm einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  versteht man die beiden Graphen

- Amplitudengang:  $(\log(\omega), |G(I\omega)|_{\text{dB}})$  (doppellogarithmisch) und
- Phasengang:  $(\log(\omega), \arg(G(I\omega)))$  (einfach logarithmisch). Die Phase wird hier in  $^\circ$  angegeben.

Der große Vorteil dieser logarithmischen Darstellung liegt darin, dass bei der Serienschaltung von Systemen auf sehr einfache Art und Weise der Einfluss der Teilsysteme erkennbar ist. Dazu betrachte man die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{z_1(s)}{n_1(s)} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{z_2(s)}{n_2(s)} \quad (3.113)$$

und deren Serienschaltung

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{z_1(s)}{n_1(s)} \frac{z_2(s)}{n_2(s)}. \quad (3.114)$$

Berechnet man nun  $|G(I\omega)|_{\text{dB}}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} |G(I\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left( \left| \frac{z_1(I\omega)}{n_1(I\omega)} \frac{z_2(I\omega)}{n_2(I\omega)} \right| \right) \\ &= 20 \log(|z_1(I\omega)|) + 20 \log(|z_2(I\omega)|) \\ &\quad - 20 \log(|n_1(I\omega)|) - 20 \log(|n_2(I\omega)|) \end{aligned} \quad (3.115)$$

und  $\arg(G(I\omega))$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\arg(G(I\omega)) &= \arg\left(\frac{z_1(I\omega)}{n_1(I\omega)} \frac{z_2(I\omega)}{n_2(I\omega)}\right) \\ &= \arg(z_1(I\omega)) + \arg(z_2(I\omega)) - \arg(n_1(I\omega)) - \arg(n_2(I\omega)) .\end{aligned}\quad (3.116)$$

Man erkennt, dass sowohl bei der Logarithmusbildung als auch beim Argument Multiplikationen zu Additionen und Divisionen zu Subtraktionen werden.

Zur einfacheren Konstruktion und Interpretation des Bode-Diagrammes einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird die Übertragungsfunktion in *normierter Form* wie folgt

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V z(s)}{s^r n(s)} = \frac{V \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{s}{\omega_{z,i}}\right) \prod_{i=k+1}^m \left(1 + 2\xi_{z,i} \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right)^2\right)}{s^r \prod_{j=1}^l \left(1 + \frac{s}{\omega_{n,j}}\right) \prod_{j=l+1}^n \left(1 + 2\xi_{n,j} \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right)^2\right)} \quad (3.117)$$

mit  $z(0) = n(0) = 1$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  sowie  $\omega_{z,i}$ ,  $\omega_{n,j} \neq 0$  und  $|\xi_{z,i}|$ ,  $|\xi_{n,j}| < 1$  angeschrieben. Dabei bezeichnet  $V$  den *Verstärkungsfaktor*,  $\omega_{z,i}$  und  $\omega_{n,j}$  die *Knickfrequenzen* und  $\xi_{z,i}$  und  $\xi_{n,j}$  die *Dämpfungsgrade* der Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Zur Interpretation des Verstärkungsfaktors betrachte man den Fall, dass  $r = 0$  gilt und die Nullstellen von  $n(s)$  alle in der linken offenen  $s$ -Halbebene sind. Damit ist aber nach der Definition 3.4 der BIBO-Stabilität garantiert, dass die Antwort  $y(t)$  des Systems (3.117) auf einen Einheitssprung  $u(t) = \sigma(t)$  beschränkt ist und somit der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  existiert.

Wendet man den Endwertsatz der Laplace-Transformation an, so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} V \frac{z(s)}{n(s)} = V . \quad (3.118)$$

Damit wird also stationär die Höhe des Eingangssprunges um den Faktor  $V$  auf die Ausgangsgröße verstärkt.

Für den Amplitudengang von (3.117) erhält man

$$\begin{aligned}|G(I\omega)|_{\text{dB}} &= |V|_{\text{dB}} + \sum_{i=1}^k \left|1 + I \frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right|_{\text{dB}} + \sum_{i=k+1}^m \left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)^2 + I 2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)\right|_{\text{dB}} \\ &\quad - r |\omega|_{\text{dB}} - \sum_{j=1}^l \left|1 + I \frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right|_{\text{dB}} - \sum_{j=l+1}^n \left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)^2 + I 2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)\right|_{\text{dB}}\end{aligned}\quad (3.119)$$

und für den Phasengang folgt

$$\begin{aligned}\arg(G(I\omega)) &= \arg(V) + \sum_{i=1}^k \arg\left(1 + I \frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right) + \sum_{i=k+1}^m \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)^2 + I 2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)\right) \\ &\quad - r \arg(I\omega) - \sum_{j=1}^l \arg\left(1 + I \frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right) - \sum_{j=l+1}^n \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)^2 + I 2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)\right) .\end{aligned}\quad (3.120)$$

Aus (3.119) und (3.120) erkennt man, dass sich der Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion  $G(s)$  additiv aus den Amplituden- und Phasengängen der einzelnen Terme zusammensetzt.

Deshalb sollen im Folgenden die einzelnen Terme genauer untersucht werden, wobei für alle Betrachtungen  $\omega > 0$  vorausgesetzt wird:

(1) Verstärkungsfaktor  $G_1(I\omega) = V$ :

$$\begin{aligned} |G_1|_{\text{dB}} &= 20 \log |V| \\ \arg(G_1) &= \begin{cases} 0^\circ & \text{für } V > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{für } V < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.121)$$

(2) Integrierer, Differenzierer  $G_2(I\omega) = (I\omega)^r$ :

$$\begin{aligned} |G_2|_{\text{dB}} &= 20r \log(\omega) \\ \arg(G_2) &= 90^\circ r \end{aligned} \quad (3.122)$$

(3) Linearer Term  $G_3(I\omega) = \left(1 + I\frac{\omega}{\omega_k}\right)$ :

$$\begin{aligned} |G_3|_{\text{dB}} &= 20 \log \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \ll 1 \\ 3.0103 & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \gg 1 \end{cases} \\ \arg(G_3) &= \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \ll 1 \\ 45^\circ \text{sign}(\omega_k) & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| = 1 \\ 90^\circ \text{sign}(\omega_k) & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \gg 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.123)$$

(4) Quadratischer Term  $G_4(I\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + I2\xi_k \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)\right)$ ,  $\omega_k > 0$ :

$$\begin{aligned} |G_4|_{\text{dB}} &= 20 \log \left( \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 40 \log(\sqrt{2\xi_k}) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases} \\ \arg(G_4) &= \arctan \left( \frac{2\xi_k \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 90^\circ \text{sign}(\xi_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 180^\circ \text{sign}(\xi_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Man erkennt aus (3.123) bzw. (3.124), dass bei einem linearen Term bzw. einem quadratischen Term im Zähler (Nenner) der Amplitudengang für  $\omega \gg \omega_k$  mit  $20\text{dB}/\text{Dekade}$  bzw.  $40\text{dB}/\text{Dekade}$  steigt (abfällt) und für  $\omega \ll \omega_k$  der Amplitudengang konstant 0 dB beträgt. Beim Zeichnen der Betragsgänge wird nun oftmals der exakte Verlauf um  $\omega_k$  vernachlässigt und durch die so genannten *Asymptoten* angenähert (siehe Kapitel 4 von Signale und Systeme 1). Abbildung 3.16 zeigt dies beispielsweise für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}. \quad (3.125)$$

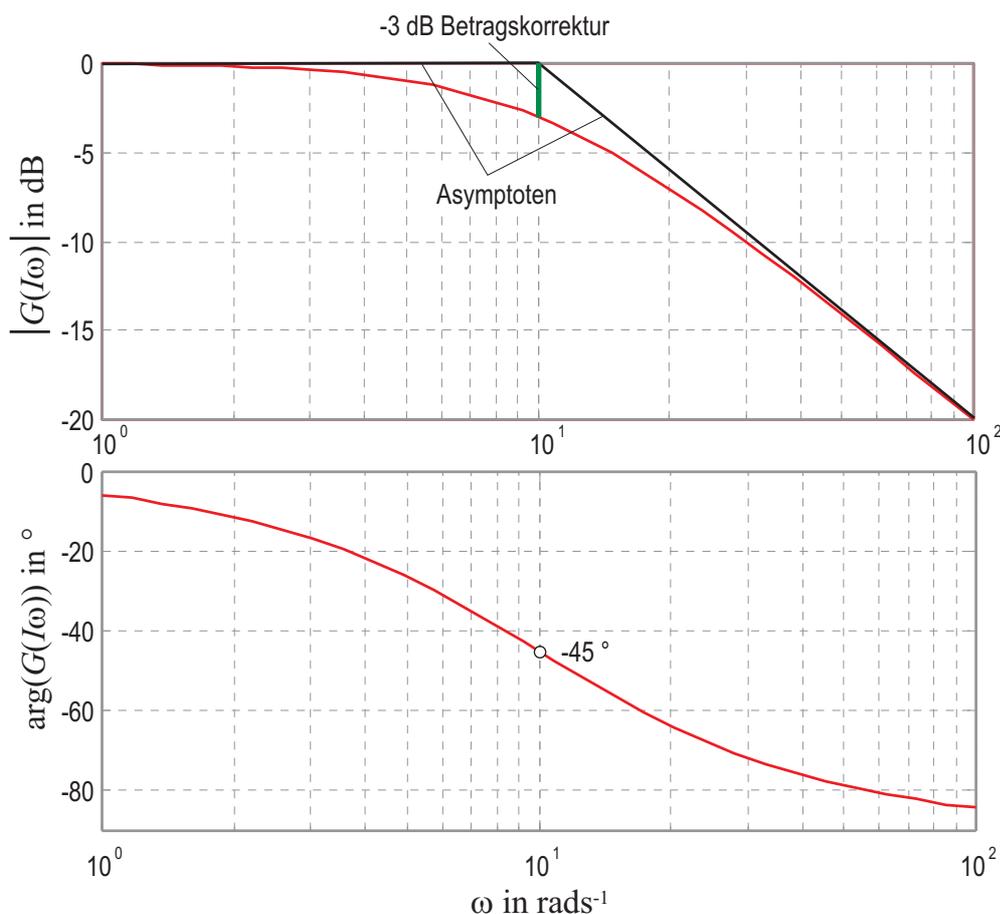


Abbildung 3.16: Bode-Diagramm für einen linearen Term im Nenner.

**Aufgabe 3.28.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm von  $G(s) = s^r$  für verschiedene  $r \in \mathbb{Z}$ .

Das Bode-Diagramm eines quadratischen Terms im Nenner für verschiedene Dämpfungsgrade  $\xi$  wird in Abbildung 3.17 anhand der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{10}\right) + \left(\frac{s}{10}\right)^2} \quad (3.126)$$

für  $\xi = 0.01, 0.1, 0.5$  und  $1$  gezeigt.

Die Eigenschaft, dass sich der Amplituden- und Phasengang einer allgemeinen Übertragungsfunktion  $G(s)$  gemäß (3.119) und (3.120) als Summe der Amplituden- und Phasengänge der einzelnen Teile von  $G(s)$  zusammensetzt, wird im Weiteren zur Konstruktion des Bode-Diagramms von  $G(s)$  gezielt genutzt. Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = -10^{-2} \frac{(s - 10)}{s(s^2 + 0.1s + 0.01)} \quad (3.127)$$

bzw. in normierter Form angeschrieben

$$G(s) = \frac{10^{-2}10}{\underbrace{0.01}_{V=10}} s \frac{1 - \frac{s}{10}}{\left(1 + 2\frac{1}{2} \left(\frac{s}{0.1}\right) + \left(\frac{s}{0.1}\right)^2\right)} \quad (3.128)$$

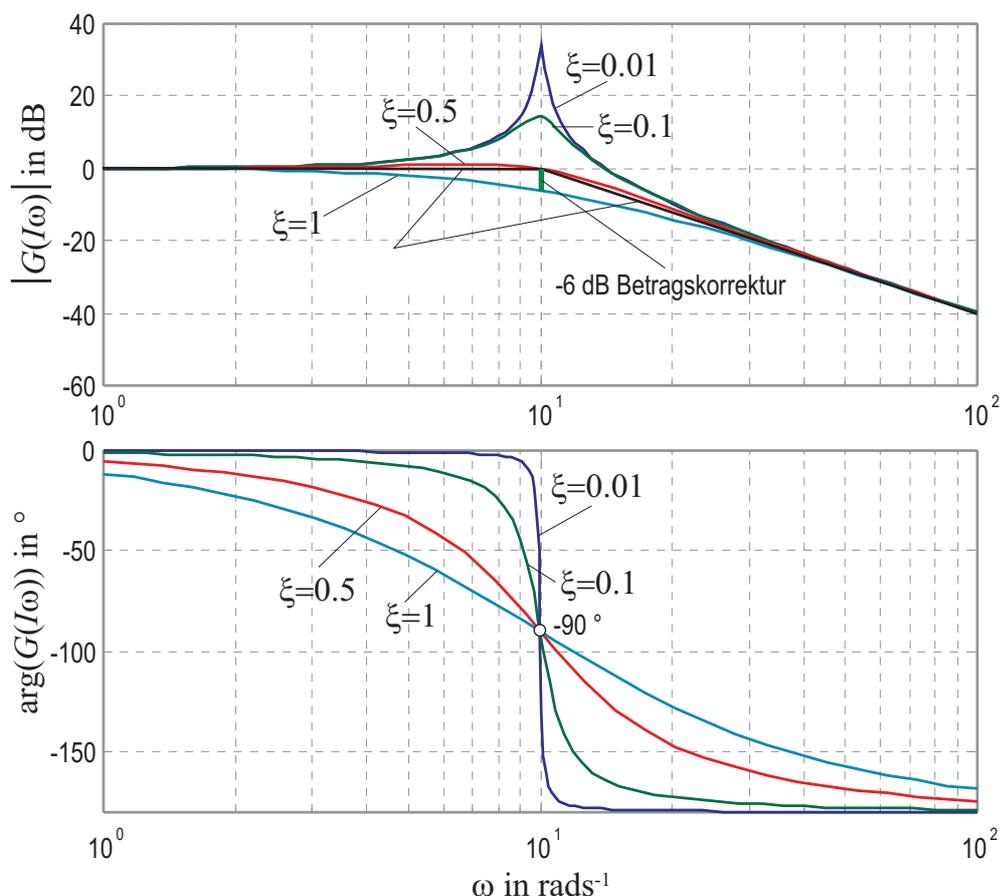


Abbildung 3.17: Bode-Diagramm eines quadratischen Terms im Nenner für verschiedene Dämpfungsgrade.

Dem bisher Gesagten folgend lässt sich der Amplituden- und Phasengang von  $G(s)$  durch Summation der Amplituden- und Phasengänge folgender Teilübertragungsfunktionen

$$G_1 = 10, \quad G_2 = \frac{1}{s}, \quad G_3 = \left(1 - \frac{s}{10}\right) \quad \text{und} \quad G_4 = \frac{1}{1 + 2\frac{1}{2}\left(\frac{s}{0.1}\right) + \left(\frac{s}{0.1}\right)^2} \quad (3.129)$$

konstruieren (siehe dazu Abbildung 3.18).

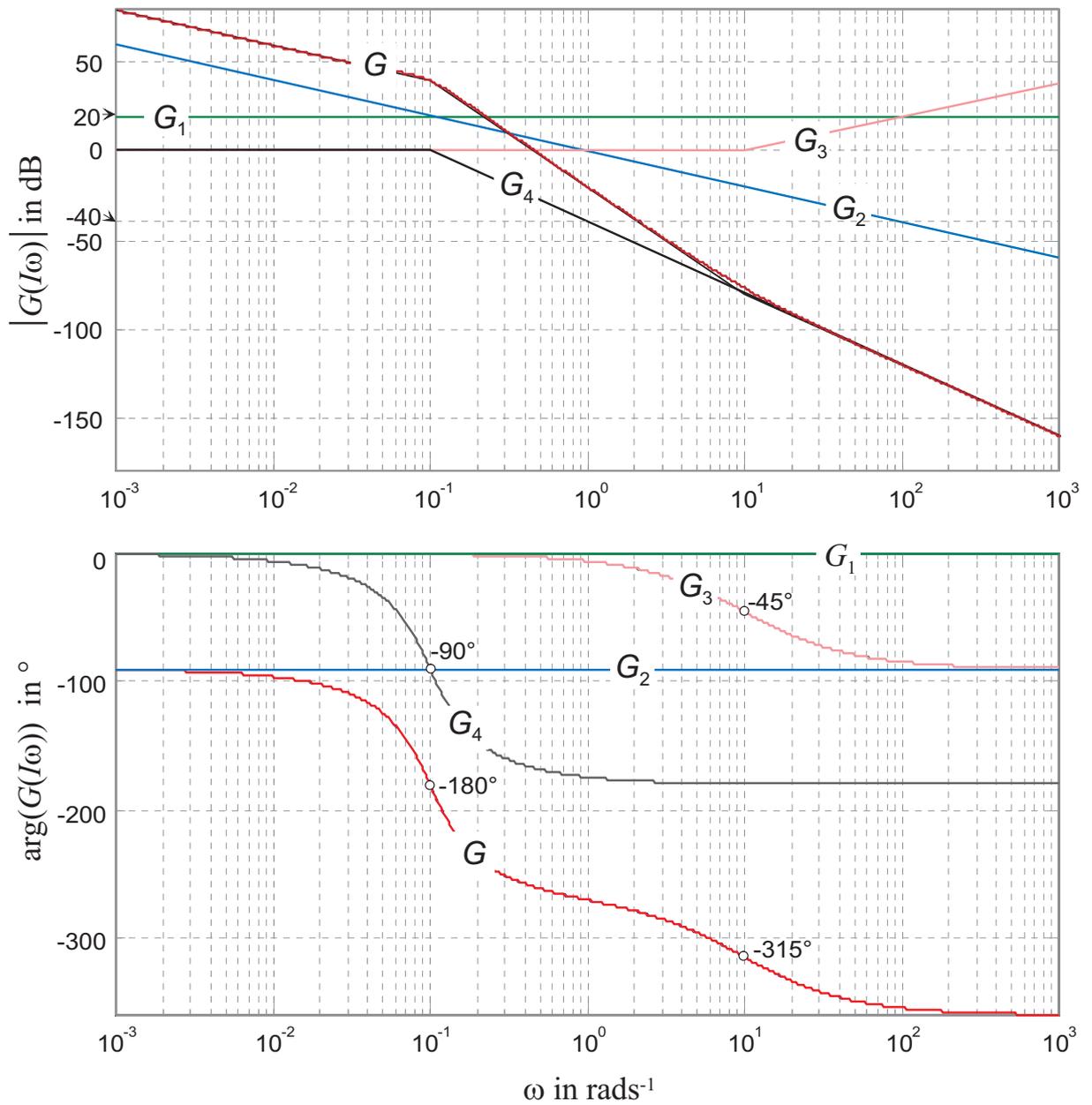
**Aufgabe 3.29.** Zeichnen Sie die Bode-Diagramme für die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{s}{s+2}, \quad G_4(s) = \frac{3}{s}, \quad G_5(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

**Aufgabe 3.30.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.01s + 1)}{s \left( \left(\frac{s}{8}\right)^2 + 0.02 \left(\frac{s}{8}\right) + 1 \right)}$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB (Befehl `bode`).

Abbildung 3.18: Bode-Diagramm für  $G(s)$  von (3.127).

Am Ende dieses Teilabschnittes soll noch kurz der Begriff einer *phasenminimalen Übertragungsfunktion* erläutert werden:

**Definition 3.6. (Phasenminimale Übertragungsfunktion)** Man nennt eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  phasenminimal, wenn alle Pole und Nullstellen von  $G(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen.

Der Name kommt daher, da es für diese Klasse von Systemen möglich ist, den Phasengang allein aus der Kenntnis des Amplitudenganges über die Beziehung

$$\arg(G(I\omega_x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \log(|G(I\omega)|)}{d \log(\omega)} \ln \left( \coth \left( \left| \frac{u}{2} \right| \right) \right) du \quad \text{mit} \quad u = \ln \left( \frac{\omega}{\omega_x} \right) \quad (3.130)$$

zu ermitteln.

Man kann sich anhand der Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{10}}, \quad G_2(s) = \frac{-(1-s)}{1+\frac{s}{10}} \quad \text{und} \quad G_3(s) = \frac{-(1+s)}{1-\frac{s}{10}} \quad (3.131)$$

einfach überzeugen, dass die Beziehung (3.130) bei *nicht phasenminimalen Übertragungsfunktionen* nicht mehr gültig ist, da in (3.131) zwar alle Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  und  $G_3(s)$  den gleichen Amplitudengang aber vollkommen unterschiedliche Phasengänge aufweisen.

**Aufgabe 3.31.** Zeichnen Sie die Bode-Diagramme der Übertragungsfunktionen von (3.131).

### 3.8. Regelungstechnische Übertragungsglieder

Im Folgenden sollen einige, für die Regelungstechnik wichtige Übertragungsglieder erläutert werden. Auf die Bedeutung dieser Übertragungsglieder im Rahmen der Regelung linearer, zeitkontinuierlicher Systeme wird in den nächsten Abschnitten noch näher eingegangen. Als Grundlage aller weiterer Betrachtungen liege die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$  des jeweiligen Übertragungsgliedes gemäß Abbildung 3.19 zugrunde.

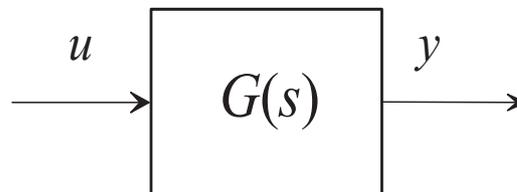


Abbildung 3.19: Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$ .

Neben den bisher besprochenen harmonischen Testsignalen sind auch die Antwort eines Systems zufolge eines Einheitssprungs  $u(t) = \sigma(t)$  (siehe auch A.5), die so genannte *Sprungantwort*  $h(t)$ , und die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls  $u(t) = \delta(t)$  (siehe auch A.6), die so genannte *Impulsantwort*  $g(t)$ , von Bedeutung.

### 3.8.1. Verzögerungsglied 1-ter Ordnung (P-T<sub>1</sub>-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 1-ter Ordnung lautet

$$G(s) = \frac{V}{1 + sT} \quad (3.132)$$

mit dem Verstärkungsfaktor (Beiwert)  $V$  und der Zeitkonstanten  $T > 0$ . Die Nyquist-Ortskurve und das Bode-Diagramm eines P-T<sub>1</sub>-Gliedes sind den Abbildungen 3.14 und 3.16 zu entnehmen. Die Sprungantwort errechnet sich allgemein zu

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} = V \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \sigma(t) \quad (3.133)$$

und die zugehörige Impulsantwort lautet

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{V}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t) . \quad (3.134)$$

Abbildung 3.20 zeigt den Verlauf der Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{1 + \frac{s}{2}} . \quad (3.135)$$

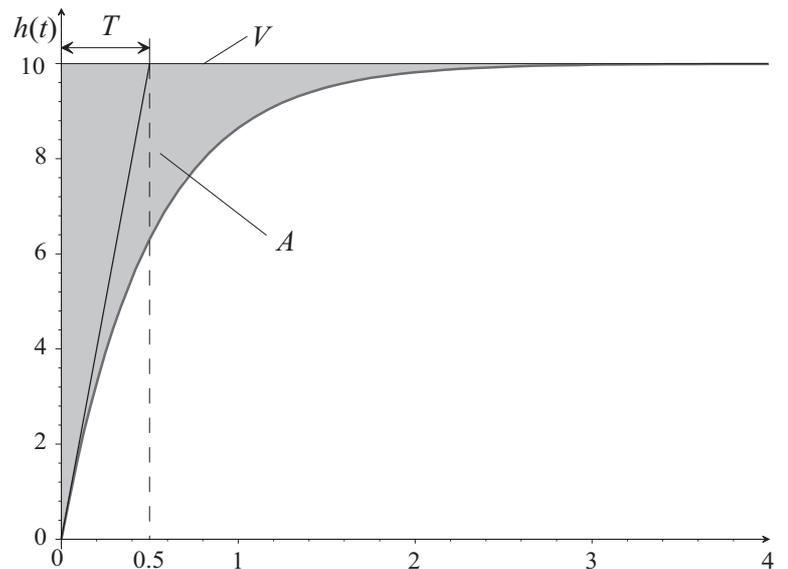


Abbildung 3.20: Sprungantwort eines P-T<sub>1</sub>-Gliedes.

**Aufgabe 3.32.** Berechnen Sie für ein allgemeines P-T<sub>1</sub>-Glied (3.132) die in Abbildung 3.20 grau hinterlegte Fläche.

**Lösung:**  $A = VT$

**Aufgabe 3.33.** Berechnen Sie mit Hilfe des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation (siehe Anhang A) die Steigung  $k_0$  der Sprungantwort zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

**Lösung:**  $k_0 = \frac{V}{T}$

### 3.8.2. Verzögerungsglied 2-ter Ordnung (P-T<sub>2</sub>-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 2-ter Ordnung lautet

$$G(s) = \frac{V}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2} \quad (3.136)$$

mit dem Verstärkungsfaktor  $V$ , der Zeitkonstanten  $T > 0$  und dem Dämpfungsgrad  $0 \leq \xi < 1$ . Das Bode-Diagramm eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes für verschiedene Dämpfungsgrade  $\xi$  ist Abbildung 3.17 zu entnehmen. Die Sprungantwort ergibt sich in allgemeiner Form zu

$$h(t) = V \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \xi \sin \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) \right) e^{-\xi \frac{t}{T}} \right) \sigma(t) \quad (3.137)$$

und die Impulsantwort lautet

$$g(t) = \frac{V}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) \sigma(t) . \quad (3.138)$$

Abbildung 3.21 zeigt den Verlauf der Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{1 + 2\xi \left( \frac{s}{10} \right) + \left( \frac{s}{10} \right)^2} \quad (3.139)$$

für die verschiedenen Dämpfungsgrade  $\xi = 0.01, 0.1, 0.5$  und  $0.9$ .

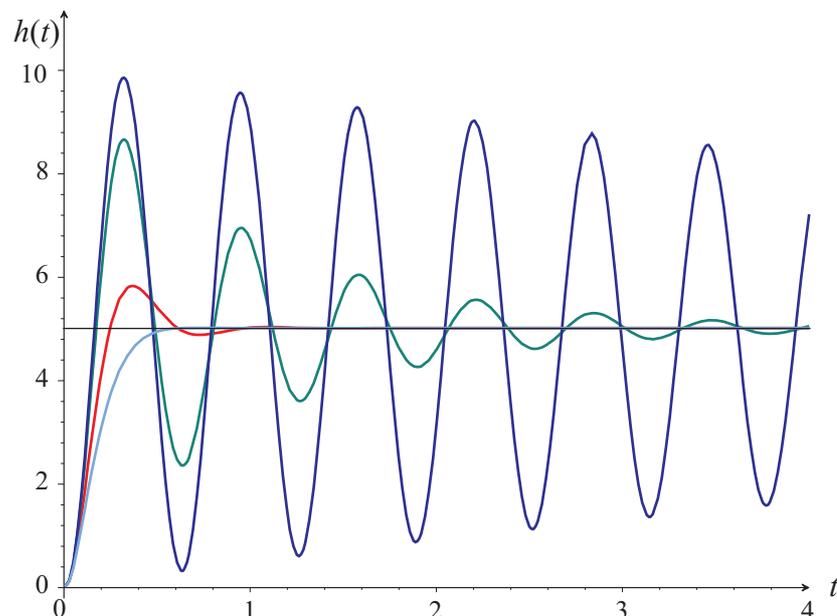


Abbildung 3.21: Sprungantwort eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes.

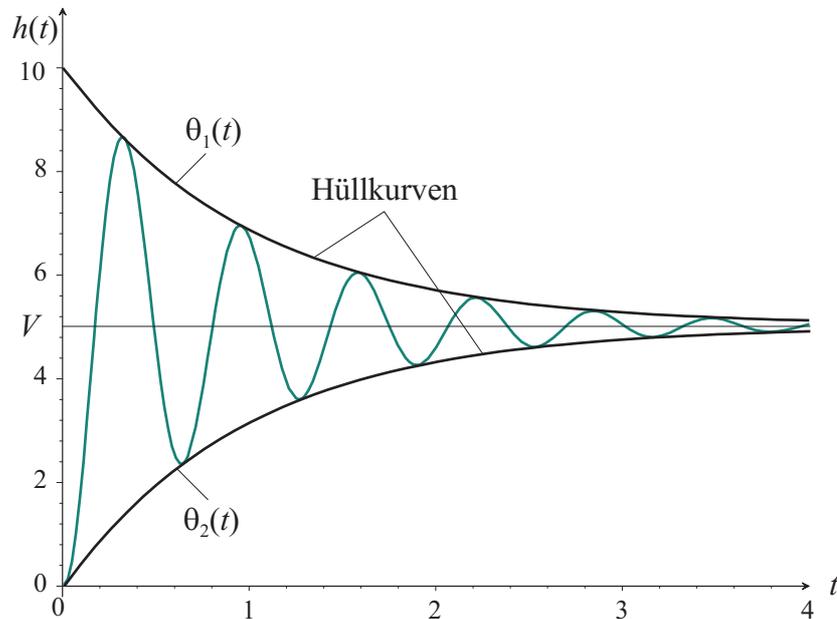


Abbildung 3.22: Die Hüllkurven der Sprungantwort eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes.

**Aufgabe 3.34.** Berechnen Sie allgemein für die Sprungantwort  $h(t)$  von (3.137) die so genannten Hüllkurven  $\theta_{1/2}(t)$  wie sie für die Sprungantwort der Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.139) in Abbildung 3.22 dargestellt sind.

**Lösung:** Die Hüllkurven lauten

$$\theta_{1/2}(t) = V \left( 1 \pm \frac{e^{-\xi \frac{t}{T}}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) .$$

### 3.8.3. Proportional-Glied (P-Glied, P-Regler)

Die Übertragungsfunktion eines Proportional-Gliedes hat die Form

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = V_P . \quad (3.140)$$

Der Name kommt daher, da die Ausgangsgröße  $y(t)$  proportional zur Eingangsgröße  $u(t)$  ist, es gilt nämlich

$$y(t) = V_P u(t) . \quad (3.141)$$

### 3.8.4. Integrator (I-Glied, I-Regler)

Die Übertragungsfunktion des Integrators lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V_I}{s} . \quad (3.142)$$

Wie der Name schon sagt, ist die Ausgangsgröße  $y(t)$  die integrierte Eingangsgröße  $u(t)$ , also

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 . \quad (3.143)$$

**Aufgabe 3.35.** Berechnen Sie die Sprungantwort des Integrators.

**Lösung:**  $h(t) = V_I t \sigma(t)$

**Aufgabe 3.36.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Integrators.

### 3.8.5. Proportional-Integral-Glied (PI-Glied, PI-Regler)

Die Parallelschaltung eines Proportional-Gliedes und eines Integrators ergibt das Proportional-Integral-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V_I(1 + sT_I)}{s} = \frac{V_I}{s} + \underbrace{V_I T_I}_{V_P} \quad (3.144)$$

mit  $T_I > 0$ . Die Ausgangsgröße  $y(t)$  ergibt sich in diesem Fall zu

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau + V_I T_I u(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = V_I T_I u(0) . \quad (3.145)$$

**Aufgabe 3.37.** Berechnen Sie die Sprungantwort des Proportional-Integral-Gliedes.

**Lösung:**  $h(t) = (V_I t + V_I T_I) \sigma(t)$

**Aufgabe 3.38.** Zeichnen Sie die das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Proportional-Integral-Gliedes.

Die Operationsverstärkerschaltung von Abbildung 1.6 gibt eine schaltungstechnische Realisierung eines Proportional-Integral-Gliedes an.

**Aufgabe 3.39.** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$  der Operationsverstärkerschaltung von Abbildung 1.6 und drücken Sie die Parameter  $V_I$  und  $T_I$  von (3.144) als Funktion der Bauteile  $R_1$ ,  $R_2$  und  $C$  aus.

**Lösung:** Aus der Übertragungsfunktion  $G(s) = -\frac{1+sR_2C}{sR_1C}$  erhält man unmittelbar  $V_I = -\frac{1}{R_1C}$  und  $T_I = R_2C$ .

### 3.8.6. Differenzierer (D-Glied, D-Regler, D-T<sub>1</sub>-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines idealen Differenzierers lautet

$$G(s) = V_D s . \quad (3.146)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass nach Satz 3.6 die Übertragungsfunktion des idealen Differenzierers nicht realisierbar ist.

**Aufgabe 3.40.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Differenzierers.

Um eine realisierbare Version des Differenzierers zu erhalten, fügt man im Nenner einen so genannten *Realisierungsterm* in der Form

$$G_R(s) = \frac{V_D s}{1 + T_R s} \quad , \quad T_R \ll \quad (3.147)$$

mit  $T_R > 0$  hinzu. Ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion  $G_R(s)$  gemäß (3.147) wird auch als *D-T<sub>1</sub>-Glied* bezeichnet.

Wie man aus Abbildung 3.23 für

$$G(s) = 10s \quad \text{und} \quad G_R(s) = \frac{10s}{1 + 0.1s} \quad (3.148)$$

erkennt, verhält sich  $G_R(s)$  natürlich nur noch in einem bestimmten Frequenzbereich, nämlich für  $\omega \ll \frac{1}{T_R}$ , wie ein Differenzierer.

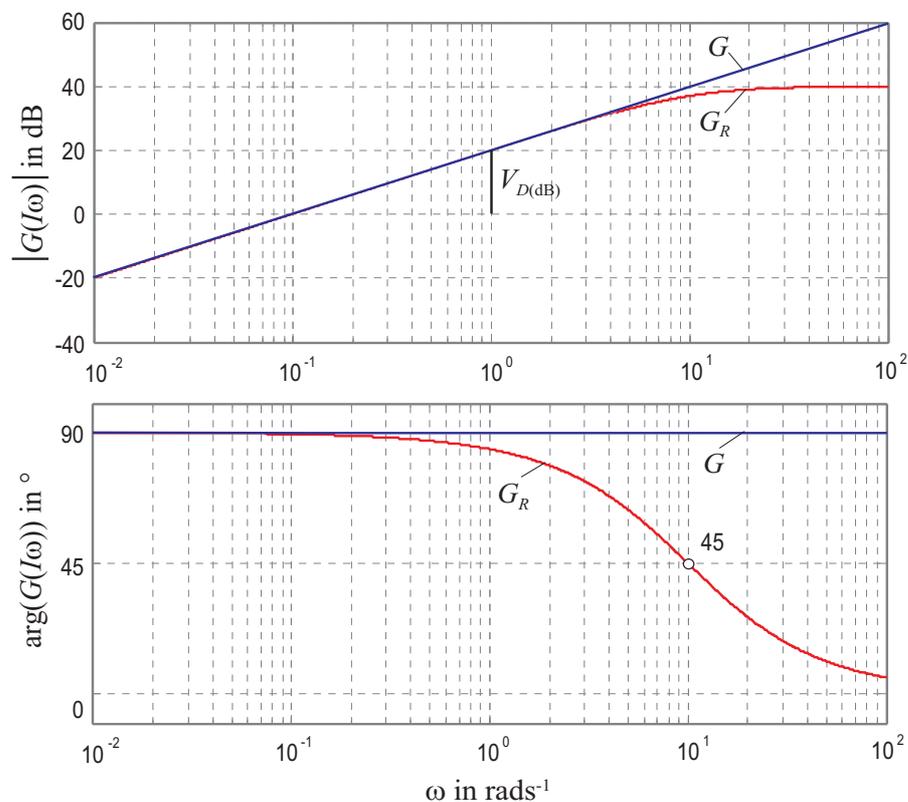


Abbildung 3.23: Differenzierer mit und ohne Realisierungsterm.

### 3.8.7. Proportional-Differential-Glied (PD-Glied, PD-Regler)

Die Übertragungsfunktion des Proportional-Differential-Gliedes hat die Form

$$G(s) = V_P (1 + T_D s) = V_P + \underbrace{V_P T_D s}_{V_D} \quad (3.149)$$

mit  $T_D > 0$  und ist nach Satz 3.6 ebenfalls nicht realisierbar.

**Aufgabe 3.41.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Proportional-Differential-Gliedes.

Fügt man beim Proportional-Differential-Glied analog zu (3.147) einen Realisierungsterm mit  $T_R \ll T_D$  hinzu, dann erhält man ein so genanntes Lead-Glied.

### 3.8.8. Lead-Glied (PD-T<sub>1</sub>-Glied)

Die Übertragungsfunktion des Lead-Gliedes lautet

$$G(s) = V \frac{1 + sT}{1 + s\eta T} \quad , \quad 0 < \eta < 1 \quad (3.150)$$

mit  $T > 0$ . Die Sprungantwort ergibt sich in allgemeiner Form zu

$$h(t) = V \left( 1 + \frac{1 - \eta}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta T}} \right) \sigma(t) \quad . \quad (3.151)$$

**Aufgabe 3.42.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Lead-Gliedes für  $T = V = 1$  und  $\eta = 0.1$ .

Wie man dem Phasengang des Lead-Gliedes von Aufgabe 3.42 sofort entnehmen kann, bedingt das Lead-Glied in einem bestimmten Frequenzbereich eine Phasenhebung. Deshalb ist die Frage naheliegend, an welcher Frequenz die Phasenhebung des Lead-Gliedes maximal wird? Dazu berechne man

$$\arg(G(I\omega)) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega \eta T) \quad (3.152)$$

und bestimme jenes  $\omega = \omega_{\max}$ , für das gilt

$$\frac{d}{d\omega} \arg(G(I\omega)) = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{T\eta}{1 + (\omega \eta T)^2} = 0 \quad . \quad (3.153)$$

Als Lösung von (3.153) erhält man

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\eta} T} \quad (3.154)$$

und damit errechnet sich die maximale Phasenhebung  $\varphi_{\max}$  zu

$$\varphi_{\max} = \arg(G(I\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}) \quad . \quad (3.155)$$

**Aufgabe 3.43.** Wenn für die Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.150) gilt  $\eta > 1$ , dann spricht man auch von einem Lag-Glied (PP-T<sub>1</sub>-Glied). Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve eines Lag-Gliedes für  $T = V = 1$  und  $\eta = 10$ . Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantwort dieses Lag-Gliedes.

**Aufgabe 3.44.** Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation die Werte der Sprungantwort  $h(t)$  des Lead- und Lag-Gliedes zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$ .

**Lösung:** Es gilt  $h(0) = \frac{V}{\eta}$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = V$ .

### 3.8.9. Proportional-Differential-Integral-Glied (PID-Glied, PID-Regler)

Kombiniert man das Proportional-Glied, den Integrator und den Differenzierer mit einem Realisierungsterm, so erhält man das Proportional-Differential-Integral-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = V_P \frac{(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + T_R s)}, \quad T_R \ll \quad (3.156)$$

mit  $T_I, T_D, T_R > 0$ .

**Aufgabe 3.45.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm des Proportional-Differential-Integral-Gliedes (3.156) für  $V_P = 10$ ,  $T_I = 1$ ,  $T_D = 10$  und  $T_R = 0.1$ .

### 3.8.10. Totzeit-Glied

Wenn durch das System  $G(s)$  von Abbildung 3.19 die Eingangsgröße  $u(t)$  um eine konstante Zeit  $T_t$  nach rechts verschoben wird (vergleiche auch Abbildung 2.3), also die Ausgangsgröße die Form

$$y(t) = u(t - T_t) \quad (3.157)$$

mit  $T_t > 0$  annimmt, dann bezeichnet man das System auch als Totzeit-Glied und  $T_t$  als *Totzeit*. Nach dem ersten Verschiebungssatz der Laplace-Transformation lautet die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) = \exp(-sT_t) . \quad (3.158)$$

Solche Totzeit-Glieder treten typischer Weise bei Systemen mit Transportvorgängen (z.B. Förderbänder) auf. Es sei aber an dieser Stelle erwähnt, dass bei diesen Systemen die Totzeit  $T_t$  sehr häufig nicht konstant ist (beispielsweise zufolge der Abhängigkeit von der Förderbandgeschwindigkeit), sondern sich zeitlich ändert und damit die Formulierung von (3.158) nicht mehr gültig ist.

**Aufgabe 3.46.** Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve eines Totzeit-Gliedes.

## 3.9. Schaltungstechnische Realisierung

Wie man bereits in Abbildung 1.6 gesehen hat, lässt sich das Proportional-Integral-Glied sehr einfach als Operationsverstärkerschaltung realisieren. Es liegt daher die Frage nahe, ob es eine einfache Möglichkeit gibt, für eine vorgegebene Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine schaltungstechnische Realisierung in Form von Operationsverstärkerschaltungen zu finden? Für die Übertragungsfunktionen wie sie auch im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, ist dies sehr einfach möglich. Man betrachte dazu die Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung von Abbildung 3.24.

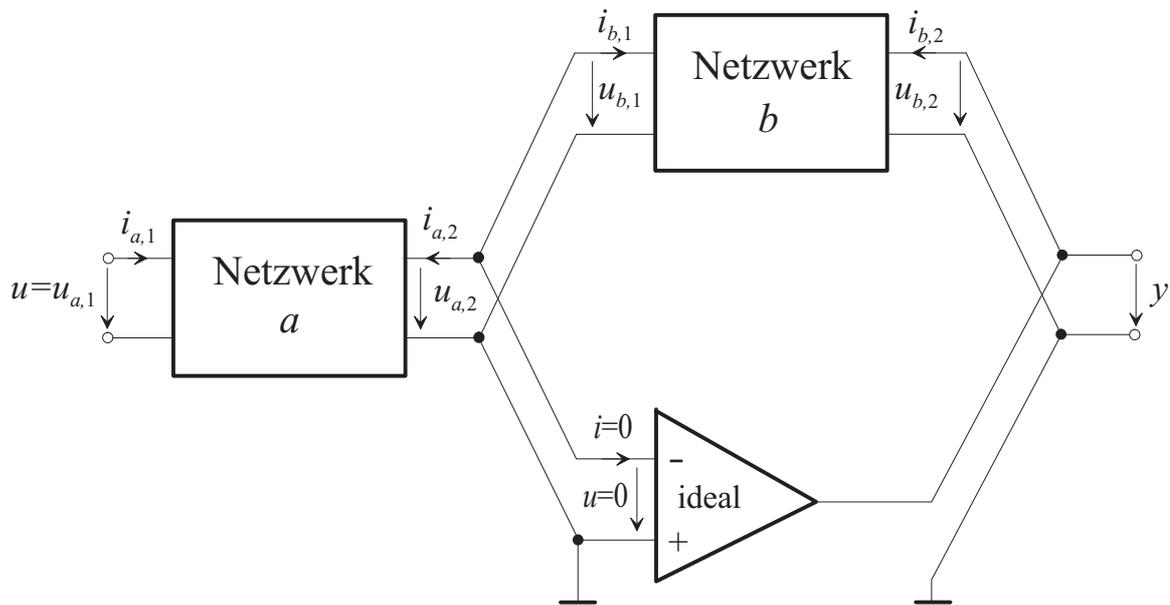


Abbildung 3.24: Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung.

Mit den Admittanzmatrizen der beiden Vierpol-Netzwerke  $a$  und  $b$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{a,1} \\ \hat{i}_{a,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{a,11}(s) & Y_{a,12}(s) \\ Y_{a,21}(s) & Y_{a,22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{a,1} \\ \hat{u}_{a,2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.159)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{b,1} \\ \hat{i}_{b,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{b,11}(s) & Y_{b,12}(s) \\ Y_{b,21}(s) & Y_{b,22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{b,1} \\ \hat{u}_{b,2} \end{bmatrix}$$

sowie den Beziehungen

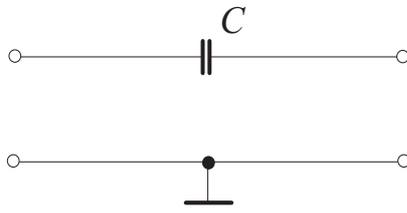
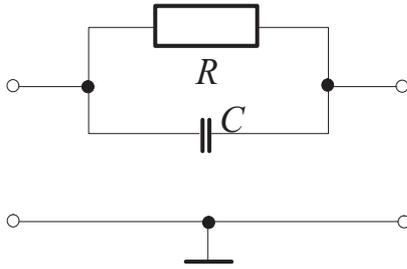
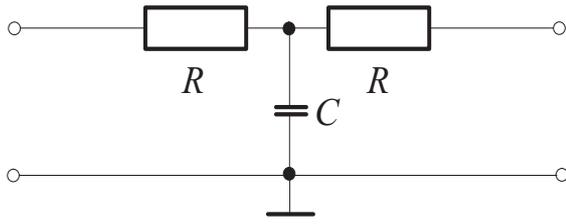
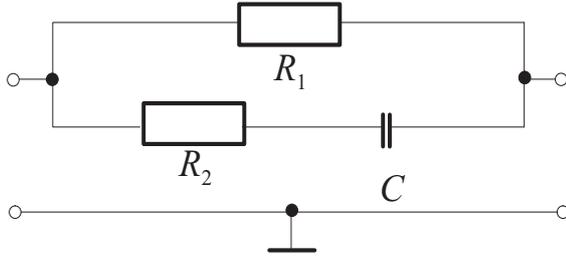
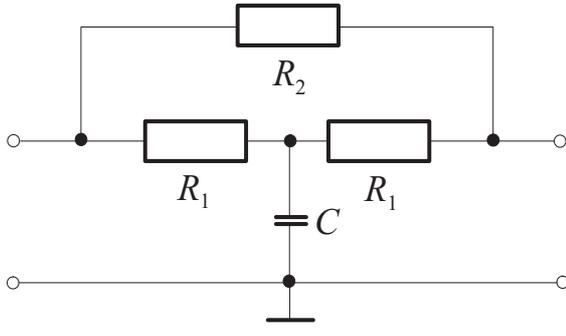
$$\hat{u} = \hat{u}_{a,1}, \quad \hat{u}_{a,2} = \hat{u}_{b,1} = 0, \quad \hat{i}_{a,2} = -\hat{i}_{b,1} \quad \text{und} \quad \hat{y} = \hat{u}_{b,2} \quad (3.160)$$

folgt unmittelbar die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{u}_{b,2}}{\hat{u}_{a,1}} = \frac{\hat{i}_{b,1}}{Y_{b,12}(s)} \frac{Y_{a,21}(s)}{\hat{i}_{a,2}} = -\frac{Y_{a,21}(s)}{Y_{b,12}(s)}. \quad (3.161)$$

Da passive  $RLC$ -Netzwerke reziprok sind, gilt allgemein, dass die Admittanzmatrix symmetrisch ist, d.h.  $Y_{12}(s) = Y_{21}(s)$ . Der nachfolgenden Tabelle sind die Leitwerte einiger Netzwerke zu entnehmen und damit lassen sich relativ einfach die Operationsverstärkerschaltungsrealisierung verschiedener Übertragungsfunktionen bestimmen.

Schaltung	$Y_{12}$	Koeffizienten
<p style="text-align: center;"><math>R</math></p>	$-\frac{1}{R}$	

Schaltung	$Y_{12}$	Koeffizienten
	$-sC$	
	$-V(1 + sT)$	$V = \frac{1}{R}$ $T = RC$
	$-\frac{V}{(1 + sT)}$	$V = \frac{1}{2R}$ $T = \frac{RC}{2}$
	$-V \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}$ $\eta < 1$	$V = \frac{1}{R_1}$ $T = (R_1 + R_2)C$ $\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
	$-V \frac{1 + s\eta T}{1 + sT}$ $\eta < 1$	$V = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1R_2}$ $T = \frac{R_1C}{2}$ $\eta = \frac{2R_1}{2R_1 + R_2}$

**Aufgabe 3.47.** Verifizieren Sie die Admittanzen  $Y_{12}(s)$  der vorigen Tabelle.

**Aufgabe 3.48.** Bestimmen Sie mit Hilfe der soeben gezeigten Methode die schaltungs-technische Realisierung eines Lead-, Lag- und eines Proportional-Gliedes sowie eines Integrators.

### 3.10. Pol-Nullstellen Diagramm

Neben der Möglichkeit, eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  als Frequenzgang in Form der Nyquist-Ortskurve oder des Bode-Diagramms zu charakterisieren, wird auch sehr oft das so genannte Pol-Nullstellen Diagramm verwendet. Dabei werden die Pole mit einem Kreuz  $\times$  und die Nullstellen mit einem Kreis  $\circ$  in der komplexen Ebene symbolisiert. Abbildung 3.25 zeigt dies für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s-0.5)(s^2+4s+6.25)}. \quad (3.162)$$

Das Pol-Nullstellen Diagramm von Abbildung 3.25 wurde mit dem Befehl `pzmap` von MATLAB erstellt. Die Wahl für das von MATLAB eingezeichnete Gitter von Halbkreisen

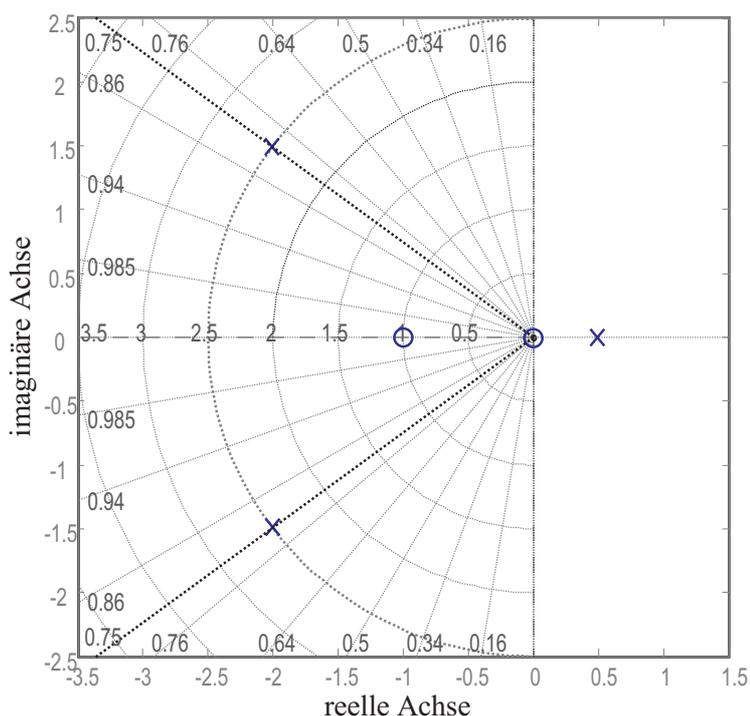


Abbildung 3.25: Pol-Nullstellen Diagramm der Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (3.162).

und Strahlen in der linken komplexen Ebene hat folgende Bedeutung. Betrachtet man ein quadratisches Polynom in  $s$  in der Form des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion des P-T<sub>2</sub>-Gliedes  $G(s)$  von (3.136)

$$n(s) = 1 + 2\xi(sT) + (sT)^2 \quad (3.163)$$

und bezeichnet man mit  $\lambda = \alpha \pm I\beta$  das zugehörige konjugiert komplexe Nullstellenpaar, dann errechnet sich über die Beziehung

$$n(s) = (s - \alpha - I\beta)(s - \alpha + I\beta) = \frac{1}{T^2} + 2\xi\frac{s}{T} + s^2 \quad (3.164)$$

folgender Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Nullstelle und der Zeitkonstanten  $T$  bzw. dem Dämpfungsgrad  $\xi$

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (3.165)$$

Aus (3.165) erkennt man, dass im Pol-Nullstellen Diagramm Punkte konstanten Dämpfungsgrades, also  $\xi$  konstant, auf einem Strahl durch den Nullpunkt mit konstanter Steigung, also  $\frac{\beta}{\alpha}$  konstant, liegen. Weiters gilt, dass Punkte konstanter Zeitkonstante, also  $T$  konstant oder  $\frac{1}{T}$  konstant, im Pol-Nullstellen Diagramm einen Kreis, also  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  konstant, beschreiben. Setzt man voraus, dass  $\text{Re}(\lambda) = \alpha < 0$  ist, dann kommt nur die linke komplexe Halbebene in Betracht. Wie man Abbildung 3.25 entnehmen kann, liegt das konjugiert komplexe Polpaar  $\lambda = -2 \pm I1.5$  der Übertragungsfunktion (3.162) auf einem Halbkreis mit dem Radius 2.5, was einer Zeitkonstanten  $T = 1/2.5 = 0.4$  entspricht, und auf einem Strahl mit der Steigung  $\frac{\beta}{\alpha} = \pm 0.75$ , was einem Dämpfungsgrad  $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} = 0.8$  entspricht.

**Aufgabe 3.49.** Geben Sie für die Übertragungsfunktion des  $P$ - $T_2$ -Gliedes  $G(s)$  von (3.136) jene Bereiche im Pol-Nullstellen Diagramm an, in denen die Pole liegen müssen, damit folgende Bedingungen  $0.5 \leq \xi \leq 0.7$  und  $0.1 \leq T \leq 0.8$  erfüllt sind.

### 3.11. Literatur

1. Chen C.-T., *Control System Design*, Pond Woods Press, New York, (1987).
2. DIN 19 226, Teil 1, Leittechnik; *Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Allgemeine Grundbegriffe*, (1994).
3. DIN 19 226, Teil 2, Leittechnik; *Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe zum Verhalten dynamischer Systeme*, (1994).
4. Director S.W., Rohrer R.A., *Introduction to System Theory*, McGraw-Hill, New York, (1972).
5. Kailath T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, New York, (1980).
6. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1*, Springer, Berlin Heidelberg, (1995).
7. Padulo L., Arbib M.A., *System Theory*, W.B. Saunders Company, Philadelphia, (1974).
8. Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York, (1991).

9. Rohrs Ch., Melsa J.L., Schultz D.G., *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, (1993).
10. Rugh W.J., *Linear System Theory*, Prentice Hall, New Jersey, (1993).

## 4. DER REGELKREIS

Abbildung 4.1 zeigt die wesentlichen Komponenten eines Regelkreises. Unter der *Strecke*

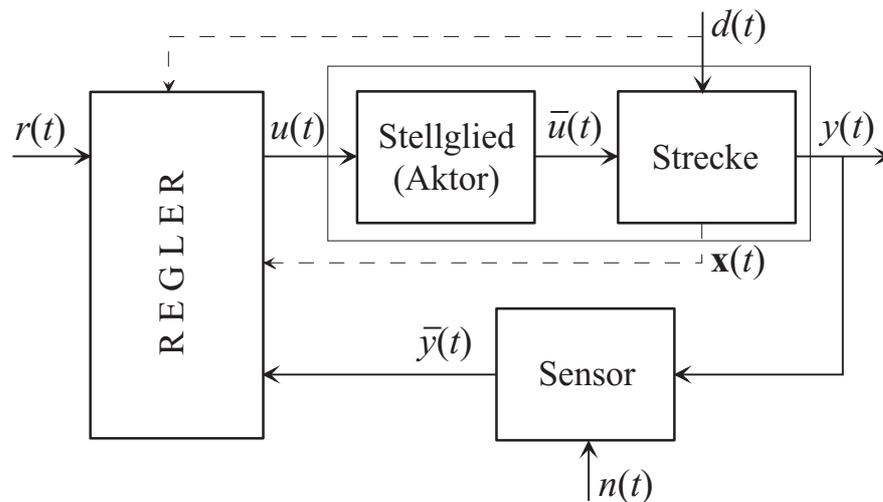


Abbildung 4.1: Komponenten eines Regelkreises.

(*plant*) versteht man dabei das zu regelnde System, welches über den *Aktor* (*actuator*) mittels der so genannten *Stellgröße* (*plant input*)  $u(t)$  gezielt beeinflusst werden kann. Sehr häufig wird der Aktor nicht separat als Block ausgeführt, sondern ist bereits im Block *Strecke* beinhaltet. Auf die *Strecke* wirken im Allgemeinen *externe Störungen* (*disturbances*)  $d(t)$ , die nicht unserer Kontrolle unterliegen und auch nicht messtechnisch erfassbar sind. Mit Hilfe eines *Sensors* wird die *Ausgangsgröße* oder *Regelgröße* (*plant output*)  $y(t)$  gemessen und das *Sensorausgangssignal*  $\bar{y}(t)$  wird dem *Regler* (*controller*) zur Verfügung gestellt. Der *Sensor* hat im Allgemeinen einerseits eine nichttriviale Dynamik und andererseits ist dem Messsignal ein *Sensorrauschen* (*sensor noise*)  $n(t)$  überlagert, weshalb die beiden Signale  $y(t)$  und  $\bar{y}(t)$  im allgemeinen Fall nicht gleich sind. Der *Regler* (*controller*) selbst hat als Eingangssignale das so genannte *Führungs-* oder *Referenzsignal* (*reference input*)  $r(t)$  und je nach Reglerstruktur das Messsignal  $\bar{y}(t)$  der Ausgangsgröße  $y(t)$  – man spricht dann von einer *Ausgangsregelung* (*output feedback control*) – bzw. alle Zustandsgrößen  $\mathbf{x}(t)$  der *Strecke* – man spricht dann auch von einer *Zustandsregelung* (*state feedback control*). In manchen Fällen ist es sogar möglich, die Störung  $d(t)$  zu messen, dann kann diese Information im Regelkonzept natürlich vorteilhaft mitberücksichtigt werden. Die drei von außen auf den Regelkreis wirkenden Signale  $r(t)$ ,  $d(t)$  und  $n(t)$  werden auch als *exogene Eingänge* (*exogenous inputs*) bezeichnet.

Um die einzelnen Begriffe besser zu veranschaulichen, betrachte man als Beispiel die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 bestehend aus einem 4-Quadranten dc-dc-Konverter mit Ansteuerelektronik, einer konstant fremderregten Gleichstrommaschine mit Torsionswelle und Last sowie einem Drehimpulsgeber mit Sensorelektronik.

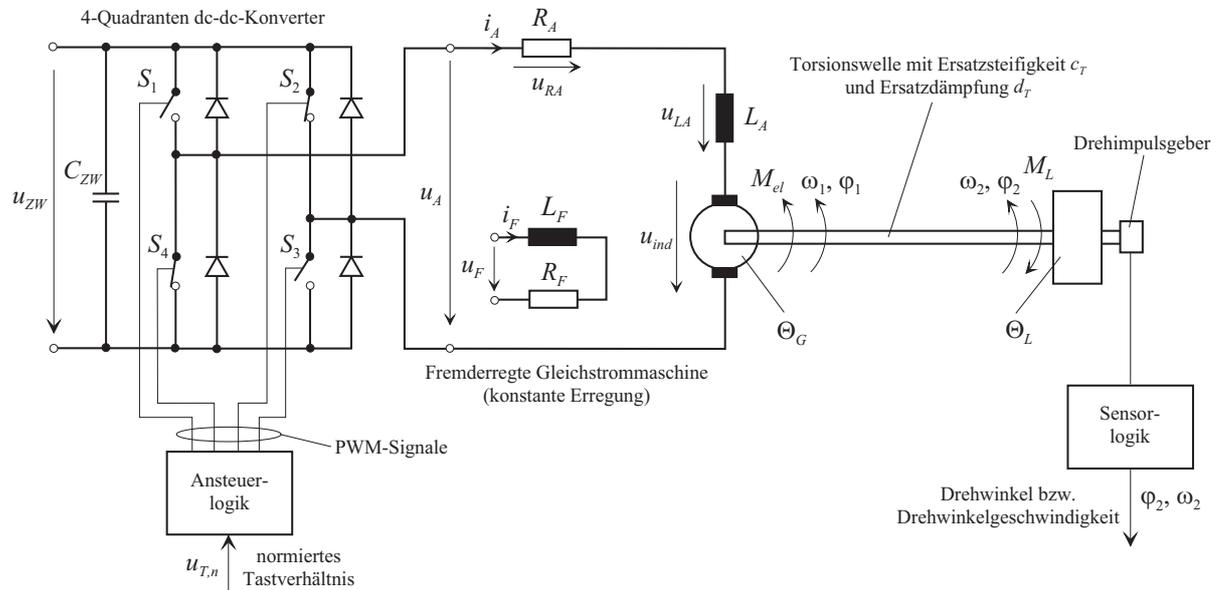


Abbildung 4.2: Antriebsregelstrecke.

**Aktor:** Der Aktor ist im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 der 4-Quadranten dc-dc-Konverter mit Ansteuerelektronik. Die Schalter  $S_1$ - $S_4$  werden pulswidenmoduliert gemäß Abbildung 4.3 angesteuert. Das so genannte *Tastverhältnis*  $u_T$ ,  $0 \leq u_T \leq 1$ , entspricht dabei dem Verhältnis der Einschaltzeit der Schalter  $S_1$  und  $S_3$  zur Modulationsperiodendauer  $T$ .

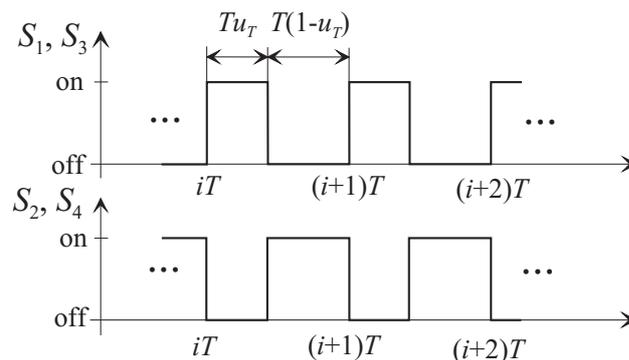


Abbildung 4.3: Pulsweitenmodulierte Ansteuerung der Schalter  $S_1$ - $S_4$  des 4-Quadranten dc-dc-Konverters.

Setzt man nun voraus, dass die Zwischenkreisspannung  $u_{ZW}$  konstant ist (großer Stützkondensator  $C_{ZW}$ ) und die Schalter  $S_1$ - $S_4$  ideal sind (unendlich schnell und verlustlos),

dann errechnet sich die Ankerspannung  $u_A$  im Mittel zu

$$u_A = u_{ZW}u_T + (-u_{ZW})(1 - u_T) = u_{ZW}(2u_T - 1) = u_{ZW}u_{T,n} \quad (4.1)$$

mit dem normierten Tastverhältnis  $u_{T,n} = 2u_T - 1$ ,  $-1 \leq u_{T,n} \leq 1$ . Nach Abbildung 4.1 entspricht also das normierte Tastverhältnis  $u_{T,n}$  der Stellgröße  $u$  und die Ankerspannung  $u_A$  der Aktorausgangsgröße  $\bar{u}$ . Der Aktor lässt sich damit in unserem Fall als reines Proportionalglied

$$\bar{u} = u_{ZW}u \quad (4.2)$$

beschreiben.

**Regelstrecke:** Für die Gleichstrommaschine setzte man folgende Modellannahmen voraus:

- Die räumlich verteilten Wicklungen können als konzentrierte Induktivitäten in den jeweiligen Wicklungsachsen modelliert werden,
- der Erregerstrom  $i_F$  sei konstant und dementsprechend gilt für die induzierte Spannung  $u_{ind} = kL_F i_F \omega_1 = k_A \omega_1$  und für das elektrische Moment  $M_{el} = kL_F i_F i_A = k_A i_A$  mit der Konstanten  $k_A = kL_F i_F$ ,
- der Widerstand  $R_A$  ist konstant,
- es werden keine Eisenverluste und keine Sättigungserscheinungen berücksichtigt,
- die Kommutierung werde als ideal vorausgesetzt (keine Drehmomentenwelligkeit).

Damit errechnet sich das mathematische Modell der Regelstrecke in Form der Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_A}{L_A} & 0 & \frac{-k_A}{L_A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_A}{\Theta_G} & \frac{-c_T}{\Theta_G} & \frac{-d_T}{\Theta_G} & \frac{c_T}{\Theta_G} & \frac{d_T}{\Theta_G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c_T}{\Theta_L} & \frac{d_T}{\Theta_L} & \frac{-c_T}{\Theta_L} & \frac{-d_T}{\Theta_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Theta_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

und für  $\omega_2$  als Ausgangsgröße erhält man die Ausgangsgleichung

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

**Aufgabe 4.1.** Leiten Sie das mathematische Modell (4.3) und (4.4) her. Orientieren Sie sich an Abschnitt 1.4.

Im Sinne des Regelkreises von Abbildung 4.1 entspricht das Lastmoment  $M_L$  der Störung  $d$  und die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  der Regelgröße  $y$ . Da das System (4.3) und (4.4) linear ist, lässt sich die Ausgangsgröße  $\omega_2$  im Laplace-Bereich auch wie folgt

$$\hat{\omega}_2 = G_{u_A, \omega_2}(s) \hat{u}_A + G_{M_L, \omega_2}(s) \hat{M}_L \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} G_{u_A, \omega_2}(s) &= \frac{k_A(s d_T + c_T)}{n(s)} \\ G_{M_L, \omega_2}(s) &= -\frac{s^3 L_A \Theta_G + s^2 (L_A d_T + R_A \Theta_G) + s (L_A c_T + R_A d_T + k_A^2) + R_A c_T}{n(s)} \\ n(s) &= s^4 \Theta_G \Theta_L L_A + s^3 (L_A d_T (\Theta_G + \Theta_L) + R_A \Theta_G \Theta_L) \\ &\quad + s^2 (R_A d_T (\Theta_G + \Theta_L) + L_A c_T (\Theta_G + \Theta_L) + k_A^2 \Theta_L) \\ &\quad + s (R_A c_T (\Theta_G + \Theta_L) + k_A^2 d_T) + k_A^2 c_T \end{aligned} \quad (4.6)$$

anschreiben.

**Sensor:** Die Ausgangsgröße der Regelstrecke, die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_2$ , wird gemäß Abbildung 4.2 mit Hilfe eines Drehimpulsgebers mit nachgeschalteter Sensorauswertelektronik erfasst. Dabei kann vorausgesetzt werden, dass die Sensordynamik so schnell ist, dass sie gegenüber der Streckendynamik vernachlässigbar ist. Das Quantisierungsrauschen des Sensors  $n(t)$  hängt dabei im Wesentlichen von der Strichanzahl des Drehimpulsgebers ab.

Mit den bisherigen Überlegungen lässt sich die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 als Übertragungssystem, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, formulieren.

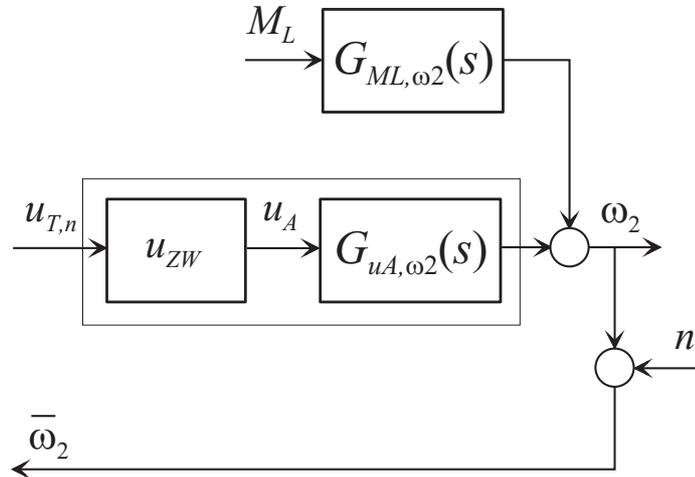


Abbildung 4.4: Äquivalentes Übertragungssystem zur Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2.

Für sämtliche numerische Simulationen der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 werden folgende Parameter

$$\begin{aligned} R_A &= 20 \, \Omega, & L_A &= 15 \times 10^{-3} \, \text{H}, & k_A &= 0.9 \, \text{NmA}^{-1}, \\ \Theta_G &= 3.5 \times 10^{-3} \, \text{Nms}^2, & \Theta_L &= 6.3 \times 10^{-3} \, \text{Nms}^2, & c_T &= 0.02 \, \text{Nm}, \\ d_T &= 0 \, \text{Nms}^{-1}, & u_{ZW} &= 200 \, \text{V} \end{aligned} \quad (4.7)$$

verwendet. Für diese Parameter ergeben sich die Übertragungsfunktionen von (4.6) in normierter Form zu

$$G_{u_T, \omega_2}(s) = \frac{222.22}{\left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)} \quad (4.8)$$

bzw.

$$G_{M_L, \omega_2}(s) = -24.69 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.517}\right)}{\left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)}. \quad (4.9)$$

## 4.1. Aufgaben der Regelung

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im Weiteren vorausgesetzt, dass die Dynamik des Sensors nach Abbildung 4.1 vernachlässigt werden kann. Sämtliche nachfolgende Betrachtungen bleiben aber auch bei nichttrivialer Sensordynamik gültig, doch werden die einzelnen Ausdrücke komplizierter. Da nur lineare, zeitinvariante Systeme in Betracht kommen, kann der allgemeine Regelkreis von Abbildung 4.1 als Übertragungssystem gemäß Abbildung 4.5 dargestellt werden (man vergleiche dazu auch Abbildung 4.4).

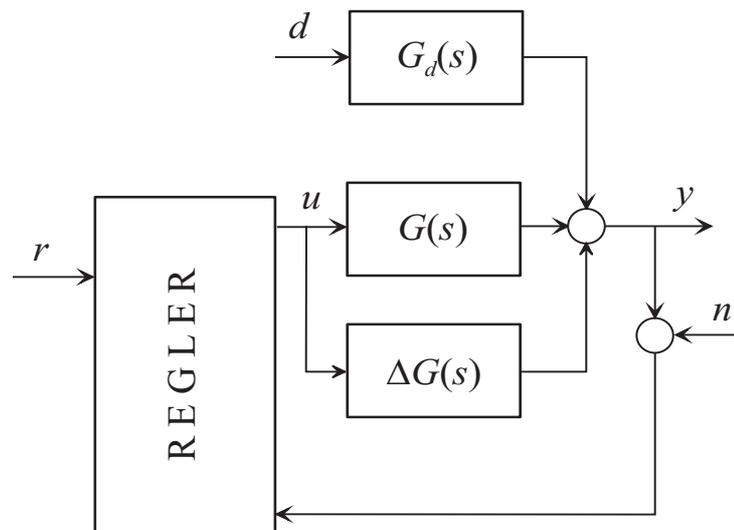


Abbildung 4.5: Regelkreis als Übertragungssystem.

Weiters ist in Abbildung 4.5 die Abweichung  $\Delta G(s)$  von der nominellen Übertragungsfunktion  $G(s)$ , die beispielsweise durch Veränderungen der Streckenparameter (*Parametervariationen*) oder durch nichtmodellerte Dynamik verursacht werden, eingezeichnet. Die Ausgangsgröße  $y$  ergibt sich dann für  $\Delta G(s) = 0$  im Laplace-Bereich zu

$$\hat{y} = T_{r,y}(s) \hat{r} + T_{d,y}(s) \hat{d} + T_{n,y}(s) \hat{n} \quad (4.10)$$

mit der *Führungsübertragungsfunktion*  $T_{r,y}(s)$ , der *Störübertragungsfunktion*  $T_{d,y}(s)$  und der Übertragungsfunktion des Messfehlers (Sensorrauschens)  $T_{n,y}(s)$ .

Die wesentlichen Aufgaben der Regelung sind folgende:

- (1) Stabilisierung einer instabilen Strecke,
- (2) das Ausgangssignal  $y(t)$  soll dem Referenzsignal  $r(t)$  möglichst gut folgen (*Führungsregelung*),
- (3) der Einfluss der Störung  $d(t)$  auf das Ausgangssignal  $y(t)$  soll möglichst gut unterdrückt werden (*Störregelung*),
- (4) die Sensitivität gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke  $\Delta G(s)$  soll möglichst klein gemacht werden,
- (5) die Auswirkung des Messrauschens  $n(t)$  auf das Regelverhalten soll möglichst gering gehalten werden.

Die Forderungen (2) - (5) können im Idealfall mathematisch wie folgt

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & T_{r,y}(I\omega) = 1 \\
 (3) \quad & T_{d,y}(I\omega) = 0 \\
 (4) \quad & \frac{\Delta T_{r,y}(I\omega)}{T_{r,y}(I\omega)} = 0 \\
 (5) \quad & T_{n,y}(I\omega) = 0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

für alle Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}$  formuliert werden.

Da dies praktisch nicht erfüllbar ist, wird (4.11) in der Form modifiziert, dass die Forderungen nur in einem gewissen Frequenzbereich gelten müssen, d.h.,

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & |T_{r,y}(I\omega) - 1| \ll 1 \\
 (3) \quad & |T_{d,y}(I\omega)| \ll 1 \\
 (4) \quad & \left| \frac{\Delta T_{r,y}(I\omega)}{T_{r,y}(I\omega)} \right| \ll 1 \\
 (5) \quad & |T_{n,y}(I\omega)| \ll 1
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

für  $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ . Im Folgenden soll auf einige unterschiedliche Strukturen von Regelkreisen sowie deren Vor- und Nachteile eingegangen werden. Der eigentliche Entwurf von Reglern wird dann im nächsten Kapitel behandelt.

## 4.2. Steuerungen

Eine Steuerung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Ausgangsgröße  $y$  nicht zurückgeführt wird.

### 4.2.1. Einfache Steuerung

Abbildung 4.6 zeigt eine einfache Steuerung. Man erkennt unmittelbar, dass gilt

$$T_{r,y}(s) = R(s)G(s) \quad , \quad T_{d,y}(s) = G_d(s) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.13)$$

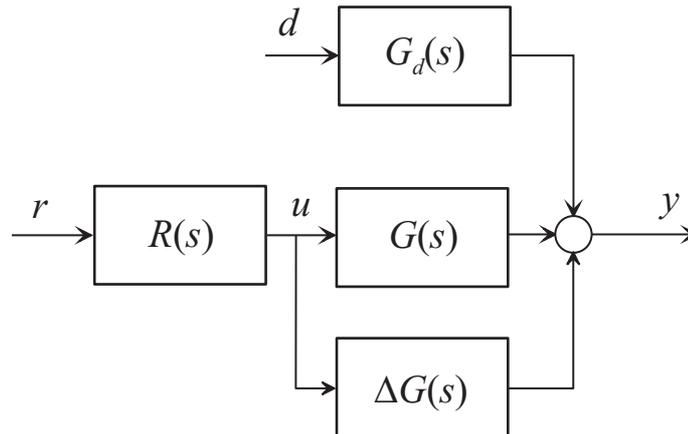


Abbildung 4.6: Einfache Steuerung.

Daraus ergeben sich für eine einfache Steuerung folgende Eigenschaften:

- (1) Die Steuerung kann nur für stabile Strecken ( $G(s)$ ,  $G_d(s)$  und  $R(s)$  müssen BIBO-stabil sein) angewandt werden,
- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  kann mit Hilfe von  $R(s)$  gezielt beeinflusst werden,
- (3) die Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}(s)$  kann durch  $R(s)$  nicht verändert werden,
- (4) die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta G(s)$  können in  $T_{r,y}(s)$  nicht unterdrückt werden,
- (5) (✓) das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße nicht rückgeführt wird.

**Simulationsbeispiel:** für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

### 4.2.2. Steuerung mit Störgrößenaufschaltung

Unter der Annahme, dass die Störung  $d$  messbar ist, kann das Störverhalten mit Hilfe einer Störgrößenaufschaltung beeinflusst werden (siehe dazu Abbildung 4.7).

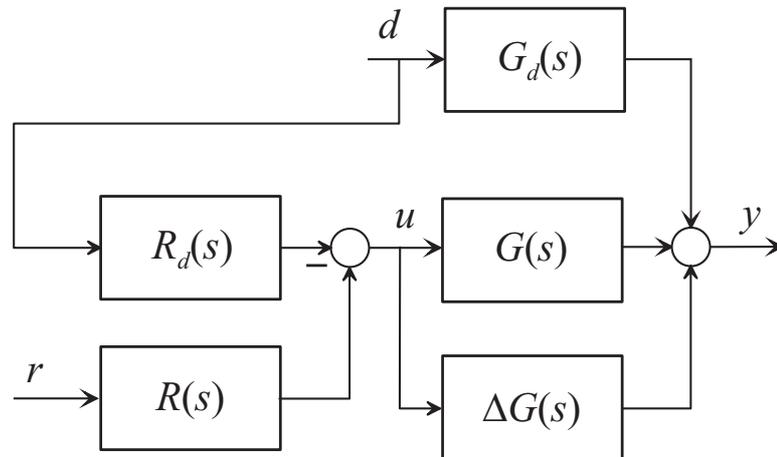


Abbildung 4.7: Steuerung mit Störgrößenaufschaltung.

Für die einzelnen Übertragungsfunktionen gilt in diesem Fall

$$T_{r,y}(s) = R(s)G(s) \quad , \quad T_{d,y}(s) = G_d(s) - G(s)R_d(s) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.14)$$

Daraus ergeben sich für die Steuerung mit Störgrößenaufschaltung folgende Eigenschaften:

- (1) Die Steuerung kann nur für stabile Strecken ( $G(s)$ ,  $G_d(s)$ ,  $R(s)$  und  $R_d(s)$  müssen BIBO-stabil sein) angewandt werden,
- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  kann mit Hilfe von  $R(s)$  gezielt beeinflusst werden,
- (3) (✓) die Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}(s)$  kann durch  $R_d(s)$  gezielt verändert werden,
- (4) die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta G(s)$  können in  $T_{r,y}(s)$  nicht unterdrückt werden,
- (5) (✓) das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße nicht rückgeführt wird.

**Simulationsbeispiel:** für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

### 4.3. Regelungen

Bei einer Regelung wird nun das Ausgangssignal  $y$  in den Regelkreis zurückgeführt.

### 4.3.1. Regelung mit einem Freiheitsgrad

Abbildung 4.8 zeigt einen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

$$T_{r,y}(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad T_{d,y}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad (4.15)$$

und

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} - \frac{R(s)(G(s)+\Delta G(s))}{1+R(s)(G(s)+\Delta G(s))}}{\frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}} = \frac{1}{1 + (G(s) + \Delta G(s))R(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.16)$$

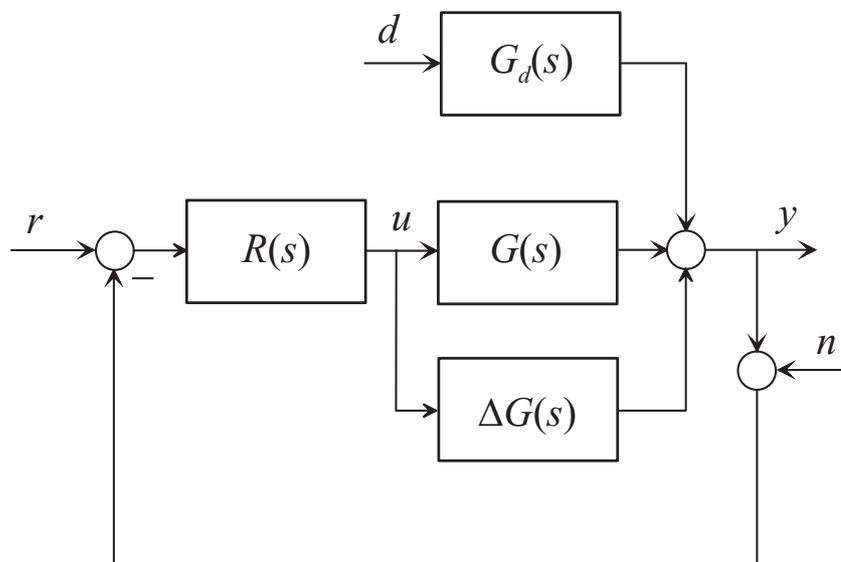


Abbildung 4.8: Regelung mit einem Freiheitsgrad.

Man erkennt, dass die Reglerübertragungsfunktion  $R(s)$  in allen Übertragungsfunktionen vorkommt und so, zumindest prinzipiell, überall eine gezielte Beeinflussung möglich ist.

#### ad (1) – Stabilität:

Schreibt man  $G(s)$ ,  $G_d(s)$  und  $R(s)$  in Form der jeweils teilerfremden Zähler- und Nennerpolynome an

$$G(s) = \frac{z_G(s)}{n_G(s)}, \quad G_d(s) = \frac{z_{G_d}(s)}{n_{G_d}(s)} \quad \text{und} \quad R(s) = \frac{z_R(s)}{n_R(s)}, \quad (4.17)$$

dann erhält man für  $T_{r,y}(s)$  bzw.  $T_{d,y}(s)$  die Ausdrücke

$$T_{r,y}(s) = \frac{z_G(s) z_R(s)}{z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)} \quad (4.18)$$

und

$$T_{d,y}(s) = \frac{z_{G_d}(s) n_R(s) n_G(s)}{(z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)) n_{G_d}(s)}. \quad (4.19)$$

Durch geeigneten Entwurf des Reglers  $R(s)$  kann also für eine instabile Strecke  $G(s)$  ( $n_G(s)$  hat zumindest eine Nullstelle  $s_i$  mit  $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$ ) eine stabile Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  (alle Nullstellen von  $z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)$  liegen in der linken offenen  $s$ -Halbebene) gefunden werden. Damit die Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}(s)$  BIBO-stabil ist, muss weiters gelten, dass alle Nullstellen von  $n_{G_d}(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Nullstellen von  $n_G(s)$  sind. An dieser Stelle ist es wesentlich anzumerken, dass der geschlossene Kreis einer stabilen Strecke auch instabil werden kann. Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.8 mit

$$G(s) = \frac{s-4}{s^2+s+1}, \quad G_d(s) = 1 \quad \text{und} \quad R(s) = 1. \quad (4.20)$$

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall die Führungsübertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{s-4}{s^2+2s-3} \quad (4.21)$$

mit den Polstellen bei 1 und -3 nicht BIBO-stabil ist. Als Konsequenz ist zu beachten, dass die Rückkopplung *immer* mit dem *Stabilitätsproblem* verbunden ist.

Für den Regelkreis von Abbildung 4.8 reicht es nun nicht aus, zu fordern, dass die Übertragungsfunktionen von den Eingängen  $r$ ,  $d$  und  $n$  zum Ausgang  $y$  BIBO-stabil sind und damit für alle beschränkten Signale  $r$ ,  $d$  und  $n$  der Regelkreis mit einem beschränkten Ausgangssignal  $y$  antwortet, sondern, dass *sämtliche* im Regelkreis auftretende *interne Größen* beschränkt bleiben. Dies führt nun zum Begriff der *internen Stabilität*.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege den nachfolgenden Betrachtungen der Regelkreis von Abbildung 4.9 zugrunde.

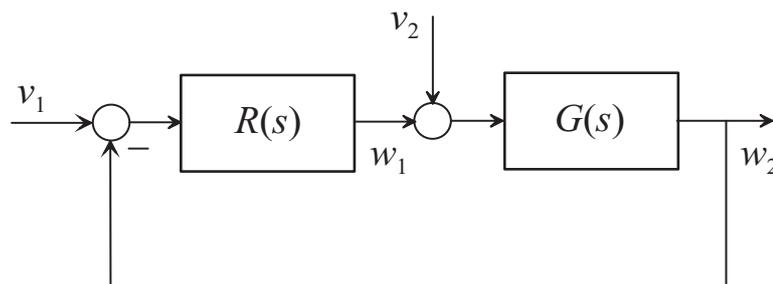


Abbildung 4.9: Zur internen Stabilität.

**Definition 4.1. (Interne Stabilität)** Man nennt einen Regelkreis intern stabil, wenn sämtliche Übertragungsfunktionen im geschlossenen Kreis BIBO-stabil sind, d.h. für den Regelkreis nach Abbildung 4.9 gilt, dass die Übertragungsfunktionen

$$T_{i,j}(s) = \frac{\hat{w}_i}{\hat{v}_j} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (4.22)$$

BIBO-stabil sein müssen.

Zur einfacheren Überprüfung der internen Stabilität lässt sich für den Regelkreis von Abbildung 4.9 folgender Satz angeben:

**Satz 4.1. (Interne Stabilität)** Der Regelkreis von Abbildung 4.9 ist genau dann intern stabil, wenn die zwei Bedingungen

(A)  $1 + R(s)G(s) \neq 0$  für  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  und

(B) im Produkt  $R(s)G(s)$  treten keine Pol/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen  $s_i$  mit  $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$  auf

erfüllt sind.

**Beweis:** siehe Anhang C

**Aufgabe 4.2.** Ist der Regelkreis von Abbildung 4.8 mit

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad G_d(s) = 1 \quad \text{und} \quad R(s) = \frac{s - 1}{s + 2}$$

intern stabil? Berechnen Sie die Führungs- und die Störübertragungsfunktion.

**Ergebnis:** Der Regelkreis ist nicht intern stabil und die Führungs- und die Störübertragungsfunktion lauten

$$T_{r,y}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \quad \text{und} \quad T_{d,y}(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 3}.$$

**Aufgabe 4.3.** Zeigen Sie, dass der Regelkreis von Abbildung 4.8 intern stabil ist, wenn einerseits die Bedingungen von Satz 4.1 erfüllt sind und andererseits sämtliche Polstellen von  $G_d(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von  $G(s)$  sind.

### ad (2) und (3) – Führungs- und Störverhalten:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setze man für die nachfolgenden Betrachtungen im Regelkreis von Abbildung 4.8  $G_d(s) = 1$ , d.h. die Störung  $d$  wirke direkt am Ausgang. Da nahezu jedes physikalische System Tiefpasscharakter aufweist, kann für die Streckenübertragungsfunktion  $G(s)$  vorausgesetzt werden, dass der Zählergrad echt kleiner als der Nennergrad ist (*strictly proper*, Satz 3.6). Da der Regler  $R(s)$  selbst realisierbar ist (Zählergrad kleiner gleich dem Nennergrad), gilt damit für die Übertragungsfunktion des so genannten *offenen Regelkreises*  $L(s) = R(s)G(s)$  die Bedingung

$$|L(I\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad \omega \gg \omega_C. \quad (4.23)$$

Wird nun der Regler  $R(s)$  so entworfen, dass neben der Einhaltung der internen Stabilität die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $L(s) = R(s)G(s)$  die Bedingung

$$|L(I\omega)| \gg 1 \quad \text{für} \quad \omega \ll \omega_C \quad (4.24)$$

erfüllt, dann erkennt man aus (4.15) mit  $G_d(s) = 1$  unmittelbar, dass für die Führungs- und Störübertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \text{und} \quad T_{d,y}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4.25)$$

folgende Tabelle

Frequenzbereich	Offener Kreis	Führungsverhalten	Störverhalten
$\omega \ll \omega_C$	$ L(I\omega)  \gg 1$	$T_{r,y}(I\omega) \approx 1$	$T_{d,y}(I\omega) \approx \frac{1}{L(I\omega)} \approx 0$
$\omega \gg \omega_C$	$ L(I\omega)  \ll 1$	$T_{r,y}(I\omega) \approx L(I\omega)$	$T_{d,y}(I\omega) \approx 1$

gültig ist.

Die Frequenz  $\omega_C$  bezeichnet hier und im Folgenden jene Frequenz, bei der die Betragskennlinie des offenen Regelkreises  $|L(I\omega)|_{\text{dB}}$  die 0-dB-Linie schneidet. Man nennt  $\omega_C$  daher auch *Durchtrittsfrequenz*. Man beachte, dass es in diesem Zusammenhang in der regelungstechnischen Literatur unzählige Definitionen und Begriffe gibt. So wird beispielsweise als *Bandbreite* des Regelkreises jene kleinste Frequenz  $\omega_B$  bezeichnet, bei der die Betragskennlinie der Führungsübertragungsfunktion  $|T_{r,y}(I\omega)|_{\text{dB}}$  erstmals den Wert von -3 dB annimmt. Da die Frequenzen  $\omega_C$  und  $\omega_B$  nahe beieinander liegen, gilt für beide Definitionen, dass im Bereich  $\omega \ll \omega_C$  bzw.  $\omega \ll \omega_B$  der Regelkreis sowohl ein gutes Führungs- als auch ein gutes Störverhalten aufweist. Abbildung 4.10 zeigt die typischen Bode-Diagramme für  $L(s)$ ,  $T_{r,y}(s)$  und  $T_{d,y}(s)$ .

### **Stellgröße:**

Aus den bisherigen Überlegungen könnte man dazu verleitet werden, zu glauben, dass die Bandbreite des Regelkreises durch einen geeigneten Entwurf des Reglers  $R(s)$  beliebig groß gemacht werden kann. Dem wirkt aber entgegen, dass jedes technisch realisierbare Stellglied nur eine begrenzte Stellgröße zur Verfügung stellen kann. Man denke dabei nur an ein Ventil, das nur ganz offen oder ganz geschlossen sein kann, an die Begrenzung einer jeden Spannungsquelle oder an das normierte Tastverhältnis  $u_{T,n}$ ,  $-1 \leq u_{T,n} \leq 1$  vom Antriebsregelkreis von Abbildung 4.2. Betrachtet man nämlich die *Stellgrößenübertragungsfunktion*

$$T_{r,u}(s) = -T_{d,u}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.27)$$

dann erkennt man, dass wenn  $G(I\omega)$  in einem Frequenzbereich in dem  $|L(I\omega)|$  groß sein soll (vergleiche Tabelle (4.26)) Tiefpassverhalten aufweist, entsprechend  $|R(I\omega)|$  groß sein muss.

Dies hat aber zur Konsequenz, dass auch  $|T_{r,u}(I\omega)|$  bzw.  $|T_{d,u}(I\omega)|$  und damit die Stellgröße  $u$  sehr groß wird. *Beim Entwurf eines Reglers muss daher immer ein Kompromiss zwischen Bandbreite und Stellgröße geschlossen werden.* Im Rahmen von Simulationen wird die Begrenzung des Stellgliedes sehr oft als *Begrenzungs- oder Sättigungskennlinie*, wie in Abbildung 4.11 dargestellt, modelliert. Man beachte, dass wenn die Stellgröße in Sättigung geht, der Regelkreis nichtlinear ist und im Allgemeinen nicht mehr mit linearen Methoden allein untersucht werden kann.

**ad (4) – Parameterschwankungen:** Die Abweichung  $\Delta G(s)$  von der nominellen Übertragungsfunktion  $G(s)$  kann in Form von so genannten *Störmodellen* erfasst werden und

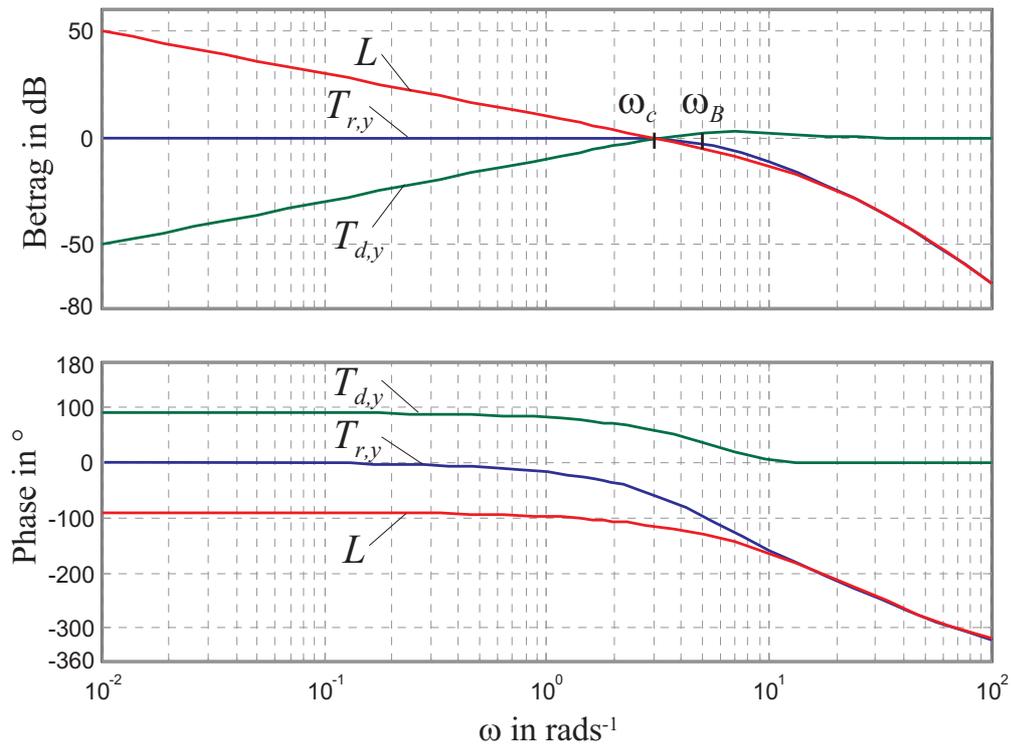


Abbildung 4.10: Typischer Verlauf der Bode-Diagramme des offenen Kreises, der Führungs- und der Störübertragungsfunktion.

basierend darauf kann man die *Robustheit des Regelkreises* gegenüber Parametervariationen untersuchen. Dieser Zugang soll aber im Rahmen dieser einführenden Vorlesung nicht mehr weiter verfolgt werden. Es sei lediglich angemerkt, dass das Verhältnis der relativen Abweichung der Führungsübertragungsfunktion ( $\Delta T_{r,y}/T_{r,y}$ ) zur relativen Abweichung der Streckenübertragungsfunktion ( $\Delta G/G$ ) im Grenzübergang  $\Delta G \rightarrow 0$  als *Sensitivitätsfunktion*

$$S = \lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{r,y}}{T_{r,y}} \frac{G}{\Delta G} = \frac{dT_{r,y}}{dG} \frac{G}{T_{r,y}} = \frac{1}{1 + RG} \quad (4.28)$$

bezeichnet wird.

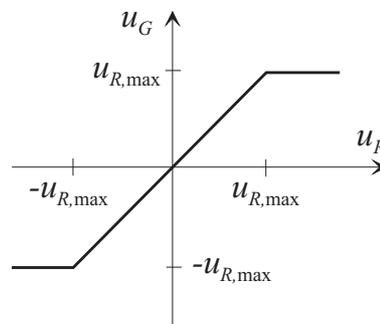


Abbildung 4.11: Sättigungskennlinie.

Wie man erkennt, entspricht die Sensitivitätsfunktion  $S$  der Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}$  des Regelkreises von Abbildung 4.8 mit  $G_d(s) = 1$ . Weiters gilt die Beziehung

$$T_{r,y} + T_{d,y} = \frac{RG}{1 + RG} + \frac{1}{1 + RG} = 1, \quad (4.29)$$

weshalb man  $T_{r,y}$  sehr oft auch *komplementäre Sensitivitätsfunktion*  $T = 1 - S$  nennt.

#### **ad (5) – Sensorrauschen bzw. Messfehler:**

Berechnet man in Abbildung 4.8 die Übertragungsfunktionen  $T_{n,y}(s)$  und  $T_{n,u}(s)$  vom Messrauschen  $n$  zur Ausgangsgröße  $y$  bzw. vom Messrauschen  $n$  zur Stellgröße  $u$ , erhält man

$$T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{und} \quad T_{n,u}(s) = \frac{-R(s)}{1 + R(s)G(s)}. \quad (4.30)$$

Man sieht unmittelbar aus der Beziehung  $T_{n,y}(s) = -T_{r,y}(s)$ , dass gutes Führungsverhalten ( $T_{r,y}(s) \approx 1$ ) auch bedingt, dass das Sensorrauschen oder der Messfehler sich direkt auf den Ausgang auswirkt und nicht unterdrückt werden kann. Weiters gilt die Beziehung  $T_{n,u}(s) = -T_{r,u}(s) = T_{d,u}(s)$ , was zur Konsequenz hat, dass bei großen Verstärkungen der Stellgrößenübertragungsfunktion in einem Frequenzbereich, in dem das Rauschspektrum des Sensorrauschens liegt, das Sensorrauschen entsprechend stark in der Stellgröße verstärkt wird. *Beim Entwurf eines Reglers muss daher immer das Spektrum des Sensorrauschens bei der Wahl der Bandbreite des Regelkreises mitberücksichtigt werden.*

Zusammenfassend ergeben sich für die Regelung mit einem Freiheitsgrad nach Abbildung 4.8 nachfolgende Eigenschaften, wobei entsprechend den bisherigen Überlegungen natürlich nicht alle Forderungen uneingeschränkt erfüllbar sind, sondern immer geeignete den Gegebenheiten angepasste Kompromisse eingegangen werden müssen:

- (1) (✓) Mit Hilfe der Regelung können instabile Strecken stabilisiert werden,
- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  kann mit Hilfe von  $R(s)$  prinzipiell gezielt beeinflusst werden,
- (3) (✓) die Störübertragungsfunktion  $T_{d,y}(s)$  kann durch  $R(s)$  prinzipiell gezielt verändert werden,
- (4) (✓) die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta G(s)$  können in  $T_{r,y}(s)$  prinzipiell unterdrückt werden,
- (5) das Sensorrauschen wirkt sich im Bereich guten Führungsverhaltens direkt auf die Ausgangsgröße aus.

**Simulationsbeispiel:** für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

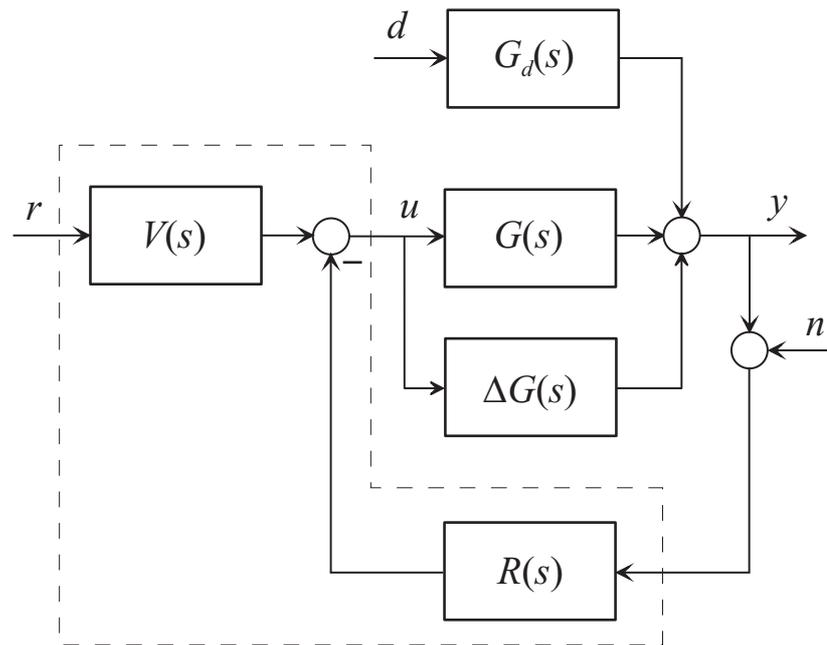


Abbildung 4.12: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

### 4.3.2. Regelung mit zwei Freiheitsgraden

Abbildung 4.12 zeigt einen Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

$$T_{r,y}(s) = \frac{V(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad T_{d,y}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad (4.31)$$

und

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{1}{1 + (G(s) + \Delta G(s))R(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.32)$$

**Aufgabe 4.4.** Zeigen Sie, dass als notwendige Bedingung für die interne Stabilität des Regelkreises von Abbildung 4.12 die Polstellen von  $V(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von  $R(s)$  sein müssen.

Man erkennt direkt durch Vergleich von (4.31) und (4.32) mit (4.15) und (4.16), dass man abgesehen von  $T_{r,y}(s)$  die gleichen Übertragungsfunktionen wie beim Regelkreis mit einem Freiheitsgrad von Abbildung 4.8 erhält. Damit gelten für die Eigenschaften des Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden die gleichen Aussagen wie im vorigen Abschnitt, lediglich das Führungsverhalten kann zusätzlich mit der Übertragungsfunktion  $V(s)$  beeinflusst werden. Generell sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Bandbreite des Regelkreises und damit der Aufwand an Stellgröße  $u(t)$  im Allgemeinen durch das gewünschte Störverhalten festgelegt wird, da die Störung  $d(t)$  per Definition eine nicht beeinflussbare Größe darstellt. Im Gegensatz dazu kann das Führungssignal  $r(t)$  gezielt vorgegeben werden. So soll das Führungssignal  $r(t)$  nie sprungförmig, d.h.  $r(t) = y_{\text{sol}}\sigma(t)$ , auf den Regelkreis

aufgeschaltet werden, obwohl dies oft zum Zwecke der Überprüfung der Dynamik des geschlossenen Kreises so gemacht wird, sondern es soll darauf geachtet werden, dass das Führungssignal hinreichend oft stetig differenzierbar ist.

Dies kann beispielsweise durch Vorschalten eines so genannten Vorfilters  $F(s) = \frac{\hat{r}}{\hat{y}_{soll}}$  oder durch Konstruktion eines geeigneten Führungssignals erreicht werden. In der Antriebstechnik werden beispielsweise häufig so genannte Hochlaufvorgaben der Form

$$r(t) = y_{soll} (1 - \exp(-kt^2)) \quad , \quad k > 0 \quad (4.33)$$

verwendet.

### 4.3.3. Kaskadenregelung

Bei sehr vielen praktischen Regelkreisen, insbesondere in der Antriebstechnik, wird das Konzept der so genannten Kaskadenregelung, wie in Abbildung 4.13 gezeigt, verwendet.

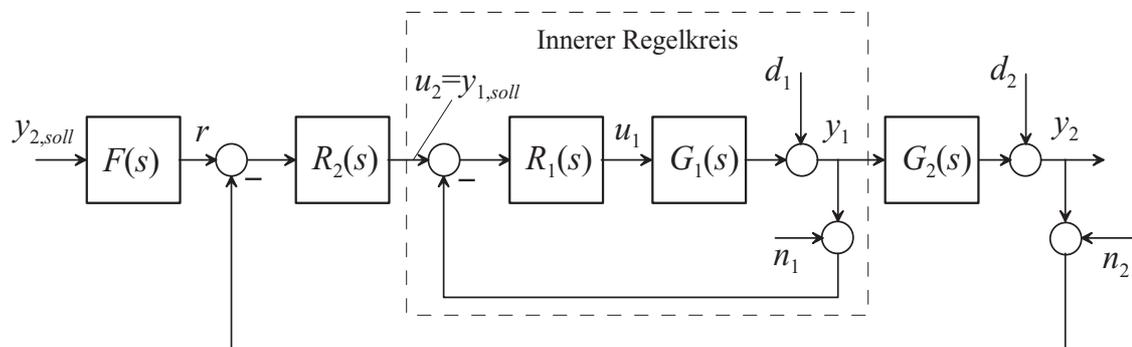


Abbildung 4.13: Kaskadenregelkreis.

Dies setzt natürlich voraus, dass abgesehen von der eigentlichen Ausgangsgröße  $y_2$  (im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_2$ ) auch noch weitere Größe(n)  $y_1$  (im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 beispielsweise der Ankerstrom  $i_A$ ) messbar sind. Dabei wird in einem ersten Schritt der innerste Regelkreis (in Abbildung 4.13  $R_1(s)$ ) so entworfen, dass er eine wesentlich größere Bandbreite (ca. 1 Dekade) als der äußere Regelkreis besitzt. Für den äußeren Regelkreis (in Abbildung 4.13  $R_2(s)$ ) verhält sich dann die Führungsübertragungsfunktion des inneren Regelkreises

$$T_{u_2, y_1}(s) = \frac{R_1(s) G_1(s)}{1 + R_1(s) G_1(s)} \quad (4.34)$$

im interessierenden Frequenzbereich wegen der wesentlich größeren Bandbreite wie eine Durchschaltung  $T_{u_2, y_1}(s) \approx 1$ . Damit kann nun in einem weiteren Schritt sehr einfach der Regler  $R_2(s)$  direkt für die Strecke  $G_2(s)$  entworfen werden.

## 4.4. Stabilitätskriterien

Im Abschnitt 3.6, im Speziellen Satz 3.8, wurde gezeigt, dass eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  genau dann BIBO-stabil ist, wenn alle Pole in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen.

Um dies zu überprüfen, müsste man immer die Nullstellen des Nennerpolynoms von  $G(s)$  berechnen, was bei Polynomen höherer Ordnung nicht immer numerisch zuverlässig sein muss. Weiters ist zu beachten, dass man eigentlich nicht an der genauen Lage der Polstellen interessiert ist, sondern lediglich wissen will, ob sie alle in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen oder nicht.

**Definition 4.2. (Hurwitzpolynom)** Man nennt ein Polynom

$$n(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j \quad (4.35)$$

Hurwitzpolynom, wenn alle Nullstellen von  $n(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen bzw. für alle Wurzeln  $s_i, i = 1, \dots, n$ , gilt  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$ .

Mit Hilfe von so genannten *Stabilitätskriterien* kann man nun feststellen, ob ein Polynom ein Hurwitzpolynom ist, ohne dabei die Wurzeln des Polynoms explizit zu berechnen.

#### 4.4.1. Numerisches Verfahren von Routh-Hurwitz

Allen weiteren Betrachtungen liege ein Polynom der Form (4.35) mit reellen Koeffizienten  $a_j, j = 1, \dots, n$ , zugrunde. Da das Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, sind die Nullstellen  $s_i, i = 1, \dots, n$ , entweder reell oder konjugiert komplex. Damit kann unmittelbar anhand der Koeffizienten eines Polynoms eine notwendige Bedingung für ein Hurwitzpolynom angegeben werden.

**Satz 4.2. (Notwendige Bedingung für ein Hurwitzpolynom)** Die Koeffizienten  $a_j, j = 1, \dots, n$ , eines Hurwitzpolynoms  $n(s)$  sind alle von Null verschieden und haben gleiches Vorzeichen. Für ein Polynom zweiter Ordnung ist diese Bedingung auch hinreichend.

**Aufgabe 4.5.** Beweisen Sie Satz 4.2.

**Hinweis:** Das Polynom  $n(s)$  von (4.35) lässt sich auch als Produkt

$$n(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

mit den Nullstellen  $s_i, i = 1, \dots, n$ , anschreiben.

Dass Satz 4.2 für Polynome mit einem Grad größer als 2 nur notwendig ist, zeigt nachfolgendes Beispiel

$$n(s) = s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s - 1 + 4I)(s - 1 - 4I) . \quad (4.36)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Hurwitzpolynom  $n(s)$  ist durch das so genannte Routh-Hurwitz Verfahren gegeben.

**Satz 4.3. (Routh-Hurwitz Verfahren)** Ein Polynom  $n(s)$  der Form (4.35) mit den reellen Koeffizienten  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh-Schemas

$s^n$	$a_{01} = a_n$	$a_{02} = a_{n-2}$	$a_{03} = a_{n-4}$	$\dots$	(4.37)
$s^{n-1}$	$a_{11} = a_{n-1}$	$a_{12} = a_{n-3}$	$a_{13} = a_{n-5}$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$s^1$	$a_{n-1,1}$	$0$	$0$	$\dots$	
$s^0$	$a_{n,1}$				
	<i>Pivotspalte</i>				

mit

$$a_{ij} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad \text{und } j = 1, 2, \dots \quad (4.38)$$

von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

Auf einen Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet, er ist aber in der angeführten Literatur nachzulesen.

Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.14 mit

$$R(s) = \frac{K}{s} \quad \text{und} \quad G(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} . \quad (4.39)$$

Man bestimme den Wertebereich für  $K$  so, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

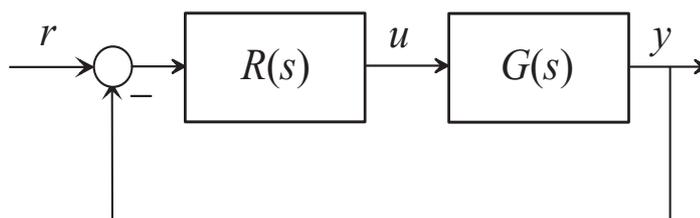


Abbildung 4.14: Einfacher Regelkreis.

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet

$$T_{r,y}(s) = \frac{RG}{1 + RG} = \frac{9K}{s^3 + 3s^2 + 9s + 9K} . \quad (4.40)$$

Nach Satz 4.2 muss notwendigerweise für den Parameter  $K$  gelten  $K > 0$ . Eine notwendige und hinreichende Bedingung erhält man gemäß Satz 4.3 über das Routh-Schema:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & 9 & 0 \\
 s^2 & 3 & 9K & 0 \\
 s^1 & \frac{3 \times 9 - 9K \times 1}{3} = 9 - 3K & 0 & \\
 s^0 & \frac{(9 - 3K) \times 9K - 3 \times 0}{9 - 3K} = 9K & & \\
 \hline
 & \text{Pivotspalte} & & 
 \end{array} \quad (4.41)$$

Da alle Elemente der Pivotspalte von Null verschieden sein und gleiches Vorzeichen haben müssen, folgen die Bedingungen

$$9 - 3K > 0 \quad \text{und} \quad 9K > 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 < K < 3. \quad (4.42)$$

**Aufgabe 4.6.** Sind nachfolgende Polynome

$$\begin{aligned}
 n_1(s) &= s^8 + 7s^7 + 4s^6 - s^5 + 7s^4 + 2s^2 + s + 3 \\
 n_2(s) &= s^4 + 9s^3 + 13s^2 + 54s + 40 \\
 n_3(s) &= s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 30s + 40
 \end{aligned}$$

Hurwitzpolynome?

**Ergebnis:** Nur das Polynome  $n_2(s)$  ist ein Hurwitzpolynom.

**Aufgabe 4.7.** Gegeben ist der Regelkreis von Abbildung 4.14 mit

$$R(s) = K \quad \text{und} \quad G(s) = \frac{(s + T)^2}{s^3}.$$

Bestimmen Sie den Wertebereich der Parameter  $K$  und  $T$  so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist. Zeichnen Sie den Wertebereich in der  $(K, T)$ -Ebene.

**Ergebnis:**  $K > 0$  und  $(2K - T)T > 0$

#### 4.4.2. Graphisches Verfahren: Kriterium von Michailow

Unter der *stetigen Winkeländerung*  $\Delta \arg(G(I\omega))$  einer rationalen Funktion  $G(s)$  versteht man die Änderung von  $\arg(G(I\omega))$ , wenn  $\omega$  den Wertebereich  $-\infty \leq \omega \leq +\infty$  stetig und monoton wachsend durchläuft. Dabei wird die Winkeländerung *gegen den Uhrzeigersinn positiv* gezählt und Sprünge von  $\arg(G(I\omega))$  werden nicht mitberücksichtigt. Abbildung 4.15 zeigt die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s - 1}{s(s^2 + s + 1)}. \quad (4.43)$$

Wenn  $\omega$  stetig von  $-\infty$  bis  $-0$  wächst, so ist die stetige Winkeländerung  $-3\pi/2$ . Der Sprung im  $\arg(G(I\omega))$  beim Übergang von  $-0$  zu  $+0$  wird vereinbarungsgemäß nicht mitgezählt. Von  $+0$  bis  $+\infty$  beträgt die Winkeländerung ebenfalls  $-3\pi/2$ . Es ergibt sich also insgesamt für  $G(s)$  von (4.43) eine stetige Winkeländerung  $\Delta \arg(G(I\omega)) = -3\pi$ .

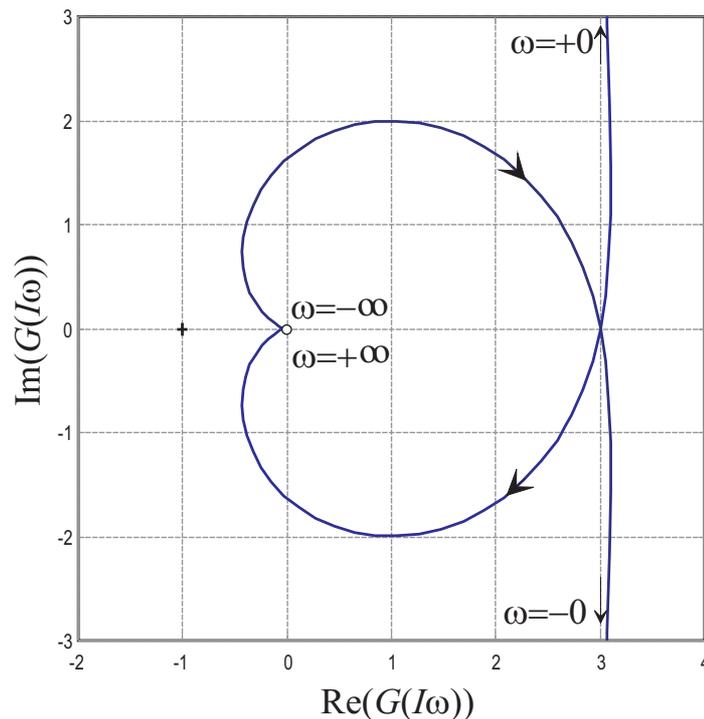


Abbildung 4.15: Ortskurve zur Übertragungsfunktion (4.43).

**Aufgabe 4.8.** Zeigen Sie, dass die stetige Winkeländerung einer rationalen Funktion  $G(s)$  für  $-\infty \leq \omega \leq 0$  immer gleich der stetigen Winkeländerung für  $+0 \leq \omega \leq +\infty$  ist.

**Hinweis:** Es gilt  $\arg(G(I\omega)) = -\arg G(-I\omega)$ .

Das Argument einer rationalen Funktion

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \beta_i)} \quad (4.44)$$

errechnet sich nun in der Form

$$\arg(G(I\omega)) = \arg(K) + \sum_{i=1}^m \arg(I\omega - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \arg(I\omega - \beta_i) \quad (4.45)$$

und damit ergibt sich die stetige Winkeländerung von  $G(s)$  zu

$$\Delta \arg(G(I\omega)) = \sum_{i=1}^m \Delta \arg(I\omega - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \arg(I\omega - \beta_i) . \quad (4.46)$$

Man erkennt also, dass sich die stetige Winkeländerung der rationalen Funktion  $G(s)$  aus den stetigen Winkeländerungen der Faktoren  $(s - s_i)$  zusammensetzt.

Wie man Abbildung 4.16 sofort entnehmen kann, ergibt sich die stetige Winkeländerung von  $(s - s_i)$  zu

$$\Delta \arg(I\omega - s_i) = \begin{cases} \pi & \text{für } \operatorname{Re}(s_i) < 0 \\ 0 & \text{falls } \operatorname{Re}(s_i) = 0 \\ -\pi & \text{falls } \operatorname{Re}(s_i) > 0 \end{cases} . \quad (4.47)$$

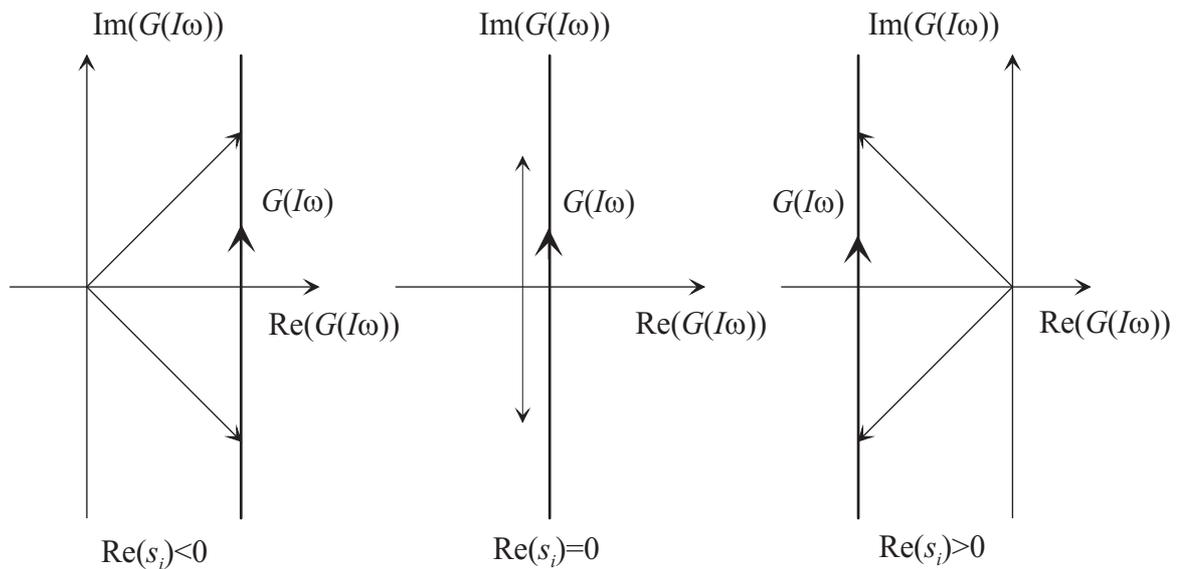


Abbildung 4.16: Stetige Winkeländerung von  $(s - s_i)$ .

Damit lässt sich unmittelbar folgender Satz angeben:

**Satz 4.4. (Kriterium von Michailov)** Ein Polynom  $n(s)$  vom Grad  $n$  ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn

$$\Delta \arg(n(I\omega)) = n\pi \quad (4.48)$$

gilt.

**Aufgabe 4.9.** Beweisen Sie Satz 4.4.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Beziehung (4.47).

**Aufgabe 4.10.** Wenden Sie das Kriterium von Michailov auf die Polynome  $n_1(s)$ ,  $n_2(s)$  und  $n_3(s)$  von Aufgabe 6.20 an.

#### 4.4.3. Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium ist nun auf Regelkreise der Form nach Abbildung 4.17 zugeschnitten. Dabei wird für alle Betrachtungen vorausgesetzt, dass der Regelkreis *nicht degeneriert* ist, d.h. es gilt  $\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) \neq -1$ .

Beim Nyquist-Kriterium wird anhand der Ortskurve des offenen Kreises

$$L(s) = \frac{z_L(s)}{n_L(s)} \quad (4.49)$$

mit den teilerfremden Polynomen  $z_L(s)$  und  $n_L(s)$  die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises

$$T_{r,y}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{z_L(s)}{z_L(s) + n_L(s)} \quad (4.50)$$

untersucht.

Bezeichnet man mit  $N_0(p(s))$ ,  $N_+(p(s))$  und  $N_-(p(s))$  die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $p(s)$  auf der imaginären Achse, in der rechten offenen  $s$ -Halbebene und in der linken offenen  $s$ -Halbebene, dann kann man das Nyquist-Kriterium wie folgt formulieren:

**Satz 4.5. (Nyquist-Kriterium)** Der geschlossene Regelkreis  $T_{r,y}(s)$  nach Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion  $L(s)$  des offenen Kreises nach (4.49) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von  $1 + L(s)$  folgender Bedingung

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi \quad (4.51)$$

genügt.

**Beweis:**  $T_{r,y}(s)$  ist BIBO-stabil  $\Rightarrow$  Bedingung (4.51): Wenn  $T_{r,y}(s)$  BIBO-stabil ist, dann ist  $z_L(s) + n_L(s)$  ein Hurwitzpolynom. Daher gilt für die stetige Winkeländerung von  $1 + L(s)$

$$\Delta \arg\left(1 + \frac{z_L(I\omega)}{n_L(I\omega)}\right) = \Delta \arg(n_L(I\omega) + z_L(I\omega)) - \Delta \arg(n_L(I\omega)) \quad (4.52)$$

und mit Satz 4.4 und (4.47) erhält man damit unmittelbar die Bedingung (4.51).

**Aufgabe 4.11.** Beweisen Sie, dass wenn die Bedingung (4.51) erfüllt ist  $\Rightarrow T_{r,y}(s)$  ist BIBO-stabil.

**Hinweis:** Führen Sie den Beweis durch Widerspruch. ■

Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L(s) = K \frac{2s - 1}{s(s^2 + s + 1)}. \quad (4.53)$$

Für  $K = 1$  entspricht die Ortskurve von  $L(s)$  der von Abbildung 4.15. Es soll mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums der Bereich des Parameters  $K$  so bestimmt werden, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

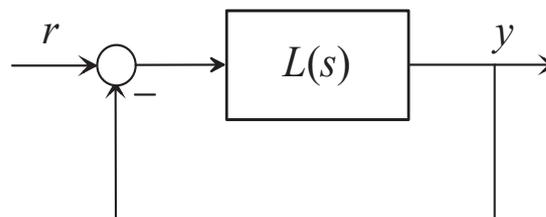


Abbildung 4.17: Geschlossener Regelkreis.

- Im ersten Schritt wird untersucht, ob der geschlossene Regelkreis für  $K = 1$  BIBO-stabil ist. Aus Abbildung 4.15 erkennt man, dass gilt

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = -\pi \quad (4.54)$$

und die Auswertung der Beziehung (4.51) führt zum Wert

$$(\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)) \pi = (\max(1, 3) - 2 + 0) \pi = \pi . \quad (4.55)$$

Da die Ergebnisse von (4.54) und (4.55) unterschiedlich sind, kann man folgern, dass für  $K = 1$  der geschlossene Regelkreis nicht BIBO-stabil ist.

- Aus der Ortskurve von  $L(s)$  ist ersichtlich, dass ein Vergrößern von  $K > 1$  zu keiner Änderung der stetigen Winkeländerung führt und damit dieser Bereich sicherlich auch nicht zu einem BIBO-stabilen geschlossenen Kreis führt.
- Für  $K = -1$  und alle anderen Werte von  $K$ , bei denen die Ortskurve des offenen Kreises den Punkt  $-1$  umschlingt (siehe Abbildung 4.18), ergibt sich eine stetige Winkeländerung von

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = -3\pi . \quad (4.56)$$

Aufgrund von (4.55) folgt auch für diesen Bereich, dass der geschlossene Kreis nicht BIBO-stabil ist. In diesem Zusammenhang beachte man, dass zum Beschriften der Ortskurve folgende Beziehung

$$L(I\omega) = \frac{K(2\omega + I)}{\omega(1 - \omega^2 + I\omega)} = \frac{3 - 2\omega^2}{\omega^4 - \omega^2 + 1}K + I \frac{-3\omega^2 + 1}{(\omega^4 - \omega^2 + 1)\omega}K \quad (4.57)$$

sehr hilfreich ist, denn daraus erkennt man, dass gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \text{Im}(L(I\omega)) = \text{sign}(K) \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\omega \rightarrow -0} \text{Im}(L(I\omega)) = -\text{sign}(K) \infty . \quad (4.58)$$

- Für  $-1/3 < K < 0$  wird der Punkt  $-1$  von der Ortskurve des offenen Kreises nicht mehr umschlungen (siehe Abbildung 4.18) und die zugehörige stetige Winkeländerung lautet

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = \pi , \quad (4.59)$$

womit für diesen Bereich die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises gezeigt ist.

**Aufgabe 4.12.** Gegeben ist der Regelkreis von Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)^2} .$$

Überprüfen Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums, ob der geschlossene Kreis für die Parameter  $K = 0.5$ ,  $5$  und  $50$  BIBO-stabil ist.

**Ergebnis:** Der geschlossene Kreis ist für  $K = 0.5$  BIBO-stabil und für  $K = 5$  und  $K = 50$  nicht BIBO-stabil.

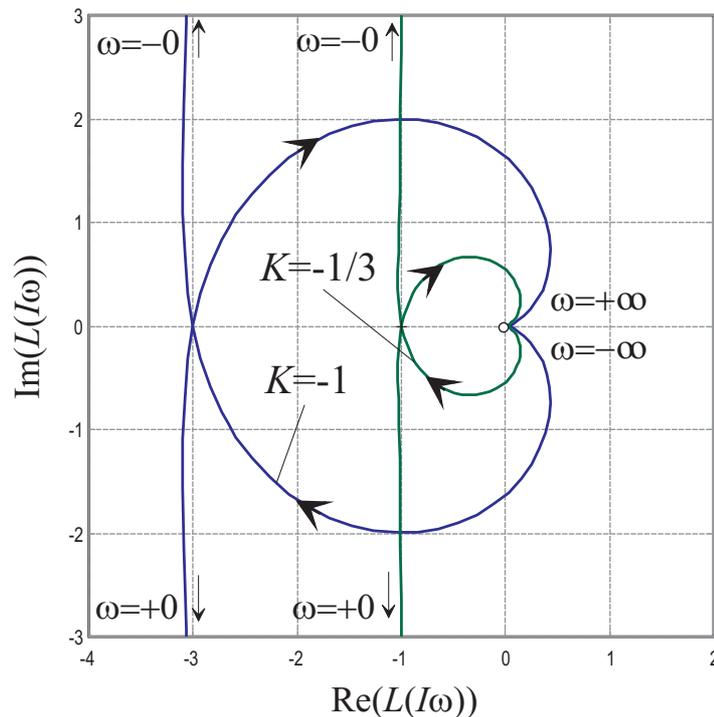


Abbildung 4.18: Ortskurve des offenen Kreises für  $K = -1$  und  $K = -1/3$ .

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Nyquist-Kriterium in einer generalisierten Form auch auf lineare zeitinvariante verteilt-parametrische Systeme, also Systeme mit *transzendenten Übertragungsfunktionen*, angewandt werden kann. Zu dieser Systemklasse gehören unter anderem auch Systeme mit Totzeiten.

Für das im folgenden Kapitel diskutierte Frequenzkennlinienverfahren zum Reglerentwurf im Frequenzbereich wendet man häufig eine modifizierte Version des Nyquist-Kriteriums zum Stabilitätsnachweis des geschlossenen Regelkreises an.

**Satz 4.6. (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung)** Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  in folgender Form

$$L(s) = \frac{V z_L(s)}{s^\rho n_L(s)} \exp(-sT_t) \quad , \quad z_L(0) = n_L(0) = 1 \quad (4.60)$$

mit den teilerfremden Polynomen  $z_L(s)$  und  $s^\rho n_L(s)$  darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (A) Der Verstärkungsfaktor  $V$  und die Totzeit  $T_t$  sind positiv,
- (B)  $\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$ ,
- (C) das Polynom  $n_L(s)$  ist ein Hurwitzpolynom und für  $\rho$  gilt  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ,
- (D) die Betragskennlinie von  $L(j\omega)$  weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$ ) auf bzw. die Ortskurve von  $L(j\omega)$  schneidet den Einheitskreis genau einmal und

(E) im Bereich  $|L(I\omega)|_{dB} \geq 0$  gelte  $-540^\circ < \arg(L(I\omega)) < 180^\circ$  (d.h. die Ortskurve des offenen Kreises  $L(s)$  kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  genau dann BIBO-stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz  $\arg(L(I\omega_C))$  zu  $-\pi$ , die so genannte Phasenreserve  $\Phi$ ,

$$\Phi = \arg(L(I\omega_C)) + \pi \quad (4.61)$$

positiv ist.

Für einen Beweis dieses Satzes sei auf die am Ende angegebene Literatur verwiesen. Abbildung 4.19 zeigt für eine Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$ , die die Voraussetzungen von Satz 4.6 erfüllt, wie man die Phasenreserve  $\Phi$  aus der Ortskurve und dem Bodediagramm bestimmen kann.

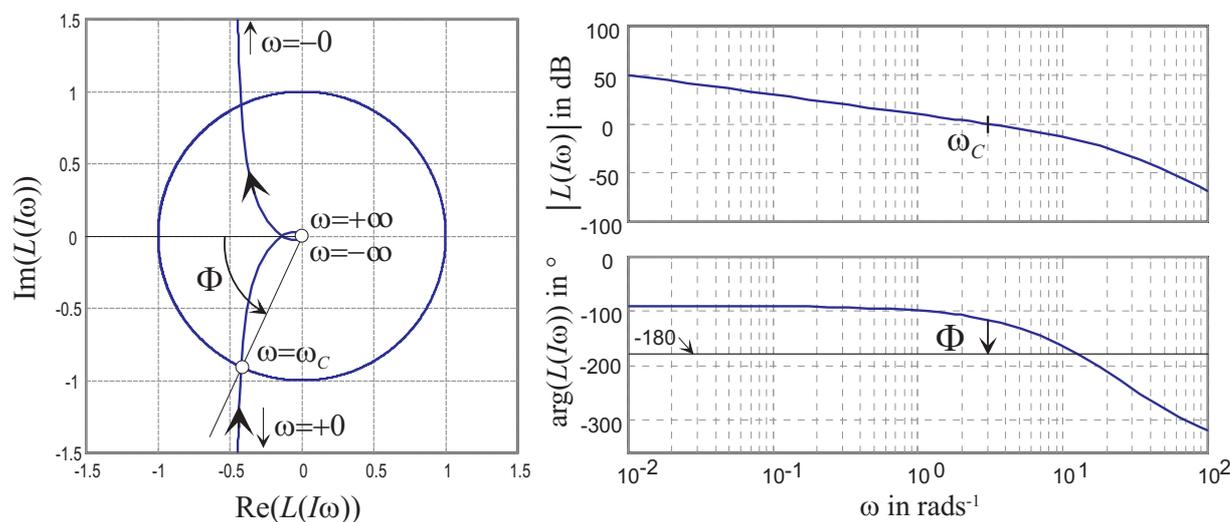


Abbildung 4.19: Zur Bestimmung der Phasenreserve aus der Ortskurve und dem Bode-Diagramm.

## 4.5. Literatur

1. Chen C.-T., *Control System Design*, Pond Woods Press, New York, (1987).
2. Chen C.-T., *Linear System Theory and Design*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, (1984).
3. Cremer M., *Regelungstechnik*, 2.Auflage, Springer, Berlin, (1995).
4. Desoer C.A., Wang Y-T., *On the Generalized Nyquist Stability Criterion*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-25, No.2, pp.187-196, (1980).

5. Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R., *Feedback Control Theory*, MacMillan, New York, (1992).
6. Föllinger O., *Regelungstechnik*, 6.Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, (1990).
7. Hofer A., Gausch F., Schlacher K., *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, (1991).
8. Horn M., Dourdoumas N., *Regelungstechnik*, Pearson Studium, München, (2004).
9. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1 und 2*, Springer, Berlin Heidelberg, (1995).
10. Luenberger D.G., *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1979).
11. Lunze J., *Regelungstechnik 1* (5. Auflage) *und 2* (3. Auflage), Springer, Berlin Heidelberg New York, (2006) und (2005).
12. Reinschke K., *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*, Springer, Berlin Heidelberg, (2006).
13. Rohrs Ch., Melsa J.L., Schultz D.G., *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, (1993).
14. Rugh W.J., *Linear System Theory*, Prentice Hall, New Jersey, (1993).
15. Weinmann A., *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*, Band 1 und 2, 3. Auflage, Springer, Wien New York, (1998).

## 5. DAS FREQUENZKENNLINIENVERFAHREN

Beim so genannten *Frequenzkennlinienverfahren* handelt es sich um ein Reglerentwurfsverfahren im Frequenzbereich. Der Reglerentwurf erfolgt dabei auf Basis von Anforderungen an das Einschwingverhalten der Antworten des geschlossenen Regelkreises auf gewisse ausgewählte Testfunktionen, die dann in Anforderungen an das Bode-Diagramm des offenen Kreises übertragen werden. Dem Frequenzkennlinienverfahren liegt der Regelkreis mit einem Freiheitsgrad von Abbildung 5.1 mit der Führungsgröße  $r(t)$ , der Stellgröße  $u(t)$ , dem Regelfehler  $e(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  zu Grunde.

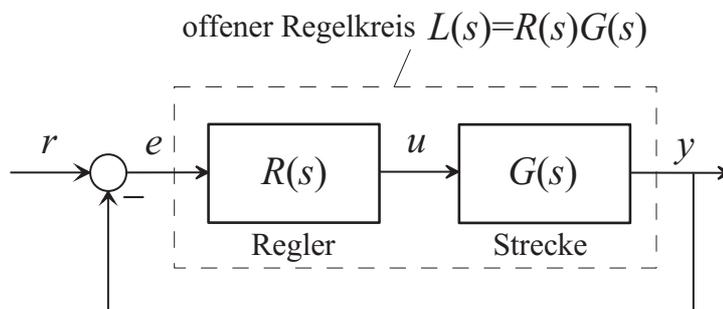


Abbildung 5.1: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad als Basis für das Frequenzkennlinienverfahren.

Ausgangspunkt für das Frequenzkennlinienverfahren ist die Vorgabe von Kenngrößen zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises mit der Übertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{r}} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (5.1)$$

als Antwort auf gewisse Testsignale. Dazu betrachte man den in Abbildung 5.2 dargestellten typischen Verlauf der Sprungantwort  $h(t)$  des geschlossenen Kreises für  $r(t) = \sigma(t)$ . Das Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises wird nun an Hand der drei nachfolgenden Kenngrößen beurteilt:

- (1) Die *Anstiegszeit*  $t_r$  als Maß für die Schnelligkeit (Dynamik),
- (2) die *Überschwingweite*  $M$  oder das *prozentuelle Überschwingen*  $\ddot{u} = (M - 1) 100$  als Maß für den Dämpfungsgrad (Dynamik) sowie
- (3) die *bleibende Regelabweichung*  $e_\infty$  als Maß für die stationäre Genauigkeit.

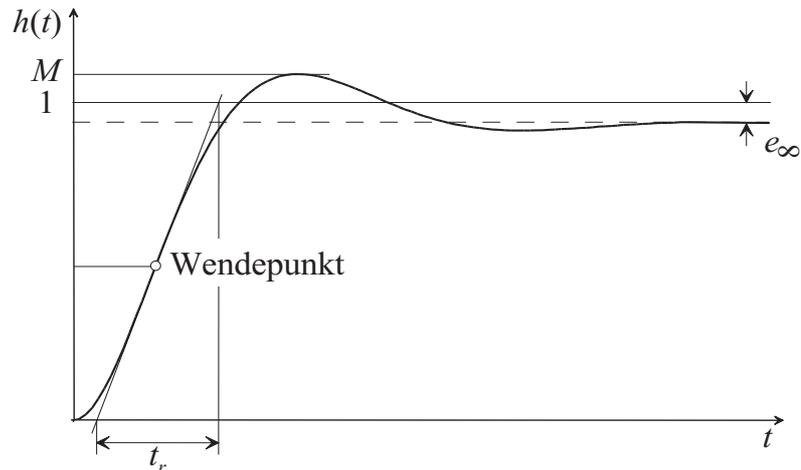


Abbildung 5.2: Kenngrößen der Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Diese *Kenngrößen des zeitlichen Verhaltens* der Sprungantwort des geschlossenen Kreises können nun über *empirische Näherungsbeziehungen* mit dem *Frequenzgang des offenen Kreises*  $L(I\omega)$  in Zusammenhang gebracht werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  in der Form (4.60) angegeben werden kann und die Bedingungen von Satz 4.6 erfüllt.

- (1) Die *Anstiegszeit*  $t_r$  hängt mit der *Durchtrittsfrequenz*  $\omega_C$  über die Näherungsbeziehung

$$\omega_C t_r \approx 1.5 \quad (5.2)$$

zusammen. Da vorausgesetzt wurde, dass der Amplitudengang von  $L(s)$  nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie aufweist, trennt die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  jene Frequenzen, die vom offenen Regelkreis verstärkt werden, von jenen, die vom offenen Regelkreis abgeschwächt werden (zur Erläuterung siehe auch Abbildung 4.10). Damit ist, wie bereits im vorigen Kapitel besprochen, die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  ein Maß für die Bandbreite des offenen Kreises und bei steigendem  $\omega_C$  wird dementsprechend auch die Dynamik des geschlossenen Kreises schneller.

- (2) Das *prozentuelle Überschwingen*  $\ddot{u}$  kann über die empirische Näherungsbeziehung

$$\Phi[^\circ] + \ddot{u}[\%] \approx 70 \quad (5.3)$$

mit der Phasenreserve  $\Phi$  von (4.61) in Verbindung gebracht werden (siehe auch Abbildung 4.19). Nach Satz 4.6 ist die Phasenreserve  $\Phi$  ein Maß für den Abstand zur Stabilitätsgrenze. Dies hat zur Konsequenz, dass eine Verminderung der Phasenreserve  $\Phi$  eine Zunahme der Schwingneigung bzw. des Überschwingens mit sich bringt.

Um diese Argumentation zu unterstreichen, berechne man den Betrag der Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}(s)$  von (5.1) an der Stelle  $s = I\omega_C$

$$|T_{r,y}(I\omega_C)| = \frac{|L(I\omega_C)|}{|1 + L(I\omega_C)|} = \frac{|-\cos(\Phi) - I \sin(\Phi)|}{|1 - \cos(\Phi) - I \sin(\Phi)|} = \frac{1}{2 \left| \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right|} \quad (5.4)$$

Man erkennt, dass wegen

$$\lim_{\Phi \rightarrow 0} |T_{r,y}(I\omega_C)| = \infty \quad (5.5)$$

der geschlossene Kreis  $T_{r,y}(s)$  für  $\Phi = 0$  ein konjugiert komplexes Polpaar bei  $\pm I\omega_C$  aufweist und damit die Sprungantwort ungedämpft schwingt.

**Aufgabe 5.1.** Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$L(I\omega_C) = -\cos(\Phi) - I \sin(\Phi)$$

mit der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  und der Phasenreserve  $\Phi$  gilt.

(3) Die bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) \quad (5.6)$$

steht nun direkt mit dem *Verstärkungsfaktor*  $V$  der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  in Verbindung. Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist, kann für (5.6) unmittelbar der Endwertsatz der Laplace-Transformation angewandt werden, und man erhält für  $e_\infty$  die Beziehung

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \hat{r}(s) . \quad (5.7)$$

Setzt man für  $L(s)$  in (5.7) die Beziehung (4.60)

$$L(s) = \frac{V z_L(s)}{s^\rho n_L(s)} \exp(-sT_t), \quad z_L(0) = n_L(0) = 1, \quad T_t > 0 \quad \text{und} \quad \rho \in \{0, 1, 2\} \quad (5.8)$$

ein, dann folgt  $e_\infty$  zu

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^\rho n_L(s)}{s^\rho n_L(s) + V z_L(s) \exp(-sT_t)} \hat{r}(s) . \quad (5.9)$$

Die bleibende Regelabweichung  $e_\infty$  für die beiden Testsignale  $r(t) = \sigma(t)$  und  $r(t) = t$  jeweils für  $\rho \in \{0, 1\}$  sind nachfolgender Tabelle

$$r(t) = \sigma(t) \quad \text{bzw.} \quad \hat{r}(s) = \frac{1}{s} : \quad \begin{cases} \rho = 0 & \Rightarrow & e_\infty = \frac{1}{1+V} \\ \rho = 1 & \Rightarrow & e_\infty = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$r(t) = t \quad \text{bzw.} \quad \hat{r}(s) = \frac{1}{s^2} : \quad \begin{cases} \rho = 0 & \Rightarrow & e_\infty = \infty \\ \rho = 1 & \Rightarrow & e_\infty = \frac{1}{V} \end{cases}$$

zu entnehmen.

**Aufgabe 5.2.** Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung  $e_\infty$  für die beiden Testsignale  $r(t) = \sigma(t)$  und  $r(t) = t$  für  $\rho = 2$ .

**Ergebnis:**

$$\rho = 2 : \begin{cases} r(t) = \sigma(t) & \Rightarrow e_\infty = 0 \\ r(t) = t & \Rightarrow e_\infty = 0 \end{cases}$$

Man erkennt also aus (5.9) und (5.10), dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  mindestens eine einfache Polstelle bei  $s = 0$  ( $\rho \geq 1$ ) haben muss, damit die bleibende Regelabweichung zufolge eines Eingangssprunges  $r(t) = \sigma(t)$  Null ist. Analog dazu muss  $L(s)$  mindestens eine doppelte Polstelle bei  $s = 0$  ( $\rho \geq 2$ ) haben, damit die bleibende Regelabweichung bei einer rampenförmigen Eingangsgröße  $r(t) = t$  Null wird.

Man beachte, dass die empirischen Näherungsbeziehungen (5.2) und (5.3) für eine Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises vom Typ

$$T_{r,y}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2}, \quad T > 0 \quad \text{und} \quad 0 < \xi < 1 \quad (5.11)$$

mit der zugehörigen Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L(s) = \frac{1}{sT(2\xi + sT)} \quad (5.12)$$

auch exakt hergeleitet werden können. Lösen Sie dazu nachfolgende Aufgaben:

**Aufgabe 5.3.** Berechnen Sie die Steigung  $\Delta t_W$  der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (5.11) am Wendepunkt (siehe Abbildung 5.2).

**Ergebnis:**

$$\Delta t_W = \frac{1}{T} \exp \left( \frac{-\arctan \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Anstiegszeit  $t_r$  gilt  $t_r = 1/\Delta t_W$ . Berechnen Sie weiters allgemein die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  für  $L(s)$  von (5.12).

**Ergebnis:**

$$\omega_C = \frac{1}{T} \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$$

Zeichnen Sie das Produkt  $\omega_C t_r$  als Funktion des Dämpfungsgrades  $\xi$  im Bereich  $0.5 \leq \xi \leq 0.8$ .

**Aufgabe 5.4.** Berechnen Sie das Maximum  $M$  der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (5.11) (siehe Abbildung 5.2).

**Ergebnis:**

$$M = 1 + \exp \left( -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

Bestimmen Sie weiters allgemein die Phasenreserve  $\Phi$  für  $L(s)$  von (5.12).

**Ergebnis:**

$$\Phi = \arctan \left( \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}} \right)$$

Zeichnen Sie den Ausdruck

$$\underbrace{(M - 1) 100}_{\ddot{u}[\%]} + \Phi [^\circ]$$

als Funktion des Dämpfungsgrades  $\xi$  im Bereich  $0.5 \leq \xi \leq 0.8$ .

Es hat sich nun gezeigt, dass die *empirischen Näherungsbeziehungen* (5.2) und (5.3) auch für Systeme höherer Ordnung sinnvoll sind, insbesondere dann, wenn die Sprungantwort des geschlossenen Kreises in erster Näherung durch ein konjugiert komplexes Polpaar bestimmt ist.

Damit lässt sich die *Vorgangsweise beim Reglerentwurf nach dem Frequenzkennlinienverfahren* wie folgt angeben:

- (A) Zu einer gegebenen Streckenübertragungsfunktion  $G(s)$  müssen die Kenngrößen des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises ( $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$ ) spezifiziert werden.
- (B) Die Kenngrößen  $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$  werden mit Hilfe der Beziehungen (5.2), (5.3) und (5.9) in Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises  $L(I\omega)$  übersetzt.
- (C) Ein Regler  $R(s)$  muss so gewählt werden, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist und die Forderungen von (B) erfüllt werden. Erfüllt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s) = R(s)G(s)$  die Bedingungen von Satz 4.6, dann kann die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der Phasenreserve  $\Phi$  beurteilt werden, anderenfalls muss man das Nyquistkriteriums von Satz 4.5 anwenden.
- (D) Um ein kriechendes Einlaufen der Sprungantwort in den stationären Endwert zu vermeiden, soll in (C) der Regler  $R(s)$  so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  die Betragskennlinie von  $L(s)$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Qualität des Entwurfes ist immer durch Simulation zu überprüfen, insbesondere auch deshalb, weil das Verfahren sich auf empirische Formeln stützt. Sind die Ergebnisse nicht zufriedenstellend, dann muss man sich die Frage stellen, ob die Anforderungen von (A) überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob ein anderer Regler  $R(s)$  von (C) die Situation verbessern würde.
- (F) Die Begrenzung der Stellgröße  $u(t)$ , die bei jedem technisch relevanten Prozess vorhanden ist, kann im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht systematisch berücksichtigt werden. Sollte sich bei der Simulation herausstellen, dass man zu viel Stellgröße benötigt, dann muss man die Anforderungen in (A) entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 4.3.1 verändern, also die Anstiegszeit  $t_r$  vergrößern. Im

Rahmen einer Führungsregelung sollte auf keinen Fall ein Sprung sondern immer ein hinreichend glattes Signal als Führungsgröße verwendet werden (man wiederhole dazu auch die Überlegungen von Abschnitt 4.3.2).

Für die im Punkt (C) angesprochene geeignete Wahl des Reglers  $R(s)$  soll in den drei folgenden Abschnitten exemplarisch gezeigt werden, wie und unter welchen Voraussetzungen man systematisch einen PI-Regler, einen Lead-Lag-Regler und einen Kompensationsregler entwerfen kann.

## 5.1. PI-Reglerentwurf

(A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{5}{1 + 2 \times 0.707s + s^2} \quad (5.13)$$

Entwurfsvorgaben:  $t_r = 3 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 10 \%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

(B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises  $L(I\omega)$ :  $\omega_C = 0.5 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\Phi = 60^\circ$  und der offene Kreis muss mindestens eine einfache Polstelle bei  $s = 0$  haben.

(C) Als Regler wird ein PI-Regler der Form

$$R(s) = \frac{V_I(1 + sT_I)}{s} \quad (5.14)$$

gewählt. Im ersten Schritt wird das Bode-Diagramm aller bekannten Terme des offenen Kreises  $L(s) = R(s)G(s)$ , also

$$L_1(s) = \frac{5}{s(1 + 2 \times 0.707s + s^2)} \quad (5.15)$$

gezeichnet, siehe Abbildung 5.3.

An der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C = 0.5$  errechnet sich das Argument von  $L_1(I\omega_C)$  zu  $\arg(L_1(I\omega_C)) = -133.3^\circ$ . Damit muss wegen  $\Phi = 60^\circ$  mit Hilfe des Linearterms im Zähler des PI-Reglers  $(1 + sT_I)$  die Phase um  $13.3^\circ$  angehoben werden. Aus dieser Bedingung

$$\arg(1 + I\omega_C T_I) = \arctan(\omega_C T_I) = 13.3 \frac{\pi}{180} \quad (5.16)$$

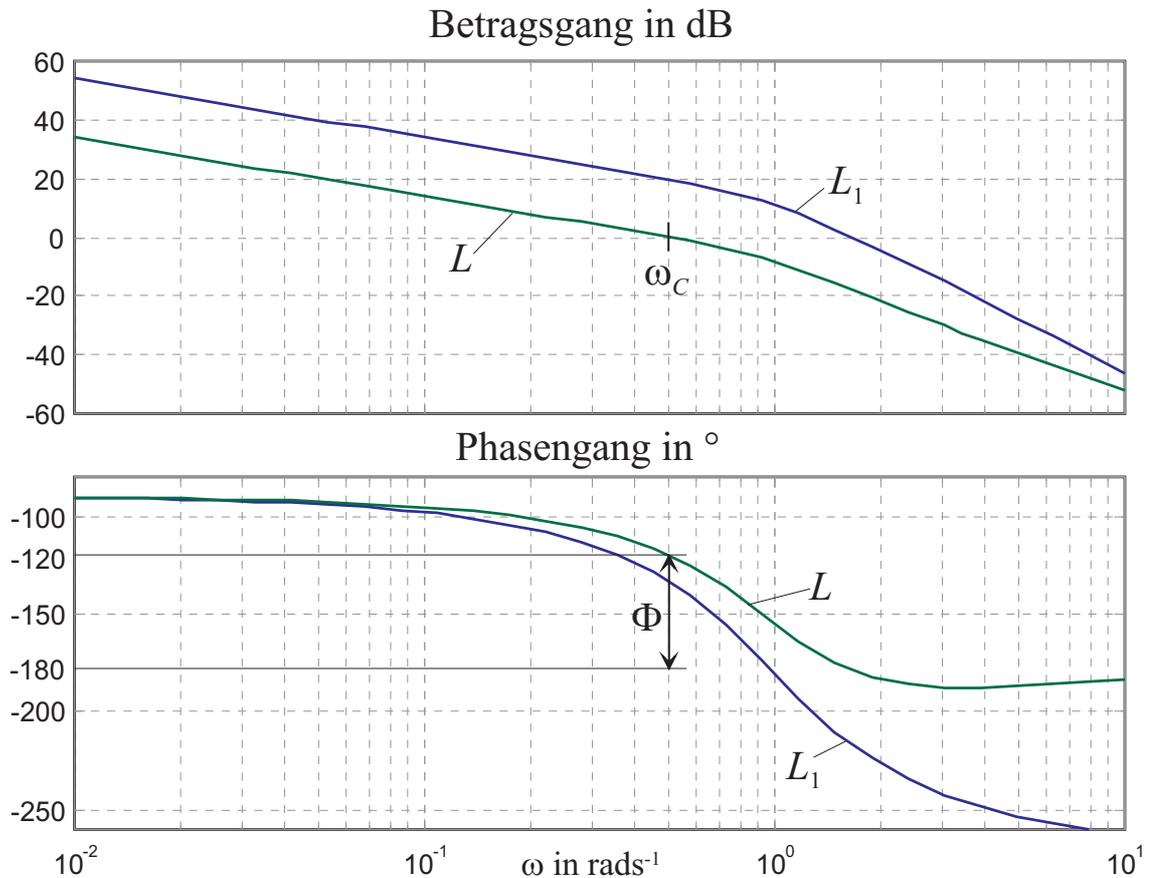
folgt  $T_I$  zu  $T_I = 0.47$ .

In einem zweiten Schritt wird  $V$  so berechnet, dass der Amplitudengang bei  $\omega_C$  die 0-dB-Linie schneidet, also die Bedingung

$$V_I \left| \frac{5(1 + 0.47I\omega_C)}{I\omega_C(1 - \omega_C^2 + I2 \times 0.707\omega_C)} \right| = 1 \quad (5.17)$$

erfüllt ist. Aus (5.17) erhält man sofort  $V_I = 0.1$ . Der PI-Regler lautet daher

$$R(s) = \frac{0.1(1 + 0.47s)}{s} \quad (5.18)$$

Abbildung 5.3: Bode-Diagramme des offenen Kreises  $L_1(s)$  und  $L(s)$ .

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises  $L(s)$  von Abbildung 5.3 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von  $L(s)$  um die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die zugehörige Sprungantwort des geschlossenen Kreises von Abbildung 5.4 zeigt, dass die Entwurfsanforderungen recht gut erfüllt werden.
- (F) In diesem Beispiel wurden an die Stellgröße keine Anforderungen gestellt.

Es sei noch anzumerken, dass die Vorgangsweise, zuerst die Phase an der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  mit dem Linearterm des PI-Reglers  $(1 + sT_I)$  einzustellen und anschließend mit  $V_I$  den Betrag zu korrigieren, insofern Sinn macht, als der Verstärkungsfaktor  $V_I$  des PI-Reglers zwar den Betrag aber nicht die Phase ändert.

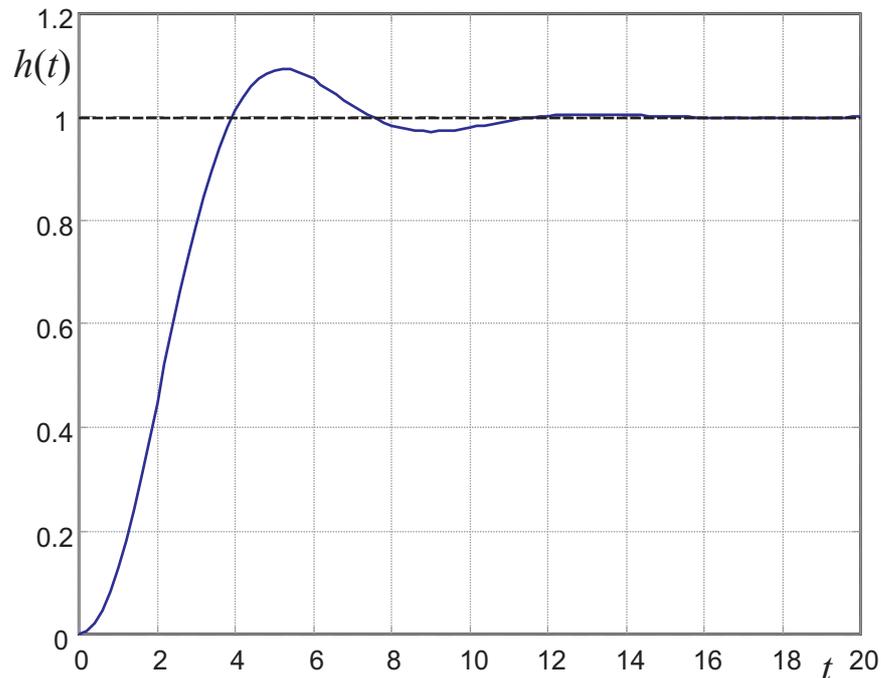


Abbildung 5.4: Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

## 5.2. Lead-Lag-Reglerentwurf

(A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1.8 \left( \frac{s}{1.8} + 1 \right)}{s \left( 1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left( \frac{s}{2.8} \right)^2 \right)} \quad (5.19)$$

Entwurfsvorgaben:  $t_r = 0.1 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 20 \%$  und  $e_\infty|_{r(t)=t} = 0.01$

(B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises  $L(I\omega)$ :  $\omega_C = 15 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\Phi = 50^\circ$  und der Verstärkungsfaktor  $V_L$  des offenen Kreises muss nach (5.10) den Wert

$$V_L = \frac{1}{e_\infty} = 100 \quad (5.20)$$

annehmen. Damit errechnet sich unmittelbar der Verstärkungsfaktor des Reglers zu

$$V_R = V_L/1.8 = 55.56 . \quad (5.21)$$

(C) Berechnet man nun Betrag und Phase von  $L_1(I\omega) = V_R G(I\omega)$  an der Stelle  $\omega = \omega_C$ , dann erhält man

$$|L_1(I\omega_C)| = 1.93 \quad \text{und} \quad \arg(L_1(I\omega_C)) = -169.65^\circ . \quad (5.22)$$

Man erkennt also, dass der Betrag gesenkt und die Phase angehoben werden muss. Da der Verstärkungsfaktor  $V_L$  durch die Forderung an die bleibende Regelabweichung fixiert ist, kann nicht die gleiche Vorgangsweise wie im vorigen Abschnitt beim

PI-Reglerentwurf gewählt werden, sondern man muss in diesem Fall einen Lead-Lag-Regler entwerfen. Dazu wird in einem ersten Schritt ein Lead-Regler so bestimmt, dass die Phase an der Durchtrittsfrequenz um  $\Delta\varphi = 39.65^\circ + 10^\circ$  angehoben wird. Die Phase wird deshalb um zusätzliche  $10^\circ$  angehoben, da bei der nachfolgenden Betragsabsenkung durch ein Lag-Glied auch die Phase wieder abgesenkt wird.

Das Lead-Glied mit der Übertragungsfunktion (siehe auch 3.150)

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\eta T} \quad , \quad 0 < \eta < 1 \quad (5.23)$$

hat nach (3.154) und (3.155) an der Stelle

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\eta}T} \quad (5.24)$$

die maximale Phasenhebung  $\varphi_{\max}$  von

$$\varphi_{\max} = \arg(R_{Lead}(I\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}) \quad (5.25)$$

Legt man nun die Durchtrittsfrequenz genau an die Stelle der maximalen Phasenhebung, also  $\omega_{\max} = \omega_C$ , dann folgt aus (5.25)

$$\eta = 1 + 2 \tan(\Delta\varphi) \left( \tan(\Delta\varphi) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi) + 1} \right) = 0.135 \quad (5.26)$$

bzw. mit (5.24) gilt

$$T = \frac{1}{\sqrt{\eta}\omega_C} = 0.1814 \quad (5.27)$$

Das Lead-Glied hat demnach die Übertragungsfunktion

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} \quad (5.28)$$

Eine erneute Berechnung des offenen Kreises führt zu der Übertragungsfunktion

$$L_2(s) = V_R G(s) R_{Lead}(s) = 55.56 \frac{1.8 \left(\frac{s}{1.8} + 1\right)}{s \left(1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left(\frac{s}{2.8}\right)^2\right)} \frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} \quad (5.29)$$

Der Betrag und die Phase von  $L_2(I\omega)$  an der Stelle  $\omega = \omega_C$  ergibt sich zu

$$|L_2(I\omega_C)| = 5.252 \quad \text{und} \quad \arg(L_2(I\omega_C)) = -120^\circ \quad (5.30)$$

Im nächsten Schritt muss nun an der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  der Betrag um  $\Delta a = 1/5.252 = 0.19$  und die Phase um  $\Delta\varphi = -10^\circ$  gesenkt werden. Dazu wähle man ein Lag-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\eta T} \quad , \quad \eta > 1 \quad (5.31)$$

Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \arg(R_{Lag}(I\omega_C)) &= \arctan(\omega_C T) - \arctan(\omega_C \eta T) = \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_C T - \eta \omega_C T}{1 + \eta \omega_C^2 T^2}\right) = \Delta\varphi \end{aligned} \quad (5.32)$$

und

$$|R_{Lag}(I\omega_C)| = \frac{\sqrt{1 + \omega_C^2 T^2}}{\sqrt{1 + \eta^2 \omega_C^2 T^2}} = \Delta a \quad (5.33)$$

folgen für  $T$  und  $\eta$  die allgemeinen Beziehungen

$$T = \frac{\Delta a \sqrt{1 + \tan(\Delta\varphi)^2} - 1}{\omega_C \tan(\Delta\varphi)} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\omega_C T - \tan(\Delta\varphi)}{\omega_C T (1 + \omega_C T \tan(\Delta\varphi))} \quad (5.34)$$

bzw. für obiges Beispiel  $T = 0.305$  und  $\eta = 5.37$ .

Damit lautet die Übertragungsfunktion des Lag-Reglers

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + 0.305s}{1 + 1.638s} \quad (5.35)$$

Fasst man (5.21), (5.28) und (5.35) zusammen, dann ergibt sich die Reglerübertragungsfunktion zu

$$R(s) = V_R R_{Lead}(s) R_{Lag}(s) = 55.56 \left( \frac{1 + 0.1814s}{1 + 0.0245s} \right) \left( \frac{1 + 0.305s}{1 + 1.638s} \right) \quad (5.36)$$

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises  $L(s)$  von Abbildung 5.5 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von  $L(s)$  um die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Sprung- sowie die Rampenantwort des geschlossenen Kreises sind Abbildung 5.6 zu entnehmen.
- (F) In diesem Beispiel wurden an die Stellgröße keine Anforderungen gestellt.

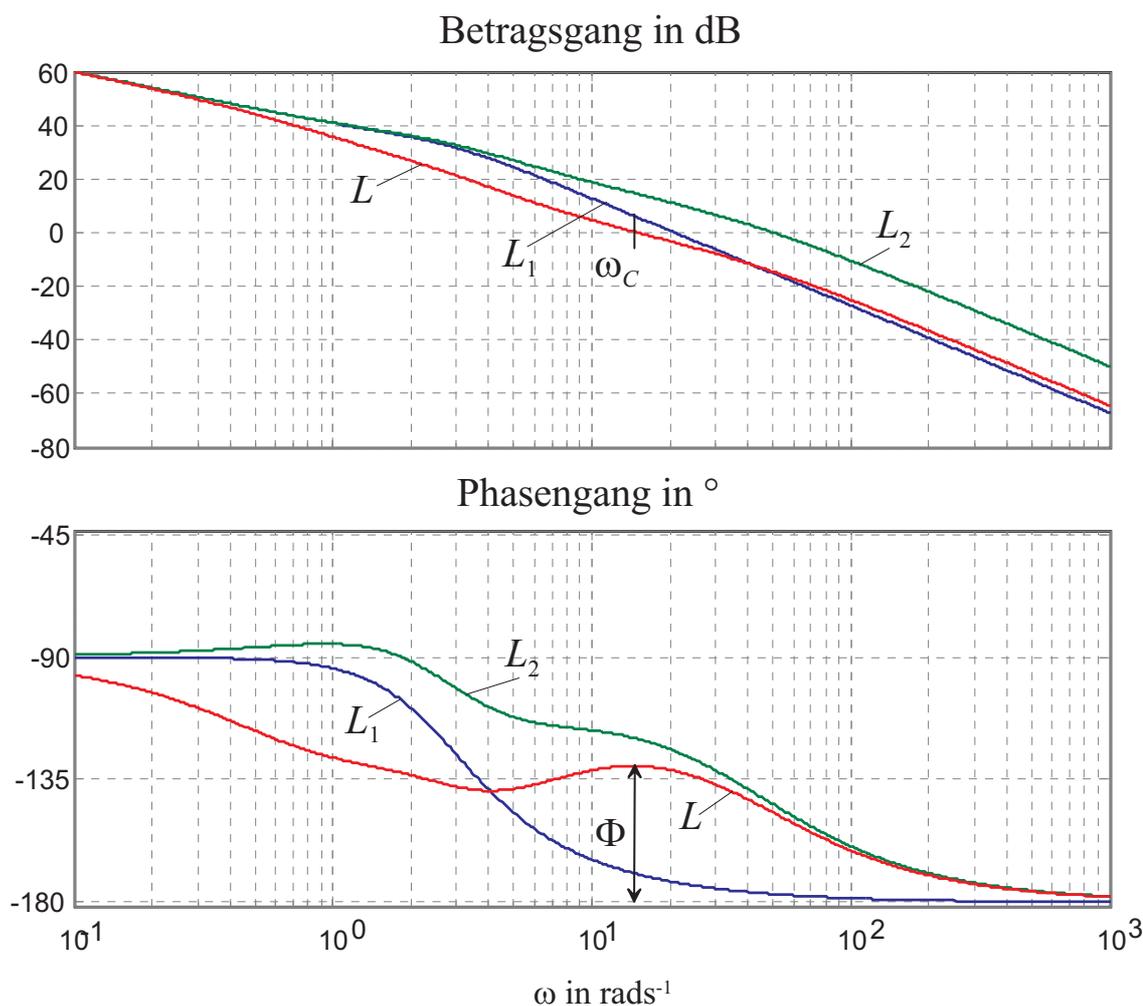
**Aufgabe 5.5.** Berechnen Sie die Beziehungen für  $T$  und  $\eta$  von (5.34).

### 5.3. Kompensationsreglerentwurf

- (A) Als Streckenübertragungsfunktion betrachte man die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion (siehe auch (4.8))

$$G_{u_{T,n},\omega_2}(s) = \frac{222.22}{\left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)} \quad (5.37)$$

Entwurfsvorgaben:  $t_r = 0.5$  s,  $\ddot{u} = 5$  %,  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  und  $|u_{T,n}| \leq 1$  für  $r(t) = 100\sigma(t)$

Abbildung 5.5: Bode-Diagramme des offenen Kreises  $L_1(s)$ ,  $L_2(s)$  und  $L(s)$ .

- (B) Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Kreises  $L(I\omega)$ :  $\omega_C = 3 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\Phi = 65^\circ$  und der offene Kreis muss mindestens eine einfache Polstelle bei  $s = 0$  haben
- (C) Als Regler wird in diesem Fall ein so genannter Kompensationsregler der Form

$$R(s) = \frac{V_R \left( 1 + 2 \times 0.138 \left( \frac{s}{1.82} \right) + \left( \frac{s}{1.82} \right)^2 \right)}{s (1 + sT_R)^2} \quad (5.38)$$

gewählt. Im ersten Schritt wird das Bode-Diagramm aller bekannten Terme des offenen Kreises  $L(s) = R(s) G_{uT,n,\omega_2}(s)$ , also

$$L_1(s) = \frac{222.22}{s \left( 1 + \frac{s}{11.17} \right) \left( 1 + \frac{s}{1321.66} \right)} \quad (5.39)$$

gezeichnet, siehe Abbildung 5.7. An der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C = 3$  errechnet sich das Argument von  $L_1(I\omega_C)$  zu  $\arg(L_1(I\omega_C)) = -104.5^\circ$ . Daher muss wegen  $\Phi =$

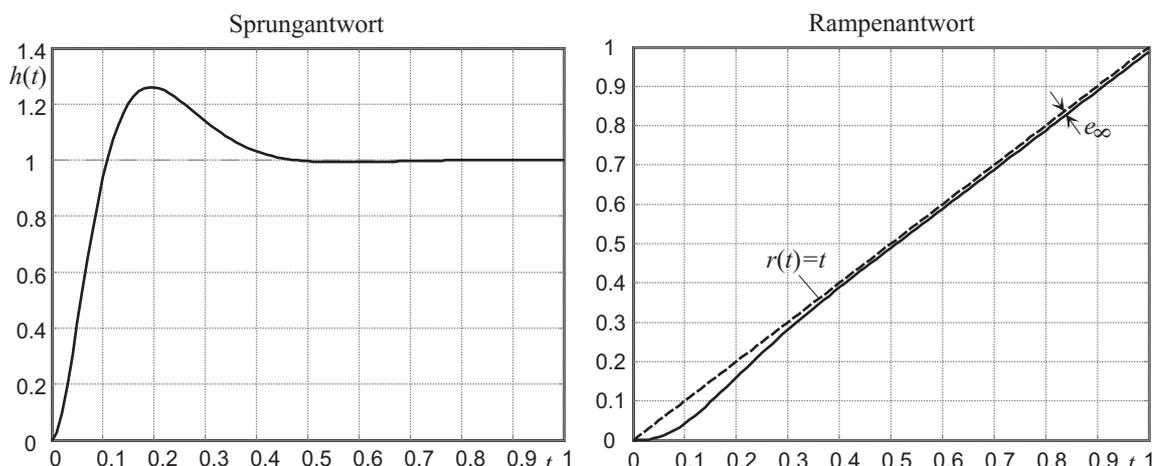


Abbildung 5.6: Sprung- und Rampenantwort des geschlossenen Kreises.

$65^\circ$  mit Hilfe der verbleibenden Terme im Nenner des Reglers  $(1 + sT_R)^2$  die Phase um  $10.5^\circ$  abgesenkt werden. Aus dieser Bedingung errechnet sich  $T_R$  zu

$$T_R = \frac{\tan\left(\frac{10.5}{2} \frac{\pi}{180}\right)}{\omega_C} = 0.0306. \quad (5.40)$$

Die Betragskorrektur an der Durchtrittsfrequenz  $\omega_C = 3$  erfolgt mit Hilfe des Verstärkungsfaktors  $V_R$

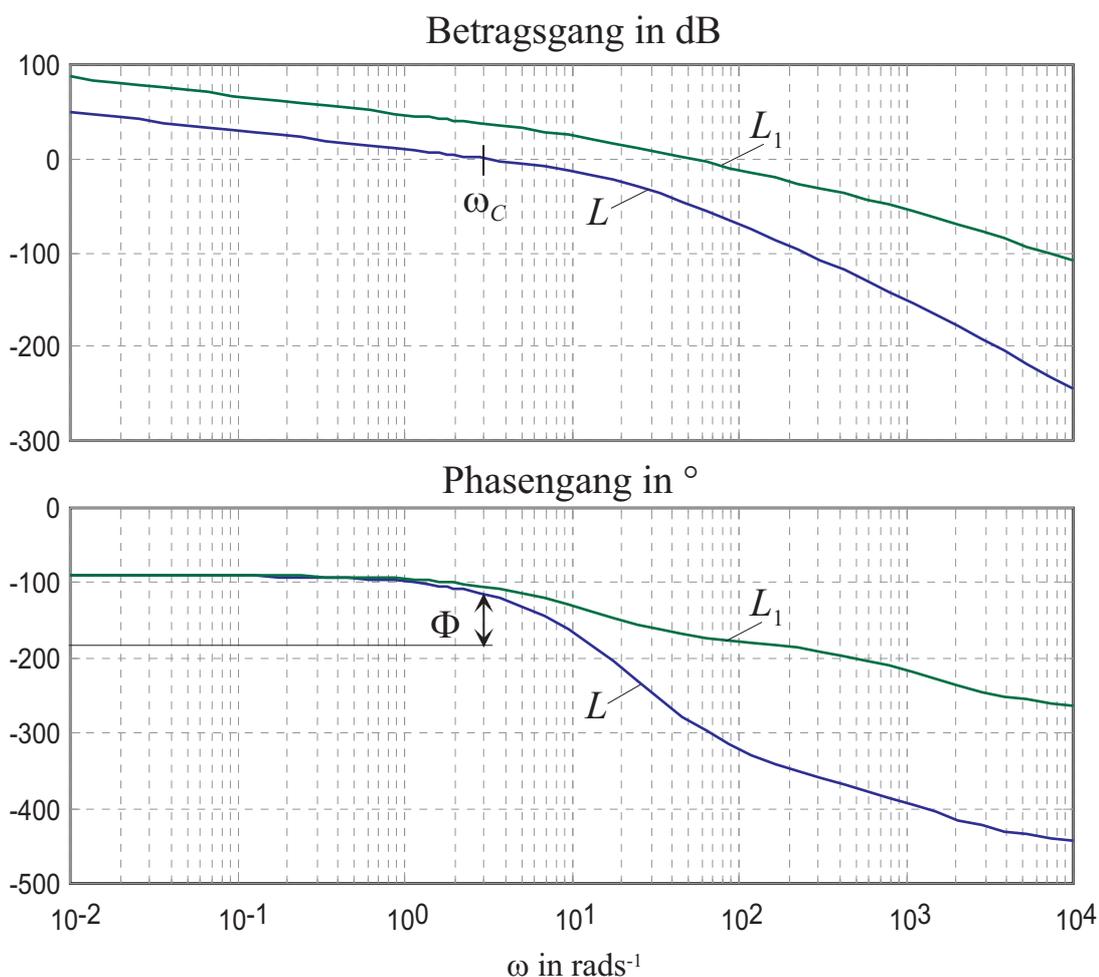
$$V_R = \frac{1}{|L_2(j\omega_C)|} = 0.0141 \quad \text{mit} \quad L_2(s) = \frac{222.22}{s \left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) (1 + 0.0306s)^2} \quad (5.41)$$

und somit lautet die gesamte Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{0.0141 \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)}{s (1 + 0.0306s)^2}. \quad (5.42)$$

- (D) Aus dem Bode-Diagramm des offenen Kreises  $L(s)$  von Abbildung 5.7 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von (B) erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von  $L(s)$  um die Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (E) Die Sprungantwort des geschlossenen Kreises ist dem linken Bild von Abbildung 5.8 zu entnehmen.
- (F) Zur Überprüfung der Betragsbeschränkung der Stellgröße  $|u_{T,n}| \leq 1$  für  $r(t) = 100\sigma(t)$  wird die Übertragungsfunktion

$$G_{T,u_{T,n}}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G_{u_{T,n},\omega_2}(s)} \quad (5.43)$$

Abbildung 5.7: Bode-Diagramme des offenen Kreises  $L_1(s)$  und  $L(s)$ .

berechnet und die Sprungantwort für  $r(t) = 100\sigma(t)$  aufgezeichnet. Im rechten Bild von Abbildung 5.8 erkennt man, dass diese Forderung nicht eingehalten wird. Den Ausführungen von Abschnitt 4.3.2 folgend wird deshalb dem Regelkreis ein Vorfilter der Form

$$F(s) = \frac{\hat{r}}{\hat{\omega}_{2,soll}} = \frac{1}{1 + 2 \times 0.92 \left(\frac{s}{5}\right) + \left(\frac{s}{5}\right)^2} \quad (5.44)$$

vorgeschaltet.

Wie man sich an Hand von Abbildung 5.8 selbst überzeugen kann, bedingt diese Maßnahme eine drastische Verringerung der Stellgröße ohne dabei wesentlich die Dynamik der Führungsregelung zu verringern.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass schwach gedämpfte quadratische Terme der Form  $(1 + 2\xi sT + (sT)^2)$  mit  $T > 0$ ,  $0 < \xi < 0.7$  wie der Term  $(1 + 2 \times 0.138 (\frac{s}{1.82}) + (\frac{s}{1.82})^2)$  von (5.37) typischer Weise bei der Regelung mechanischer Systeme auftreten. Man beachte, dass obige Vorgangsweise eines Kompensationsreglerentwurfes dann bei praktischen Implementationen nicht zum Ziel führt, wenn die tatsächlichen Streckenparameter vom Modell zu weit abweichen. In diesem Fall empfiehlt es sich, den quadratischen

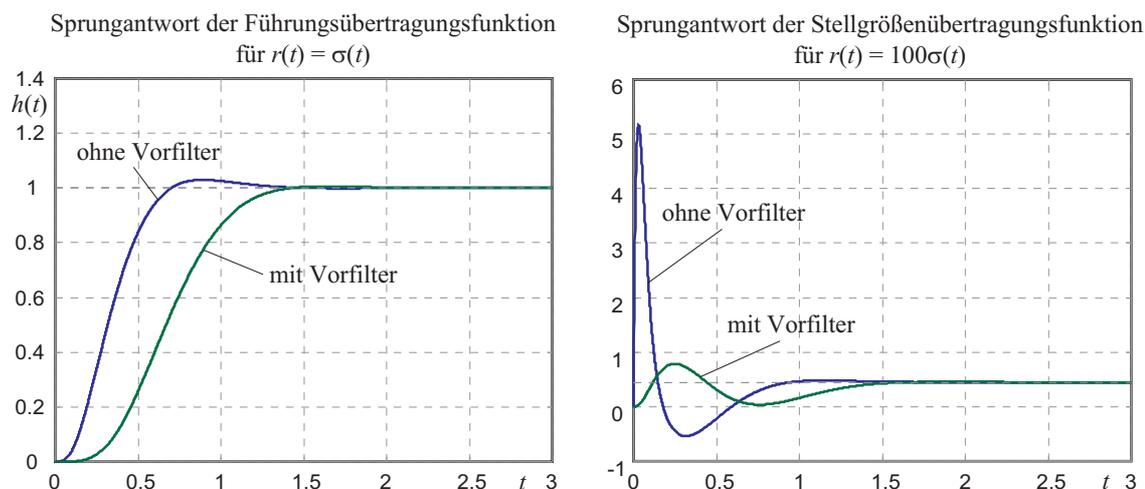


Abbildung 5.8: Sprungantworten der Führungs- und Stellgrößenübertragungsfunktion mit und ohne Vorfilter.

Term nicht exakt zu kompensieren, sondern ein so genanntes *Notchfilter* zu entwerfen. Abbildung 5.9 zeigt das Bode-Diagramm eines möglichen Notchfilters für den Term  $\left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)$  der Form

$$R_N(s) = \frac{1 + 2 \times 0.138/a \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2}{1 + 2 \times 0.138a \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2} \quad (5.45)$$

für verschiedene Werte von  $a > 0$ .

Man erkennt, dass größere Werte von  $a$  ein breitbandigeres Kompensieren der störenden Resonanzfrequenz bedingen und somit der Regelkreis robuster gegenüber Schwankungen des Wertes der Resonanzfrequenz wird, sich gleichzeitig aber die Phase vor der Resonanzfrequenz entsprechend verschlechtert.

**Aufgabe 5.6.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{50}{\left(1 + \frac{s}{171}\right) \left(1 + \frac{s}{2330}\right)}$$

einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r = 0.01 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 10 \%$ ,  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  und  $|u| \leq 15$  für  $r(t) = 500\sigma(t)$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Ergebnis:** Ein möglicher PI-Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R(s) = 3.9 \frac{1 + \frac{s}{567.3}}{s} .$$

**Aufgabe 5.7.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.5}{s \left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

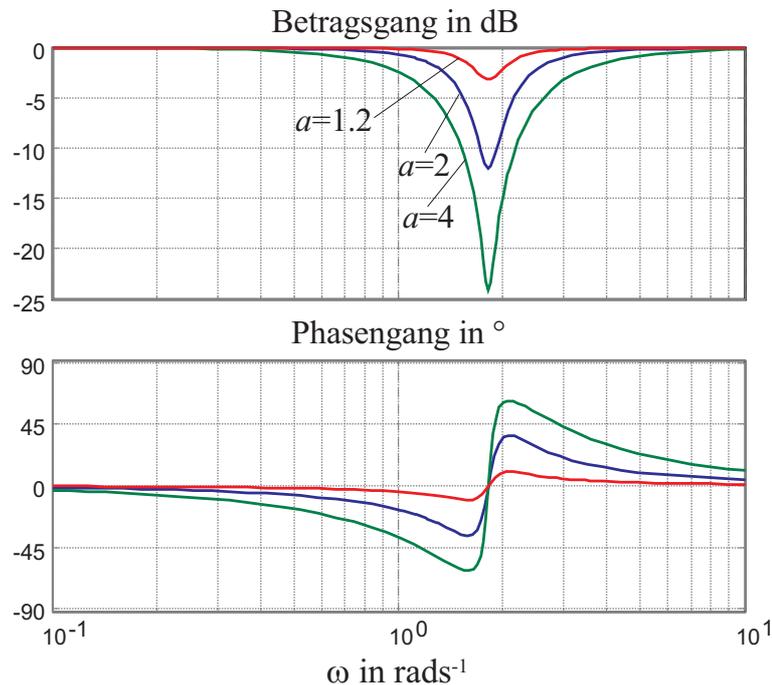


Abbildung 5.9: Bode-Diagramm eines Notchfilters zur Kompensation der Resonanzfrequenz.

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen  $t_r = 1$  s,  $\ddot{u} = 10$  % und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  genügt.

**Hinweis:** Benutzen Sie einen Regler der Form

$$R(s) = V_R \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + sT_R}$$

und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Aufgabe 5.8.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.759}{\left(1 + \frac{s}{0.196}\right) \left(1 + 2 \times 0.152 \left(\frac{s}{5.945}\right) + \left(\frac{s}{5.945}\right)^2\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen  $t_r = 2$  s,  $\ddot{u} = 0$  % und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  genügt.

**Hinweis:** Entwerfen Sie in einem ersten Schritt einen PI-Regler. Falls bei der Überprüfung des Entwurfsergebnisses durch Simulation in MATLAB/SIMULINK kein zufriedenstellendes Resultat erzielt wird, erweitern Sie den PI-Regler um ein geeignetes Notchfilter.

**Aufgabe 5.9.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{2 + 2s + s^2}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen  $t_r = 1 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 20 \%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  genügt.

**Hinweis:** Benutzen Sie einen PI-Regler und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Aufgabe 5.10.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{s \left( 2 + 2 \left( \frac{s}{5} \right) + \left( \frac{s}{5} \right)^2 \right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen  $t_r = 0.25 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 20 \%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  genügt.

**Hinweis:** Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Aufgabe 5.11.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{2 + 2 \left( \frac{s}{2} \right) + \left( \frac{s}{2} \right)^2}$$

einen Regler so, dass die Anstiegszeit der Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgender Spezifikation  $t_r = 0.75 \text{ s}$  genügt.

**Hinweis:** Da außer an die Anstiegszeit  $t_r$  keine weiteren Anforderungen gestellt sind, versuchen Sie den Entwurf mit Hilfe eines einfachen P-Reglers  $R(s) = V_R$  durchzuführen.

**Aufgabe 5.12.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = 2 \frac{1 + \frac{s}{1.2}}{s \left( 1 + 2 \times 0.6 \left( \frac{s}{0.8} \right) + \left( \frac{s}{0.8} \right)^2 \right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Spezifikationen  $t_r = 0.625 \text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 10 \%$  und  $e_\infty|_{r(t)=t} = 0.25$  genügt.

**Hinweis:** Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

## 5.4. Literatur

1. Chen C.-T., *Control System Design*, Pond Woods Press, New York, (1987).
2. Chen C.-T., *Linear System Theory and Design*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, (1984).
3. Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R., *Feedback Control Theory*, MacMillan, New York, (1992).
4. Föllinger O., *Regelungstechnik*, 6.Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, (1990).
5. Hofer A., Gausch F., Schlacher K., *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, (1991).

6. Horn M., Dourdoumas N., *Regelungstechnik*, Pearson Studium, München, (2004).
7. Rohrs Ch., Melsa J.L., Schultz D.G., *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, (1993).
8. Weinmann A., *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*, Band 1 und 2, 3. Auflage, Springer, Wien, New York, (1998).

## 6. DER DIGITALE REGELKREIS

Bisher wurden ausschließlich zeitkontinuierliche Systeme behandelt. Die aus der Reglersynthese erhaltenen linearen Regler liegen in Form von  $s$ -Übertragungsfunktionen oder als Systeme von Differentialgleichungen vor. Will man diese Regler realisieren, so muss man sie beispielsweise als Operationsverstärkerschaltungen aufbauen, siehe Abschnitt 3.9. Heutzutage werden zumeist *Digitalrechner* zur Regelung eingesetzt, weshalb in weiterer Folge die Theorie so genannter zeitdiskreter Systeme genauer behandelt werden soll.

### 6.1. Allgemeines

Abbildung 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines digitalen Regelkreises. Im Unterschied

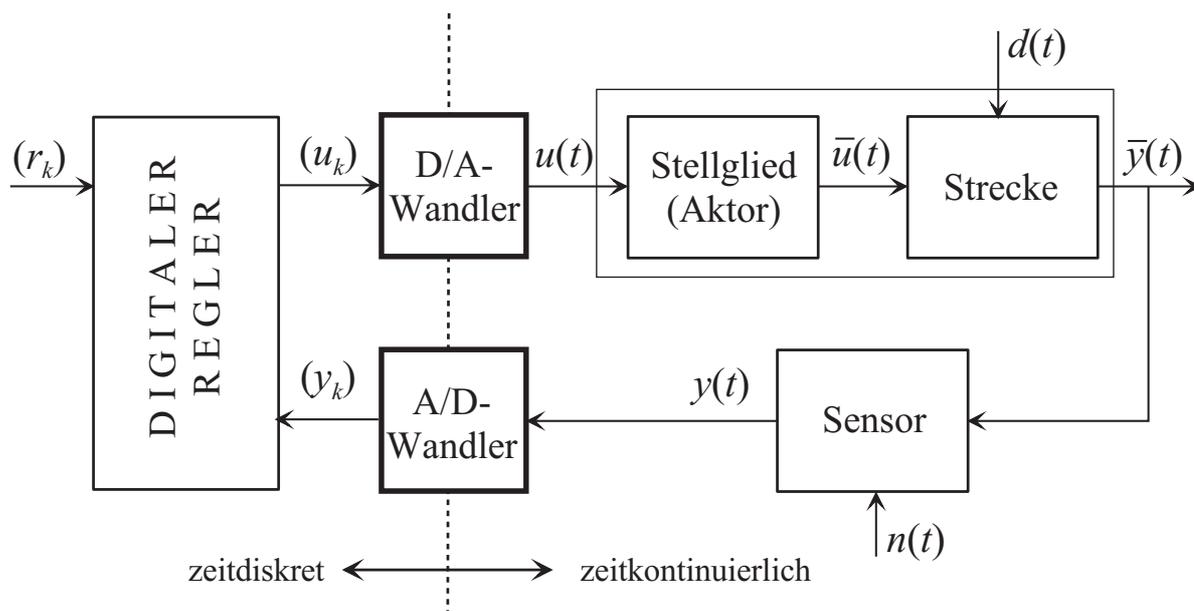


Abbildung 6.1: Blockschaltbild eines digitalen Regelkreises.

zu kontinuierlichen Regelkreisen muss die vom Sensor erfasste zeitkontinuierliche Messgröße  $y(t)$  mit Hilfe eines *A/D(Analog/Digital)-Wandlers* zeitdiskretisiert werden, damit sie im Digitalrechner weiterverarbeitet werden kann. Ein idealer A/D-Wandler, auch *Abtaster (sampler)* genannt, erzeugt dann aus einem zeitkontinuierlichen Signal  $y(t)$  eine *Folge von Abtastwerten*  $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots) = (y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots)$  zu den Zeitpunkten  $t_0, t_1, t_2, \dots$  (siehe Abbildung 6.2). Für das Weitere wird vorausgesetzt, dass die Abtastung *äquidistant* erfolgt, d.h. die Abtastzeitpunkte  $t_k$  sind ganzzahlige Vielfache der so

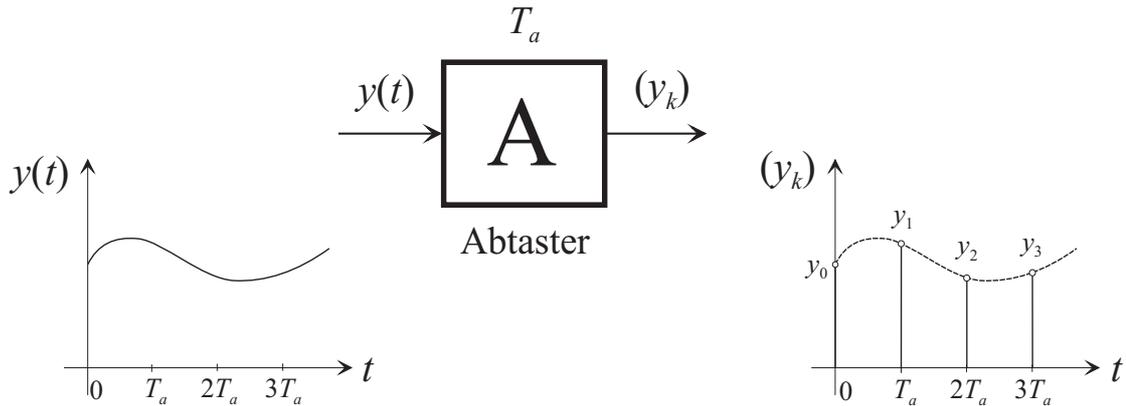


Abbildung 6.2: Zur Funktionsweise des Abtasters.

genannten *Abtastzeit* (*sampling time*)  $T_a$  bzw.  $t_k = kT_a$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Für stetige und rechtsseitig stetige Funktionen  $y(t)$  genügt damit der Abtaster der Beziehung

$$y_k = y(kT_a) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

und für linksseitig stetige Funktionen  $y(t)$  gilt

$$y_k = \lim_{t \rightarrow +kT_a} y(t) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.2)$$

**Aufgabe 6.1.** Zeigen Sie, dass der Abtaster linear aber zeitvariant ist.

Im Digitalrechner wird dann aus den Folgenwerten  $(y_k)$  des abgetasteten Sensorsignals  $y(t)$  und aus den Folgenwerten  $(r_k)$  des Führungs- bzw. Referenzsignals zu diskreten Zeitpunkten  $t_k = kT_a$  die Stellgrößenfolge  $(u_k)$  berechnet. Damit man nun aus einer Folge von Abtastwerten  $(u_k)$  wiederum ein zeitkontinuierliches Signal  $u(t)$  erzeugen kann, benötigt man einen *D/A-(Digital/Analog)-Wandler*. Bei digitalen Regelkreisen wird der D/A-Wandler meist so aufgebaut, dass er am Ausgang den Abtastwert bis zur nächsten Abtastperiode analog konstant hält (siehe Abbildung 6.3). Man spricht dann bei idealem Verhalten auch von einem *Halteglied nullter Ordnung* oder in der englischsprachigen Literatur von einem *zero-order-hold*. Die Ausgangsgröße  $u(t)$  des Haltegliedes hängt somit mit der Eingangsgröße  $(u_k)$  wie folgt zusammen,

$$u(t) = u_k \quad \text{für } kT_a \leq t < (k+1)T_a \quad (6.3)$$

bzw.

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (\sigma(t - kT_a) - \sigma(t - (k+1)T_a)) \quad (6.4)$$

Transformiert man (6.4) in den Laplace-Bereich, so erhält man

$$\hat{u}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{1}{s} (e^{-kT_a s} - e^{-(k+1)T_a s}) = \frac{1}{s} (1 - e^{-T_a s}) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-kT_a s}}_{\hat{v}(s)} \quad (6.5)$$

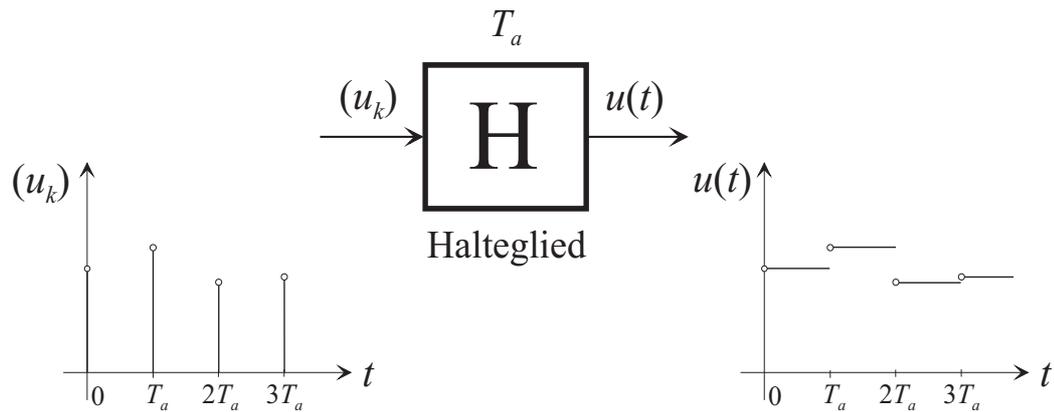


Abbildung 6.3: Zur Funktionsweise des Haltegliedes nullter Ordnung.

woraus sich unmittelbar die Übertragungsfunktion des Haltegliedes zu

$$G(s) = \frac{\hat{u}(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{1}{s} (1 - e^{-T_a s}) \quad (6.6)$$

mit der Eingangsgröße

$$(u_k) = v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_a) \delta(t - kT_a) \quad (6.7)$$

ergibt.

**Aufgabe 6.2.** Zeigen Sie, dass die Hintereinanderschaltung von einem exakt synchronisierten Halteglied und Abtaster mit der Abtastzeit  $T_a$  einer Durchschaltung entspricht.

## 6.2. Abtastsysteme

Für die weiteren Betrachtungen liege das zeitdiskrete System nach Abbildung 6.4 mit ideal synchronisiertem Abtast-Halte-Glied mit der Abtastzeit  $T_a$  sowie der Eingangsfolge  $(u_k)$  und der Ausgangsfolge  $(y_k)$  zu Grunde.

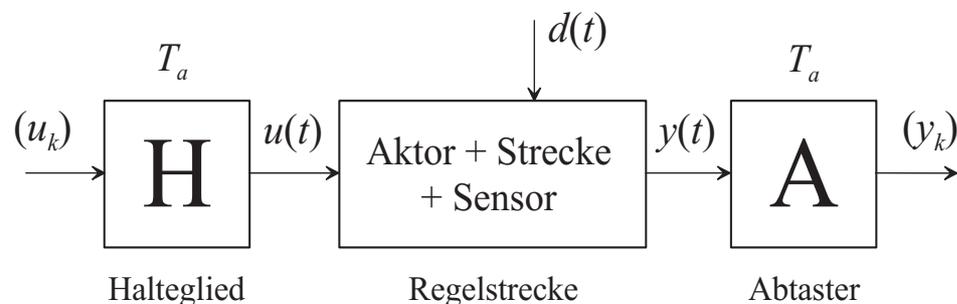


Abbildung 6.4: Abtastsystem.

### 6.2.1. Der nichtlineare Fall

Angenommen, die Regelstrecke in Abbildung 6.4 lasse sich in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) & \text{mit} & & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{6.8}$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  und dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  schreiben. Der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_{k+1}$  des zugehörigen Abtastsystems ergibt sich dann als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\tag{6.9}$$

für den Anfangswert  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_a)$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k = \mathbf{u}(kT_a)$  für  $kT_a \leq t < (k+1)T_a$  zum Zeitpunkt  $t = (k+1)T_a$ . Damit liegt das mathematische Modell des Abtastsystems als *Differenzgleichungssystem*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) & \text{mit} & & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)\end{aligned}\tag{6.10}$$

vor.

Als Beispiel betrachte man die nichtlineare Regelstrecke erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\sin(t)x(t) + x(t)u(t) \\ y(t) &= tx(t)^2 + u(t)\end{aligned}\tag{6.11}$$

Die Lösung der Differentialgleichung für den Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  und den konstanten Eingang  $u(t) = u_C$  lautet

$$x(t) = \frac{x_0 \exp(u_C t + \cos(t))}{\cosh(\cos(t_0) + u_C t_0) + \sinh(\cos(t_0) + u_C t_0)},\tag{6.12}$$

woraus sich unmittelbar das zugehörige Abtastsystem für  $t_0 = kT_a$ ,  $x_0 = x_k$ ,  $t = (k+1)T_a$ ,  $x(t) = x_{k+1}$  und  $u_C = u_k$  zu

$$x_{k+1} = \frac{x_k \exp(u_k(k+1)T_a + \cos((k+1)T_a))}{\cosh(\cos(kT_a) + u_k kT_a) + \sinh(\cos(kT_a) + u_k kT_a)}\tag{6.13}$$

ergibt. Der Ausgang  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t = kT_a$  folgt dann in der Form

$$y_k = kT_a x_k^2 + u_k.\tag{6.14}$$

Man erkennt also, dass es *im Allgemeinen unmöglich* ist, für nichtlineare zeitkontinuierliche Systeme das zugehörige Abtastsystem *exakt* zu berechnen, da die Kenntnis der Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems vonnöten ist. Näherungsweise kann das System (6.8) mittels verschiedener numerischer Integrationsverfahren in ein Differenzgleichungssystem übergeführt werden. Beispielsweise lautet das Differenzgleichungssystem zu (6.8) nach dem expliziten Eulerverfahren

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, kT_a).\tag{6.15}$$

Zur Stabilität des Integrationsverfahrens und die zu wählende Abtastzeit  $T_a$  (Schrittweite) sei an dieser Stelle auf die Numerikliteratur verwiesen.

### 6.2.2. Der lineare, zeitinvariante Fall

Für lineare, zeitinvariante Regelstrecken der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (6.16)$$

lautet die allgemeine Lösung nach Satz 2.4

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) .\end{aligned}\quad (6.17)$$

Setzt man  $t_0 = kT_a$ ,  $t = (k + 1)T_a$  und  $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_k$  für  $kT_a \leq \tau < (k + 1)T_a$  in (6.17) ein, so erhält man das zu (6.16) zugehörige Abtastsystem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi(T_a)\mathbf{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k + 1)T_a - \tau) d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k\end{aligned}\quad (6.18)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi\mathbf{x}_k + \Gamma\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k\end{aligned}\quad (6.19a)$$

$$\text{mit} \quad \Phi = \exp(\mathbf{A}T_a) \quad \text{und} \quad \Gamma = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{B} .\quad (6.19b)$$

**Aufgabe 6.3.** Zeigen Sie mit Hilfe der Variablentransformation  $\bar{\tau} = (k + 1)T_a - \tau$ , dass nachfolgende Gleichung

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k + 1)T_a - \tau) d\tau = \int_0^{T_a} \Phi(\bar{\tau}) d\bar{\tau}\quad (6.20)$$

gültig ist.

Als Beispiel berechne man für das Zustandsmodell eines Doppelintegrators

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [0, 1] \mathbf{x}\end{aligned}\quad (6.21)$$

das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit  $T_a$ . Die Transitionsmatrix errechnet sich dabei in der Form

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (6.22)$$

und damit ergeben sich die Dynamikmatrix  $\Phi$  und der Eingangsvektor  $\Gamma$  des Abtastsystems gemäß (6.19a) zu

$$\Phi = \Phi(T_a) = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

und

$$\Gamma = \left( \int_0^{T_a} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & \frac{T_a^2}{2} \\ 0 & T_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Als Ergebnis erhält man das Abtastsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [0, 1] \mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Analog zu den Sätzen 2.1 und 2.2 ist ein zeitdiskretes System genau dann linear bzw. linear und zeitinvariant, wenn es sich in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k & \text{bzw.} & & \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \\ y_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k & & & y_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (6.26)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ , dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  sowie den Matrizen  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  schreiben lässt. Zur Wiederholung sei an dieser Stelle angemerkt, dass mit dem tiefgestellten Index  $k$  einer Größe  $\xi_k$  der Wert von  $\xi$  zum Zeitpunkt  $kT_a$ , also  $\xi_k = \xi(kT_a)$ , gemeint ist.

**Aufgabe 6.4.** Zeigen Sie, dass sich die Matrizen  $\Phi$  und  $\Gamma$  des Abtastsystems (6.19b) in der Form

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \exp \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T_a \right)$$

mit  $\mathbf{E}$  als Einheitsmatrix berechnen lassen.

**Hinweis:** Es gelten die Beziehungen

$$\frac{d}{dT_a} \Phi = \mathbf{A} \Phi(T_a) = \Phi(T_a) \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dT_a} \Gamma = \Phi(T_a) \mathbf{B}.$$

**Aufgabe 6.5.** Berechnen Sie für das System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0, 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit  $T_a$ . Überprüfen Sie das Ergebnis in MATLAB mit Hilfe des Befehls `c2d` für die Abtastzeit  $T_a = 0.1$  s.

**Ergebnis:** Das Abtastsystem lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \exp(-T_a) & 0 \\ 1 - \exp(-T_a) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 - \exp(-T_a) \\ T_a - 1 + \exp(-T_a) \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [0, 1] \mathbf{x}_k. \end{aligned}$$

**Aufgabe 6.6.** Angenommen, die Stellgröße  $u(t)$  wird um die bekannte Zeit  $\Delta T \leq T_a$  verzögert auf den Prozess aufgeschaltet, d.h. das mathematische Modell (6.16) modifiziert sich in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t - \Delta T) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Wie lautet das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit  $T_a$ ?

**Ergebnis:** Das Abtastsystem lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{u}_k + \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \exp(\mathbf{A} T_a), \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \int_0^{T_a - \Delta T} \mathbf{\Phi}(\tau) d\tau \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \int_0^{\Delta T} \mathbf{\Phi}(T_a - \tau) d\tau \mathbf{B} .$$

**Hinweis:** Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung (6.27) für den Anfangswert  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k T_a)$  und die Eingangsgröße

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}((k-1) T_a) & \text{für } k T_a \leq t < k T_a + \Delta T \\ \mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k T_a) & \text{für } k T_a + \Delta T \leq t < (k+1) T_a \end{cases}$$

zum Zeitpunkt  $t = (k+1) T_a$ .

### 6.3. Die Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man das lineare, zeitinvariante autonome Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \quad (6.28)$$

Wie man sich einfach überzeugen kann, lautet die Lösung der Differenzgleichung (6.28) zum Zeitpunkt  $k T_a$  für einen vorgegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{\Psi}(k) \mathbf{x}_0 . \quad (6.29)$$

Damit ist durch die  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{\Psi}(k)$  die Transitionsmatrix des zeitdiskreten Systems (6.28) gegeben. Analog zur Transitionsmatrix im Zeitkontinuierlichen (siehe Abschnitt 2.4) erfüllt  $\mathbf{\Psi}(k)$  folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{\Psi}(0) &= \mathbf{E} \\ (2) \quad \mathbf{\Psi}(k+l) &= \mathbf{\Psi}(k) \mathbf{\Psi}(l) \\ (3) \quad \mathbf{\Psi}^{-1}(k) &= \mathbf{\Psi}(-k) \\ (4) \quad \mathbf{\Psi}(k+1) &= \mathbf{\Phi} \mathbf{\Psi}(k) , \end{aligned} \quad (6.30)$$

wobei für die Beziehung (3) vorausgesetzt wird, dass die Dynamikmatrix  $\mathbf{\Phi}$  des zeitdiskreten Systems regulär ist. Beachten Sie, dass die Transitionsmatrix zeitkontinuierlicher Systeme für alle Zeiten  $t$  unabhängig von der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  regulär ist, wohingegen die Transitionsmatrix  $\mathbf{\Psi}$  zeitdiskreter Systeme genau dann regulär ist, wenn die Dynamikmatrix  $\mathbf{\Phi}$  des zugehörigen zeitdiskreten Systems regulär ist.

**Aufgabe 6.7.** Beweisen Sie die Eigenschaften (6.30) der Transitionsmatrix  $\Psi$ .

Die allgemeine Lösung eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (6.31)$$

erhält man einfach durch sukzessives Anwenden der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \Phi \mathbf{x}_0 + \Gamma \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \underbrace{\Phi(\Phi \mathbf{x}_0 + \Gamma \mathbf{u}_0)}_{\mathbf{x}_1} + \Gamma \mathbf{u}_1 = \Phi^2 \mathbf{x}_0 + \Phi \Gamma \mathbf{u}_0 + \Gamma \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.32)$$

in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \Phi^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Man erkennt aus (6.33), dass das Faltungsintegral der allgemeinen Lösung zeitkontinuierlicher Systeme von Satz 2.4 im Zeitdiskreten durch die Faltungssumme ersetzt wird.

Analog zu Satz 3.4 lässt sich folgender Satz für die Stabilität eines linearen, zeitinvarianten autonomen Abtastsystems der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k \quad (6.34)$$

angeben:

**Satz 6.1. (Globale asymptotische Stabilität für Abtastsysteme)** Für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  des Systems (6.34) gilt genau dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad (6.35)$$

wenn alle Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi$  betragsmäßig kleiner als 1 sind. Man sagt dann auch, die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ , die der Beziehung  $\mathbf{x}_R = \Phi \mathbf{x}_R$  genügt, ist global asymptotisch stabil.

## 6.4. Eingangs-Ausgangsverhalten

Bisher wurde gezeigt, dass die Beschreibung eines zeitdiskreten Systems als Differenzgleichungssystem die zum Differentialgleichungssystem im Zeitkontinuierlichen analoge Zustandsdarstellung im Zeitdiskreten ist. Die Laplace-Transformation diente bei linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen Systemen dazu, eine Eingangs-Ausgangsbeschreibung in Form von  $s$ -Übertragungsfunktionen ( $s$ -Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall) zu

bestimmen. Bei Abtastsystemen kann auf gleiche Art und Weise eine rationale Funktion (Matrix bestehend aus rationalen Funktionen im Mehrgrößenfall) in einer komplexwertigen Variablen  $z$  über die so genannte  $z$ -Transformation angegeben werden, die das *Eingangs-Ausgangsverhalten von Abtastsystemen* beschreibt. Teile der hierfür erforderlichen Grundlagen der  $z$ -Transformation wurden bereits in Signale und Systeme 2 (Kapitel 5) besprochen und sind vollständigshalber im Anhang B nochmals zusammengefasst. Im weiteren Verlauf des Skriptums werden  $z$ -transformierte abgetastete Zeitsignale  $(f_k) = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$  immer in der Form  $\mathcal{Z}\{(f_k)\} = f_z(z)$  mit dem tiefgestellten Index  $z$  geschrieben.

### 6.4.1. Die $z$ -Übertragungsfunktion

Analog zur  $s$ -Übertragungsfunktion bei zeitkontinuierlichen Systemen kann für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme nach Abbildung 6.5 das Eingangs-Ausgangsverhalten in Form der  $z$ -Übertragungsfunktion beschrieben werden.

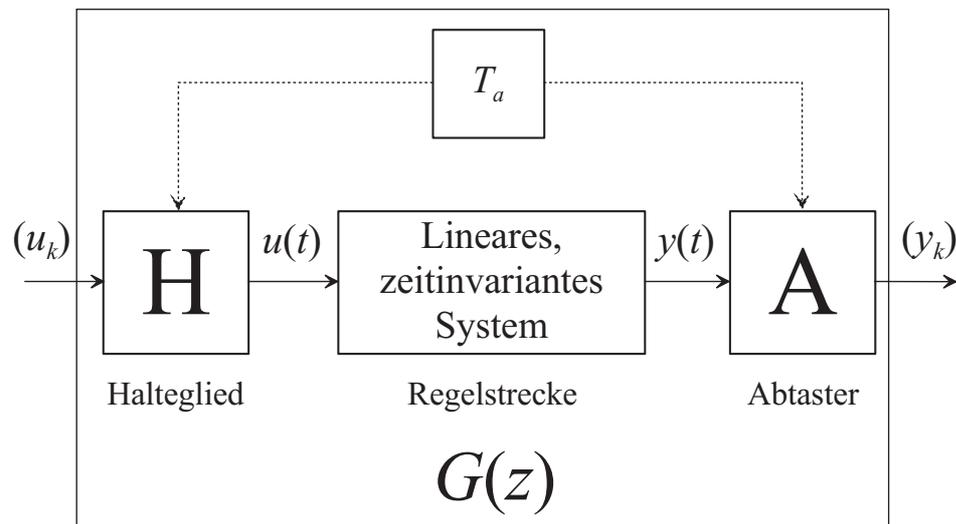


Abbildung 6.5: Zur  $z$ -Übertragungsfunktion.

### Berechnung aus dem Differenzgleichungssystem

Es sei angenommen, dass das Abtastsystem von Abbildung 6.5 in Form eines Differenzgleichungssystems wie in (6.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (6.36)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ , dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  sowie den Matrizen  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  vorliege. Wendet man auf (6.36) die

$z$ -Transformation an, so erhält man

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}_z(z) - z\mathbf{x}_0 &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_z(z) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_z(z) \\ \mathbf{y}_z(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_z(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}_z(z) \end{aligned} \quad (6.37)$$

bzw. für die Ausgangsgröße ergibt sich

$$\mathbf{y}_z(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{x}_0z + (\mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D})\mathbf{u}_z(z) . \quad (6.38)$$

Damit erkennt man unmittelbar, dass sich für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  die  $(q \times p)$  dimensionale  $z$ -Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(z)$  eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems wie folgt

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(\mathbf{y}_k)\}}{\mathcal{Z}\{(\mathbf{u}_k)\}} = \frac{\mathbf{y}_z(z)}{\mathbf{u}_z(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D} \quad (6.39)$$

errechnet. Im Eingrößenfall  $p = q = 1$  lautet demnach die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \mathbf{c}^T(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + d \quad (6.40)$$

mit  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und  $d \in \mathbb{R}$ .

### Berechnung aus einer $s$ -Übertragungsfunktion

Wenn die zeitkontinuierliche Regelstrecke von Abbildung 6.5 als  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s)$  vorliegt, kann man aus den bisherigen Überlegungen die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  des zugehörigen Abtastsystems wie folgt berechnen: Man bestimmt in einem ersten Schritt zu  $G(s)$  eine Zustandsrealisierung (siehe Abschnitt 3.5), berechnet dann für diese Zustandsrealisierung nach (6.19) das Abtastsystem und erhält über die Beziehung (6.40) die  $z$ -Übertragungsfunktion. Dieser Weg scheint doch etwas umständlich zu sein, weshalb der naheliegende Wunsch besteht, die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  des zugehörigen Abtastsystems direkt über  $G(s)$  zu berechnen.

Dazu wird in Abbildung 6.5 die Eingangsimpulsfolge  $(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \dots)$  auf das System aufgeschaltet. Das Halteglied erzeugt daraus die Eingangsgröße

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_a) \quad \text{bzw.} \quad \hat{u}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a}) \quad (6.41)$$

und als Ausgangsgröße im Laplace-Bereich erhält man

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a})G(s) . \quad (6.42)$$

Die  $z$ -Transformierte von  $\hat{g}(s)$  errechnet sich nach (B.19) in der Form

$$g_z(z) = \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a})G(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) = \mathbf{Z} \left( \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a})G(s) \right) . \quad (6.43)$$

**Aufgabe 6.8.** Zeigen Sie, dass für kausale Zeitfunktionen  $f(t)$  und  $n \in \mathbf{N}_+$  allgemein gilt

$$\mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) e^{-nsT_a} \right) = z^{-n} \mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) \right) .$$

Zufolge der Linearität der Laplace- und der  $z$ -Transformation (also auch der Transformation  $\mathbf{Z}$ ) und Aufgabe 6.8 lässt sich (6.43) in der Form

$$g_z(z) = \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right) - \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s} e^{-sT_a} \right) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \quad (6.44)$$

anschreiben. Da für die  $z$ -Transformierte der Impulsfolge  $\mathcal{Z} \{(\delta_k)\} = 1$  gilt, ist mit (6.44) unmittelbar die Vorschrift gegeben, wie man aus einer  $s$ -Übertragungsfunktion die zugehörige  $z$ -Übertragungsfunktion berechnet

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z} \{(y_k)\}}{\mathcal{Z} \{(u_k)\}} = \frac{g_z(z)}{1} = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right) . \quad (6.45)$$

**Aufgabe 6.9.** Berechnen Sie für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  des zugehörigen Abtastsystems für die Abtastzeit  $T_a = 200 \text{ ms}$ .

**Ergebnis:** Die  $z$ -Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{0.0012z^2 + 0.0044z + 0.0010}{z^3 - 2.601z^2 + 2.278z - 0.6703} .$$

**Aufgabe 6.10.** Gegeben ist das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1] \mathbf{x} . \end{aligned}$$

Berechnen Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  des zugehörigen Abtastsystems für die Abtastzeit  $T_a = 1 \text{ s}$  auf **zwei verschiedene Wege**.

**Hinweis:**

- Weg 1: Berechnung des Abtastsystems nach (6.19) und anschließend Ermittlung von  $G(z)$  über (6.40).
- Weg 2: Zuerst die  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s)$  berechnen und anschließend  $G(z)$  über (6.45) bestimmen.

### Polstellen der $z$ -Übertragungsfunktion

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen ist ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\end{aligned}\quad (6.46)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$  und dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$ . Das zugehörige Abtastsystem lautet nach (6.19)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + \mathbf{d}u_k\end{aligned}\quad (6.47)$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \exp(\mathbf{A}T_a) \quad \text{und} \quad \mathbf{\Gamma} = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{b} . \quad (6.48)$$

Die Berechnungsvorschrift (6.48) für die Dynamikmatrix  $\mathbf{\Phi}$  des Abtastsystems (6.47) gibt an, wie sich Eigenwerte  $\lambda_j$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_j$  der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  im Zeitdiskreten transformieren. Es gilt nämlich nachfolgender Satz:

**Satz 6.2.** Sind  $\lambda_j$  und  $\mathbf{v}_j$  der Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor einer  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , dann sind  $\exp(\lambda_j)$  und  $\mathbf{v}_j$  der Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor der  $(n \times n)$ -Matrix  $\exp(\mathbf{A})$ .

**Beweis:** Nach der Definition von Eigenwert  $\lambda_j$  und Eigenvektor  $\mathbf{v}_j$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  gilt

$$(\lambda_j \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{A} \mathbf{v}_j . \quad (6.49)$$

Um nun zu zeigen, dass gilt

$$\exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j = \exp(\mathbf{A}) \mathbf{v}_j , \quad (6.50)$$

setzt man in (6.50) für

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (6.51)$$

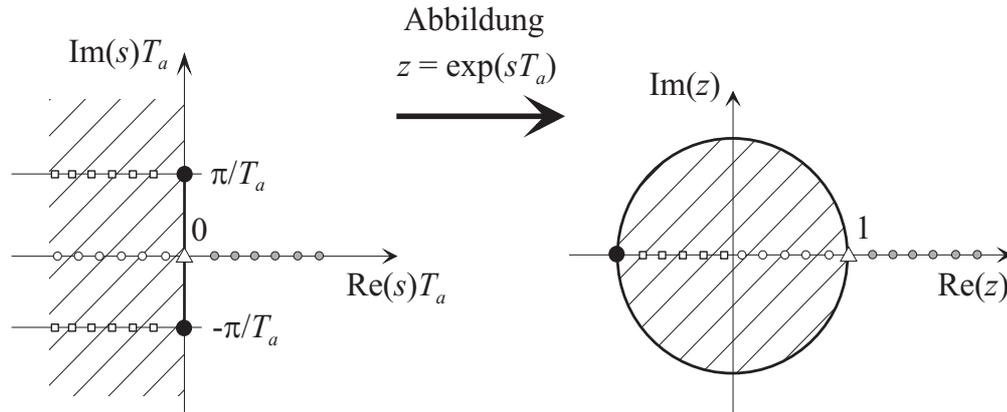
ein, also

$$\exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \mathbf{v}_j , \quad (6.52)$$

und wendet sukzessive die Beziehung (6.49) an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \mathbf{v}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^k}{k!} \mathbf{v}_j = \exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j . \quad (6.53)$$

Damit ist aber Satz 6.2 gezeigt. ■

Abbildung 6.6: Die konforme Abbildung  $z = \exp(sT_a)$ .

Nach Satz 6.2 transformieren sich Eigenwerte  $\lambda_j$  der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  des zeitkontinuierlichen Systems (6.46) zu Eigenwerten  $\exp(\lambda_j T_a)$  der Dynamikmatrix  $\Phi$  des zeitdiskreten Systems (6.47). Abbildung 6.6 zeigt grafisch die Abbildung  $z = e^{sT_a}$  von der komplexen  $s$ -Ebene in die komplexe  $z$ -Ebene (vergleiche dazu auch (B.7)).

Man kann sich nun einfach davon überzeugen, dass die Abbildung  $z = e^{sT_a}$  folgende Eigenschaften hat:

- (1) Die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene wird auf den Einheitskreis (Mittelpunkt 0 und Radius 1) der  $z$ -Ebene abgebildet.
- (2) Die linke  $s$ -Halbebene wird auf das Innere des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene abgebildet.
- (3) Die Abbildung ist nicht bijektiv, denn Punkte  $s_i, s_j$  der  $s$ -Ebene, für die gilt  $s_i = s_j + Ik\frac{2\pi}{T_a}$  mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  werden auf denselben Punkt der  $z$ -Ebene abgebildet.

**Aufgabe 6.11.** Zeigen Sie die Eigenschaften (1) - (3) der Abbildung  $z = e^{sT_a}$ .

**Hinweis:** Für  $s = \alpha + I\omega$  lautet die Abbildung

$$z = e^{\alpha T_a} \cos(\omega T_a) + I e^{\alpha T_a} \sin(\omega T_a) .$$

Damit kann unmittelbar nachfolgender Satz angegeben werden.

**Satz 6.3.** Ist  $s_j$  ein Pol einer  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s)$ , dann ist  $e^{s_j T_a}$  der Pol der zugehörigen  $z$ -Übertragungsfunktion für die Abtastzeit  $T_a$ .

**Aufgabe 6.12.** Beweisen Sie Satz 6.3.

**Hinweis:** Kombinieren Sie das bisher Gesagte mit dem Beweis von Satz 3.5.

Damit folgt aber auch, dass durch Abtastung ein stabiles zeitkontinuierliches System nicht destabilisiert werden kann. Im Abschnitt 3.10 wurde gezeigt, dass der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Nullstellen  $s_{1,2} = \alpha \pm I\beta$  eines Nennerpolynoms zweiter Ordnung

$$n(s) = (s - \alpha - I\beta)(s - \alpha + I\beta) = \frac{1}{T^2} + 2\xi \frac{s}{T} + s^2 \quad (6.54)$$

und der Zeitkonstanten  $T$  bzw. dem Dämpfungsgrad  $\xi$  sich in der Form

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} \quad (6.55)$$

errechnet. Aus (6.55) ist ersichtlich, dass in der komplexen  $s$ -Ebene Punkte konstanter Dämpfung  $\xi$  auf einem Strahl durch den Nullpunkt mit der Steigung  $\frac{\beta}{\alpha}$  und Punkte konstanter Zeitkonstanten  $T$  auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$  liegen. Die Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist daher, wie sich Halbkreise und Strahlen der linken  $s$ -Halbebene über die Abbildung  $z = e^{sT_a}$  in die  $z$ -Ebene transformieren. Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion von (3.162)

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s-0.5)(s^2+4s+6.25)} \quad (6.56)$$

mit der zugehörigen  $z$ -Transformierten für  $T_a = 0.5$

$$G(z) = \frac{2.725z^2 - 4.296z + 1.571}{z^3 - 1.822z^2 + 0.8266z - 0.1738} \quad (6.57)$$

Abbildung 6.7 zeigt im linken Bild die Polstellen des Pol-Nullstellen Diagramm von  $G(s)$  und im rechten jene von  $G(z)$ . Das Gitter wurde durch MATLAB mit dem Befehl `zgrid` in der  $z$ -Ebene so gelegt, dass damit die Halbkreise und Strahlen der  $s$ -Ebene durch die Abbildung  $z = e^{sT_a}$  in Linien der  $z$ -Ebene abgebildet wurden.

#### 6.4.2. Wahl der Abtastzeit

Die Wahl der Abtastzeit  $T_a$  ist bei digitalen Regelungen eine zentrale Frage, denn sie sollte einerseits *nicht zu groß* gewählt werden, damit die dynamischen Vorgänge hinreichend gut erfasst werden können, sie sollte aber auch *nicht unnötig klein* sein, damit sich die Kosten und der Aufwand der Echtzeit-Hardware und -Software in einem vernünftigen Rahmen bewegen. Für die praktische Implementierung hat sich folgende Vorgangsweise als sinnvoll erwiesen: In einem ersten Schritt berechne man die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  bzw. die Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  des zeitkontinuierlichen Systems. Da nur reelle Koeffizienten vorkommen, sind die Eigenwerte bzw. Pole entweder reell oder konjugiert komplex. Setzt man nun voraus, dass die auftretenden Pole einfach sind und in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen, dann lässt sich die Übertragungsfunktion  $G(s)$  für  $n_1$  reelle und  $n_2$  konjugiert komplexe Pole durch Partialbruchzerlegung in der Form

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{V_{1,j}}{(1+sT_j)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \frac{V_{2,j} + V_{3,j}s}{(1+2\xi_j(sT_j) + (sT_j)^2)} \quad \text{mit} \quad 0 < \xi_j < 1 \quad (6.58)$$

anschreiben. Die Sprungantwort  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$  setzt sich also aus den Sprungantworten von P-T<sub>1</sub>- und P-T<sub>2</sub>-Gliedern zusammen (siehe Abschnitte 3.8.1 und 3.8.2). Die Dynamik des Systems kann relativ gut über die *Anstiegszeiten* der einzelnen P-T<sub>1</sub>- und P-T<sub>2</sub>-Glieder charakterisiert werden. Die Anstiegszeit  $t_r$  eines P-T<sub>1</sub>-Gliedes der Form

$$G(s) = \frac{V_1}{1+sT_1} \quad (6.59)$$

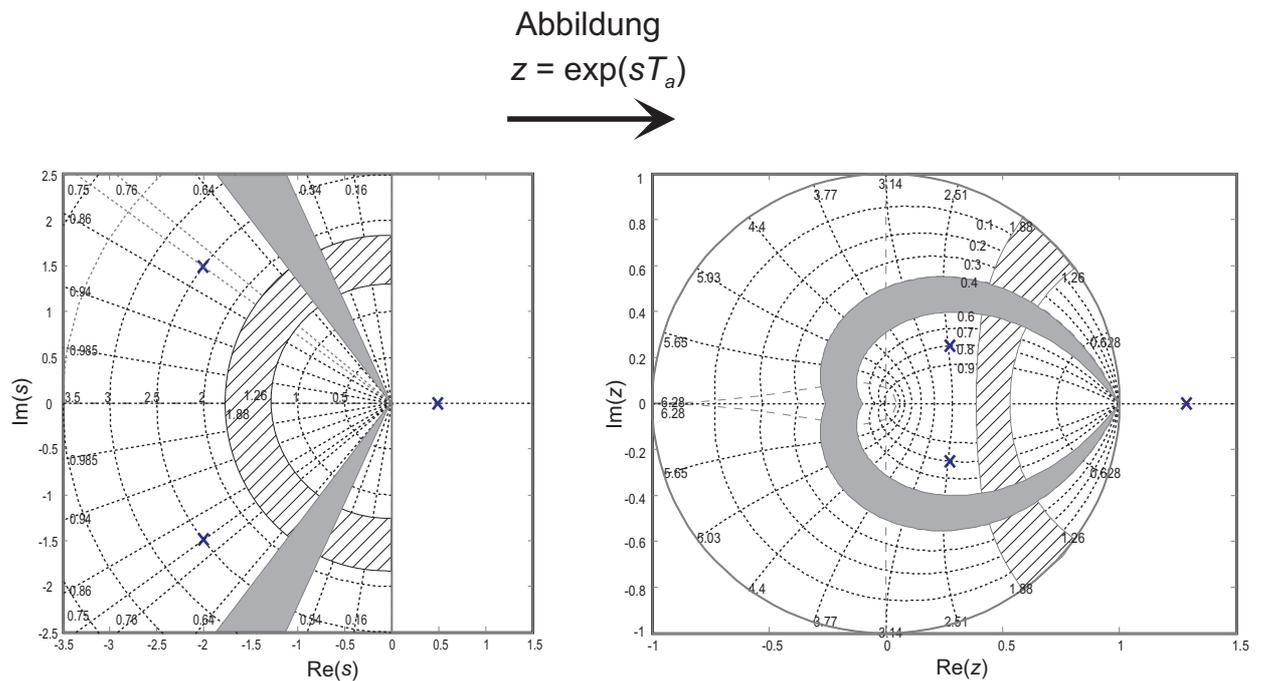


Abbildung 6.7: Zur Abbildung  $z = \exp(sT_a)$  für Linien konstanter Dämpfung  $\xi$  und Linien konstanter Zeitkonstanten  $T$ .

lautet  $t_r = T_1$  (siehe Abschnitt 3.8.1) und die Anstiegszeit  $t_r$  eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes

$$G(s) = \frac{V_2}{1 + 2\xi(sT_2) + (sT_2)^2} \quad \text{mit} \quad 0 < \xi < 1 \quad (6.60)$$

errechnet sich zu

$$t_r = T_2 \exp\left(\frac{\arccos(\xi)}{\tan(\arccos(\xi))}\right) \quad (6.61)$$

**Aufgabe 6.13.** Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (6.61).

**Hinweis:** Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Wendepunkt der Sprungantwort von (6.60).

Als *Faustformel* für die Wahl der Abtastzeit  $T_a$  wird nun verlangt, dass die Anzahl von Abtastpunkten pro Anstiegszeit  $t_r$  im Bereich von 4-10 liegt, also

$$\frac{\min(t_r)}{T_a} \approx 4 - 10. \quad (6.62)$$

### 6.4.3. Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen

Die Zusammenschaltung von  $z$ -Übertragungsfunktionen erfolgt vollkommen analog zu den  $s$ -Übertragungsfunktionen (siehe Abschnitt 3.4.2). Man beachte, dass zwar die Hintereinanderschaltung von Halteglied mit anschließendem Abtaster nach Abbildung 6.8 (oberes Bild) eine Durchschaltung ist, aber dies für die umgekehrte Reihenfolge im Allgemeinen

nicht mehr gilt. Daraus folgt unmittelbar die nachfolgende Beziehung (siehe auch Abbildung 6.8 unteres Bild)

$$\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s)}{s} \right\} \neq \underbrace{\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\}}_{G_1(z)} \underbrace{\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_2(s)}{s} \right\}}_{G_2(z)}. \quad (6.63)$$

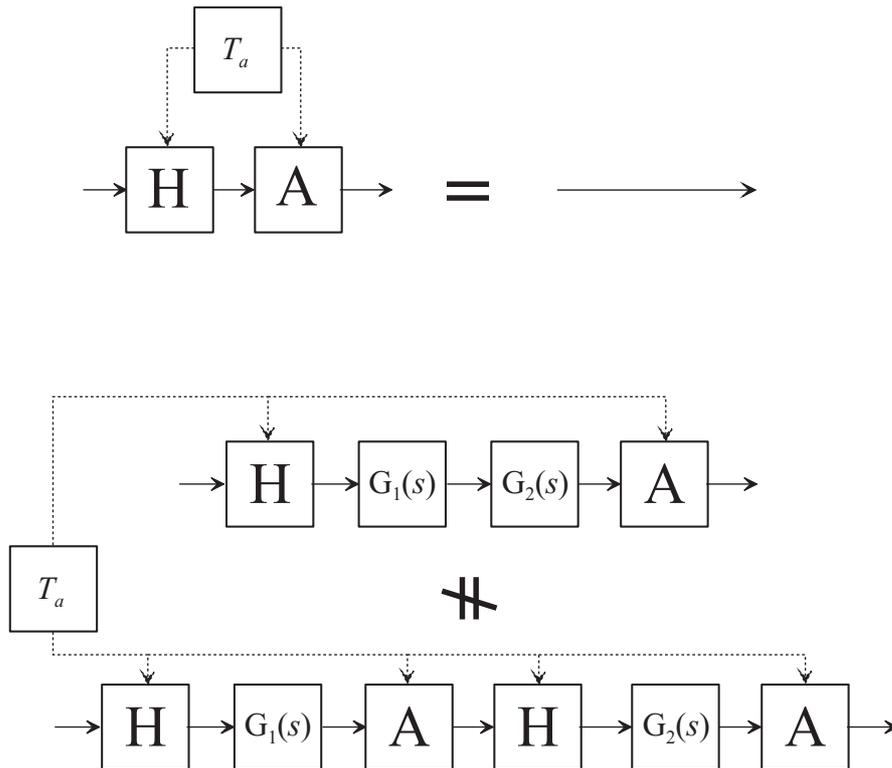


Abbildung 6.8: Zur Hintereinanderschaltung von Abtaster und Halteglied.

#### 6.4.4. Realisierungsproblem

Aus (6.40) ist ersichtlich, dass es sehr einfach ist, zu einem linearen, zeitinvarianten Abtastsystem die Übertragungsfunktion  $G(z)$  zu berechnen. Wie bereits bei zeitkontinuierlichen Systemen (siehe Abschnitt 3.5) versteht man auch im Zeitdiskreten unter dem *Realisierungsproblem* die Aufgabe, zu einer gegebenen Übertragungsfunktion  $G(z)$  eine Zustandsdarstellung in Form eines *Differenzgleichungssystems* mit  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und  $d$  zu bestimmen. Jene Zustandsrealisierungen, die eine minimale Anzahl von Zuständen haben, werden auch als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion  $G(z)$  bezeichnet. Es sei an dieser Stelle betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion  $G(z)$  natürlich keinesfalls eindeutig ist.

**Satz 6.4. (Realisierbarkeit)** Eine Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (6.64)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom  $b(z)$  und  $a(z)$  ist genau dann realisierbar, wenn  $\text{grad}(b(z)) \leq \text{grad}(a(z))$  oder äquivalent dazu

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |G(z)| < \infty \quad (6.65)$$

gilt.

An Hand des Beispiels

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = z \quad (6.66)$$

erkennt man im Folgenbereich

$$y_k = u_{k+1}, \quad (6.67)$$

dass bei einer nichtrealisierbaren  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  zur Berechnung der momentanen Ausgangsgröße  $y_k$  zukünftige Werte der Eingangsgröße  $u_k$  bekannt sein müssen - das System ist also *nicht kausal*.

Im Folgenden sollen analog zum Abschnitt 3.5 zwei kanonische Minimalrealisierungen für die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (6.68)$$

angegeben werden. Die 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform zu (6.68) lautet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \quad (6.69)$$

$$y_k = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d} u_k$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.70)$$

und das zu (6.69) duale System, die so genannte *1-te Standardform* oder *Steuerbarkeitsnormalform*, ist durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} u_k \quad (6.71)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-2} & \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d} u_k$$

gegeben.

#### 6.4.5. BIBO-Stabilität

Auch die Definition und die Sätze der BIBO-Stabilität (**BIBO** - **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) von Abschnitt 3.6 lassen sich direkt auf den zeitdiskreten Fall übertragen.

**Definition 6.1. (BIBO-Stabilität)** Für ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k \end{aligned} \quad (6.72)$$

mit der Eingangsgröße ( $u_k$ ) und der Ausgangsgröße ( $y_k$ ) gelte  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Das System heißt BIBO-stabil, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfolge ( $u_k$ ) eine beschränkte Ausgangsfolge ( $y_k$ ) gehört. D.h. zu jedem finiten  $a > 0$  mit  $|u_k| \leq a$  existiert ein finites  $b > 0$  so, dass  $|y_k| \leq b$  gilt für alle  $k > 0$ .

Die BIBO-Stabilität lässt sich nun sehr einfach anhand der so genannten *Gewichtsfolge* oder *Impulsantwort* ( $g_k$ ) (Antwort ( $y_k$ ) des Systems (6.72) auf die Eingangsfolge ( $u_k$ ) =  $(\delta_k) = (1, 0, 0, \dots)$ ) mit

$$g_k = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}^T \Phi^{k-1} \Gamma & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

überprüfen - es gilt nämlich folgender Satz:

**Satz 6.5. (BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort)** Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem der Form (6.72) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort ( $g_k$ ) nach (6.73) absolut summierbar ist, d.h. die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty \quad (6.74)$$

erfüllt ist.

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität erfolgt über die Übertragungsfunktion  $G(z)$  von (6.72).

**Satz 6.6. (BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion)** Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem der Form (6.72) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für alle Pole  $z_i = \alpha_i + I\omega_i$  der zugehörigen Übertragungsfunktion  $G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma} + d$  gilt

$$|z_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2} < 1. \quad (6.75)$$

## 6.5. Diskreter Frequenzgang

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann auch für Abtastsysteme ein so genannter *diskreter Frequenzgang* definiert werden. Zur Erinnerung an Abschnitt 3.7 sei erwähnt, dass ein BIBO-stabiles System beschrieben durch die Übertragungsfunktion  $G(s)$  auf eine harmonische Eingangsgröße  $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  im eingeschwungenen Zustand mit der Ausgangsgröße  $y(t) = A_0 |G(I\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \arg(G(I\omega_0)))$  antwortet. Die komplexwertige Funktion  $G(I\omega)$  in der reellen Variablen  $\omega$  wird dann als *kontinuierlicher (komplexer) Frequenzgang* bezeichnet. Auf analoge Art und Weise lässt sich für ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem gemäß Abbildung 6.5 mit der BIBO-stabilen  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  der so genannte diskrete Frequenzgang definieren. Dazu betrachte man eine Eingangsfolge  $(u_k)$  der Form

$$(u_k) = (A_0 \sin(\omega_0 T_a k + \varphi_0)), \quad (6.76)$$

deren Trägerschwingung die harmonische Funktion  $A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  ist. Unter der Annahme, dass die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  keine Null- und Polstellen bei  $e^{I\omega_0 T_a}$  besitzt, ergibt sich die Ausgangsfolge im *eingeschwungenen Zustand* (d.h. nach Abklingen der transienten Vorgänge) zu

$$(y_k) = (A_0 |G(e^{I\omega_0 T_a})| \sin(\omega_0 T_a k + \varphi_0 + \arg(G(e^{I\omega_0 T_a})))) . \quad (6.77)$$

Die Beziehung (6.77) lässt sich nun in der Form interpretieren, dass die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand wieder eine Folge ist, deren Trägerschwingung die gleiche Frequenz  $\omega_0$  wie die Trägerschwingung der Eingangsfolge  $(u_k)$  hat, lediglich die Amplitude und die Phase ändern sich mit  $|G(e^{I\omega_0 T_a})|$  bzw.  $\arg(G(e^{I\omega_0 T_a}))$ . Abbildung 6.9 veranschaulicht diesen Sachverhalt für  $Y_0 = |G(e^{I\omega_0 T_a})| A_0$  und  $\psi_0 = \arg(G(e^{I\omega_0 T_a}))$ . Wertet man die Übertragungsfunktion  $G(z)$  für  $z = e^{sT_a} \Big|_{s=I\omega}$  aus, so ist mit  $G(e^{I\omega T_a})$  eine komplexwertige Funktion der reellen Größe  $\omega$  gegeben, die man auch *diskreten Frequenzgang* der Übertragungsfunktion  $G(z)$  bezeichnet. Wie man Abbildung 6.10 entnehmen kann, ist die Zuordnung einer Trägerschwingung zu einer Folge von Abtastwerten keinesfalls eindeutig. Man kann nun einfach zeigen, dass eine *eindeutige Zuordnung* zwischen einer harmonischen Trägerschwingung und einer Folge nur dann möglich ist, wenn die Frequenz  $\omega_0$  und die Abtastzeit  $T_a$  folgender Ungleichung

$$0 \leq \omega_0 < \frac{\pi}{T_a} = \frac{\omega_a}{2} \quad \text{mit} \quad \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad (6.78)$$

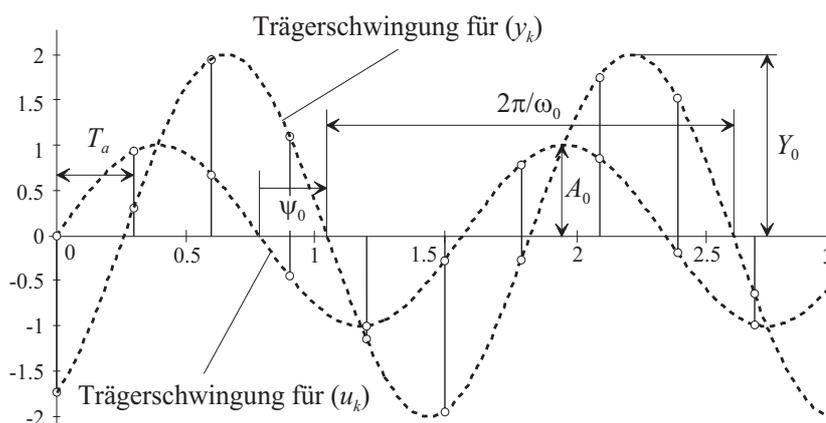


Abbildung 6.9: Zum diskreten Frequenzgang.

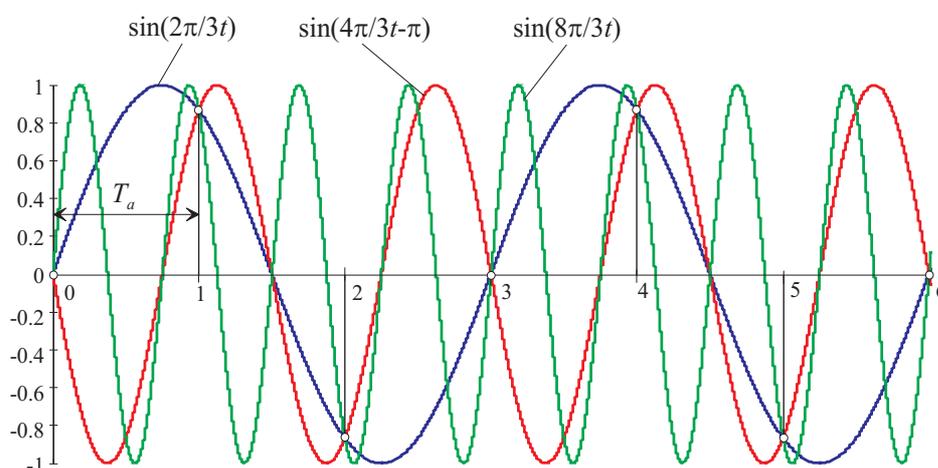


Abbildung 6.10: Mehrdeutige Zuordnung zwischen Folgenwerten und Trägerschwingung.

genügen. Dies ist auch der Grund, warum in MATLAB der diskrete Frequenzgang lediglich für das Frequenzintervall  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$  mit der Abtastzeit  $T_a$  gezeichnet wird. Würde man nämlich den diskreten Frequenzgang  $G(e^{I\omega T_a})$  für Frequenzen  $\omega > \frac{\pi}{T_a}$  zeichnen, dann würde sich der Frequenzgang unendlich oft periodisch fortsetzen. Man überzeugt sich leicht, dass für das Frequenzintervall  $\frac{\pi}{T_a} \leq \omega < \frac{2\pi}{T_a}$  der Ausdruck  $G(e^{I\omega T_a})$  lediglich die konjugiert komplexen Werte von  $G(e^{I\omega T_a})$  für  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$  liefert, denn es gilt

$$e^{I\omega T_a} = \cos(\omega T_a) + I \sin(\omega T_a) \quad \text{und} \quad e^{I(2\pi - \omega T_a)} = \cos(\omega T_a) - I \sin(\omega T_a) \quad (6.79)$$

und somit

$$G(e^{I(2\pi - \omega T_a)}) = G^*(e^{I\omega T_a}), \quad (6.80)$$

wobei  $G^*$  das konjugiert Komplexe von  $G$  bezeichnet. Abbildung 6.11 veranschaulicht diesen Sachverhalt an Hand des Frequenzganges der  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z) = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$  als Abtastsystem für das zeitkontinuierliche System mit der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  und der Abtastzeit  $T_a = 1$  s. Als ein Anwendungsbeispiel soll für das Blockschaltbild

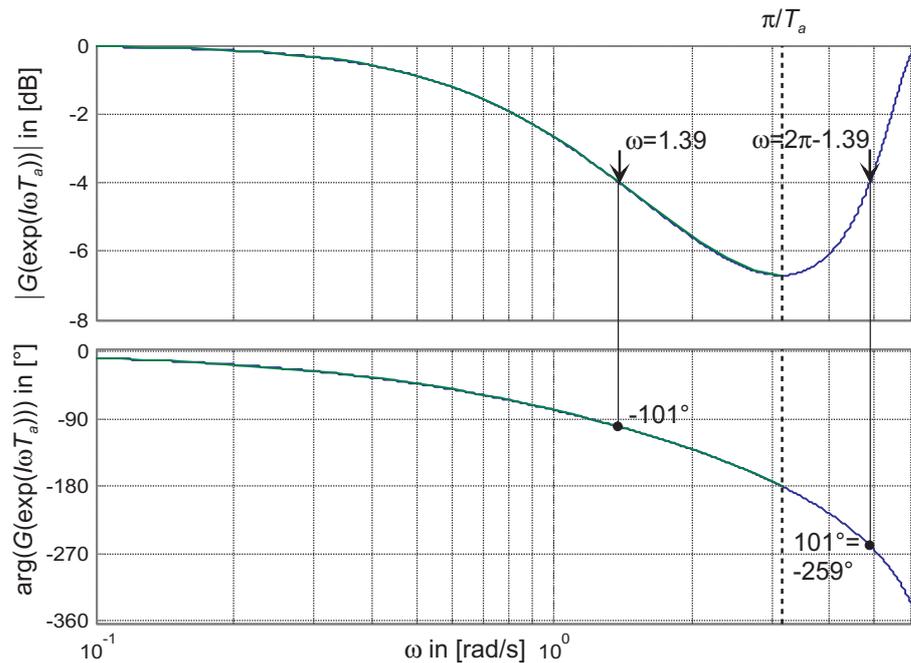


Abbildung 6.11: Zum diskreten Frequenzgang.

von Abbildung 6.12 die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand für

$$G_1(s) = \frac{6}{s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+5} \quad \text{und} \quad d(t) = 3 \cos(2t) \quad (6.81)$$

berechnet werden.

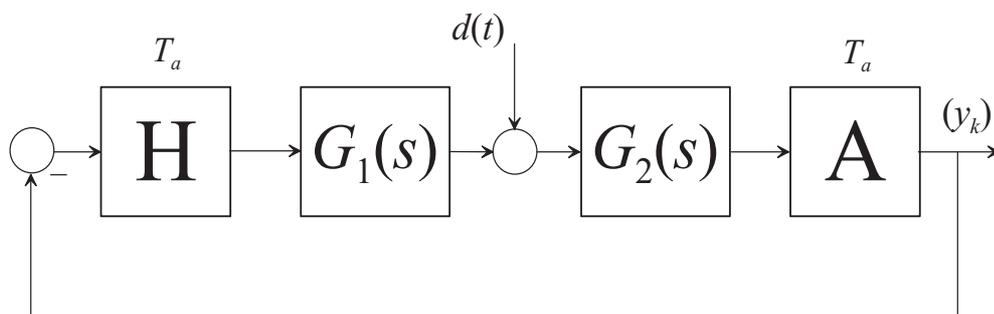


Abbildung 6.12: Blockschaltbild zum Beispiel für die Berechnung des eingeschwungenen Zustandes.

In einem ersten Schritt wird das Blockschaltbild von Abbildung 6.12 in der Form von Abbildung 6.13 umgezeichnet.

Im eingeschwungenen Zustand gilt für  $\tilde{d}(t)$  die Beziehung

$$\tilde{d}(t) = |G_2(2I)| 3 \cos(2t + \arg(G_2(2I))) \quad (6.82)$$

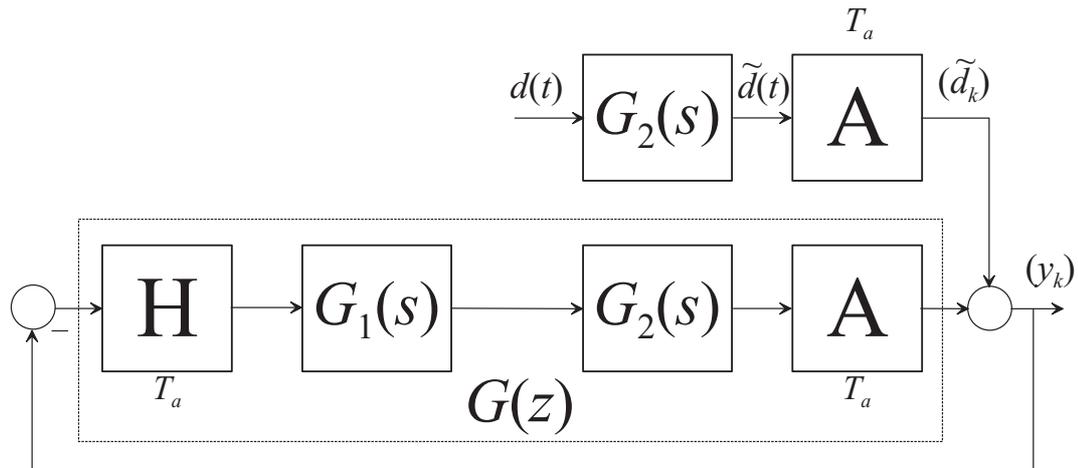


Abbildung 6.13: Äquivalentes umgezeichnetes Blockschaltbild von Abbildung 6.12.

bzw. für das abgetastete Signal  $(\tilde{d}_k) = (\tilde{d}(kT_a))$  erhält man

$$(\tilde{d}_k) = |G_2(2I)| 3 \cos(k2T_a + \arg(G_2(2I))) . \quad (6.83)$$

Diese Störfolge  $(\tilde{d}_k)$  wirkt nun auf den Regelkreis mit der  $z$ -Übertragungsfunktion

$$T_{\tilde{d},y}(z) = \frac{y_z(z)}{\tilde{d}_z(z)} = \frac{1}{1 + G(z)} \quad \text{mit} \quad G(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s)}{s} \right\} . \quad (6.84)$$

Damit folgt für die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand

$$(y_k) = (|T_{\tilde{d},y}(e^{I2T_a})| |G_2(2I)| 3 \cos(k2T_a + \arg(G_2(2I)) + \arg(T_{\tilde{d},y}(e^{I2T_a})))) . \quad (6.85)$$

**Aufgabe 6.14.** Berechnen Sie das Ergebnis von  $(y_k)$  in (6.85) für  $T_a = 1$  s.

**Ergebnis:** Die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand lautet

$$(y_k) = (1.0546 \cos(2k - 3.06^\circ)) .$$

Der diskrete Frequenzgang  $G(z)|_{z=e^{I\omega T_a}}$  ist im Gegensatz zum kontinuierlichen Frequenzgang  $G(s)|_{s=I\omega}$  eine *transzendente Funktion* in  $\omega$ . Dies hat den großen Nachteil, dass die Vorteile der logarithmischen Darstellung im Bode-Diagramm, nämlich auf einfache Art und Weise den Einfluss der Teilsysteme von Serienschaltungen zu erkennen, da durch die Logarithmusbildung Multiplikationen zu Additionen und Divisionen zu Subtraktionen werden, verloren geht. Aus diesem Grund soll im Weiteren der so genannte *transformierte Frequenzgang* über die *Bilineartransformation nach Tustin* eingeführt werden.

## 6.6. Tustin-Transformation

Im Sinne der vorigen Überlegungen ist es also das Ziel, die Frequenz  $\omega$  so zu transformieren, dass in einer *transformierten Frequenz*  $\Omega$  der Frequenzgang des Abtastsystems eine

*rationale* Funktion ist. Dies ist offensichtlich dann möglich, wenn man eine Transformation so findet, dass die obere Hälfte des Einheitskreises  $e^{I\omega T_a}$  im Intervall  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$  der komplexen  $z$ -Ebene auf die imaginäre Achse in der komplexen  $w$ -Ebene abgebildet wird. Genau dies kann aber mit Hilfe einer bilinearen Transformation der Form

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.86)$$

erreicht werden. Setzt man nämlich in (6.86) für  $z = e^{I\omega T_a}$  ein, so erhält man

$$\frac{e^{I\omega T_a} - 1}{e^{I\omega T_a} + 1} = \frac{e^{I\frac{\omega T_a}{2}} - e^{-I\frac{\omega T_a}{2}}}{e^{I\frac{\omega T_a}{2}} + e^{-I\frac{\omega T_a}{2}}} = \tanh\left(I\frac{\omega T_a}{2}\right) = I \tan\left(\frac{\omega T_a}{2}\right). \quad (6.87)$$

Bezeichnet man mit  $v$  den Imaginärteil der komplexen Variablen  $w$ , so ist durch (6.87) die Beziehung

$$v = \tan\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) \quad (6.88)$$

gegeben. Es hat sich nun als sinnvoll erwiesen, den Normierungsfaktor  $\frac{T_a}{2}$  auch bei der Variablen  $v = \frac{T_a}{2}\Omega$  zu verwenden, wodurch sich die so genannte transformierten Frequenz  $\Omega$  in der Form

$$\Omega = \frac{2}{T_a} \tan\left(\omega \frac{T_a}{2}\right) \quad (6.89)$$

errechnet. Man erkennt unmittelbar, dass durch die Frequenztransformation (6.89) das Intervall der Frequenz  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$  auf das Intervall der transformierten Frequenz  $0 \leq \Omega < \infty$  abgebildet wird. Die Abbildung (6.86) lässt sich nun mit  $q = \frac{2}{T_a}w$  auf die gesamte komplexe Ebene erweitern

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.90)$$

und sie ist, abgesehen vom Punkt  $q = \frac{2}{T_a}$ , umkehrbar eindeutig mit der inversen Transformation

$$z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}. \quad (6.91)$$

Die Transformation (6.91) wird auch als *Bilineartransformation nach Tustin* bezeichnet. Durch die Vorschrift (6.90) wird nun der Einheitskreis der komplexen  $z$ -Ebene auf die imaginäre Achse der komplexen  $q$ -Ebene sowie das Innere (Äußere) des Einheitskreises der  $z$ -Ebene auf die linke (rechte) offene  $q$ -Ebene abgebildet. Abbildung 6.14 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

**Definition 6.2. (Transformierter Frequenzgang eines Abtastsystems)** Unter der  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  zu einer  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  eines Abtastsystems versteht man die Beziehung

$$G^\#(q) = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}}. \quad (6.92)$$

Die Einschränkung von  $G^\#(q)$  auf die imaginäre Achse der komplexen  $q$ -Ebene  $G^\#(I\Omega)$  bezeichnet man als den transformierten Frequenzgang. Der transformierte Frequenzgang  $G^\#(I\Omega)$  ist eine algebraische Funktion in  $\Omega$  und die transformierte Frequenz  $\Omega$  hängt über die Beziehung (6.89) mit der realen Frequenz  $\omega$  zusammen.

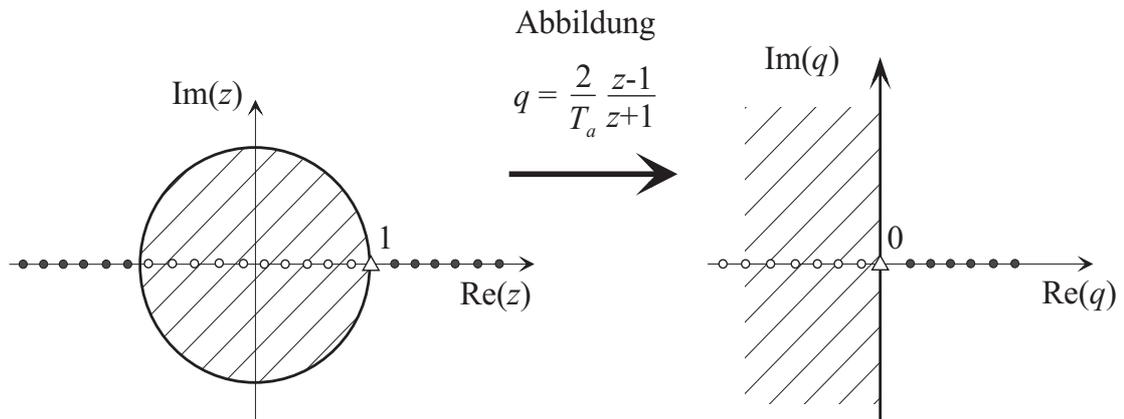


Abbildung 6.14: Zur Tustin-Transformation.

Um nun zu einem kontinuierlichen System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  des zugehörigen Abtastsystems (siehe Abbildung 6.5) mit der Abtastzeit  $T_a$  zu berechnen, müsste man folgende Rechenoperationen

$$G^\#(q) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \bigg|_{z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}} \quad (6.93)$$

durchführen. Es hat sich aber in vielen Fällen ein anderer Weg als sinnvoll erwiesen, nämlich die Übertragungsfunktion  $G(s)$  in Partialbrüche zu zerlegen und die  $q$ -Übertragungsfunktion direkt über nachfolgende Korrespondenztabelle zu bestimmen.

$G(s)$	$G^\#(q)$
1	1
$\frac{1}{s}$	$\frac{1 - q \frac{T_a}{2}}{q}$
$\frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A}}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{q^2}$
$\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)^2}$	$\frac{\left(1 - \frac{T_a}{2}q\right) \left(1 + \frac{q}{B}\right)}{\left(1 + \frac{q}{A}\right)^2}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$ , $B = \frac{A}{1 + aA \frac{T_a^2}{4} - \frac{a}{A}}$

Tabelle 6.1: Korrespondenzen zur  $q$ -Übertragungsfunktion.

**Aufgabe 6.15.** Zeigen Sie die Gültigkeit der Korrespondenzen von Tabelle 6.1 indem Sie die Beziehung (6.93) für die Übertragungsfunktionen  $G(s)$  auswerten.

Als Beispiel berechne man die  $q$ -Übertragungsfunktion des Abtastsystems mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s-5)}. \quad (6.94)$$

Die Partialbruchzerlegung von  $G(s)$  lautet

$$G(s) = -\frac{5}{3} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{s}{5}} \quad (6.95)$$

und somit ergibt sich die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  nach Tabelle 6.1 zu

$$G^\#(q) = -\frac{5}{3} \frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A_1}} - \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A_2}} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{T_a} \tanh\left(1 \frac{T_a}{2}\right) \\ A_2 &= \frac{2}{T_a} \tanh\left(-5 \frac{T_a}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.96)$$

Der kontinuierliche Frequenzgang  $G(j\omega)$  von (6.94) und der transformierte Frequenzgang  $G^\#(j\Omega)$  von (6.96) für die Abtastzeiten  $T_a = 1, 0.1$  und  $0.01$  sind Abbildung 6.15 zu entnehmen. Man erkennt aus Abbildung 6.15, dass für kleine Frequenzen  $\omega$  der kontinu-

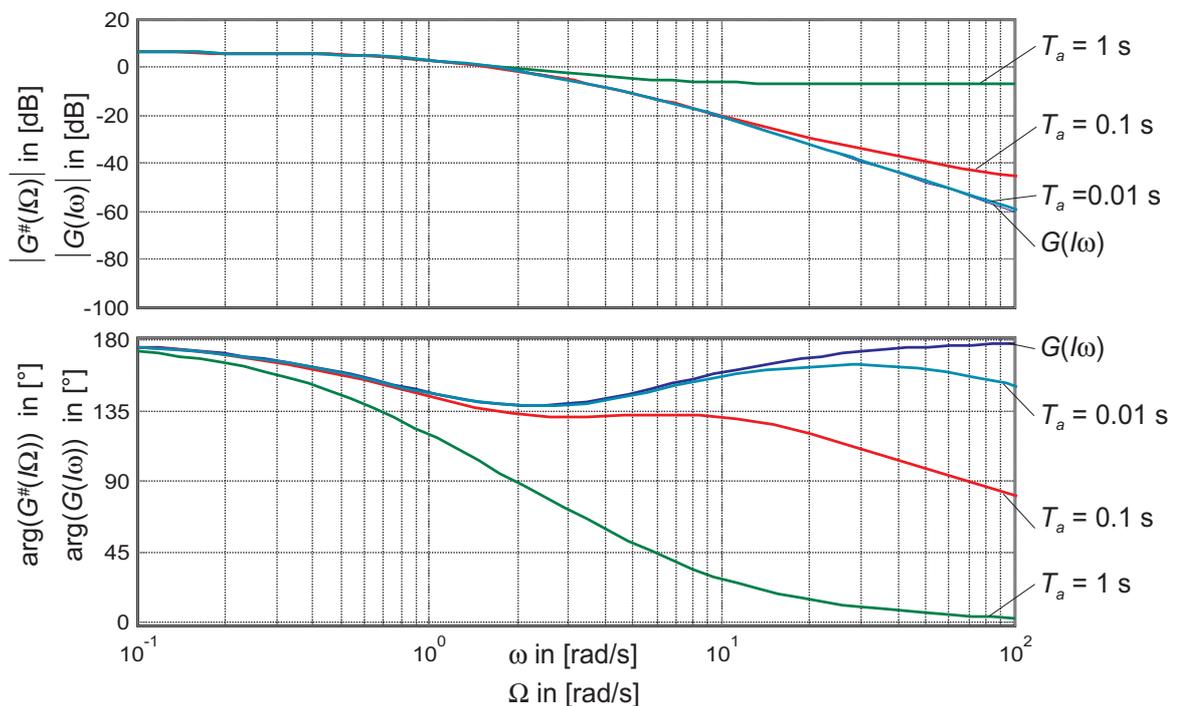


Abbildung 6.15: Vergleich des kontinuierlichen Frequenzganges mit dem transformierten Frequenzgang für verschiedene Abtastzeiten  $T_a$ .

ierliche und der transformierte Frequenzgang gleich sind. Im Grenzfall  $T_a \rightarrow 0$  geht die

$q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  eines Abtastsystems nach Abbildung 6.5 in die zugehörige kontinuierliche Übertragungsfunktion  $G(s)$  über. Weiters ist aus (6.89) ersichtlich, dass für  $\omega T_a \ll 1$  gilt  $\tan(\omega \frac{T_a}{2}) \approx \omega \frac{T_a}{2}$  und damit auch  $\Omega \approx \omega$ .

Im Nachfolgenden sollen noch einige Eigenschaften der  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  angegeben werden: Dazu betrachte man ein Abtastsystem nach Abbildung 6.5 mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  in normierter Form

$$G(s) = \frac{V z(s)}{s^\rho n(s)} \quad \text{mit} \quad z(0) = n(0) = 1, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots \quad (6.97)$$

mit  $\text{grad}(z(s)) < \text{grad}(n(s)) + \rho$ . Aus der Korrespondenztabelle 6.1 ist ersichtlich, dass ein Pol  $s_i = a$  von  $G(s)$  in einen Pol

$$q_i = A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2} a\right) \quad (6.98)$$

von  $G^\#(q)$  übergeht. Setzt man in (6.98) für  $a = \alpha + I\omega$  ein, so erhält man

$$A = \frac{2 \sinh(T_a \alpha) + I \sin(T_a \omega)}{T_a \cosh(T_a \alpha) + \cos(T_a \omega)}. \quad (6.99)$$

Damit lassen sich folgende Eigenschaften zusammenfassen:

- (1) **Stabilität:** Ein Abtastsystem nach Abbildung 6.5 ist genau dann BIBO-stabil, wenn alle Pole der  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  in der linken offenen  $q$ -Halbebene liegen.
- (2) **Verstärkungsfaktor:** Der Verstärkungsfaktor  $V$  von  $G(s)$  und zugehörigem  $G^\#(q)$  sind gleich.
- (3) **Pole:** Aus (6.99) folgt unmittelbar, dass ein komplexwertiger (reeller) Pol von  $G(s)$  in einen komplexwertigen (reellen) Pol von  $G^\#(q)$  sowie ein stabiler Pol von  $G(s)$  in einen stabilen Pol von  $G^\#(q)$  übergeht und, dass Pole von  $G(s)$  auf der  $I\omega$ -Achse auf Pole von  $G^\#(q)$  auf der  $I\Omega$ -Achse transformiert werden.
- (4) **Sprungfähigkeit:** Zur Erinnerung sei erwähnt, dass  $G(s)$  sprunghfähig ist, wenn gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \neq 0 \quad (6.100)$$

bzw. in Worten ausgedrückt, der Zähler- und Nennergrad von  $G(s)$  sind gleich. Mit der Beziehung  $z = e^{sT_a}$  (siehe (B.7)) folgt damit für die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$ , dass  $G(z)$  sprunghfähig ist, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) \neq 0 \quad (6.101)$$

bzw. mit  $q = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}$  (siehe (6.90)) erhält man für die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  die Bedingung

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} G^\#(q) \neq 0 \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a}. \quad (6.102)$$

Als Konsequenz muss jede  $q$ -Übertragungsfunktion, die zu einer  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s)$  mit Zählergrad echt kleiner als Nennergrad berechnet wurde, eine Nullstelle bei  $\Omega_0$  aufweisen.

- (5) **Realisierbarkeit:** Eine  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  ist genau dann realisierbar, wenn gilt

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} |G^\#(q)| < \infty, \quad (6.103)$$

d.h.,  $G^\#(q)$  darf keine Polstelle bei  $\Omega_0$  aufweisen.

**Aufgabe 6.16.** Beweisen Sie die Eigenschaften (1), (2), (3) und (5).

Die Eigenschaften (2), (3) und (4) bedingen, dass die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  zur Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (6.97) nachfolgende Struktur hat

$$G^\#(q) = \frac{V}{q^\rho} \frac{Z(q) \left(1 - \frac{q}{\Omega_0}\right)}{N(q)} \quad \text{mit} \quad Z(0) = N(0) = 1, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots \quad (6.104)$$

**Aufgabe 6.17.** Berechnen Sie die  $q$ -Übertragungsfunktionen zu den zeitkontinuierlichen Systemen mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = 10 \frac{s-2}{s^2(s-5)}, \quad G_2(s) = \frac{s}{s-2} \quad \text{und} \quad G_3(s) = 4 \frac{s^2 - 4s + 1}{s^2 + s + 1}$$

für die Abtastzeit  $T_a = 0.1$  s.

**Hinweis:** Überprüfen Sie die Ergebnisse mit MATLAB. Dazu seien folgende Befehle angegeben:

$$G(s) \rightarrow G(z) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{c2d}(G(s), T_a, \text{'zoh'})$$

$$G(z) \rightarrow G^\#(q) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{d2c}(G(z), \text{'tustin'})$$

$$G^\#(q) \rightarrow G(z) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{c2d}(G(q), T_a, \text{'tustin'})$$

**Aufgabe 6.18.** Gegeben ist das Abtastsystem von Abbildung 6.5 mit dem linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1] \mathbf{x} + \frac{1}{2} u \end{aligned}$$

und der Abtastzeit  $T_a = 0.5$  s. Berechnen Sie die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsfolge

$$(u_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right).$$

**Hinweis:** Berechnen Sie das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen:

- (1) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(z)$  und ermitteln Sie die eingeschwungene Lösung über den diskreten Frequenzgang  $G(e^{I\omega T_a})$ .
- (2) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  und ermitteln Sie die eingeschwungene Lösung über den transformierten Frequenzgang  $G^\#(I\Omega)$ , indem Sie die anregende Frequenz  $\omega_0$  über die Beziehung (6.89) in ein  $\Omega_0$  umrechnen.

**Ergebnis:** Die Ausgangsfolge  $(y_k)$  im eingeschwungenen Zustand lautet

$$(y_k) = 1.3 - \frac{1}{2}0.736 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k + 26.88^\circ\right).$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass man Abtastsysteme mit Hilfe der  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  im Wesentlichen gleich wie zeitkontinuierliche Systeme mit der  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s)$  behandeln kann. Da der transformierte Frequenzgang  $G^\#(I\Omega)$  eine rationale Funktion in der transformierten Frequenz  $\Omega$  ist, lassen sich Bode-Diagramme und Nyquist-Ortskurven auf gleiche Art und Weise wie im zeitkontinuierlichen Fall für  $G(I\omega)$  konstruieren.

## 6.7. Stabilitätskriterien

Ein Abtastsystem mit der  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  ist nach Satz 6.6 genau dann BIBO-stabil, wenn alle Pole im offenen Inneren des Einheitskreises liegen oder zufolge von (6.90), (6.91) bzw. Abbildung 6.14 sämtliche Pole der zugehörigen  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  sich in der linken offenen  $q$ -Halbebene befinden. Mit Hilfe des numerischen Verfahrens von Routh-Hurwitz (siehe Abschnitt 4.4.1) kann von einem Polynom  $n(q)$  ohne explizite Berechnung der Wurzeln festgestellt werden, ob sämtliche Wurzeln von  $n(q)$  in der linken offenen  $q$ -Halbebene liegen oder nicht, womit für die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  die obige Aufgabe gelöst ist. Bei der  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  will man nun wissen, ob sämtliche Polstellen im offenen Inneren vom Einheitskreis liegen oder nicht. Analog zur Definition 4.2 eines Hurwitzpolynoms lässt sich auch ein so genanntes Einheitskreispolynom definieren:

**Definition 6.3. (Einheitskreispolynom)** Man nennt ein Polynom

$$n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (6.105)$$

Einheitskreispolynom, wenn alle Nullstellen von  $n(z)$  im offenen Inneren des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene liegen bzw. für alle Wurzeln  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt  $|z_i| < 1$ .

### 6.7.1. Numerisches Verfahren von Jury

Allen weiteren Betrachtungen liege ein Polynom der Form (6.105) mit reellen Koeffizienten  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , zugrunde. Da das Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, sind

die Nullstellen  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entweder reell oder konjugiert komplex und das Polynom (6.105) lässt sich in der Form

$$n(z) = a_n (z - z_n) (z - z_{n-1}) \dots (z - z_2) (z - z_1) \quad (6.106)$$

darstellen. Aus (6.106) erkennt man, dass der Koeffizient  $a_0$  von (6.105) folgende Darstellung

$$(-1)^n a_0 = a_n \prod_{i=1}^n z_i \quad (6.107)$$

besitzt (*Wurzelsatz von Vieta*). Damit kann unmittelbar anhand der Koeffizienten des Polynoms eine notwendige Bedingung für ein Einheitskreispolynom angegeben werden:

**Satz 6.7. (Notwendige Bedingung für ein Einheitskreispolynom)** Für die Koeffizienten  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , eines Einheitskreispolynoms  $n(z)$  muss die Bedingung

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad (6.108)$$

erfüllt sein.

**Aufgabe 6.19.** Beweisen Sie Satz 6.7.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Einheitskreispolynom  $n(z)$  ist durch das so genannte Jury Verfahren gegeben.

**Satz 6.8. (Jury Verfahren)** Ein Polynom  $n(z)$  der Form (6.105) mit den reellen Koeffizienten  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  und  $a_n > 0$  ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn alle Elemente  $a_{j,n}$ ,  $j = 0, \dots, n$  der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle

$z^n$	$a_{n,n} = a_n$	$a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$\dots$	$a_{n,1} = a_1$	$a_{n,0} = a_0$	
	$a_{n,0} = a_0$	$a_{n,1} = a_1$	$\dots$	$a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$a_{n,n} = a_n$	$\lambda_n = \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}}$
$z^{n-1}$	$\underbrace{a_n - \lambda_n a_0}_{a_{n-1,n}}$	$\underbrace{a_{n-1} - \lambda_n a_1}_{a_{n-1,n-1}}$	$\dots$	$\underbrace{a_1 - \lambda_n a_{n-1}}_{a_{n-1,1}}$	0	
	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$\dots$	$a_{n-1,n}$	0	$\lambda_{n-1} = \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n}}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	
	$a_{0,n}$	0				

positiv sind. Wenn keines der  $a_{j,n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , identisch Null ist, dann ist die Anzahl der negativen  $a_{j,n}$  gleich der Anzahl der Nullstellen von  $n(z)$  außerhalb des Einheitskreises.

Auf einen Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet, er ist aber in der angeführten Literatur nachzulesen.

Als Beispiel bestimme man für das Polynom

$$n(z) = -z^2 + a_1 z - a_0 \quad (6.109)$$

jene Bedingungen für die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$ , dass  $n(z)$  ein Einheitskreispolynom ist. Die Anwendung des Verfahrens von Jury setzt voraus, dass der höchstwertigste Koeffizient  $a_2 > 0$  ist. Um dies zu erfüllen, muss  $n(z)$  mit  $(-1)$  multipliziert werden, also

$$\tilde{n}(z) = -n(z) = z^2 - a_1z + a_0. \quad (6.110)$$

Die Tabelle für das Verfahren von Jury lautet:

$z^2$	1	$-a_1$	$a_0$	
	$a_0$	$-a_1$	1	$\lambda_2 = a_0$
$z^1$	$1 - a_0^2$	$-a_1 + a_1a_0$	0	
	$-a_1 + a_1a_0$	$1 - a_0^2$	0	$\lambda_1 = \frac{-a_1 + a_1a_0}{1 - a_0^2}$
$z^0$	$1 - a_0^2 - \frac{(-a_1 + a_1a_0)^2}{1 - a_0^2}$	0		
	$1 - a_0^2 - \frac{(-a_1 + a_1a_0)^2}{1 - a_0^2}$	0		

(6.111)

Das Polynom  $\tilde{n}(z)$  und damit  $n(z)$  ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn die Bedingungen

$$\underbrace{1 - a_0^2 > 0}_{-1 < a_0 < 1} \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{\overbrace{(1 - a_0)}^{>0} \overbrace{(a_0 + a_1 + 1)}^{>0} \overbrace{(a_0 - a_1 + 1)}^{>0}}{(a_0 + 1)}}_{a_1 < a_0 + 1 \wedge a_1 > -(a_0 + 1)} > 0$$

erfüllt sind. Abbildung 6.16 zeigt das zugehörige Gebiet in der  $(a_0, a_1)$ -Ebene.

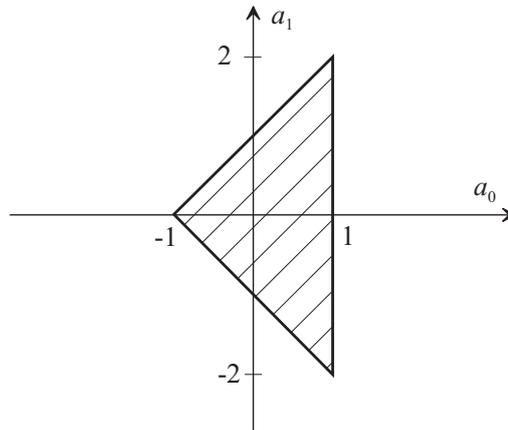


Abbildung 6.16: Zulässiges Gebiet der Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$ .

**Aufgabe 6.20.** Sind nachfolgende Polynome

$$\begin{aligned} n_1(z) &= z^2 - 1.5z + 0.9 \\ n_2(z) &= z^3 + 5z^2 - 0.25z - 1.25 \\ n_3(z) &= z^3 - 1.7z^2 + 1.7z - 0.7 \end{aligned}$$

Einheitskreispolynome?

**Ergebnis:** Nur das Polynom  $n_1(z)$  ist ein Einheitskreispolynom.

**Aufgabe 6.21.** Gegeben ist der digitale Regelkreis von Abbildung 6.17 mit

$$G(s) = \frac{6}{s} \quad \text{und} \quad R(z) = \frac{z - A}{z - 1}.$$

Bestimmen Sie den Wertebereich des Parameters  $A$  und der Abtastzeit  $T_a > 0$  so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist.

**Ergebnis:** Der Wertebereich des Parameters  $A$  in Abhängigkeit von der Abtastzeit  $T_a$  lautet  $0 < A < \min\left(1, \frac{1}{3T_a}, -1 + \frac{2}{3T_a}\right)$ .

### 6.7.2. Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium

Wie im zeitkontinuierlichen Fall (siehe Abschnitt 4.4.3) ist auch bei Abtastsystemen das Nyquist-Kriterium auf Regelkreise der Form nach Abbildung 6.17 mit der  $q$ -Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L^\#(q) = \frac{z_L(q)}{n_L(q)} = R^\#(q) G^\#(q) \quad (6.112)$$

zugeschnitten. Auch hier wird wieder vorausgesetzt, dass der Regelkreis von Abbildung

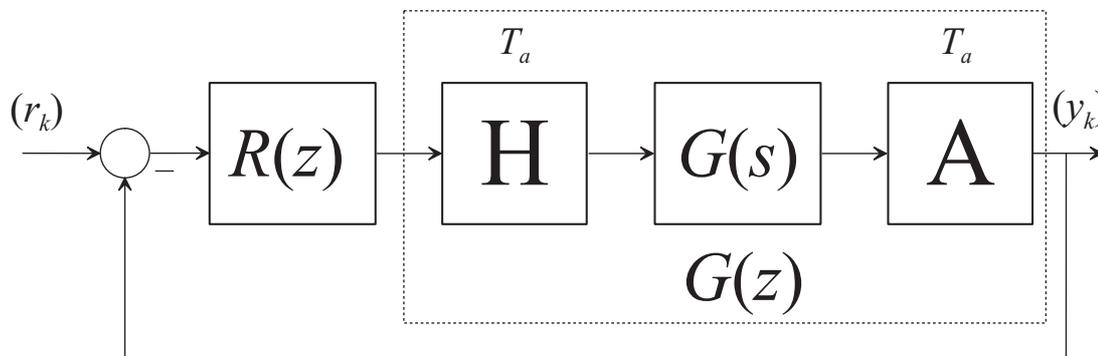


Abbildung 6.17: Digitaler Regelkreis.

6.17 nicht degeneriert ist, d.h. die Führungsübertragungsfunktion  $T_{r,y}^\#(q)$  ist realisierbar ( $T_{r,y}(z)$  ist kausal) bzw. es gilt die Bedingung

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} |T_{r,y}^\#(q)| < \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{q \rightarrow \Omega_0} L^\#(q) \neq -1. \quad (6.113)$$

Damit kann nachfolgender Satz angegeben werden:

**Satz 6.9. (BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises)** Der Abtastregelkreis von Abbildung 6.17 mit der  $q$ -Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  von (6.112) und den teilerfremden Polynomen  $z_L(q)$  und  $n_L(q)$  ist genau dann BIBO-stabil, wenn gilt

- (1)  $\lim_{q \rightarrow \infty} L^\#(q) \neq -1$  und  
 (2)  $z_L(q) + n_L(q)$  ist ein Hurwitzpolynom.

**Aufgabe 6.22.** Zeigen Sie Satz 6.9.

Das Nyquist-Kriterium für Abtastsysteme ist vollkommen identisch zum zeitkontinuierlichen Fall und soll hier der Vollständigkeit halber kurz wiederholt werden (siehe Satz 4.5):

**Satz 6.10. (Nyquist-Kriterium)** Der geschlossene Regelkreis  $T_{r,y}^\#(q)$  nach Abbildung 6.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von  $1 + L^\#(q)$  folgender Bedingung

$$\Delta \arg(1 + L^\#(I\Omega)) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)) \pi \quad (6.114)$$

genügt, wobei mit  $N_-(n_L)$  und  $N_+(n_L)$  die Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $n_L(q)$  in der linken offenen und in der rechten offenen  $q$ -Halbebene gemeint sind.

**Aufgabe 6.23.** Überprüfen Sie das Ergebnis von Aufgabe 6.21 mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums von Satz 6.10 für die Abtastzeit  $T_a = 0.4$  s.

Auch die modifizierte Version des Nyquist-Kriteriums gemäß Satz 4.6 lässt sich auf den zeitdiskreten Fall übertragen.

Dazu betrachte man in einem ersten Schritt die  $s$ -Übertragungsfunktion  $G(s) = \exp(-sT_t)$  des Totzeit-Systems  $y(t) = u(t - T_t)$ . Nimmt man nun an, dass die Totzeit  $T_t$  ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit  $T_a$  ist, also  $T_t = nT_a$  mit  $n \in \mathbb{N}_0^+$  gilt, dann lauten die zugehörige  $z$ - und  $q$ -Übertragungsfunktionen

$$G(z) = (e^{sT_a})^{-n} = z^{-n} \quad \text{und} \quad G^\#(q) = \left( \frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{T_a}{2}q} \right)^n. \quad (6.115)$$

Man erkennt, dass in diesem Fall die  $z$ - und  $q$ -Übertragungsfunktionen des Totzeitgliedes algebraische Funktionen in  $z$  bzw.  $q$  sind. Der nachfolgende Satz gilt demnach auch für Systeme mit Totzeiten, die die obige Bedingung erfüllen.

**Satz 6.11. (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung)** Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  in folgender Form

$$L^\#(q) = \frac{V z_L(q)}{q^\rho n_L(q)}, \quad z_L(0) = n_L(0) = 1 \quad (6.116)$$

mit den teilerfremden Polynomen  $z_L(q)$  und  $q^\rho n_L(q)$  darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (A) Der Verstärkungsfaktor  $V$  ist positiv,  
 (B)  $\text{grad}(n_L(q)) + \rho \geq \text{grad}(z_L(q))$ ,

- (C) das Polynom  $n_L(q)$  ist ein Hurwitzpolynom und für  $\rho$  gilt  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ,
- (D) die Betragskennlinie von  $L^\#(I\Omega)$  weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz  $\Omega_C$ ) auf und verläuft für  $\Omega \rightarrow \infty$  unter dieser bzw. die Ortskurve von  $L^\#(I\Omega)$  schneidet den Einheitskreis genau einmal und verläuft für  $\Omega \rightarrow \infty$  innerhalb dieses und
- (E) im Bereich  $|L^\#(I\Omega)|_{dB} \geq 0$  gelte  $-540^\circ < \arg(L^\#(I\Omega)) < 180^\circ$  (d.h. die Ortskurve des offenen Kreises  $L^\#(I\Omega)$  kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 6.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  genau dann BIBO-stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz  $\arg(L^\#(I\Omega))$  zu  $-\pi$ , die so genannte Phasenreserve  $\Phi$ ,

$$\Phi = \arg(L^\#(I\Omega)) + \pi \quad (6.117)$$

positiv ist.

## 6.8. Das Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme

Dem Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme liegt der Regelkreis von Abbildung 6.18 mit der Führungsfolge  $(r_k)$ , der Stellfolge  $(u_k)$ , der Regelfehlerfolge  $(e_k)$  und der Ausgangsfolge  $(y_k)$  zu Grunde. Ausgangspunkt ist wie im Zeitkontinuierlichen (siehe Ka-

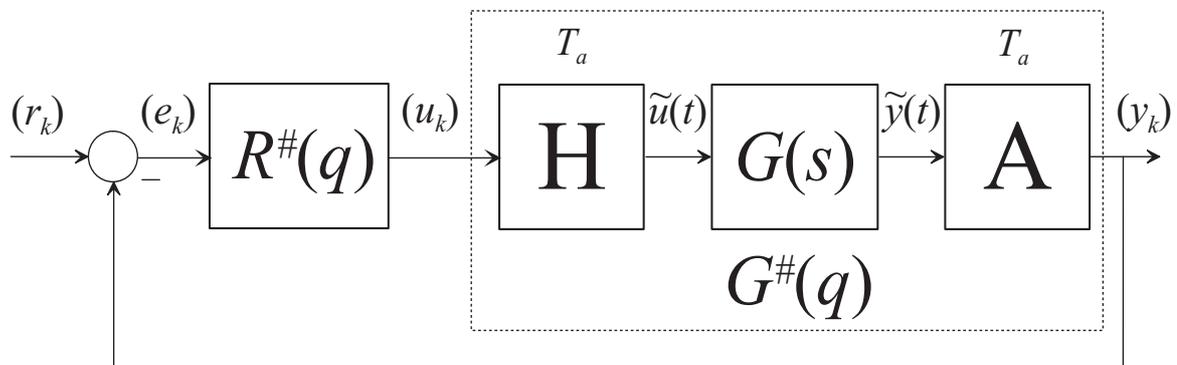


Abbildung 6.18: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad als Basis für das Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme.

pitel 5) die Vorgabe von Kenngrößen zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises mit der Übertragungsfunktion

$$T_{r,y}(z) = \frac{y_z(z)}{r_z(z)} = \frac{L(z)}{1 + L(z)} = \frac{R^\#(q) G^\#(q)}{1 + R^\#(q) G^\#(q)} \Bigg|_{q = \frac{z-1}{T_a z+1}} \quad (6.118)$$

als Antwort auf gewisse Testsignale. Dazu betrachte man den in Abbildung 6.19 dargestellten typischen Verlauf der Sprungantwortfolge  $(y_k) = (h_k)$  des geschlossenen Kreises für  $(r_k) = (1^k)$ .

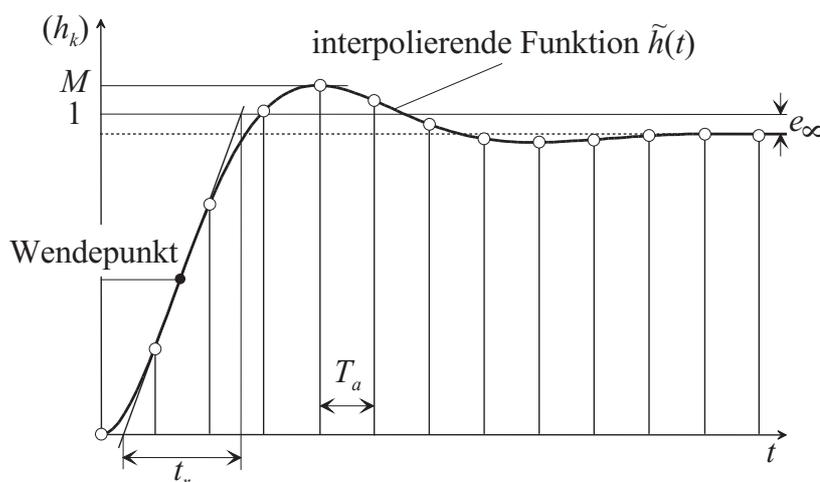


Abbildung 6.19: Kenngrößen der Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Für eine Folge von Abtastwerten  $(h_k)$  ist es schwierig, geeignete Kenngrößen zur Beschreibung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises anzugeben. Daher beschreibt man einen indirekten Weg in der Form, dass man zu den Folgenwerten  $(h_k)$  eine "möglichst glatte" *interpolierende Zeitfunktion*  $\tilde{h}(t)$  mit  $\tilde{h}(kT_a) = h_k$  sucht und die Kenngrößen zur Charakterisierung der Sprungantwortfolge  $(h_k)$  an Hand der interpolierenden Zeitfunktion  $\tilde{h}(t)$  definiert, nämlich

- (1) die *Anstiegszeit*  $t_r$  als Maß für die Schnelligkeit (Dynamik),
- (2) die *Überschwingweite*  $M$  oder das *prozentuale Überschwingen*  $\ddot{u} = (M - 1) 100$  als Maß für den Dämpfungsgrad (Dynamik) sowie
- (3) die *bleibende Regelabweichung*  $e_\infty$  als Maß für die stationäre Genauigkeit.

Diese *Kenngrößen des zeitlichen Verhaltens* der Sprungantwort des geschlossenen Kreises von Abbildung 6.18 können nun über *empirische Näherungsbeziehungen* mit dem *transformierten Frequenzgang des offenen Kreises*  $L^\#(j\Omega)$  in Zusammenhang gebracht werden.

- (1) Die *Anstiegszeit*  $t_r$  hängt mit der *Durchtrittsfrequenz*  $\Omega_C$  über die Näherungsbeziehung

$$\Omega_C t_r \approx 1.2 \quad \text{falls} \quad \Omega_C \leq 0.2\Omega_0 \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a} \quad (6.119)$$

zusammen. Dabei wird wiederum vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  in der Form (6.116) angegeben werden kann und die Bedingungen von Satz 6.11 erfüllt sind. Da der Betragsgang von  $L^\#(q)$  nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie hat, trennt die Durchtrittsfrequenz  $\Omega_C$  jene Frequenzen, die vom offenen Regelkreis verstärkt werden, von jenen, die vom offenen Regelkreis abgeschwächt werden. Damit ist die Durchtrittsfrequenz  $\Omega_C$  wiederum ein Maß für die Bandbreite des offenen Kreises und bei steigendem  $\Omega_C$  wird dementsprechend auch die Dynamik des geschlossenen Kreises schneller.

(2) Das *prozentuelle Überschwingen*  $\ddot{u}$  kann über die empirische Näherungsbeziehung

$$\Phi [^\circ] + \ddot{u} [\%] \approx 70 \quad (6.120)$$

mit der Phasenreserve  $\Phi$  von (6.117) in Verbindung gebracht werden. Nach Satz 6.11 ist die Phasenreserve  $\Phi$  ein Maß für den Abstand zur Stabilitätsgrenze. Dies hat zur Konsequenz, dass eine Verminderung der Phasenreserve  $\Phi$  eine Zunahme der Schwingneigung bzw. des Überschwingens mit sich bringt.

(3) Die *bleibende Regelabweichung*

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k) \quad (6.121)$$

steht nun direkt mit dem *Verstärkungsfaktor*  $V$  der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q)$  in Verbindung. Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist, kann für (6.121) unmittelbar der Endwertsatz der  $z$ -Transformation angewandt werden, und man erhält für  $e_\infty$  die Beziehung

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) e_z(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{1 + L(z)} r_z(z) . \quad (6.122)$$

Für  $(r_k) = (1^k)$  also  $r_z(z) = \frac{z}{z-1}$  ergibt sich (6.122) zu

$$e_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + L(z)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L^\#(q)} \quad (6.123)$$

bzw. mit  $L^\#(q)$  als Übertragungsfunktion gemäß (6.116) folgt  $e_\infty$  zu

$$e_\infty = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q^\rho n_L(q)}{q^\rho n_L(q) + V z_L(q)} \quad \text{mit} \quad n_L(0) = z_L(0) = 1 \quad \text{und} \quad \rho \in \{0, 1, 2\} . \quad (6.124)$$

Damit lautet die bleibende Regelabweichung  $e_\infty$  für die Eingangsfolge  $(r_k) = (1^k)$

$$\begin{aligned} e_\infty &= \frac{1}{1 + V} & \text{für} \quad \rho = 0 \\ e_\infty &= 0 & \text{für} \quad \rho = 1 \\ e_\infty &= 0 & \text{für} \quad \rho = 2 . \end{aligned} \quad (6.125)$$

Es zeigt sich also auch hier, dass die Verhältnisse vollkommen analog zu zeitkontinuierlichen Systemen sind.

**Aufgabe 6.24.** Zeigen Sie, dass für die Eingangsfolge  $(r_k) = (kT_a)$  gilt

$$\begin{aligned} e_\infty &= \infty & \text{für} \quad \rho = 0 \\ e_\infty &= \frac{1}{V} & \text{für} \quad \rho = 1 \\ e_\infty &= 0 & \text{für} \quad \rho = 2 . \end{aligned} \quad (6.126)$$

Es hat sich nun gezeigt, dass die *empirischen Näherungsbeziehungen* (6.119) und (6.120) für jene Abtastsysteme zweckmäßig sind, zu deren Sprungantwortfolge ( $h_k$ ) eine interpolierende Zeitfunktion  $\tilde{h}(t)$  gemäß Abbildung 6.19 existiert, die sich in erster Näherung durch die Sprungantwort eines P-T<sub>2</sub>-Gliedes beschreiben lässt.

Damit ergibt sich die *Vorgangsweise für den Reglerentwurf von Abtastsystemen nach dem Frequenzkennlinienverfahren* wie folgt:

- (A) Für einen Abtastregelkreis nach Abbildung 6.18 mit gegebener Streckenübertragungsfunktion  $G(s)$  müssen in einem ersten Schritt die gewünschten Kenngrößen des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises ( $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$ ) spezifiziert werden.
- (B) Zu der Streckenübertragungsfunktion  $G(s)$  muss eine geeignete Abtastzeit  $T_a$  gewählt werden, die sich einerseits nach Abschnitt 6.4.2 (siehe Beziehung (6.62)) und andererseits nach der Anforderung an die Anstiegszeit  $t_r$  der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (siehe Beziehung (6.119)) orientiert. Anschließend wird für die gewählte Abtastzeit  $T_a$  zu  $G(s)$  die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  berechnet.
- (C) Die Kenngrößen  $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$  werden mit Hilfe der Beziehungen (6.119), (6.120) und (6.125) bzw. (6.126) in Vorgaben an den transformierten Frequenzgang des offenen Kreises  $L^\#(I\Omega)$  übersetzt.
- (D) Ein Regler  $R^\#(q)$  muss nun so gewählt werden, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist und die Forderungen von (C) erfüllt werden. Erfüllt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L^\#(q) = R^\#(q)G^\#(q)$  die Bedingungen von Satz 6.11, dann kann die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der Phasenreserve  $\Phi$  beurteilt werden, anderenfalls muss man das Nyquist-Kriterium von Satz 6.10 anwenden.
- (E) Um ein kriechendes Einlaufen der Sprungantwort in den stationären Endwert zu vermeiden, soll in (D) der Regler  $R^\#(q)$  so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz  $\Omega_C$  die Betragskennlinie von  $L^\#(q)$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (F) Der Regler  $R^\#(q)$  wird mit Hilfe der Beziehung (6.90) in den  $z$ -Bereich transformiert und zur Implementation des Reglers  $R(z)$  am Digitalrechner muss für  $R(z)$  eine Zustandsdarstellung in Form eines Differenzgleichungssystems (siehe 1-te oder 2-te Standardform (6.69) - (6.71)) ermittelt werden.
- (G) Die Qualität des Entwurfes ist immer durch Simulation zu überprüfen, insbesondere auch deshalb, weil das Verfahren sich auf empirische Formeln stützt. Sind die Ergebnisse nicht zufriedenstellend, dann muss man sich die Frage stellen, ob die Anforderungen von (A) überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob ein anderer Regler  $R^\#(q)$  von (D) die Situation verbessern würde.
- (H) Die Begrenzung der Stellfolge  $u_k$ , die bei jedem technisch relevanten Prozess vorhanden ist, kann im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht systematisch berücksichtigt werden. Sollte sich bei der Simulation herausstellen, dass man zuviel

Stellgröße benötigt, dann muss man die Anforderungen in (A) entsprechend verändern, also die Anstiegszeit  $t_r$  vergrößern. Im Rahmen einer Führungsregelung sollte auf keinen Fall eine Sprungfolge sondern immer die Abtastfolge eines hinreichend glatten Interpolationssignals als Führungsfolge verwendet werden (man wiederhole dazu die Überlegungen von Abschnitt 4.3).

### 6.8.1. Einige Übertragungsglieder

Die Übertragungsglieder von Abschnitt 3.8 lassen sich im Wesentlichen direkt vom  $s$ - in den  $q$ -Bereich übertragen. Im Folgenden sollen nur einige wenige erläutert werden:

#### Integrator (I-Glied, I-Regler)

Die  $q$ -Übertragungsfunktion eines I-Regler lautet

$$R^\#(q) = \frac{V_I \left(1 - \frac{q}{\Omega_0}\right)}{q} \quad (6.127)$$

mit der zugehörigen  $z$ -Übertragungsfunktion

$$R(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{T_a V_I}{z - 1} \quad (6.128)$$

und der Differenzgleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T_a V_I u_k \\ y_k &= x_k \end{aligned} \quad (6.129)$$

#### Proportional-Integral-Glied (PI-Glied, PI-Regler)

Die  $q$ -Übertragungsfunktion eines PI-Reglers hat die Form

$$R^\#(q) = \frac{V_I (1 + qT_I)}{q} \quad (6.130)$$

mit der zugehörigen  $z$ -Übertragungsfunktion

$$R(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = V_I \left( T_I + \frac{T_a}{2} \right) + \frac{T_a V_I}{z - 1} \quad (6.131)$$

und der Differenzgleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T_a V_I u_k \\ y_k &= x_k + V_I \left( T_I + \frac{T_a}{2} \right) u_k \end{aligned} \quad (6.132)$$

**Differenzierer (D-Glied, D-Regler)**

Im Gegensatz zum zeitkontinuierlichen Fall ist der D-Regler

$$R^\#(q) = V_D q \quad (6.133)$$

im  $q$ -Bereich sehr wohl realisierbar (vergleiche dazu (6.103)). Trotzdem wird er im Rahmen des Reglerentwurfes nicht verwendet, denn

- (1) die zugehörige  $z$ -Übertragungsfunktion

$$R(z) = V_D \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1} \quad (6.134)$$

zeigt, dass der D-Regler (6.133) instabil ist und

- (2) da im Allgemeinen der Zähler- und Nennergrad der  $q$ -Übertragungsfunktion eines Abtastsystems gleich sind, bedingt ein D-Regler der Form (6.133), dass der Zählergrad des offenen Kreises um Eins größer als der Nennergrad ist und somit gilt  $\lim_{q \rightarrow \infty} L^\#(q) = \infty$ . Damit erfüllt  $L^\#(q)$  sicher nicht die Bedingung (D) von Satz 6.11 und das vorher besprochene Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme ist nicht anwendbar.

Um eine Version des D-Reglers zu erhalten, der diese negativen Eigenschaften nicht besitzt, fügt man im Nenner einen Term in der Form (D-T<sub>1</sub>-Glied)

$$R^\#(q) = \frac{V_D q}{1 + q/q_R} \quad , \quad q_R \gg \quad (6.135)$$

mit  $q_R > 0$  hinzu (vergleiche auch Abbildung 3.23).

**Aufgabe 6.25.** Geben Sie die  $q$ - und die  $z$ -Übertragungsfunktionen sowie die Zustandsrealisierung als Differenzgleichungssystem eines Proportional-Gliedes (P-Glied, P-Regler), eines Proportional-Differential-Gliedes (PD-Glied, PD-Regler), eines Lead-Gliedes (PD-T<sub>1</sub>-Glied), eines Lag-Gliedes (PP-T<sub>1</sub>-Glied) sowie eines Proportional-Differential-Integral-Gliedes (PID-Glied, PID-Regler) an.

**Hinweis:** Die  $q$ -Übertragungsfunktionen sind identisch zu den gleichnamigen  $s$ -Übertragungsfunktionen von Abschnitt 3.8.

**6.8.2. PI-Reglerentwurf im  $q$ -Bereich**

(A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1.8 \left( \frac{s}{5} + 1 \right)}{1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left( \frac{s}{2.8} \right)^2} \quad (6.136)$$

Entwurfsvorgaben:  $t_r = 0.5$  s,  $\ddot{u} = 5$  % und  $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$

- (B) Wahl der Abtastzeit: Im Abschnitt 6.4.2 wurde gezeigt, dass für die Wahl der Abtastzeit  $T_a$  die Anstiegszeiten der Strecke ein maßgebendes Kriterium sind. Die Anstiegszeit  $t_{r,G}$ , bedingt durch den quadratischen Term im Nenner von (6.136), errechnet sich nach (6.61) mit  $T = 1/2.8$  und  $\xi = 0.8$  zu

$$t_{r,G} = T \exp\left(\frac{\arccos(\xi)}{\tan(\arccos(\xi))}\right) = 0.842 \text{ s} . \quad (6.137)$$

Weiters muss für die Anwendung des Frequenzkennlinienverfahrens die Bedingung (6.119)

$$\Omega_C = \frac{1.2}{t_r} = \frac{1.2}{0.5} \leq 0.2 \underbrace{\frac{2}{T_a}}_{\Omega_0} \quad \text{bzw.} \quad T_a \leq 0.166 \text{ s} \quad (6.138)$$

erfüllt sein. Damit lautet die für die Wahl der Abtastzeit  $T_a$  maßgebende Bedingung

$$T_a = \min\left(\frac{t_{r,G}}{4} - \frac{t_{r,G}}{10}, \leq 0.166\right) = \min(0.0842 - 0.2105, \leq 0.166) . \quad (6.139)$$

Für den weiteren Reglerentwurf wird nun die Abtastzeit  $T_a = 0.15$  s gewählt und die zugehörige  $q$ -Übertragungsfunktion errechnet sich damit zu

$$G^\#(q) = \frac{1.8 \left(1 - \frac{q}{13.33}\right) \left(1 + \frac{q}{4.867}\right)}{1 + 2 \times 0.808 \frac{q}{2.788} + \left(\frac{q}{2.788}\right)^2} . \quad (6.140)$$

- (C) Vorgaben an den transformierten Frequenzgang des offenen Kreises  $L^\#(I\Omega)$ :  $\Omega_C = 2.4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Phi = 65^\circ$  und der offene Kreis  $L^\#(q)$  muss nach (6.125) einen Integrator besitzen.

- (D) Als Regler wird ein PI-Regler der Form

$$R^\#(q) = \frac{V_I (1 + qT_I)}{q} \quad (6.141)$$

gewählt. Der PI-Reglerentwurf erfolgt vollkommen analog zu Abschnitt 5.1. Als Ergebnis erhält man die Reglerübertragungsfunktion

$$R^\#(q) = \frac{1.305 (1 + 0.33q)}{q} . \quad (6.142)$$

- (E) Der Punkt (E) soll die nächste Aufgabe sein:

**Aufgabe 6.26.** Überprüfen Sie die Einhaltung der Entwurfsforderungen an Hand des Bode-Diagramms von  $L^\#(q) = R^\#(q) G^\#(q)$ .

- (F) Die  $z$ -Übertragungsfunktion des Reglers (6.142) lautet

$$R(z) = \frac{u_z(z)}{e_z(z)} = \frac{0.5292z - 0.3334}{z - 1} \quad (6.143)$$

und die im Digitalrechner zu implementierende Differenzgleichung nach der 1-ten Standardform ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \underbrace{(r_k - y_k)}_{e_k} \\ u_k &= 0.1958x_k + 0.5292 \underbrace{(r_k - y_k)}_{e_k}. \end{aligned} \quad (6.144)$$

- (G) Die Sprungantwort  $\tilde{y}(t)$ , die Sprungantwortfolge ( $y_k$ ) des geschlossenen Kreises sowie die zugehörige Stellfolge ( $u_k$ ) und die Stellgröße  $\tilde{u}(t)$  nach Abbildung 6.18 sind Abbildung 6.20 zu entnehmen.

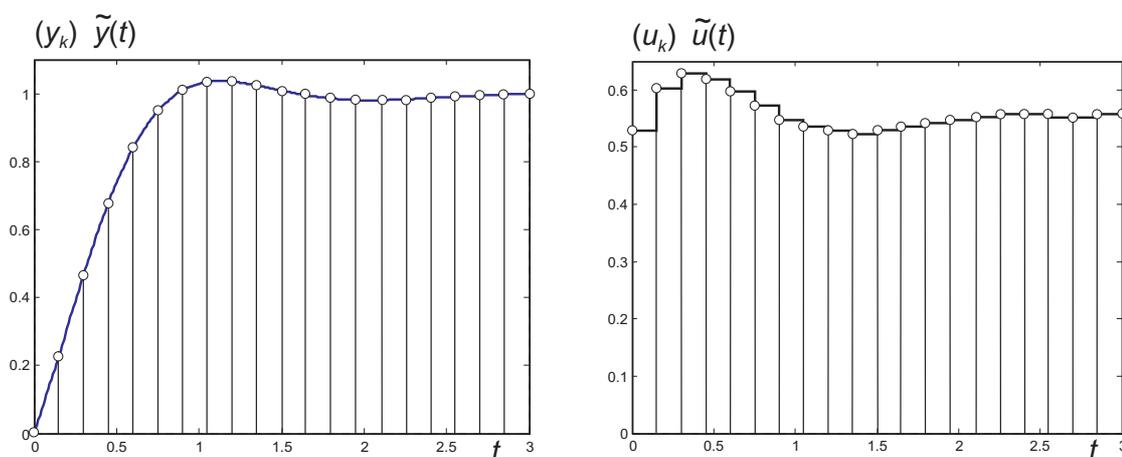


Abbildung 6.20: Ausgangsfolge ( $y_k$ ) und Stellfolge ( $u_k$ ) des geschlossenen Kreises zum Beispiel PI-Reglerentwurf im  $q$ -Bereich.

- (H) In diesem Beispiel wurden keine Anforderungen an die Stellfolge gestellt.

**Aufgabe 6.27.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.5}{s(1 + 2 \times 0.707s + s^2)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit  $T_a = 0.5$  s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r = 2$  s,  $\ddot{u} = 20$  %,  $e_\infty|_{(r_k)=(kT_a)} = 0.4$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Ergebnis:** Transformieren Sie  $G(s)$  in den  $q$ -Bereich, kompensieren Sie mit dem Regler  $R^\#(q)$  sämtliche Pol- und Nullstellen von  $G^\#(q)$  mit negativem Realteil und erweitern Sie den Regler durch ein Lag-Glied. Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 5 \frac{(1 + 2 \times 0.722q + q^2) \left(1 + \frac{q}{0.269}\right)}{\left(1 + \frac{q}{4}\right) \left(1 + \frac{q}{6.32}\right) \left(1 + \frac{q}{0.059}\right)}.$$

**Aufgabe 6.28.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{s}{1.8} + 1}{s \left( 1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left( \frac{s}{2.8} \right)^2 \right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit  $T_a = 0.02$  s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r = 0.1$  s,  $\ddot{u} = 20$  %,  $e_\infty|_{(r_k)=(kT_a)} = 0.01$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Ergebnis:** Transformieren Sie  $G(s)$  in den  $q$ -Bereich und entwerfen Sie einen Lead-Lag-Regler. Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 100 \left( \frac{1 + 0.2547q}{1 + 0.02727q} \right) \left( \frac{1 + 0.4208q}{1 + 3.971q} \right).$$

**Aufgabe 6.29.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{s \left( 1 + 2 \times 0.5 \frac{s}{10} + \left( \frac{s}{10} \right)^2 \right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit  $T_a = 0.05$  s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r = 0.2$  s,  $\ddot{u} \approx 0$  %,  $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Ergebnis:** Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 0.9 \frac{1 + \frac{q}{9.9}}{1 + \frac{q}{200}}.$$

**Aufgabe 6.30.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.7594}{\left( 1 + \frac{s}{0.1963} \right) \left( 1 + 2 \times 0.1517 \frac{s}{5.945} + \left( \frac{s}{5.945} \right)^2 \right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit  $T_a = 0.1$  s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r = 2$  s,  $\ddot{u} \approx 0$  %,  $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Hinweis:** Führen Sie den Entwurf zuerst mit einem PI-Regler durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit einem Kompensationsregler der Form

$$R^\#(q) = V_R \frac{\left( 1 + \frac{q}{a} \right) \left( 1 + 2\xi Tq + (Tq)^2 \right)}{q^\lambda \left( 1 + \frac{q}{b} \right)^2}.$$

**Aufgabe 6.31.** Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.22}{1 + 3.3599 \cdot 10^{-3}s + 2.8145 \cdot 10^{-6}s^2}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit  $T_a = 0.03$  s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen  $t_r \leq 0.06$  s,  $\ddot{u} \leq 10$  %,  $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} \leq 0.01$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

**Hinweis:** Führen Sie den Entwurf im  $q$ -Bereich mit einem Lead-Lag-Regler durch.

## 6.9. Literatur

1. Ackermann J., *Abtastregelung*, 3rd Ed., Springer, Berlin-Heidelberg, (1988).
2. Åström K.J., Wittenmark B., *Computer-Controlled Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, (1997).
3. Franklin G.F., Powell, J.D., Workman, M., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, California, (1998).
4. Gausch F., Hofer A., Schlacher K., *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, (1991).
5. Isermann R., *Digitale Regelkreise*, Band I, 2nd. Ed., Springer, Berlin Heidelberg, (1988).
6. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1 und 2*, Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, (1995).
7. Lunze J., *Regelungstechnik 1* (5. Auflage) *und 2* (3. Auflage), Springer, Berlin Heidelberg New York, (2006) und (2005).
8. Weinmann A., *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf, Band 1 und 2*, 3. Auflage, Springer, Wien New York, (1998)

## 7. ERREICHBARKEIT/BEOBSACHTBARKEIT

In Satz 3.5 wurde gezeigt, dass die Pole einer Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (7.1)$$

auch Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  sind, die Umkehrung hingegen im Allgemeinen nicht gilt. Als elektrisches Beispiel betrachte man dazu die Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 mit der Versorgungsspannung  $u_a$  als Eingangs- und der Brückendiagonalspannung  $u_d$  als Ausgangsgröße.

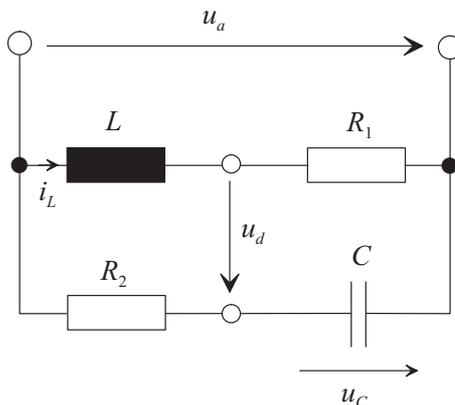


Abbildung 7.1: Brückenabgleichschaltung.

Das zugehörige mathematische Modell lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_a \quad (7.2)$$

$$u_d = \begin{bmatrix} -1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

und die Übertragungsfunktion errechnet sich in der Form

$$G(s) = \frac{\hat{u}_d}{\hat{u}_a} = \frac{s(CR_1R_2 - L)}{(sR_2C + 1)(sL + R_1)}. \quad (7.3)$$

Setzt man nun die sogenannte Brückenbedingung

$$\frac{I\omega L}{I\omega C} = R_1R_2 \quad \text{bzw.} \quad L = CR_1R_2 \quad (7.4)$$

in (7.3) ein, so ergibt sich (7.3) zu

$$G(s) = 0. \quad (7.5)$$

Man erkennt also, dass für die Wahl der Bauelemente nach der Brückenbedingung von (7.4) keiner der beiden Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  von (7.2) als Pol der Übertragungsfunktion auftritt. Die nachfolgende Aufgabe zeigt ein mechanisches System, wo dieser Effekt ebenfalls auftritt.

**Aufgabe 7.1.** Berechnen Sie das mathematische Modell des Systems Wagen mit inversem Pendel von Abbildung 7.2.

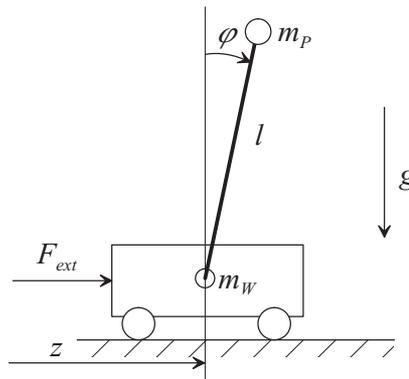


Abbildung 7.2: Wagen mit inversem Pendel.

Verwenden Sie dazu die Zustandsgrößen  $\mathbf{x}^T = [\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}]$ , die Eingangsgröße  $u = F_{ext}$  und die Ausgangsgröße  $y = \varphi$ . Linearisieren das mathematische Modell um die obere Ruhelage  $\mathbf{x}_R^T = [0, 0, z_R, 0]$  mit  $z_R$  konstant aber beliebig und berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta \hat{u}}$ .

**Ergebnis:** Das linearisierte System um die obere Ruhelage errechnet sich zu

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m_W + m_P)g}{lm_W} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_P g}{m_W} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{lm_W} \\ 0 \\ \frac{1}{m_W} \end{bmatrix} \Delta F_{ext}$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \Delta \mathbf{x}$$

mit der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta \hat{u}} = \frac{-1}{s^2 m_W l - (m_W + m_P) g}.$$

Als letztes Beispiel berechne man zum linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}\end{aligned}\quad (7.6)$$

sowie zum zugehörigen Abtastsystem mit der Abtastzeit  $T_a = \pi$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi} & 0 \\ \frac{1}{5}(e^{-2\pi} + e^\pi) & \frac{2}{5}(e^{-2\pi} + e^\pi) & e^\pi \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\pi} + 1 \\ \frac{8}{5}e^\pi - 2 - \frac{2}{5}e^{-2\pi} \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \\ y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}_k\end{aligned}\quad (7.7)$$

die Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{6s + 10}{(s^2 + 4s + 5)(s - 1)} \quad (7.8)$$

sowie

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{2 - 4 + 5e^\pi + e^{3\pi} + 4e^{3\pi}z - 5ze^{2\pi} - z}{5(z e^{2\pi} + 1)(z - e^\pi)}. \quad (7.9)$$

Man erkennt, dass im zeitkontinuierlichen Fall die Dimension der Matrix  $\mathbf{A}$  von (7.6) mit der Ordnung der Übertragungsfunktion  $G(s)$  von (7.8) übereinstimmt (und somit die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  gleich den Polstellen von  $G(s)$  sind), aber beim zugehörigen Abtastsystem die Ordnung der Übertragungsfunktion  $G(z)$  um eins kleiner als die Dimension der Dynamikmatrix  $\Phi$  ist.

Eine systematische Erklärung für diesen Rangverlust in den Übertragungsfunktionen der soeben behandelten Beispiele kann mit Hilfe der Konzepte von *Erreichbarkeit* und *Beobachtbarkeit* gegeben werden.

## 7.1. Erreichbarkeit (zeitkontinuierlicher Fall)

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.10)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  sowie den Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  zu Grunde.

**Definition 7.1. (Erreichbarkeit im Zeitkontinuierlichen)** Man nennt das System (7.10) vollständig erreichbar, wenn ausgehend vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  jeder beliebige Zustand  $\mathbf{x}(T)$  innerhalb einer endlichen Zeit  $T$  mit einer im Intervall  $0 \leq t \leq T$  stückweise stetigen Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  erreicht werden kann.

Nachfolgender Satz gibt nun ein auf Basis der Systemmatrizen  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  überprüfbares Kriterium für die Erreichbarkeit des Systems (7.10) an:

**Satz 7.1. (Erreichbarkeit über die Erreichbarkeitsmatrix)** Das System (7.10) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die sogenannte Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (7.11)$$

den Rang  $n$  hat.

**Beweis:** Bevor dieser Satz bewiesen wird, soll noch eine spezielle Eigenschaft von Matrizen, die die Struktur von  $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  aufweisen, im nachfolgenden Hilfssatz angegeben werden.

**Hilfssatz 7.1.** Wenn für die Matrix

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \quad (7.12)$$

gilt  $\text{rang}(\mathbf{H}_k) = \text{rang}(\mathbf{H}_{k+1})$ , dann folgt  $\text{rang}(\mathbf{H}_k) = \text{rang}(\mathbf{H}_{k+l})$  mit  $l = 2, 3, \dots$ . Im Weiteren gilt, falls  $\text{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$  mit  $\rho < n$ , dann folgt  $\text{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \rho$ .

**Beweis des Hilfssatzes 7.1:** siehe Anhang C

**Beweis Satz 7.1 Teil 1:** vollständig erreichbar  $\Rightarrow \text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n$ : In einem ersten Schritt betrachte man die allgemeine Lösung von (7.10) zum Zeitpunkt  $t$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.13)$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$  (vergleiche dazu Satz 2.4). Setzt man nun gemäß Definition 7.1  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $t = T$  in (7.13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \underbrace{\int_0^T \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\mathbf{r}_k}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Vektoren  $\mathbf{r}_k$  sind für festes  $T$  konstante  $p$ -dimensionale Vektoren. Aus (7.14) erkennt man also, dass sich  $\mathbf{x}(T)$  als Linearkombination der Spaltenvektoren von  $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$  darstellen lässt. Da wegen der Erreichbarkeit von (7.10)  $\mathbf{x}(T)$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{R}^n$  ist, müssen die Spaltenvektoren von  $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$  den  $\mathbb{R}^n$  aufspannen. Damit folgt aber unmittelbar aus dem zweiten Teil des Hilfssatzes 7.1 für alle  $N \geq n$  die Beziehung  $n = \text{rang}(\mathbf{H}_N) = \text{rang}(\mathbf{H}_n) = \text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ .

**Beweis Satz 7.1 Teil 2:**  $\text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n \Rightarrow$  vollständig erreichbar: Um dies zu zeigen, wird eine Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  so konstruiert, dass das System (7.10) vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  in der Zeit  $T$  in den gewünschten Zustand  $\mathbf{x}(T)$  übergeführt wird.

Dazu wird in einem ersten Schritt bewiesen, dass die sogenannte *Gramsche Matrix* (*controllability gramian*)

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T d\tau \quad (7.15)$$

für alle Zeiten  $T > 0$  regulär ist. Der Beweis wird durch Widerspruch geführt - d.h., man nimmt an,  $\mathbf{G}$  sei singulär. Dann existiert ein Vektor  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  so, dass gilt

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{G}\mathbf{a} = \int_0^T \underbrace{\mathbf{a}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T}_{\mathbf{w}^T(\tau)} \underbrace{(e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\mathbf{w}(\tau)} d\tau = 0. \quad (7.16)$$

Damit das Integral in (7.16) identisch verschwindet, muss aus der Tatsache, dass der Integrand  $\mathbf{w}^T(\tau) \mathbf{w}(\tau) \geq 0$  ist für alle Zeiten  $0 \leq \tau \leq T$  die Funktion  $\mathbf{w}(\tau) \equiv \mathbf{0}$  sein für alle Zeiten  $0 \leq \tau \leq T$ . Bildet man nun die zeitlichen Ableitungen von  $\mathbf{w}(\tau)$  an der Stelle  $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T(0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \left( \frac{d}{d\tau} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \left( \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \left( \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

dann erkennt man, dass dieses Gleichungssystem für  $\text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n$  nur erfüllt werden kann, wenn  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, womit gezeigt ist, dass die Gramsche Matrix  $\mathbf{G}$  von (7.15) für alle Zeiten  $T > 0$  regulär ist.

Damit kann man für eine gewünschte Zeit  $T$  durch Einsetzen der Eingangsfunktion

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}(T-t)})^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(T) \quad (7.18)$$

in (7.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(T-\tau) d\tau \\ &= \int_0^T \underbrace{e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\mathbf{G}} d\tau \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(T) \end{aligned} \quad (7.19)$$

zeigen, dass das System (7.10) in den gewünschten Zustand  $\mathbf{x}(T)$  übergeführt wird. ■

Man kann dem Stellgesetz (7.18) entnehmen, dass die Zeit  $T$  für das Erreichen des gewünschten Zustandes  $\mathbf{x}(T)$  beliebig klein gewählt werden kann. Es sei jedoch zu beachten, dass je kleiner die Endzeit  $T > 0$  gewählt wird, desto kleiner sind die Einträge in der Gramschen Matrix  $\mathbf{G}$  bzw. desto größer sind die Elemente von  $\mathbf{G}^{-1}$ , d.h., desto größer werden die Amplituden der Zeitfunktionen von  $\mathbf{u}(t)$ .

Die Überprüfung der Erreichbarkeit an Hand der Erreichbarkeitsmatrix von (7.11) (siehe auch den MATLAB-Befehl `ctrb`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Erreichbarkeit bei diesen Systemen sehr oft direkt über die Gramsche Matrix von (7.15) untersucht. Dazu nachfolgender Satz:

**Satz 7.2. (Erreichbarkeit über die Gramsche Matrix)** Das System (7.10) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian)

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T d\tau \quad (7.20)$$

regulär ist.

**Aufgabe 7.2.** Beweisen Sie Satz 7.2.

**Hinweis:** Orientieren Sie sich an den zweiten Teil des Beweises von Satz 7.1.

Wenn die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  von (7.10) lauter Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt (man nennt  $\mathbf{A}$  dann auch *Hurwitz-Matrix*), dann kann die Gramsche Matrix (7.20) numerisch sehr stabil an Hand einer *Lyapunov-Gleichung* berechnet werden. Da nun angenommen wurde, dass die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  eine Hurwitz-Matrix ist, ist die Existenz des Integrals  $\mathbf{G}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}$  garantiert und  $\mathbf{G}_\infty$  ist Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{G}_\infty + \mathbf{G}_\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

(man vergleiche dazu den MATLAB-Befehl `gram`). Um (7.21) zu zeigen, setze man  $\mathbf{G}_\infty$  von (7.20) in (7.21) ein

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \underbrace{\mathbf{A} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T + e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{A} e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\frac{d}{d\tau} (e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T)} d\tau + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

und erhält schlussendlich das Ergebnis

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\mathbf{A}T} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}T})^T}_{=0} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} . \quad (7.23)$$

## 7.2. Erreichbarkeit (zeitdiskreter Fall)

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.24)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  sowie den Matrizen  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  zu Grunde.

**Definition 7.2. (Erreichbarkeit im Zeitdiskreten)** Man nennt das System (7.24) vollständig erreichbar, wenn ausgehend vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  jeder beliebige Zustand  $\mathbf{x}_N$  mit einer endlichen Steuerfolge  $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, 0, \dots)$  erreicht werden kann.

In vollkommener Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall gelten auch hier folgende Sätze:

**Satz 7.3. (Erreichbarkeit über die Erreichbarkeitsmatrix)** Das System (7.24) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die sogenannte Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = [\Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma] \quad (7.25)$$

den Rang  $n$  hat.

**Aufgabe 7.3.** Beweisen Sie Satz 7.3.

**Hinweis:** Der Beweis erfolgt vollkommen analog zu Satz 7.1. Ausgangspunkt des ersten Teiles des Beweises ist wiederum die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems von (7.24) (siehe auch (6.33))

$$\mathbf{x}_k = \Phi^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j . \quad (7.26)$$

Für den zweiten Teil des Beweises wird nun die Gramsche Matrix (controllability gramian) des zeitdiskreten Systems (7.24) benötigt

$$\mathbf{G}_d = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^k \Gamma \Gamma^T (\Phi^k)^T . \quad (7.27)$$

**Satz 7.4. (Erreichbarkeit über die Gramsche Matrix)** Das zeitdiskrete System (7.24) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian) (7.27) regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix  $\Phi$  lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann lässt sich  $\mathbf{G}_{d,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{G}_d$  aus der diskreten Lyapunov-Gleichung

$$\Phi \mathbf{G}_{d,\infty} \Phi^T - \mathbf{G}_{d,\infty} + \Gamma \Gamma^T = \mathbf{0} \quad (7.28)$$

errechnen.

**Aufgabe 7.4.** Beweisen Sie Satz 7.4.

**Hinweis:** Konstruieren Sie im Zuge dieses Beweises jene Eingangsfolge ( $\mathbf{u}_k$ ) der Form

$$(\mathbf{u}_k) = \left( \Gamma^T (\Phi^{N-1-k})^T \mathbf{G}_d^{-1} \mathbf{x}_N \right), \quad (7.29)$$

die das System (7.24) in  $N$  Schritten in den gewünschten Zustand  $\mathbf{x}_N$  überführt.

## 7.3. Steuerbarkeit

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass in diesem Zusammenhang neben dem Begriff der Erreichbarkeit häufig auch der Begriff der *Steuerbarkeit* verwendet wird. Dazu folgende Definition:

**Definition 7.3. (Steuerbarkeit)** Man nennt das zeitkontinuierliche System (7.10) vollständig steuerbar, wenn ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  eine stückweise stetige Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , mit der endlichen Zeit  $T$  so existiert, dass gilt  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ .

Analog dazu bezeichnet man das zeitdiskrete System (7.24) vollständig steuerbar, wenn ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  eine endliche Steuerfolge  $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, 0, \dots)$  so existiert, dass gilt  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ .

Im Zeitkontinuierlichen sind vollständige Erreichbarkeit und vollständige Steuerbarkeit äquivalent. Dies erkennt man unmittelbar aus den Definitionen - denn, wenn das System vollständig steuerbar ist, dann existiert für jedes beliebige  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  eine geeignete Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , so, dass nachfolgende Gleichung

$$\mathbf{0} = \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.30)$$

gelöst wird, und für ein vollständig erreichbares System existiert für jedes beliebige  $\mathbf{x}(T) \in \mathbb{R}^n$  eine geeignete Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , so, dass die Gleichung

$$\mathbf{x}(T) = \int_0^T \Phi(T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.31)$$

erfüllt ist. Setzt man nun in (7.31)  $\mathbf{x}(T) = -\Phi(T) \mathbf{x}_0$ , dann sieht man, dass wegen der Regularität der Transitionsmatrix  $\Phi(T)$  die Lösbarkeit von (7.30) die von (7.31) impliziert und vice versa. Dass diese Äquivalenz im Zeitdiskreten nicht uneingeschränkt gilt, soll nachfolgende Aufgabe zeigen.

**Aufgabe 7.5.** Zeigen Sie für zeitdiskrete Systeme (7.24), dass jedes vollständig erreichbare System vollständig steuerbar ist, die Umkehrung jedoch nur dann gilt, wenn die Dynamikmatrix  $\Phi$  von (7.24) regulär ist.

**Aufgabe 7.6.** Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}$  des mathematischen Modells (7.2) der Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 für die Brückenbedingung (7.4) den Rang 1 hat und somit das System in diesem Fall nicht vollständig erreichbar ist.

**Aufgabe 7.7.** Zeigen Sie, dass das linearisierte mathematische Modell des Wagens mit inversem Pendel von Abbildung 7.2 vollständig erreichbar ist.

**Aufgabe 7.8.** Berechnen Sie den Rang der Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$  des zeitdiskreten Systems (7.7). Führen Sie die Berechnung sowohl in MAPLE als auch in MATLAB mit dem Befehl `ctrb` durch.

**Ergebnis:**  $\text{rang}(\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)) = 2$

## 7.4. Beobachtbarkeit (zeitkontinuierlicher Fall)

Über die Erreichbarkeit eines mathematischen Modells erhält man Aussagen über die Wirkung des Einganges auf den Systemzustand. Mit Hilfe der Beobachtbarkeit wird untersucht, welche Kenntnis über den Systemzustand man prinzipiell erhalten kann, wenn ausschließlich die Ausgangsgrößen eines dynamischen Systems gemessen werden können. Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (7.32)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ , dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  sowie den Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  zu Grunde.

**Definition 7.4. (Beobachtbarkeit im Zeitkontinuierlichen)** Man nennt das System (7.32) vollständig beobachtbar, wenn aus der Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  auf dem Intervall  $0 \leq t \leq T$  sowie der Systemmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  errechnet werden kann.

Nachfolgender Satz gibt nun ein auf Basis der Systemmatrizen  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  überprüfbares Kriterium für die Beobachtbarkeit des Systems (7.32) an:

**Satz 7.5. (Beobachtbarkeit über die Beobachtbarkeitsmatrix)** Das System (7.32) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

den Rang  $n$  hat.

**Beweis:** siehe Anhang C.

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit an Hand der Beobachtbarkeitsmatrix von (7.33) (siehe auch den MATLAB-Befehl `obsv`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Beobachtbarkeit bei diesen Systemen oft direkt über die Gramsche Matrix von (C.18) untersucht (man vergleiche dazu wiederum den MATLAB-Befehl `gram`). Dazu nachfolgender Satz:

**Satz 7.6. (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix)** Das System (7.32) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability gramian)

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (7.34)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  eine Hurwitz-Matrix ist, dann lässt sich  $\bar{\mathbf{G}}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}$  aus der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{G}}_\infty + \bar{\mathbf{G}}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.35)$$

errechnen.

**Aufgabe 7.9.** Beweisen Sie Satz 7.6.

**Hinweis:** Orientieren Sie sich an den Herleitungen und Ergebnissen von Abschnitt 7.1.

## 7.5. Beobachtbarkeit (zeitdiskreter Fall)

Aus den bisherigen Überlegungen ist es nun naheliegend, wie das Konzept der Beobachtbarkeit auf lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Systeme der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (7.36)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ , dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  sowie den Matrizen  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  übertragen werden kann.

**Definition 7.5. (Beobachtbarkeit im Zeitdiskreten)** Man nennt das zeitdiskrete System (7.36) vollständig beobachtbar, wenn aus der Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsfolgen  $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$  und  $(\mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$  mit finitem  $N$  sowie der Systemmatrizen  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  errechnet werden kann.

Es gelten nun analog zum zeitkontinuierlichen Fall folgende Sätze:

**Satz 7.7. (Beobachtbarkeit über die Beobachtbarkeitsmatrix)** Das zeitdiskrete System (7.36) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{\Phi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

den Rang  $n$  hat.

**Aufgabe 7.10.** Beweisen Sie Satz 7.7.

**Hinweis:** Die allgemeine Lösung des Differenzgleichungssystems (7.36) (siehe auch (6.33)) lautet

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^k \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^{k-j-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_j + \mathbf{D} \mathbf{u}_k .$$

**Satz 7.8. (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix)** Das zeitdiskrete System (7.36) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability gramian)

$$\bar{\mathbf{G}}_d = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{\Phi}^k)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^k \quad (7.38)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix  $\mathbf{\Phi}$  lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann lässt sich  $\bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}_d$  aus der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{\Phi}^T \bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} \mathbf{\Phi} - \bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.39)$$

errechnen.

**Aufgabe 7.11.** Beweisen Sie Satz 7.8.

**Hinweis:** Zeigen Sie im Zuge dieses Beweises, dass Sie aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsfolgen  $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$  und  $(\mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$  sowie der Systemmatrizen  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  mit der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\mathbf{G}}_d^{-1} (\Phi^k)^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{y}}_k \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j - \mathbf{D} \mathbf{u}_k$$

explizit ermitteln können.

**Aufgabe 7.12.** Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}$  des mathematischen Modells (7.2) der Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 für die Brückenbedingung (7.4) den Rang 1 hat und somit das System nicht vollständig beobachtbar ist.

**Aufgabe 7.13.** Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}$  des linearisierten mathematischen Modells Wagen mit inversem Pendel von Abbildung 7.2 den Rang 2 hat und somit das linearisierte System nicht vollständig beobachtbar ist.

**Aufgabe 7.14.** Die Bewegung eines Heißluftballons nach Abbildung 7.3 wird näherungsweise durch ein mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned} \Delta \dot{T} &= -\frac{1}{\tau_1} \Delta T + u \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau_2} (v - w) + \sigma \Delta T \\ \dot{h} &= v \end{aligned} \quad (7.40)$$

mit der Temperaturdifferenz zur Gleichgewichtstemperatur  $\Delta T$ , der Höhe des Ballons  $h$ , der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons  $v$ , der vertikalen Windgeschwindigkeit  $w$  (Störgröße) sowie der zur zugeführten Wärme proportionalen Stellgröße  $u$ .

- (1) Ist es möglich, die Temperaturänderung  $\Delta T$  und eine konstante Windgeschwindigkeit  $w$  allein auf Grund der Messung der Höhe  $h$  zu beobachten?

**Hinweis:** Erweitern Sie für die konstante Windgeschwindigkeit  $w$  das mathematische Modell um die Differenzialgleichung  $\dot{w} = 0$ .

**Ergebnis:** Die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}$  lautet

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & -\frac{1}{\tau_2} & 0 & \frac{1}{\tau_2} \\ -\frac{\sigma}{\tau_1} - \frac{\sigma}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathcal{O}) = \frac{-\sigma}{\tau_1 \tau_2}$$

und damit ist das erweiterte System für  $\sigma \neq 0$  mit der Messgröße  $y = h$  vollständig beobachtbar.

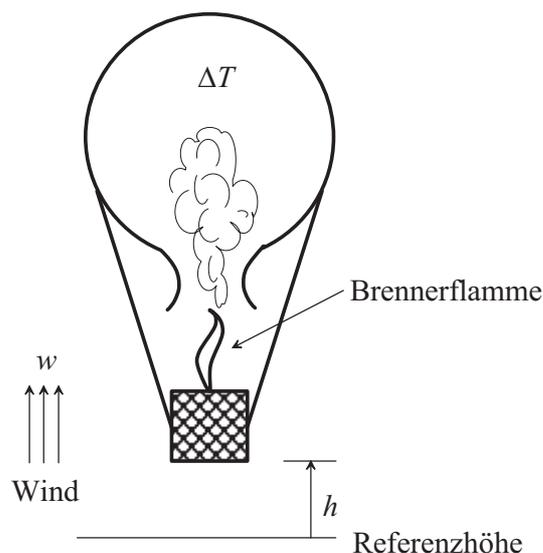


Abbildung 7.3: Schematische Darstellung eines Heißluftballons.

(2) Ist das System (7.40) mit der Eingangsgröße  $u$  vollständig erreichbar?

**Ergebnis:** ja für  $\sigma \neq 0$

(3) Ist das System (7.40) mit der Eingangsgröße  $w$  vollständig erreichbar?

**Ergebnis:** nein

**Aufgabe 7.15.** Berechnen Sie den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi)$  des zeitdiskreten Systems (7.7). Führen Sie die Berechnung sowohl in MAPLE als auch in MATLAB mit dem Befehl `obsv` durch.

**Ergebnis:**  $\text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi)) = 2$

## 7.6. Einfluss der Abtastung

Wie man dem Beispiel (7.6) und (7.7) entnehmen kann (siehe Aufgaben 7.8 und 7.15), können die Eigenschaften der vollständigen Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit durch Abtastung verloren gehen. Ohne Beweis sei dazu folgender Satz angegeben:

**Satz 7.9.** Es sei das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System (7.32) mit den Systemmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar und mit  $\lambda_j = \alpha_j \pm I\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , bezeichne man die unterschiedlichen Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ . Wenn die Abtastzeit  $T_a$  so gewählt wird, dass für die konjugiert komplexen Eigenwertpaare gilt

$$\omega_j \neq \frac{l\pi}{T_a} \quad \text{mit } l = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.41)$$

dann ist das zugehörige Abtastsystem nach (6.19) vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar.

Zur Veranschaulichung betrachte man als Beispiel das zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}\end{aligned}\quad (7.42)$$

mit dem zugehörigen Abtastsystem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) & -e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) \\ e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) & e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k.\end{aligned}\quad (7.43)$$

Die Erreichbarkeitsmatrix des zeitkontinuierlichen Systems (7.42)

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} b_1 & -\lambda b_1 - \omega b_2 \\ b_2 & \omega b_1 - \lambda b_2 \end{bmatrix}\quad (7.44)$$

ist genau dann regulär, wenn  $\omega(b_1^2 + b_2^2) \neq 0$  ist. Durch Einsetzen einer Abtastzeit der Form  $T_a = l\pi/\omega$ ,  $l = \pm 1, \pm 2, \dots$  (vergleiche dazu (7.41)) in die Erreichbarkeitsmatrix des Abtastsystems (7.43)

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) - \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) \\ \tilde{b}_2 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) + \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) \end{bmatrix}\quad (7.45)$$

erhält man

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \cos(l\pi) \\ \tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \cos(l\pi) \end{bmatrix},\quad (7.46)$$

und man erkennt unmittelbar, dass in diesem Fall  $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$  singulär ist.

**Aufgabe 7.16.** *Unter welchen Bedingungen an die Parameter  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $c_1$  und  $c_2$  ist das zeitkontinuierliche System (7.42) vollständig beobachtbar?*

**Ergebnis:** *Es muss gelten  $\omega(c_1^2 + c_2^2) \neq 0$ .*

*Zeigen Sie, dass für die Abtastzeit  $T_a = l\pi/\omega$ ,  $l = \pm 1, \pm 2, \dots$ , das Abtastsystem (7.43) nicht vollständig beobachtbar ist.*

Aus der Bedingung (7.41) folgt also, dass für die Wahl der Abtastzeit

$$T_a < \frac{\pi}{\omega_{j,\max}}\quad (7.47)$$

mit  $\omega_{j,\max}$  als den betraglich größten Imaginärteil aller auftretenden konjugiert komplexen Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  die Eigenschaften der vollständigen Erreichbarkeit und vollständigen Beobachtbarkeit bei der Abtastung erhalten bleiben.

## 7.7. Dualitätsprinzip

Es wurde bereits im Abschnitt 3.5 gezeigt, dass eine skalare Übertragungsfunktion  $G(s)$  bzw.  $G(z)$  unverändert bleibt, wenn man sie transponiert, es gilt also

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d \quad (7.48)$$

bzw.

$$G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma} + d = \mathbf{\Gamma}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^T)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (7.49)$$

Aus (7.48) bzw. (7.49) erkennt man, dass jeweils die beiden Systeme, auch *primales* und *duales System* genannt,

$$\underbrace{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{b}u \\ y_p &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p + du \end{aligned}}_{\text{primales System}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}_d + \mathbf{c}u \\ y_d &= \mathbf{b}^T \mathbf{x}_d + du \end{aligned}}_{\text{duales System}} \quad (7.50)$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{aligned} \mathbf{x}_{p,k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_{p,k} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,k} + du_k \end{aligned}}_{\text{primales System}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{aligned} \mathbf{x}_{d,k+1} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{x}_{d,k} + \mathbf{c}u_k \\ y_{d,k} &= \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}_{d,k} + du_k \end{aligned}}_{\text{duales System}} \quad (7.51)$$

die gleiche Übertragungsfunktion besitzen.

**Aufgabe 7.17.** Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeit (Beobachtbarkeit) des primalen Systems äquivalent zur Beobachtbarkeit (Erreichbarkeit) des dualen Systems ist.

## 7.8. Minimalrealisierung

Die Aufgabe, zu einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine Zustandsdarstellung in Form eines Systems von Differenzialgleichungen 1-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \end{aligned} \quad (7.52)$$

bzw. zu einer Übertragungsfunktion  $G(z)$  eine Zustandsdarstellung in Form eines Systems von Differenzgleichungen 1-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \end{aligned} \quad (7.53)$$

zu finden, wird als Realisierungsproblem bezeichnet (vergleiche dazu Abschnitt 3.5 und Abschnitt 6.4.4). Man nennt nun eine Zustandsrealisierung *minimal*, wenn es die geringst mögliche Anzahl von Zuständen unter allen möglichen Realisierungen aufweist. Es gilt nun folgender Satz:

**Satz 7.10. (Minimale Zustandsrealisierung)** Eine Zustandsrealisierung  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\}$  zu einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  bzw.  $\{\Phi, \Gamma, \mathbf{c}, d\}$  zu einer Übertragungsfunktion  $G(z)$  ist genau dann minimal, wenn das Paar  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$  bzw.  $\{\Phi, \Gamma\}$  vollständig erreichbar und das Paar  $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$  bzw.  $\{\Phi, \mathbf{c}\}$  vollständig beobachtbar ist.

**Aufgabe 7.18.** Beweisen Sie Satz 7.10.

Zur Wiederholung seien an dieser Stelle nochmals die zwei bereits bekannten kanonischen Minimalrealisierungen für die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} = b_n + \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (7.54)$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7.55)$$

angegeben, nämlich die 1-te Standardform oder Steuerbarkeitsnormalform  $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_R} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_R} u_k \\ & \\ y_k &= \underbrace{[\tilde{b}_0 \ \tilde{b}_1 \ \dots \ \tilde{b}_{n-2} \ \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{c}_R^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d_R} u_k \end{aligned} \quad (7.56)$$

und die 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform  $\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B, d_B\}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_B} u_k \\ & \\ y_k &= \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d_B} u_k. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die 1-te und 2-te Standardform zueinander jeweils das primale und duale System gemäß (7.51) sind. Jetzt sind wir auch in der Lage, die Namen Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnormalform zu interpretieren, denn eine einfache Rechnung zeigt, dass die Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}(\Phi_R, \Gamma_R)$  der Steuerbarkeitsnormalform  $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$  von (7.56)

$$\mathcal{R}(\Phi_R, \Gamma_R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & \dots & * & * \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

immer regulär ist.

**Aufgabe 7.19.** Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}(\mathbf{c}_B^T, \Phi_B)$  der Beobachtbarkeitsnormalform  $\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B, d_B\}$  von (7.57) immer regulär ist.

Die beiden kanonischen Normalformen (7.56) und (7.57) weisen noch eine weitere sehr schöne Eigenschaft auf - nämlich, die Koeffizienten  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , des charakteristischen Polynoms  $p(z) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_R) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_B)$  von  $\Phi_R$  bzw.  $\Phi_B$  können direkt der letzten Zeile bzw. Spalte entnommen werden. Um dies für  $\Phi_R$  allgemein zu zeigen, nehme man an, dass  $\lambda$  eine Lösung des charakteristischen Polynoms sei, also  $p(\lambda) = 0$ , dann existiert ein nichttrivialer Vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  so, dass gilt  $(\lambda\mathbf{E} - \Phi_R)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  bzw. in Komponentenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.59)$$

Aus (7.59) erhält man

$$v_j = \lambda v_{j-1} \quad \text{bzw.} \quad v_j = \lambda^{j-1} v_1 \quad \text{für} \quad j = 2, \dots, n \quad (7.60)$$

und

$$a_0 v_1 + a_1 v_2 + \dots + a_{n-2} v_{n-1} + a_{n-1} v_n + \lambda v_n = 0. \quad (7.61)$$

Setzt man nun (7.60) in (7.61) ein, dann folgt aus

$$\underbrace{(a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-2} \lambda^{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n)}_{p(\lambda)} v_1 = 0 \quad (7.62)$$

unmittelbar, dass wegen  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  und damit  $v_1 \neq 0$  der Klammerausdruck in (7.62) Null sein muss und damit die Tatsache, dass

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-2} z^{n-2} + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (7.63)$$

das charakteristische Polynom von  $\Phi_R$  ist.

**Aufgabe 7.20.** Zeigen Sie, dass die charakteristischen Polynome einer quadratischen Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und der zugehörigen transponierten Matrix  $\Phi^T$  gleich sind.

### 7.8.1. Markov-Parameter und Hankelmatrizen

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setze man für die nachfolgenden Betrachtungen voraus, dass die Systeme (7.52) und (7.53) nicht sprungfähig sind, also gilt  $d = 0$ . Man bezeichnet nun die Größen

$$m_k = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad m_k = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{k-1} \mathbf{\Gamma} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.64)$$

als die *Markov-Parameter* der Systeme (7.52) und (7.53).

**Aufgabe 7.21.** *Beweisen Sie, dass die Markov-Parameter invariant gegenüber regulären Zustandstransformationen sind.*

Die Markov-Parameter sind nun eindeutig durch die Übertragungsfunktionen  $G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$  bzw.  $G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma}$  bestimmt. Um dies für zeitkontinuierliche Systeme zu zeigen, schreibe man einfach  $G(s)$  in der Form

$$G(s) = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A}/s)^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} + \mathbf{A}/s + \mathbf{A}^2/s^2 + \dots) \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k s^{-k} \quad (7.65)$$

mit den Markov-Parametern  $m_k$  von (7.64) um. Die Markov-Parameter hängen nun mit der Impulsantwort  $g(t)$  von (7.52) für  $d = 0$

$$g(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) \mathbf{b} \quad (7.66)$$

und deren zeitlichen Ableitungen an der Stelle  $t = 0$  wie folgt

$$\left( \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} g(t) \right)_{t=0} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} = m_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.67)$$

zusammen. Bei zeitdiskreten Systemen (7.53) geben die Markov-Parameter  $m_k$  von (7.64) direkt die Gewichtsfolge (Impulsantwortfolge) ( $g_k$ ) für  $d = 0$  an, denn es gilt

$$G(z) = \frac{1}{z} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}/z)^{-1} \mathbf{\Gamma} = \frac{1}{z} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}/z + \mathbf{\Phi}^2/z^2 + \dots) \mathbf{\Gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k z^{-k} \quad (7.68)$$

und damit folgt unmittelbar die Beziehung

$$g_k = m_k = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{k-1} \mathbf{\Gamma} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.69)$$

Eine wichtige Matrix, die mit den Markov-Parametern eng verbunden ist, ist die sogenannte *Hankelmatrix*

$$\mathbf{H}[i, j] = \begin{bmatrix} m_i & m_{i+1} & \dots & m_{i+j} \\ m_{i+1} & m_{i+2} & \dots & m_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i+j} & m_{i+j+1} & \dots & m_{i+2j} \end{bmatrix} . \quad (7.70)$$

Die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit der Systeme (7.52) bzw. (7.53) kann nun sehr effizient an Hand der Hankelmatrix geprüft werden.

**Satz 7.11. (Minimalrealisierung und Hankelmatrix)** Das System (7.52) bzw. (7.53) ist genau dann vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar, wenn die Hankelmatrix

$$\mathbf{H}[1, n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{2n-2} \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

bzw.

$$\mathbf{H}_d[1, n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{\Gamma} & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{n-1} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^2 \mathbf{\Gamma} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^n \mathbf{\Gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{n-1} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^n \mathbf{\Gamma} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{2n-2} \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

regulär ist.

**Beweis:** Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sich die Hankelmatrizen  $\mathbf{H}[1, n-1]$  und  $\mathbf{H}_d[1, n-1]$  in der Form

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] = \mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}) \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (7.73)$$

bzw.

$$\mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix} [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi}^2 \mathbf{\Gamma}, \dots, \mathbf{\Phi}^{n-1} \mathbf{\Gamma}] = \mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{\Phi}) \mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) \quad (7.74)$$

schreiben lassen. ■

## 7.9. Der PBH-Test

Um die vollständige Erreichbarkeit bzw. Beobachtbarkeit zu testen, muss man den bisherigen Überlegungen folgend eine Rangprüfung gewisser Matrizen durchführen, was teilweise numerisch sehr problematisch sein kann. Aus diesem Grund soll hier noch ein Verfahren, welches auf der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren beruht, der sogenannte *PBH(Popov-Belevitch-Hautus)-Eigenvektortest*, vorgestellt werden. Die nachfolgenden Sätze werden nur für zeitkontinuierliche Systeme (7.52) formuliert, gelten aber eins zu eins auch für zeitdiskrete Systeme (7.53).

**Satz 7.12. (PBH-Eigenvektortest)** Das System (7.52) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn für jeden Linkseigenvektor  $\mathbf{w}_i^T \neq \mathbf{0}^T$  von  $\mathbf{A}$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad (7.75)$$

gilt

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{b} \neq 0. \quad (7.76)$$

Das System (7.52) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn für jeden Rechtseigenvektor  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  von  $\mathbf{A}$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (7.77)$$

gilt

$$\mathbf{c}^T \mathbf{v}_i \neq 0. \quad (7.78)$$

**Beweis:** siehe Anhang C

**Aufgabe 7.22.** Zeigen Sie, dass zu einem Eigenwert  $\lambda_i$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  der Linkseigenvektor  $\mathbf{w}_i^T$  von  $\mathbf{A}$  gleich dem transponierten Rechtseigenvektor  $\mathbf{v}_i$  der transponierten Matrix  $\mathbf{A}^T$  ist.

**Aufgabe 7.23.** Überprüfen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests, ob nachfolgendes System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 1 \ 1] \mathbf{x} + u \end{aligned}$$

vollständig erreichbar bzw. vollständig beobachtbar ist. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}}$ .

**Ergebnis:** Das System ist nicht vollständig erreichbar und nicht vollständig beobachtbar mit folgenden Eigenwerten und für den PBH-Eigenvektortest relevanten Links- und Rechtseigenvektoren:

Eigenwert	Linkseigenvektor	Rechtseigenvektor
$\lambda_1 = -2$	$\mathbf{w}_1^T = [1, 1, 1]$	$\mathbf{v}_1^T = [0, 0, 1]$
$\lambda_2 = 1$ (zweifach)	$\mathbf{w}_2^T = [1, 1, 0]$	$\mathbf{v}_2^T = [-1, 1, 0]$

Die Übertragungsfunktion lautet  $G(s) = 1$ .

**Aufgabe 7.24.** Beweisen Sie, dass ein System der Form (7.52) mit der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

unabhängig von  $\mathbf{b}$  immer nicht erreichbar ist.

**Hinweis:** Zeigen Sie dies auf zwei verschiedene Art und Weisen, nämlich

- (1) durch Aufstellen der Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  für ein allgemeines  $\mathbf{b}$  und

- (2) mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests. Beachten Sie, dass in diesem Fall zum gleichen Eigenwert  $\lambda$  zwei linear unabhängige Linkseigenvektoren  $\mathbf{w}_1^T$  und  $\mathbf{w}_2^T$  existieren und damit die Bedingung (7.76) für jede Linearkombination von  $\mathbf{w}_1^T$  und  $\mathbf{w}_2^T$  gelten muss, also

$$(\alpha_1 \mathbf{w}_1^T + \alpha_2 \mathbf{w}_2^T) \mathbf{b} \neq 0$$

für alle  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 7.25.** Zeigen Sie, dass wenn für die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  eines Systems (7.52) zu einem Mehrfacheigenwert  $\lambda$  mehr als ein linear unabhängiger Eigenvektor existiert, dann ist das System nicht vollständig beobachtbar.

**Hinweis:** Aufgabe 7.24 in Kombination mit dem Dualitätsprinzip

**Aufgabe 7.26.** Gegeben ist das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

$$y_k = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \mathbf{x}_k .$$

Welche Bedingungen müssen die Parameter  $\lambda_j, c_j, j = 1, \dots, n$  erfüllen, damit das System vollständig beobachtbar ist?

**Ergebnis:** Es muss gelten  $c_j \neq 0$  und  $\lambda_j \neq \lambda_i$  für  $i \neq j$  und  $j, i = 1, \dots, n$ .

Neben dem PBH-Eigenvektortest gibt es auch noch den sogenannten *PBH-Rangtest*, der in diesem Zusammenhang häufig in der Literatur zu finden ist.

**Satz 7.13. (PBH-Rangtest)** Das System (7.52) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn gilt

$$\text{rang} [s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n \quad (7.79)$$

für alle  $s$  der komplexen Ebene.

Das System (7.52) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \quad (7.80)$$

für alle  $s$  der komplexen Ebene.

**Beweis:** siehe Anhang C

**7.10. Literatur**

1. Ackermann J., *Abtastregelung*, 3rd Ed., Springer, Berlin-Heidelberg, (1988).
2. Åström K.J., Wittenmark B., *Computer-Controlled Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, (1997).
3. Franklin G.F., Powell J.D., Workman M., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, (1998).
4. Kailath Th., *Linear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, (1980).
5. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1 und 2*, Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, (1995).

## 8. ZUSTANDSREGLER/ZUSTANDSBEOBSACHTER

Das bisher diskutierte Frequenzkennlinienverfahren im Abschnitt 5 beruht auf einer Regelkreisstruktur, bei der eine Größe, die so genannte Ausgangsgröße, gemessen wird, und auf deren Kenntnis gemeinsam mit der vorgegebenen Führungsgröße der Regler als dynamisches System die Stellgröße errechnet. Daher werden Regelkreise dieser Art auch als *Ausgangsregelungen* bezeichnet. Setzt man nun voraus, dass der gesamte Zustand eines Systems messtechnisch erfassbar ist, dann ist es möglich, einen so genannten *Zustandsregler* zu entwerfen. Unter einem Zustandsregelgesetz versteht man eine *dynamiklose, funktionale Abhängigkeit* der Stellgröße  $\mathbf{u}$  von den Zustandsgrößen  $\mathbf{x}$  und eventuell weiteren externen Eingangsgrößen (z.B. Führungsgrößen)  $\mathbf{r}$  im allgemeinen Fall in der Art

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t), t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_{\mathbf{u},k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k) \quad (8.1)$$

bzw. für lineare, zeitinvariante Systeme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{r}(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{r}_k. \quad (8.2)$$

### 8.1. Zustandsregler

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit lege man den nachfolgenden Betrachtungen das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \end{aligned} \quad (8.3)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$  sowie den Matrizen  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $d \in \mathbb{R}$  zu Grunde. Setzt man nun ein Zustandsregelgesetz der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + gr_k \quad (8.4)$$

in (8.3) ein, so ergibt sich der geschlossene Regelkreis zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)}_{\mathbf{\Phi}_g} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}gr_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + dgr_k \end{aligned} \quad (8.5)$$

mit der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises  $\mathbf{\Phi}_g$  und der Eingangsgröße  $r$ . Offensichtlich müssen nun die Größen  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$  und  $g \in \mathbb{R}$  im Rahmen des Zustandsreglerentwurfes so bestimmt werden, dass die Ausgangsfolge  $(y_k)$  als Antwort des geschlossenen Kreises (8.5) auf spezielle Eingangsfolgen, wie beispielsweise der Sprungfolge  $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$ , gewissen Bedingungen genügt.

Im ersten Schritt soll die Eingangsfolge  $(r_k)$  außer Acht bleiben, also  $(r_k) = (0^k)$ , und die Größe  $\mathbf{k}$  soll so entworfen werden, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi_g$  des geschlossenen Kreises an beliebig vorgegebenen gewünschten Stellen zu liegen kommen. Man nennt diesen Entwurf deshalb auch *Polvorgabe im Zustandsraum*. Zuvor wird jedoch noch ein für das Weitere wesentlicher Satz, nämlich der Satz von Cayley-Hamilton, formuliert und bewiesen:

**Satz 8.1. (Satz von Cayley-Hamilton)** Bezeichnet

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (8.6)$$

das charakteristische Polynom der Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann genügt  $\Phi$  der Beziehung

$$p(\Phi) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n = \mathbf{0} . \quad (8.7)$$

**Beweis:** Für die Inverse der Matrix  $(z\mathbf{E} - \Phi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$(z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi)}{\det(z\mathbf{E} - \Phi)}, \quad (8.8)$$

wobei die adjungierte Matrix  $\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi)$  lediglich Polynome  $(n-1)$ -Ordnung besitzt und demnach in der Form

$$\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 z + \dots + \mathbf{R}_{n-2} z^{n-2} + \mathbf{R}_{n-1} z^{n-1} \quad (8.9)$$

angeschrieben werden kann. Aus (8.7) - (8.9) erhält man schlussendlich

$$\det(z\mathbf{E} - \Phi) \mathbf{E} = (z\mathbf{E} - \Phi) (\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 z + \dots + \mathbf{R}_{n-2} z^{n-2} + \mathbf{R}_{n-1} z^{n-1}) \quad (8.10)$$

bzw.

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n) \mathbf{E} = -\Phi \mathbf{R}_0 + \dots + (\mathbf{R}_{n-2} - \Phi \mathbf{R}_{n-1}) z^{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} z^n . \quad (8.11)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von  $z$  in (8.11) ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 \mathbf{E} &= -\Phi \mathbf{R}_0 \\ a_1 \mathbf{E} &= \mathbf{R}_0 - \Phi \mathbf{R}_1 \\ &\vdots \\ a_{n-2} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-3} - \Phi \mathbf{R}_{n-2} \\ a_{n-1} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-2} - \Phi \mathbf{R}_{n-1} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-1} . \end{aligned} \quad (8.12)$$

Multipliziert man nun jeweils die  $j$ -te Zeile von (8.12) mit  $\Phi^j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , und addiert diese, dann folgt (8.7), womit Satz 8.1 bewiesen ist. ■

Liegt das System (8.3) in 1-ter Standardform (*Steuerbarkeitsnormalform*)  $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$  gemäß (7.56) vor, dann erhält man unmittelbar eine Vorschrift, wie  $\mathbf{k}^T$  im Zustandsregelgesetz (8.4) festzulegen ist, damit die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi_g = (\Phi_R + \Gamma_R \mathbf{k}^T)$

von (8.5) an beliebig vorgegebenen gewünschten Stellen zu liegen kommen. Es gilt nämlich für  $\Phi_g$  in diesem Fall

$$\Phi_g = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_R} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_R} \underbrace{[k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]}_{\mathbf{k}^T} \quad (8.13)$$

bzw.

$$\Phi_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k_0 - a_0 & k_1 - a_1 & \dots & k_{n-2} - a_{n-2} & k_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

mit dem zugehörigen charakteristischen Polynom von  $\Phi_g$  (man wiederhole dazu die Überlegungen von Abschnitt 7.8)

$$p_g(z) = (a_0 - k_0) + (a_1 - k_1)z + \dots + (a_{n-1} - k_{n-1})z^{n-1} + z^n. \quad (8.15)$$

Die Vorgangswise bei der Polvorgabe im Zustandsraum für ein System in Steuerbarkeitsnormalform  $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$  ist demnach die folgende: Man gibt die  $n$  gewünschten Eigenwerte  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , des geschlossenen Kreises vor und bestimmt sich daraus ein gewünschtes charakteristisches Polynom für den geschlossenen Kreis

$$p_{g,soll}(z) = \prod_{j=1}^n (z - \lambda_j) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_{n-1}z^{n-1} + z^n. \quad (8.16)$$

Durch Koeffizientenvergleich von (8.15) und (8.16) erhält man dann direkt die Zustandsreglerkoeffizienten

$$k_j = a_j - p_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (8.17)$$

Wenn nun das System (8.3) nicht in Steuerbarkeitsnormalform vorliegt, dann kann die Polvorgabe im Zustandsraum mit Hilfe der *Formel von Ackermann* durchgeführt werden.

**Satz 8.2. (Formel von Ackermann)** Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi_g$  des geschlossenen Kreises (8.5) können genau dann durch eine Zustandsrückführung der Form (8.4) beliebig platziert werden, wenn das System (8.3) vollständig erreichbar ist. Der Rückführungsvektor  $\mathbf{k}^T$  berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{[0, 0, \dots, 1]}_{\mathbf{e}_n^T = \Gamma_R^T} = \mathbf{v}_1^T \underbrace{[\Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma]}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)} \quad (8.18)$$

$$\mathbf{k}^T = -p_0\mathbf{v}_1^T - p_1\mathbf{v}_1^T\Phi - \dots - p_{n-1}\mathbf{v}_1^T\Phi^{n-1} - \mathbf{v}_1^T\Phi^n = -\mathbf{v}_1^T p_{g,soll}(\Phi)$$

mit  $p_{g,soll}(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_{n-1}z^{n-1} + z^n$  als gewünschtes charakteristisches Polynom des geschlossenen Systems.

**Beweis:** Am Beginn des Beweises ist festzuhalten, dass die Eigenschaft der vollständigen Erreichbarkeit des Systems (8.3) durch eine reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x}_k = \mathbf{V}\mathbf{z}_k$  mit einer regulären  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{V}$  weder verloren noch hinzugewonnen werden kann. Dies ist unmittelbar einsichtig, denn die Erreichbarkeitsmatrix des zu (8.3) zugehörigen äquivalenten transformierten Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}}_{\tilde{\Phi}}\mathbf{z}_k + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\Gamma}_{\tilde{\Gamma}}u_k, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + du_k \end{aligned} \quad (8.19)$$

lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}) &= [\tilde{\Gamma}, \tilde{\Phi}\tilde{\Gamma}, \tilde{\Phi}^2\tilde{\Gamma}, \dots, \tilde{\Phi}^{n-1}\tilde{\Gamma}] \\ [\mathbf{V}^{-1}\Gamma, \mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\Gamma, \mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\Phi\Gamma, \dots, \mathbf{V}^{-1}\Phi^{n-1}\tilde{\Gamma}] &= \mathbf{V}^{-1}\mathcal{R}(\Phi, \Gamma). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Aus (8.20) erkennt man, dass wegen der Regularität von  $\mathbf{V}$  die Regularität der Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma})$  des transformierten Systems (8.19) unmittelbar aus der Regularität der Erreichbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$  des ursprünglichen Systems (8.3) folgt und vice versa. Weiters wurde in (7.58) gezeigt, dass ein System, welches in Steuerbarkeitsnormalform vorliegt, immer vollständig erreichbar ist. Kombiniert man diese beiden Erkenntnisse, dann folgt, dass ein vollständig erreichbares System immer auf Steuerbarkeitsnormalform transformiert werden kann.

Die Idee zur Bestimmung der Beziehung (8.18) besteht nun darin, das System (8.3) in einem ersten Schritt auf Steuerbarkeitsnormalform zu transformieren und anschließend die Polvorgabe im Zustandsraum, wie in (8.17) gezeigt, durchzuführen. Gesucht ist also eine reguläre Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (8.21)$$

so, dass das System (8.3) im neuen Zustand  $\mathbf{z}$  in Steuerbarkeitsnormalform

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{V}\Phi\mathbf{V}^{-1}}_{\Phi_R}\mathbf{z}_k + \underbrace{\mathbf{V}\Gamma}_{\Gamma_R=\mathbf{e}_n}u_k \quad (8.22)$$

vorliegt. Aus der Gleichung

$$\Phi_R = \mathbf{V}\Phi\mathbf{V}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \Phi \quad (8.23)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j+1}^T &= \mathbf{v}_j^T \Phi \quad \text{mit } j = 1, \dots, n-1 \\ -a_0 \mathbf{v}_1^T - a_1 \mathbf{v}_2^T - \dots - a_{n-1} \mathbf{v}_n^T &= \mathbf{v}_n^T \Phi. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen für  $\mathbf{v}_j^T$ ,  $j = 2, \dots, n$ , in die letzte Gleichung von (8.24)

$$\mathbf{v}_1^T (a_0 + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n) = \mathbf{0}^T \quad (8.25)$$

und Anwenden des Satzes 8.1 erkennt man, dass (8.25) trivialerweise erfüllt ist. Die noch fehlende Gleichung zur Bestimmung von  $\mathbf{v}_1^T$  erhält man aus

$$\Gamma_R = \mathbf{e}_n = \mathbf{V} \Gamma \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \Gamma \quad (8.26)$$

und mit (8.24) folgt

$$\mathbf{e}_n^T = \mathbf{v}_1^T \underbrace{[\Gamma, \Phi \Gamma, \Phi^2 \Gamma, \dots, \Phi^{n-1} \Gamma]}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)}. \quad (8.27)$$

Unter der Voraussetzung, dass das System (8.3) vollständig erreichbar ist, lautet dann die Zustandstransformation

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_1^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_1^T = \mathbf{e}_n^T \mathcal{R}(\Phi, \Gamma)^{-1}. \quad (8.28)$$

Für das System in Steuerbarkeitsnormalform (8.22) kann durch

$$u_k = \mathbf{k}_R^T \mathbf{z}_k = [a_0 - p_0 \quad a_1 - p_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - p_{n-1}] \mathbf{z}_k \quad (8.29)$$

direkt das gewünschte charakteristische Polynom

$$p_{g, \text{soll}}(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (8.30)$$

und damit die Eigenwerte des geschlossenen Kreises vorgegeben werden (man vergleiche dazu auch (8.13) - (8.17)).

Da man diese zwei Schritte (Transformation auf Steuerbarkeitsnormalform mit anschließender Polvorgabe) nicht immer getrennt durchführen möchte, transformiert man den geschlossenen Kreis (8.22) und (8.29) in den ursprünglichen Zustand  $\mathbf{x}$  zurück, also

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \Phi \mathbf{V}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \Gamma_R \mathbf{k}_R^T}_{\Gamma \mathbf{k}^T} \mathbf{V} \mathbf{x}_k. \quad (8.31)$$

Damit lautet aber der Rückführungsvektor  $\mathbf{k}^T$  im ursprünglichen System wie folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_R^T \mathbf{V} = \begin{bmatrix} a_0 - p_0 & a_1 - p_1 & \dots & a_{n-1} - p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_1^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v}_1^T \underbrace{(a_0 + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1})}_{=-\Phi^n \text{ nach Satz 8.1}} - \mathbf{v}_1^T (p_0 + p_1 \Phi + \dots + p_{n-1} \Phi^{n-1}) \\
 &= -\mathbf{v}_1^T (p_0 + p_1 \Phi + \dots + p_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n) = -\mathbf{v}_1^T p_{g,\text{soll}}(\Phi)
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

mit dem gewünschten charakteristischen Polynom  $p_{g,\text{soll}}$  von (8.30). Es ist damit bewiesen, dass wenn das System (8.3) vollständig erreichbar ist, dann können die Pole des geschlossenen Kreises mit dem Zustandsregler  $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{k}^T$  nach (8.18) beliebig platziert werden.

**Aufgabe 8.1.** Zeigen Sie die Umkehrung, dass aus der Tatsache der nicht vollständigen Erreichbarkeit von (8.3) folgt, dass die Pole des geschlossenen Kreises nicht alle beliebig vorgegeben werden können.

**Hinweis:** Nutzen Sie die Struktur eines nicht vollständig erreichbaren Systems

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k+1} \\ \mathbf{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \mathbf{0} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{x}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_k \\
 y_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{x}_{2,k} \end{bmatrix} + du_k .
 \end{aligned}$$

Mit der Lösung von Aufgabe 8.1 ist aber Satz 8.2 gezeigt. ■

Wie man gesehen hat, spielt die Eingangsfolge  $(r_k)$  von (8.5) für die Polvorgabe keine Rolle. Nun beinhaltet das Zustandsregelgesetz

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + gr_k \tag{8.33}$$

von (8.4) noch den Parameter  $g$ , mit dessen Hilfe man beispielsweise erreichen kann, dass für den geschlossenen Kreis

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)}_{\Phi_g} \mathbf{x}_k + \Gamma gr_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
 y_k &= (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + dgr_k
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_0 \tag{8.35}$$

mit der Sprungfolge  $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$  als Eingangsgröße. Berechnet man nun die  $z$ -Transformierte von  $(y_k)$ , so erhält man

$$y_z(z) = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) (z\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \left( \underbrace{\Gamma gr_0 \frac{z}{z-1}}_{r_z(z)} + z\mathbf{x}_0 \right) + dgr_0 \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{r_z(z)} \tag{8.36}$$

bzw. durch Anwendung des Endwertsatzes folgt

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) y_z(z) = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) (\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{\Gamma} g r_0 + d g r_0 = r_0, \quad (8.37)$$

da alle Nullstellen von  $\det(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)$  im Inneren des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene liegen. Damit errechnet sich  $g$  aus (8.35) und (8.37) zu

$$g = \frac{1}{(\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) (\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{\Gamma} + d}. \quad (8.38)$$

**Simulationsbeispiel:** Als Beispiel betrachte man den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 bestehend aus den zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , den zwei linearen Federn mit den Federkonstanten  $c_1$  und  $c_2$  sowie den zwei geschwindigkeitsproportionalen Dämpfern mit den Dämpfungskonstanten  $d_1$  und  $d_2$ . Auf die erste Masse  $m_1$  wirkt die externe Kraft  $F_{ext}$ ,

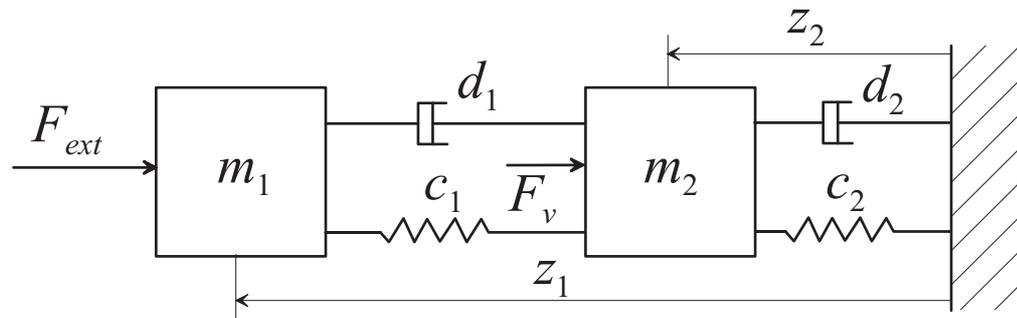


Abbildung 8.1: Zweimassenschwinger.

die zugleich die Stellgröße  $u = F_{ext}$  des Systems darstellt, und die auf die zweite Masse  $m_2$  wirkende Kraft  $F_v = v$  ist als unbekannte Störung aufzufassen. Das mathematische Modell errechnet sich direkt durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes auf die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  in der Form

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= -c_1(z_1 - z_2) - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - F_{ext} \\ m_2 \ddot{z}_2 &= c_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - c_2 z_2 - d_2 \dot{z}_2 - F_v, \end{aligned} \quad (8.39)$$

wobei  $z_1$  und  $z_2$  die Auslenkungen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  um die entspannte Lage der Federn beschreiben. Mit den Zustandsgrößen  $\mathbf{x}^T = [z_1, v_1 = \dot{z}_1, z_2, v_2 = \dot{z}_2]$ , der Stellgröße  $u = F_{ext}$ , der Störung  $v = F_v$  und der Ausgangsgröße  $y = z_2$  ergibt sich die Zustandsdarstellung von (8.39) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u + \mathbf{b}_v v, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8.40)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{d_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{d_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & -\frac{d_1+d_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

Wählt man für die Parameter die Werte  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 10$ ,  $c_1 = c_2 = 1$  und  $d_1 = d_2 = 1$ , dann lautet das mathematische Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} v \quad (8.42)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Für den Reglerentwurf berechnet man in einem ersten Schritt das zugehörige Abtastsystem mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  für die Abtastzeit  $T_a = 2$  (MATLAB-Befehl `c2d`). Im Anschluss daran soll für das Abtastsystem ein Zustandsregler mittels Polvorgabe so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei  $\exp(\lambda_j T_a)$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , mit  $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5I$ ,  $\lambda_3 = -1$  und  $\lambda_4 = -2$  zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`). Man beachte, dass in MATLAB der Zustandsregler im Gegensatz zum Skriptum, siehe (8.33), mit negativem Vorzeichen in der Form  $u_k = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$  angesetzt ist! Im Weiteren ist der Vorfaktor  $g$  in (8.33) so zu bestimmen, dass für eine Sprungfolge  $(r_k) = r_0 (1^k)$  als Führungsgröße gilt  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = r_0$ .

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der Zustandsregler (8.33) zu

$$u_k = [0.0189 \ 0.4627 \ 0.5245 \ 3.8538] \mathbf{x}_k - 1.5624 r_k. \quad (8.43)$$

**Aufgabe 8.2.** Zeigen Sie, dass für den Fall, dass das System (8.3) in 1-ter Standardform  $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$  gemäß (7.56) vorliegt, sich der Ausdruck für  $g$  von (8.38) wie folgt

$$g = \frac{\sum_{j=0}^n p_j}{(\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{1} + d \sum_{j=0}^n p_j} \quad \text{mit} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad p_n = 1$$

vereinfacht.

**Hinweis:** Es gilt folgender Zusammenhang

$$(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T)^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T)}{\det(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T)}$$

mit

$$\det(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T) = p_{g,soll}(z)|_{z=1} = \sum_{j=0}^n p_j \quad , \quad p_n = 1$$

und

$$(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-2} & 1 + p_{n-1} \end{bmatrix} .$$

**Aufgabe 8.3.** Entwerfen Sie für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

einen Zustandsregler so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  liegen.

**Hinweis:** Für festes  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verwenden Sie den MATLAB-Befehl `acker`.

**Ergebnis:** Der Zustandsregler lautet  $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$  mit dem Rückführvektor

$$\mathbf{k}^T = - \left[ 1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \right] .$$

**Aufgabe 8.4.** Gegeben ist das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k$$

mit den Parametern  $a_{ij} \neq 0$ .

(1) Berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix und geben Sie Bedingungen für  $b_1$  und  $b_2$  an, damit diese regulär ist.

(2) Entwerfen Sie einen Zustandsregler so, dass das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises die Form

$$p_{g,soll}(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

hat.

**Ergebnis: ad (1)** Die Bedingungen für die vollständige Erreichbarkeit lauten

$$b_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad b_2 \neq \frac{a_{21} b_1}{a_{22} - a_{11}} \quad \text{für} \quad a_{11} \neq a_{22}$$

$$b_2 \quad \text{beliebig für} \quad a_{11} = a_{22} \quad \text{und} \quad a_{21} \neq 0 .$$

**ad (2)** Der Zustandsregler errechnet sich zu  $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$  mit

$$\mathbf{k}^T = \left[ -\frac{b_2 a_{11}^2 + b_2 p_1 a_{11} + b_2 p_2 - a_{21} b_1 a_{11} - a_{21} b_1 a_{22} - a_{21} b_1 p_1}{b_1 (-a_{21} b_1 - a_{22} b_2 + a_{11} b_2)} \quad \frac{a_{22}^2 + p_1 a_{22} + p_2}{-a_{21} b_1 - a_{22} b_2 + a_{11} b_2} \right] .$$

### 8.1.1. Dead-Beat Regler

Will man nun ein Zustandsregelgesetz der Form (8.33) mit  $g = 0$  so entwerfen, dass jede Anfangsauslenkung  $\mathbf{x}_0$  des Systems (8.3) möglichst schnell zu  $\mathbf{0}$  gemacht wird, dann gelangt man zum so genannten *Dead-Beat Regler*. Es gilt nun folgender Satz:

**Satz 8.3. (Dead-Beat Regler)** *Legt man für ein vollständig erreichbares System (8.3) gemäß Satz 8.2 sämtliche Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises nach Null, das gewünschte charakteristische Polynom lautet also  $p_{g,soll}(z) = z^n$ , dann wird jede Anfangsauslenkung  $\mathbf{x}_0$  in höchstens  $n$  Schritten in  $\mathbf{0}$  übergeführt.*

**Beweis:** Die Dynamikmatrix  $\Phi_g$  des geschlossenen Kreises lautet für  $p_{g,soll}(z) = z^n$

$$\Phi_g = \Phi + \Gamma \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

und diese ist nach Definition 3.1 nilpotent der Ordnung  $n$ , d.h., es gilt  $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$  für  $k \geq n$ . Damit lässt sich aber für eine beliebige Anfangsauslenkung  $\mathbf{x}_0$  für den geschlossenen Kreis  $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_g \mathbf{x}_k$  zeigen, dass wegen

$$\mathbf{x}_k = \Phi_g^k \mathbf{x}_0 \quad (8.45)$$

gilt  $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  für  $k \geq n$ . ■

**Aufgabe 8.5.** *Entwerfen Sie für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

einen Dead-Beat Regler und bestimmen Sie jenes Gebiet  $\mathcal{D}$  in der  $(x_{1,0}, x_{2,0})$ -Ebene, wo die Anfangsauslenkungen  $\mathbf{x}_0$  liegen dürfen, damit der Betrag der Stellgröße immer kleiner gleich 1 ist, also  $|u_k| \leq 1$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Ergebnis:** Der Dead-Beat Regler lautet  $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$  mit

$$\mathbf{k}^T = [-1 \quad -2]$$

und das Gebiet der zulässigen Anfangsauslenkungen für  $|u_k| \leq 1$  errechnet sich zu

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(1 + x_{1,0}) < x_{2,0} < \frac{1}{2}(1 - x_{1,0}) \\ -(1 + x_{1,0}) < x_{2,0} < (1 - x_{1,0}) \end{array} \right\}.$$

## 8.2. Der PI-Zustandsregler

In (8.38) wurde der Vorfaktor  $g$  des Zustandsreglers (8.4) so berechnet, dass die bleibende Regelabweichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k) \quad (8.46)$$

zufolge der Eingangssprungfolge  $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$  Null wird. Dies ist natürlich dann nicht mehr erfüllt, wenn die Streckenparameter vom nominellen Wert abweichen bzw. Störungen auf die Strecke einwirken. Man betrachte dazu das System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k + \mathbf{\Gamma}_v v_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (8.47)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u$ , dem Ausgang  $y$ , der Störung  $v$  sowie den Matrizen  $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}_v, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Setzt man für  $u_k$  den Zustandsregler (8.4) mit  $(r_k) = (0^k)$  ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{k}^T)}_{\mathbf{\Phi}_g} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_v v_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (8.48)$$

bzw. für eine konstante Störfolge  $v_k = v_0 (1^k)$  errechnet sich die bleibende Regelabweichung zu

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (r_k - y_k) = - \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) y_z(z) = - \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{\Gamma}_v v_0 \neq 0 . \quad (8.49)$$

Aus diesem Grund muss man wie bereits beim Frequenzkennlinienverfahren im Regler einen Integralanteil einbauen, um zumindest konstante Störungen und Parameterschwankungen stationär unterdrücken zu können. Dazu wird ein so genannter *PI-Zustandsregler* der Form

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + \left( r_k - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{x}_k}_{y_k} \right) \quad (8.50a)$$

$$u_k = [\mathbf{k}_x^T, k_I] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + k_P \left( r_k - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{x}_k}_{y_k} \right) \quad (8.50b)$$

angesetzt. Der Entwurf der Reglerparameter  $\mathbf{k}_x^T$ ,  $k_I$  und  $k_P$  erfolgt nun in zwei Schritten: **Schritt 1:** Im ersten Schritt wird für das um einen Integrator erweiterte System (8.47)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ x_{I,k+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_I} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_I} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{r,I}} r_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_v \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{v,I}} v_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (8.51)$$

ein Zustandsregler

$$u_k = [\mathbf{k}_1^T, k_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

nach Satz 8.2 entworfen. Ein Vergleich von (8.50b) mit (8.52) zeigt, dass gilt

$$\mathbf{k}_x^T - k_P \mathbf{c}^T = \mathbf{k}_1^T \quad \text{und} \quad k_I = k_2 . \quad (8.53)$$

Man beachte, dass dies unter bestimmten Voraussetzungen immer möglich ist, denn es gilt folgender Satz:

**Satz 8.4.** Wenn die Dynamikmatrix  $\Phi$  des Systems (8.51) keinen Eigenwert bei 1 und die Übertragungsfunktion von  $u_k$  zu  $y_k$  keine Nullstelle bei 1 hat, dann folgt aus der vollständigen Erreichbarkeit von  $(\Phi, \Gamma)$  die vollständige Erreichbarkeit von  $(\Phi_I, \Gamma_I)$ .

**Beweis:** siehe Anhang C

**Schritt 2:** Im zweiten Schritt müssen noch gemäß (8.53) die Parameter  $\mathbf{k}_x^T$  und  $k_P$  festgelegt werden. Da dieses Problem unterbestimmt ist, legt man im Allgemeinen  $k_P$  fest und berechnet sich anschließend aus (8.53)  $\mathbf{k}_x^T$ . Geht man davon aus, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $x_{I,0} = 0$ , dann folgt aus (8.50b)

$$u_0 = k_P r_0 . \quad (8.54)$$

Wenn nun die Dynamikmatrix  $\Phi$  stabil ist, also lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann errechnet sich die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_\infty = \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma u_\infty . \quad (8.55)$$

In diesem Fall ist es nun zweckmäßig, den Proportionalanteil  $k_P$  so festzulegen, dass zum Zeitpunkt Null die Stellgröße  $u_0$  den gleichen Wert, der auch für  $k \rightarrow \infty$  zur Einhaltung der Bedingung  $y_\infty = r_0$  benötigt wird, annimmt, also gilt

$$u_0 = k_P r_0 = \frac{r_0}{\mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma} = u_\infty \quad (8.56)$$

bzw.

$$k_P = \frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma} . \quad (8.57)$$

Abbildung 8.2 zeigt das Blockschaltbild eines zeitdiskreten, zeitinvarianten, linearen Systems mit PI-Zustandsregler.

**Simulationsbeispiel:** Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.42) soll ein zeitdiskreter PI-Zustandsregler gemäß (8.50) für eine Abtastzeit  $T_a = 2$  so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei  $\exp(\lambda_j T_a)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , mit  $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5I$ ,  $\lambda_3 = -1$ ,  $\lambda_4 = -2$  und  $\lambda_5 = -3$  zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`).

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der PI-Zustandsregler (8.50) zu

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + (r_k - y_k)$$

$$u_k = [0.2163 \ 0.7201 \ 2.4323 \ 6.7892 \ -1.5585] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + (-1)(r_k - y_k) . \quad (8.58)$$

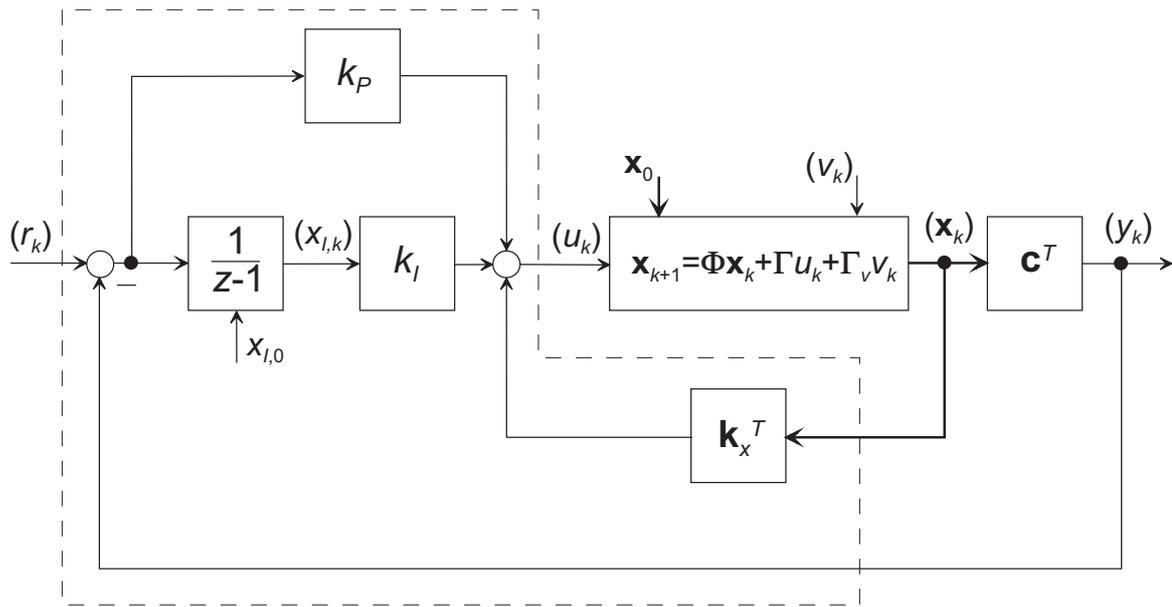


Abbildung 8.2: Blockschaltbild zum PI-Zustandsregler für den zeitdiskreten Fall.

### 8.3. Zustandsbeobachter

Der Nachteil des Zustandsreglers liegt offensichtlich darin, dass für dessen Realisierung der gesamte Zustand  $\mathbf{x}$  gemessen werden muss. In vielen Fällen ist dies natürlich nicht möglich, weshalb man sich die Frage stellt, ob man den Zustand  $\mathbf{x}$  allein durch Kenntnis der Ausgangsgröße  $y$  und der Stellgröße  $u$  rekonstruieren kann. Um diese Frage zu beantworten, betrachte man das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k \end{aligned} \quad (8.59)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u$ , dem Ausgang  $y$  sowie den Matrizen  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Gamma, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $d \in \mathbb{R}$ . Eine Einrichtung, die aus Kenntnis der Eingangsgrößen  $(u_0, u_1, \dots, u_k)$  und der Ausgangsgrößen  $(y_0, y_1, \dots, y_k)$  den Zustand  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $k$  schätzt, nennt man auch *Beobachter*. Es wird sich in weiterer Folge noch zeigen, dass so ein Beobachter für (8.59) genau dann konstruiert werden kann, wenn das System (8.59) vollständig beobachtbar ist. Sämtliche Überlegungen lassen sich ohne zusätzlichen Aufwand direkt auf den zeitkontinuierlichen Fall übertragen.

#### 8.3.1. Trivialer Beobachter (Simulator)

Die einfachste Möglichkeit, den Zustand  $\mathbf{x}$  zu schätzen, besteht darin, das mathematische Modell der Strecke gemäß (8.59)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k \quad , \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k \end{aligned} \quad (8.60)$$

mit dem *geschätzten Zustand*  $\hat{\mathbf{x}}$  im Rechner zu simulieren. Die Abweichung des geschätzten Zustandes  $\hat{\mathbf{x}}$  vom tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$ , der so genannte *Beobachtungsfehler*  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ,

genügt dann folgender Differenzgleichung

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 . \quad (8.61)$$

Ein Beobachter der Form (8.60), der einfach eine Kopie des Streckenmodells im Rechner darstellt, wird auch als *trivialer Beobachter* oder *Simulator* bezeichnet und er hat folgende Nachteile:

- (1) Die Fehlerdynamik (8.61) ist offenbar nur dann stabil, wenn die Strecke stabil ist, also sämtliche Eigenwerte von  $\mathbf{\Phi}$  im Inneren des Einheitskreises liegen und
- (2) das Abklingen von Beobachtungsfehlern  $\mathbf{e}_0$  bei stabilen Strecken kann nicht beeinflusst werden, sondern ist durch die Streckendynamik festgelegt.

Der triviale Beobachter (8.60) macht noch nicht von der Tatsache Gebrauch, dass dem System (8.59) eine Messung, nämlich die von  $y$ , zur Verfügung steht. Diese Überlegung führt schlussendlich zum so genannten *vollständigen Luenberger Beobachter*, der im Folgenden behandelt wird.

**Simulationsbeispiel:** Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.42) lautet der zeitdiskrete triviale Beobachter gemäß (8.60) für eine Abtastzeit  $T_a = 2$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k+1} \\ \hat{v}_{1,k+1} \\ \hat{z}_{2,k+1} \\ \hat{v}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2036 & 0.5061 & 0.6941 & 1.3366 \\ -0.3724 & -0.1688 & 0.2387 & 0.9328 \\ 0.0694 & 0.1337 & 0.7589 & 1.5754 \\ 0.0239 & 0.0933 & -0.1814 & 0.5774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k} \\ \hat{v}_{1,k} \\ \hat{z}_{2,k} \\ \hat{v}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8987 \\ -0.5061 \\ -0.1023 \\ -0.1337 \end{bmatrix} u_k \quad (8.62)$$

$$\hat{y}_k = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k} \\ \hat{v}_{1,k} \\ \hat{z}_{2,k} \\ \hat{v}_{2,k} \end{bmatrix} .$$

### 8.3.2. Vollständiger Luenberger Beobachter

Fügt man dem trivialen Beobachter von (8.60) einen zusätzlichen Term  $\hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k)$ ,  $\hat{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^n$ , hinzu, dann erhält man den so genannten *vollständigen Luenberger Beobachter*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) \quad , \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k . \end{aligned} \quad (8.63)$$

Die zugehörige Fehlerdynamik für  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x}$  von (8.59) und  $\hat{\mathbf{x}}$  von (8.63) errechnet sich in der Form

$$\mathbf{e}_{k+1} = \underbrace{(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T)}_{\mathbf{\Phi}_e} \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 . \quad (8.64)$$

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen kann  $\hat{\mathbf{k}}$  so entworfen werden, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix  $\mathbf{\Phi}_e$  von (8.64) an vorgegebenen gewünschten

Stellen zu liegen kommen? Diese Aufgabenstellung erinnert sehr stark an den Zustandsreglerentwurf von Abschnitt 8.1 – und tatsächlich kann hier ein Satz vollkommen analog zu Satz 8.2 angegeben werden:

**Satz 8.5. (Formel von Ackermann für den Zustandsbeobachterentwurf)** Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix  $\Phi_e$  von (8.64) des vollständigen Beobachters (8.63) zum System (8.59) können genau dann durch  $\hat{\mathbf{k}}$  beliebig platziert werden, wenn das System (8.59) vollständig beobachtbar ist. Der Vektor  $\hat{\mathbf{k}}$  berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \Phi)} \hat{\mathbf{v}}_1 \quad (8.65)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\hat{p}_0 \hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{p}_1 \Phi \hat{\mathbf{v}}_1 - \dots - \hat{p}_{n-1} \Phi^{n-1} \hat{\mathbf{v}}_1 - \Phi^n \hat{\mathbf{v}}_1 = -\hat{p}_{g,soll}(\Phi) \hat{\mathbf{v}}_1$$

mit  $\hat{p}_{g,soll}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 z + \hat{p}_2 z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1} z^{n-1} + z^n$  als gewünschtes charakteristisches Polynom der Fehlerdynamikmatrix  $\Phi_e$ .

**Beweis:** Auf Grund der Tatsache, dass das charakteristische Polynom einer Matrix gleich dem charakteristischen Polynom der Transponierten dieser Matrix ist, es gilt also

$$\det(z\mathbf{E} - \Phi_e) = \det(z\mathbf{E} - \Phi - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T) = \det(z\mathbf{E} - \Phi^T - \mathbf{c}\hat{\mathbf{k}}^T) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_e^T), \quad (8.66)$$

kann der Entwurf von  $\hat{\mathbf{k}}$  zur Platzierung der Eigenwerte von  $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$  auf Basis von  $\Phi_e^T = \Phi^T + \mathbf{c}\hat{\mathbf{k}}^T$  durchgeführt werden. Vergleicht man nun  $\Phi_e^T$  mit  $\Phi_g = \Phi + \Gamma\mathbf{k}^T$  von (8.5), so erkennt man, dass der Beobachterentwurf gemäß dem Dualitätsprinzip von Abschnitt 7.7 dual zum Zustandsreglerentwurf ist, indem man einfach

$$\begin{array}{lll} \Phi^T & \text{durch} & \Phi \\ \mathbf{c} & \text{durch} & \Gamma \\ \hat{\mathbf{k}} & \text{durch} & \mathbf{k} \end{array} \quad (8.67)$$

ersetzt. Mit Hilfe dieses Dualitätsprinzips kann Satz 8.5 unmittelbar aus Satz 8.2 hergeleitet werden. ■

**Simulationsbeispiel:** Für den Zweimasseschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.42) soll ein zeitdiskreter vollständiger Luenberger Beobachter gemäß (8.63) für eine Abtastzeit  $T_a = 2$  so entworfen werden, dass die Pole der Fehlerdynamikmatrix bei  $\exp(\lambda_j T_a)$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , mit  $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3I$  und  $\lambda_{3,4} = -1 \pm I$  zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`).

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der zeitdiskrete vollständige Luenberger Beobachter (8.63) zu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)}_{\Phi_e} \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k - \hat{\mathbf{k}} y_k \quad (8.68)$$

$$\hat{y}_k = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \hat{\mathbf{x}}_k$$

mit

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.2036 & 0.5061 & -0.6543 & 1.3366 \\ -0.3724 & -0.1688 & 0.1383 & 0.9328 \\ 0.0694 & 0.1337 & -0.7201 & 1.5754 \\ 0.0239 & 0.0933 & -0.2390 & 0.5774 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -0.8987 \\ -0.5061 \\ -0.1023 \\ -0.1337 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -1.3483 \\ -0.1004 \\ -1.4790 \\ -0.0576 \end{bmatrix}. \quad (8.69)$$

**Aufgabe 8.6.** Welche vereinfachte Berechnungsvorschrift lässt sich für  $\hat{\mathbf{k}}$  von (8.63) angeben, wenn das System (8.59) in 2-ter Standardform (Beobachtbarkeitsnormalform)  $\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B, d_B\}$  gemäß (7.57) mit dem charakteristischen Polynom  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$  vorliegt und das gewünschte charakteristische Polynom der Fehlerdynamikmatrix  $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$  durch  $\hat{p}_{g,soll}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1z + \hat{p}_2z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1}z^{n-1} + z^n$  gegeben ist.

**Ergebnis:** Die Komponenten des Vektors  $\hat{\mathbf{k}}$  lauten in diesem Fall

$$\hat{k}_j = a_j - p_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

**Aufgabe 8.7.** Zeigen Sie, dass das System (8.59) genau dann auf Beobachtbarkeitsnormalform transformiert werden kann, wenn es vollständig beobachtbar ist. Geben Sie an, wie diese Transformation zu konstruieren ist.

**Hinweis:** Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 8.2.

**Aufgabe 8.8.** Zeigen Sie, dass wenn man sämtliche Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix  $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$  von (8.63) auf Null legt - das gewünschte charakteristische Polynom lautet also  $\hat{p}_{g,soll}(z) = z^n$  - dann wird jeder Anfangsfehler  $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$  in höchstens  $n$  Schritten zu  $\mathbf{0}$  gemacht. Man nennt so einen Beobachter in Analogie zum gleichnamigen Regler Dead-Beat Beobachter.

**Aufgabe 8.9.** Entwerfen Sie für das System

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

einen Dead-Beat Beobachter. Bestimmen Sie weiters das Gebiet  $\mathcal{D}$  der zulässigen Anfangsfehler  $\mathbf{e}_0$  in der  $(e_{0,1}, e_{0,2})$ -Ebene so, dass gilt

$$\|\mathbf{e}_j\|_2^2 < 1 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots$$

**Hinweis:** Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `acker`.

**Ergebnis:** Der Dead-Beat Beobachter lautet

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k} \\ \hat{x}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k - \begin{bmatrix} 12 \\ 100 \end{bmatrix} (\hat{y}_k - y_k)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k} \\ \hat{x}_{2,k} \end{bmatrix}$$

und das Gebiet der zulässigen Anfangsfehler errechnet sich zu

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} e_{0,1}^2 + e_{0,2}^2 < 1 \\ 101(e_{0,2} - 10e_{0,1})^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

## 8.4. Separationsprinzip

Wenn man nun nicht den gesamten Zustand  $\mathbf{x}$  messen kann und doch einen Zustandsregler einsetzen will, ist es doch naheliegend, den Zustandsregler mit einem Zustandsbeobachter zu kombinieren. Dazu wird für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (8.70)$$

ein Zustandsbeobachter gemäß (8.63)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}} (\hat{y}_k - y_k), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (8.71)$$

entworfen und im Zustandsregelgesetz (8.4) wird anstelle des tatsächlichen Zustandes  $\mathbf{x}$  der beobachtete Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  in der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}_k + gr_k \quad (8.72)$$

eingesetzt. Abbildung 8.3 veranschaulicht diese so genannte *Zustandsregler/Zustandsbeobachter* Konfiguration.

Wenn man nun den Zustandsregler und den Zustandsbeobachter nach den Sätzen 8.2 und 8.5 getrennt entwirft, also die Eigenwerte getrennt vorgibt, stellt sich die Frage, wo die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nach Abbildung 8.3 zu liegen kommen? Die Antwort auf diese Frage gibt das so genannte *Separationsprinzip*:

**Satz 8.6. (Separationsprinzip)** Wenn das System (8.70) vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist, dann ergibt sich das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises von Abbildung 8.3 nach den Gleichungen (8.70)-(8.72) zu

$$p_{ges}(z) = \det(z\mathbf{E}_{n \times n} - (\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)) \det\left(z\mathbf{E}_{n \times n} - \left(\Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T\right)\right) = p_{g,soll}(z) \hat{p}_{g,soll}(z) \quad (8.73)$$

mit den gewünschten charakteristischen Polynomen  $p_{g,soll}(z)$  für den Zustandsreglerentwurf nach Satz 8.2 und  $\hat{p}_{g,soll}(z)$  für den Zustandsbeobachterentwurf nach Satz 8.5.

**Beweis:** Um diesen zentralen Satz zu beweisen, schreibe man den geschlossenen Kreis (8.70)-(8.72) als Differenzgleichungssystem im Zustand  $\mathbf{x}_{ges}^T = [\mathbf{x}^T, \mathbf{e}^T]$  mit dem Be-

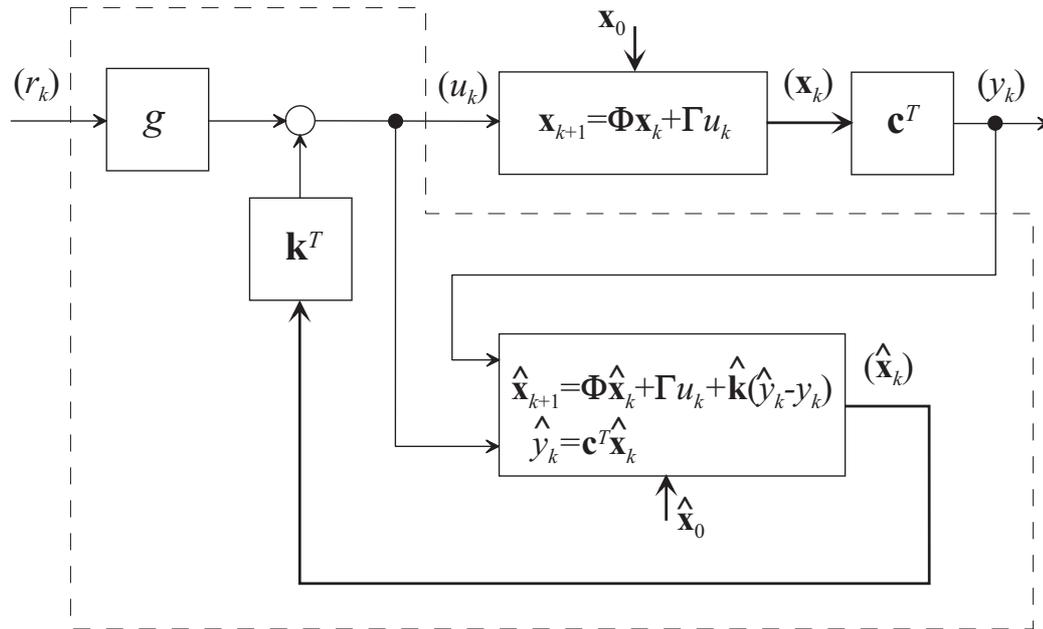


Abbildung 8.3: Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration.

obachtungsfehler  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \mathbf{k}^T & \Gamma \mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T \end{bmatrix}}_{\Phi_{ges}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{ges}} r_k \quad (8.74)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{ges}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k}}$$

an. Man erkennt unmittelbar, dass sich wegen der Blockdiagonalstruktur der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises  $\Phi_{ges}$  das charakteristische Polynom in der Form

$$\det(z\mathbf{E}_{2n \times 2n} - \Phi_{ges}) = \det(z\mathbf{E}_{n \times n} - (\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)) \det(z\mathbf{E}_{n \times n} - (\Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T)) \quad (8.75)$$

berechnet.

**Aufgabe 8.10.** Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (8.75). ■

**Simulationsbeispiel:** Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.42) sollen der PI-Zustandsregler (8.58) und der vollständige Luenberger Beobachter (8.68) und (8.69) kombiniert werden.

**Aufgabe 8.11.** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $R(z) = y_z(z)/r_z(z)$  des dynamischen Reglers, der sich durch Zusammenschaltung des vollständigen Beobachters mit dem Zustandsregler ergibt. Welchen Schluss können Sie aus der Ordnung der Übertragungsfunktion  $R(z)$  ziehen?

**Ergebnis:** Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{r_z(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{\Gamma}g .$$

Die Ordnung der Übertragungsfunktion ist lediglich  $n$ , da der Beobachtungsfehler in (8.74) durch den Eingang ( $r_k$ ) nicht beeinflusst werden kann und somit das System (8.74) ein nichterreichbares Teilsystem  $n$ -ter Ordnung besitzt.

**Aufgabe 8.12.** In wieviel Abtastschritten kann eine Anfangsauslenkung  $\mathbf{x}_0$  des Systems (8.70) bei der Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration schnellst möglich zu  $\mathbf{0}$  geregelt werden. Beweisen Sie Ihre Antwort.

**Ergebnis:** Bei der Kombination eines vollständigen Dead-Beat Beobachters mit einem Dead-Beat Zustandsregler in höchstens  $2n$  Schritten. Man beachte, dass durch Anwendung eines im Rahmen dieses Skriptums nicht diskutierten so genannten reduzierten Dead-Beat Beobachters bei einer Messgröße die Schrittzahl um 1 weiter reduziert werden kann, also in höchstens  $(2n - 1)$  Schritten.

**Aufgabe 8.13.** Entwerfen Sie für das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \ 1 \ -2 \ 0] \mathbf{x}_k$$

einen Zustandsregler nach Satz 8.2 so, dass sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei  $\lambda = 1/5$  liegen. Berechnen Sie weiters einen vollständigen Beobachter nach Satz 8.5 für die gewünschten Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei  $\lambda_j = 1/20$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Kombinieren Sie den Zustandsregler und den vollständigen Zustandsbeobachter nach Abbildung 8.3 und simulieren Sie den geschlossenen Kreis in MATLAB/SIMULINK. Vergleichen Sie das Ergebnis, wenn Sie den vollständigen Beobachter durch den trivialen Beobachter von (8.60) ersetzen.

**Ergebnis:** Der dynamische Regler bestehend aus Zustandsregler und vollständigem Zustandsbeobachter lautet

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \frac{10219}{37500} \\ \frac{3691}{9375} \\ \frac{411}{2500} \\ \frac{1169}{7500} \end{bmatrix} (\hat{y}_k - y_k)$$

$$\hat{y}_k = [1 \ 1 \ -2 \ 0] \hat{\mathbf{x}}_k$$

und

$$u_k = \left[ \frac{481567}{1200000} \quad -\frac{2187}{80000} \quad \frac{488491}{1200000} \quad -\frac{23}{4000} \right] \hat{\mathbf{x}}_k .$$

## 8.5. Literatur

1. Ackermann J., *Abtastregelung*, 3rd Ed., Springer, Berlin-Heidelberg, (1988).
2. Åström K.J., Wittenmark B., *Computer-Controlled Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, (1997).
3. Franklin G.F., Powell J.D., Workman M., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, (1998).
4. Kailath Th., *Linear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, (1980).
5. Ludyk G., *Theoretische Regelungstechnik 1 und 2*, Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, (1995).

# A. DIE LAPLACE-TRANSFORMATION

Die Laplace-Transformation ist eine im Wesentlichen eindeutige Zuordnung von Funktionen der Zeit  $t$  zu Funktionen einer komplexen Variablen  $s$ . Im Rahmen der (einseitigen) Laplace-Transformation werden nur so genannte *kausale Zeitfunktionen*  $f(t)$  betrachtet, für die gilt  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

**Definition A.1. (Laplace-Transformation)** Es sei angenommen, dass die Zeitfunktion  $f(t)$  kausal und auf jedem finiten Zeitintervall  $t \geq 0$  stückweise stetig ist sowie der Ungleichung

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad (\text{A.1})$$

für geeignete positive Konstanten  $\gamma$  und  $M$  genügt. Dann ist das Integral

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{mit} \quad s = \alpha + I\omega \quad (\text{A.2})$$

für alle  $\text{Re}(s) = \alpha > \gamma$  absolut konvergent. Man nennt die Funktion  $\hat{f}(s)$  auch die Laplace-Transformierte der kausalen Zeitfunktion  $f(t)$  und das Gebiet  $\mathbf{C}_\gamma = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > \gamma\}$  den Existenzbereich von  $\hat{f}(s)$ .

Als Beispiel berechne man die Laplace-Transformierte  $\hat{f}(s)$  der kausalen Zeitfunktion

$$f(t) = e^{at} \quad (\text{A.3})$$

und bestimme den zugehörigen Existenzbereich. Auswertung des Laplace-Integrals (A.2) ergibt

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-(\alpha-a)t} e^{-I\omega t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

für  $\text{Re}(s) = \alpha > a$ . Die Laplace-Transformierte von  $f(t) = e^{at}$  lautet  $\hat{f}(s) = \frac{1}{s-a}$  und der Existenzbereich errechnet sich zu  $\mathbf{C}_a = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$ .

Die ursprüngliche Zeitfunktion  $f(t)$  von (A.2) kann nun über die inverse Laplace-Transformation aus der zugehörigen Laplace-Transformierten  $\hat{f}(s)$  in der Form

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi I} \int_{r-I\infty}^{r+I\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds \quad , \quad t \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

bestimmt werden, wobei  $r$  eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, die im Existenzbereich von  $\hat{f}(s)$  liegt. Man beachte, dass an Unstetigkeitspunkten der Zeitfunktion  $f(t)$  das

Integral von (A.4) den Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert, also  $f(t) = \frac{1}{2}(f(+t) + f(-t))$ , liefert.

Bevor die wesentlichen Eigenschaften der Laplace-Transformation zusammengefasst werden, sollen noch zwei für die weiteren Betrachtungen benötigte Zeitfunktionen in Erinnerung gerufen werden.

Der so genannte *Einheitssprung* (*Heaviside-Funktion*)  $\sigma(t)$  ist als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

definiert und die zugehörige Laplace-Transformierte errechnet sich nach (A.2) zu

$$\mathcal{L}(\sigma(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (\text{A.6})$$

Der *Einheitsimpuls* (*Dirac Delta-Funktion*)  $\delta(t)$  ist keine Funktion im herkömmlichen Sinne sondern vielmehr ein *Funktional*, dass über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt &= g(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) \right) g(t) dt &= (-1)^n \left( \frac{d^n}{dt^n} g \right) (0) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

einer stetigen bzw.  $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktion  $g(t)$  eine reelle Zahl  $g(0)$  bzw.  $\left( \frac{d^n}{dt^n} g \right) (0)$  zuordnet. Der Einheitsimpuls  $\delta(t)$  kann nun als Grenzübergang von herkömmlichen Funktionen definiert werden, z.B. in der Form (siehe Abbildung A.1)

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \tau)}{\tau}. \quad (\text{A.8})$$

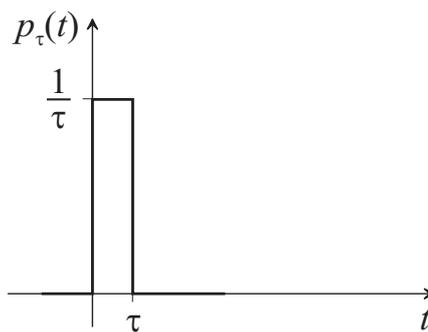


Abbildung A.1: Zur Definition des Einheitsimpulses.

Zur Berechnung der Laplace-Transformierten von  $\delta(t)$  bestimme man zuerst die Laplace-Transformierte von  $p_{\tau}(t)$

$$\mathcal{L}(p_{\tau}(t)) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{\tau s} \quad (\text{A.9})$$

und führe anschließend den Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  unter Zuhilfenahme der Regel von l'Hospital

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}(p_\tau(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{se^{-\tau s}}{s} = 1 \quad (\text{A.10})$$

durch.

## Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

### I. Linearität:

Zeitbereich:  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$

### II. Ähnlichkeitssatz:

Zeitbereich:  $f(at)$  ,  $a > 0$

Bildbereich:  $\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

### III. Erster Verschiebungssatz:

Zeitbereich:  $f(t-a)\sigma(t-a)$  ,  $a > 0$

Bildbereich:  $e^{-as} \hat{f}(s)$

### IV. Zweiter Verschiebungssatz:

Zeitbereich:  $f(t+a)$  ,  $a > 0$

Bildbereich:  $e^{as} \left( \hat{f}(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right)$

### V. Dämpfungssatz:

Zeitbereich:  $e^{-ct} f(t)$  ,  $c \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $\hat{f}(s+c)$

### VI. Differentiation:

Zeitbereich:  $\frac{d}{dt} f(t) = \dot{f}(t)$

Bildbereich:  $s \hat{f}(s) - f(+0)$

bzw.

Zeitbereich:  $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$

Bildbereich:  $s^n \hat{f}(s) - f(+0) s^{n-1} - f^{(1)}(+0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$

### VII. Integration:

Zeitbereich:  $\int_0^t f(\tau) d\tau$

Bildbereich:  $\frac{1}{s} \hat{f}(s)$

**VIII. Umkehrung zu VI:**

Zeitbereich:  $(-t)^n f(t)$

Bildbereich:  $\frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$

**IX. Umkehrung zu VII:**

Zeitbereich:  $\frac{1}{t} f(t)$

Bildbereich:  $\int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$

**X. Faltungssatz:**

Zeitbereich:  $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$

Bildbereich:  $\hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$

**XI. Periodische Funktionen:**

Zeitbereich:  $f(t + T) = f(t)$

Bildbereich:  $\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$

**XII. Grenzwertsätze:** (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

Anfangswertsatz:  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$

Endwertsatz:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$

**Aufgabe A.1.** Beweisen Sie die Eigenschaften I-V sowie X und XI.

Man beachte, dass sowohl bei der Differentiationsregel VI als auch beim Anfangswertsatz XII der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0)$  der Funktion  $f(t)$  (bzw. ihrer zeitlichen Ableitungen) an der Stelle  $t = 0$  verwendet wurde. Es ist natürlich unmittelbar einsichtig, dass im Falle einer an der Stelle  $t = 0$  stetigen (bzw.  $n$ -fach differenzierbaren Funktion)  $f(t)$  gilt  $f(0) = f(+0)$  (bzw.  $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(+0)$ ,  $i = 0, \dots, (n - 1)$ ).

Die Berechnung der Laplace-Transformation und insbesondere auch der inversen Laplace-Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (A.2) bzw. (A.4), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabelle unter Verwendung der Eigenschaften der Laplace-Transformation. Nachfolgende Tabelle A.1 fasst einige wesentliche Korrespondenzen zusammen:

**Aufgabe A.2.** Berechnen Sie zu den Zeitfunktionen  $f(t)$  von Tabelle A.1 die jeweiligen Laplace-Transformierten  $\hat{f}(s)$  und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

**Hinweis:** Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bt) = \frac{e^{Ibt} - e^{-Ibt}}{2I} \quad \text{und} \quad \cos(bt) = \frac{e^{Ibt} + e^{-Ibt}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der Laplace-Transformation.

Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$	Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$
I.	$\delta(t)$	1	VI.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
II.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	VII.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
III.	$t$	$\frac{1}{s^2}$	VIII.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
IV.	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	IX.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
V.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$			

Tabelle A.1: Laplace-Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Bei der inversen Laplace-Transformation hat man im Allgemeinen die Aufgabe, rationale Funktionen  $\hat{f}(s)$  in der Laplace-Variablen  $s$  in den Zeitbereich zu transformieren. Es hat sich nun gezeigt, dass eine Zerlegung der rationalen Funktionen  $\hat{f}(s)$  in eine Summe einfacherer Ausdrücke mit Hilfe der so genannten *Partialbruchzerlegung* sehr zweckmäßig ist.

**Satz A.1. (Partialbruchzerlegung)** Es sei

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \tag{A.11}$$

eine rationale Funktion in  $s$  mit den teilerfremden reellwertigen Polynomen  $\hat{p}(s)$  (Zählerpolynom) und  $\hat{q}(s)$  (Nennerpolynom) mit der Eigenschaft  $\text{grad}(\hat{p}) \leq \text{grad}(\hat{q}) = n$ . Weiters sei angenommen, dass sich das Nennerpolynom  $\hat{q}(s)$  in der Form

$$\hat{q}(s) = \prod_{j=1}^h (s - \lambda_j)^{k_j} \prod_{j=1}^m ((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{l_j} \tag{A.12}$$

mit

$$\text{grad}(\hat{q}) = n = \sum_{j=1}^h k_j + 2 \sum_{j=1}^m l_j \tag{A.13}$$

darstellen lässt.

Dann hat  $\hat{f}(s)$  eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\hat{f}(s) = c_0 + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{k_j} \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{l_j} \frac{d_{j,i} + e_{j,i}s}{((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^i} \tag{A.14}$$

mit

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \tag{A.15}$$

und den reellen Koeffizienten  $c_{j,i}$ ,  $d_{j,i}$  und  $e_{j,i}$ . Man nennt die rechte Seite von (A.14) auch Partialbruchzerlegung von  $\hat{f}(s)$ .

Die Partialbruchkoeffizienten  $c_{j,i}$ ,  $d_{j,i}$  und  $e_{j,i}$  lassen sich im Allgemeinen sehr einfach durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Rücktransformation der einzelnen Summanden von (A.14) erfolgt direkt über die Korrespondenztabelle A.1.

**Einfache reelle Wurzel  $\lambda_j$  ( $k_j = 1$ ):** Siehe IV in Tabelle A.1

Bildbereich:  $\frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)}$

Zeitbereich:  $c_{j,1} \exp(\lambda_j t)$

**Mehrfache reelle Wurzel  $\lambda_j$  ( $k_j = k$ ):** Siehe V in Tabelle A.1

Bildbereich:  $\sum_{i=1}^k \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} = \frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)} + \frac{c_{j,2}}{(s - \lambda_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,k}}{(s - \lambda_j)^k}$

Zeitbereich:  $\exp(\lambda_j t) \left( c_{j,1} + c_{j,2} \frac{t}{1!} + \dots + c_{j,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right)$

**Einfache konjugiert komplexe Wurzel  $\lambda_j = \alpha_j \pm I\beta_j$  ( $l_j = 1$ ):** Siehe VIII und IX in Tabelle A.1

Bildbereich:  $\frac{d_{j,1} + e_{j,1}s}{((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} = e_{j,1} \frac{(s - \alpha_j)}{((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \frac{\beta_j}{((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}$

Zeitbereich:  $\exp(\alpha_j t) \left( e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right)$

**Aufgabe A.3.** Berechnen Sie die Zeitbereichsfunktion für eine zweifach konjugiert komplexe Wurzel, also für  $\lambda_j = \alpha_j \pm I\beta_j$  ( $l_j = 2$ ).

**Lösung:**

$$\begin{aligned} & \exp(\alpha_j t) \left( e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right) + \\ & \exp(\alpha_j t) \left( \frac{e_{j,2}}{2\beta_j} t \sin(\beta_j t) + \frac{e_{j,2}\alpha_j + d_{j,2}}{2\beta_j^3} (\sin(\beta_j t) - \beta_j t \cos(\beta_j t)) \right) \end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel für die Laplace-Transformation soll das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 4t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y(0) = -1 \quad (\text{A.16})$$

gelöst werden. Die Laplace-Transformierte von (A.16) lautet

$$s^2 \hat{y}(s) - (1)s - (-1) - 3(\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{4}{s^2} \quad (\text{A.17})$$

bzw.

$$\hat{y}(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s^2 - 3s + 2)}. \quad (\text{A.18})$$

Die Partialbruchzerlegung von  $\hat{y}(s)$  errechnet sich zu

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} \quad (\text{A.19})$$

und die Rücktransformation in den Zeitbereich über die Korrespondenztabelle A.1 liefert unmittelbar das Ergebnis

$$y(t) = 2t + 3 - e^t - e^{2t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.20})$$

**Aufgabe A.4.** Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 8\sin(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}y(0) = 3$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Verwenden Sie dazu das Maple-Package `inttrans`.

**Lösung:**

$$y(t) = e^t \left( \frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{3}{5} \sin(2t) \right) + \frac{4}{5} \cos(t) + \frac{8}{5} \sin(t)$$

**Aufgabe A.5.** Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\hat{f}(s) = \frac{5s^4 - s^3 - 3s^2 - 6s - 3}{(s^2 + s + 1)s^2}.$$

**Lösung:**

$$\hat{f}(s) = 5 - \frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2 + 3s}{s^2 + s + 1}$$

## A.1. Literatur

1. Doetsch G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer, Berlin Heidelberg, (1974).
2. Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, 6th Edition, John Wiley & Sons, New York, (1988).
3. Papoulis A., *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, (1987).



für  $|z^{-1}| < 1$  oder  $|z| > 1$  und damit den Existenzbereich  $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \gamma\}$ .

In der etwas älteren Literatur wird die  $z$ -Transformation auch als diskrete Laplace-Transformation bezeichnet. Um den Zusammenhang zwischen der  $z$ - und der Laplace-Transformation zu erläutern, betrachte man die Folge von Abtastwerten  $(f_k)$  in Form einer Impulsfolge

$$(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a) \delta(t - kT_a) \quad (\text{B.5})$$

und transformiere diese in den Laplace-Bereich

$$\mathcal{L}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kT_a s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (e^{sT_a})^{-k} \quad (\text{B.6})$$

Führt man nun eine neue komplexe Variable  $z$

$$z = e^{sT_a} \quad (\text{B.7})$$

ein, so gelangt man über (B.6) unmittelbar zur Definition der  $z$ -Transformation (B.2).

Die Rücktransformation einer  $z$ -Transformierten  $f_z(z)$  in den Folgenbereich  $(f_k)$  erfolgt über die Theorie der Laurent-Reihen. Dazu sei angemerkt, dass jede komplexwertige Funktion  $f_z(z)$ , die in einem Gebiet  $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \gamma\}$  holomorph ist, eindeutig in eine in diesem Gebiet absolut konvergente *Laurent-Reihe* um den Punkt  $z = 0$

$$f_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{1}{2\pi I} \oint_{\mathbf{C}_\gamma} f_z(z) z^{k-1} dz \quad (\text{B.8})$$

entwickelbar ist, wobei durch das Wegintegral das Gebiet  $\mathbf{C}_\gamma$  im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhreigersinn) umlaufen wird.

## Eigenschaften und Korrespondenzen der $z$ -Transformation

### I. Linearität:

Zeitbereich:  $c_1 (f_{1,k}) + c_2 (f_{2,k})$  ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $c_1 f_{1,z}(z) + c_2 f_{2,z}(z)$

### II. Erster Verschiebungssatz (Rechtsverschiebung):

Zeitbereich:  $(f_{k-n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich:  $z^{-n} \left( f_z(z) + \sum_{j=1}^n f_{-j} z^j \right)$  bzw.  $(f_{k-n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$   
 $z^{-n} f_z(z)$  für  $f_j = 0, j < 0$

### III. Zweiter Verschiebungssatz (Linksverschiebung):

Zeitbereich:  $(f_{k+n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich:  $z^n \left( f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j} \right)$

**IV. Dämpfungssatz:**

Zeitbereich:  $(c^k f_k)$  ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $c \neq 0$

Bildbereich:  $f_z \left( \frac{z}{c} \right)$

**V. Differenzenbildung (Vorwärtsdifferenz):**

Zeitbereich:  $(f_{k+1} - f_k)$

Bildbereich:  $(z - 1) f_z(z) - z f_0$

**VI. Differenzenbildung (Rückwärtsdifferenz):**

Zeitbereich:  $(f_k - f_{k-1})$

Bildbereich:  $\frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$

**VII. Summenbildung:**

Zeitbereich:  $\left( \sum_{j=0}^k f_j \right)$

Bildbereich:  $\frac{z}{z-1} f_z(z)$

**VIII. Umkehrung zu V bzw. VI:**

Zeitbereich:  $(k T_a f_k)$

Bildbereich:  $-T_a z \frac{d}{dz} f_z(z)$

**IX. Umkehrung zu VII:**

Zeitbereich:  $0$  für  $k = 0$  und  $\left( \frac{f_k}{k T_a} \right)$  für  $k > 0$

Bildbereich:  $\frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{f_z(\sigma)}{\sigma} d\sigma$

**X. Faltungssatz:**

Zeitbereich:  $(f_{1,k}) * (f_{2,k}) = \sum_{j=0}^k f_{1,k-j} f_{2,j} = \sum_{j=0}^k f_{1,j} f_{2,k-j}$

Bildbereich:  $f_{1,z}(z) f_{2,z}(z)$

**XI. Grenzwertsätze:** (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

Anfangswertsatz:  $f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f_z(z)$

Endwertsatz:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f_z(z)$

Die Berechnung der  $z$ -Transformation und insbesondere auch der inversen  $z$ -Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (B.2) bzw. (B.8), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabelle unter Verwendung der Eigenschaften der  $z$ -Transformation. In Tabelle B.1 sind einige wesentliche Korrespondenzen zusammengefasst:

Nr.	s-Bildbereich $\hat{f}(s)$	Zeitbereich $f(t)$	Abtastfolgen $(f_k)$	z-Bildbereich $f_z(z)$
I.	1	$\delta(t)$	$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$	1
II.	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$(1^k)$	$\frac{z}{z-1}$
III.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$(kT_a)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
IV.	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$	$(e^{akT_a})$	$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
V.	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$((kT_a)^n e^{akT_a})$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT_a}}$
VI.	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$(\sin(bkT_a))$	$\frac{z \sin(bT_a)}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VII.	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$(\cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - \cos(bT_a))}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VIII.	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \sin(bt)$	$(e^{akT_a} \sin(bkT_a))$	$\frac{ze^{aT_a} \sin(bT_a)}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$
IX.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$(e^{akT_a} \cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - e^{aT_a} \cos(bT_a))}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$

Tabelle B.1: Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

**Aufgabe B.1.** Berechnen Sie zu den Folgen  $(f_k)$  der Zeitfunktionen  $f(t)$  von Tabelle B.1 die jeweiligen z-Transformierten  $f_z(z)$  und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

**Hinweis:** Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bkT_a) = \frac{e^{IbkT_a} - e^{-IbkT_a}}{2I} \quad \text{und} \quad \cos(bkT_a) = \frac{e^{IbkT_a} + e^{-IbkT_a}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der z-Transformation.

**Aufgabe B.2.** Zeigen Sie, dass im Sinne des Anfangswertsatzes sämtliche Folgenwerte über die Vorschrift

$$\begin{aligned} f_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(f_z(z) - f_0) \\ f_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(f_z(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

rekursiv ermittelbar sind, sofern diese existieren.

Analog zur inversen Laplace-Transformation hat es sich auch bei der inversen z-Transformation als sinnvoll erwiesen, die rationalen Funktionen  $f_z(z)$  mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* (siehe Satz A.1) in eine Summe einfacherer Ausdrücke zu zerlegen und diese dann

mit Hilfe der Korrespondenztabelle B.1 in den Folgebereich zurückzutransformieren. Als Beispiel betrachte man die  $z$ -Transformierte

$$f_z(z) = \frac{z - 2}{(z - 0.5)(z^2 - z + 0.5)}. \quad (\text{B.9})$$

Die zugehörige Partialbruchzerlegung berechnet man über den Ansatz

$$f_z(z) = \frac{A}{z - 0.5} + \frac{B + Cz}{z^2 - z + 0.5} \quad (\text{B.10})$$

in der Form

$$f_z(z) = \frac{-6}{z - 0.5} + \frac{-2 + 6z}{z^2 - z + 0.5}. \quad (\text{B.11})$$

Um direkt die Korrespondenzen von Tabelle B.1 nutzen zu können, empfiehlt es sich, in (B.11) jeweils Zähler und Nenner um  $z$  zu erweitern, d.h.

$$f_z(z) = \underbrace{\frac{1}{z} \frac{-6z}{z - 0.5}}_{f_{1,z}(z)} + \underbrace{\frac{1}{z} \frac{z(-2 + 6z)}{z^2 - z + 0.5}}_{f_{2,z}(z)}. \quad (\text{B.12})$$

Die Rücktransformation des ersten Terms  $f_{1,z}(z)$  lautet demnach mit der Eigenschaft II der  $z$ -Transformation und der Korrespondenz IV von Tabelle B.1

$$(f_{1,k}) = -6 \times 0.5^{(k-1)} \quad \text{für } k > 0. \quad (\text{B.13})$$

Aus dem Nenner von  $f_{2,z}(z)$  und den Korrespondenzen VIII und IX von Tabelle B.1 folgen die Gleichungen

$$0.5 = e^{2aT_a} \quad \text{sowie} \quad 1 = 2e^{aT_a} \cos(bT_a) \quad (\text{B.14})$$

bzw.

$$e^{aT_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad bT_a = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{B.15})$$

Schreibt man nun den Zähler von  $f_{2,z}(z)$  in der Form

$$f_{2,z}(z) = \frac{1}{z} \frac{6z(z - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{z^2 - z + 0.5} = \frac{1}{z} \frac{6z(z - \frac{1}{2})}{z^2 - z + 0.5} + \frac{1}{z} 2 \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 - z + 0.5} \quad (\text{B.16})$$

um, so kann aus der Korrespondenz unmittelbar die Rücktransformation

$$(f_{2,k}) = 6 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{(k-1)} \cos\left(\frac{\pi}{4}(k-1)\right) + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{(k-1)} \sin\left(\frac{\pi}{4}(k-1)\right) \quad \text{für } k > 0 \quad (\text{B.17})$$

angegeben werden.

**Aufgabe B.3.** Bestimmen Sie mit Hilfe der  $z$ -Transformation die Lösung der Differenzgleichung

$$y_{k+2} - 1.5y_{k+1} + 0.5y_k = u_k$$

für  $(u_k) = (1^k)$  und  $y_0 = 0$  sowie  $y_1 = 1$ .

**Ergebnis:** Die Lösung lautet

$$y_k = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^k + 2(k-1) .$$

**Hinweis:** Benutzen Sie in MAPLE die Befehle `ztrans`, `invztrans` sowie `rsolve`.

In vielen Fällen werden die Laplace- und die  $z$ -Transformation gleichzeitig benutzt. Möchte man beispielsweise zur Laplace-Transformierten  $\hat{f}(s)$  eines Zeitsignals  $f(t)$  die  $z$ -Transformierte der Folge  $(f_k)$  wissen, dann berechnet sich diese nach der Vorschrift

$$f_z(z) = \mathcal{Z} \left\{ \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \hat{f}(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) \right\} . \quad (\text{B.18})$$

Die Beziehung (B.18) besagt, dass im ersten Schritt zu  $\hat{f}(s)$  über die inverse Laplace-Transformation  $\mathcal{L}^{-1}$  das Zeitsignal  $f(t)$  bestimmt wird, dieses wird dann abgetastet, also  $(f_k) = (f(kT_a))$  und anschließend  $z$ -transformiert. Um in weiterer Folge die Schreibweise abzukürzen, wird die Transformationsvorschrift (B.18) wie folgt

$$f_z(z) = \mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) \right) := \mathcal{Z} \left\{ \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \hat{f}(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) \right\} \quad (\text{B.19})$$

angeschrieben.

Als Beispiel berechne man zum Laplace-transformierten Zeitsignal

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} \quad (\text{B.20})$$

die zugehörige  $z$ -Transformierte, also  $f_z(z) = \mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) \right)$ . In einem ersten Schritt ermittelt man die Partialbruchzerlegung

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{(s+1)^2} \quad (\text{B.21})$$

und über die inverse Laplace-Transformation folgt das Zeitsignal zu

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \hat{f}(s) \right) = e^{-t} - 2te^{-t} . \quad (\text{B.22})$$

Durch Abtastung mit der Abtastzeit  $T_a$  erhält man aus  $f(t)$  die Folge von Abtastwerten

$$(f_k) = (f(kT_a)) = (1 - 2kT_a) e^{-kT_a} \quad (\text{B.23})$$

und mit der  $z$ -Transformation ergibt sich

$$f_z(z) = \frac{z}{z - e^{-T_a}} - 2 \frac{zT_a e^{-T_a}}{(z - e^{-T_a})^2} = \frac{z(z - (1 + 2T_a) e^{-T_a})}{(z - e^{-T_a})^2} . \quad (\text{B.24})$$

Man beachte, dass das Ergebnis direkt aus der Korrespondenztabelle B.1 abgelesen werden kann.

**B.1. Literatur**

1. Doetsch G., *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der  $z$ -Transformation*, Oldenbourg, München, (1967).
2. Franklin G.F., Powell, J.D., Workman, M., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, California, (1998).
3. Gausch F., Hofer A., Schlacher K., *Digitale Regelkreise*, Oldenbourg, München, (1991).

## C. BEWEISE

**Beweis zu Satz 3.7:** Impulsantwort ist absolut integrabel  $\Rightarrow$  BIBO-stabil: Aus dem Faltungssatz X aus Anhang A und (3.98) lässt sich die Ausgangsgröße  $y(t)$  in der Form

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau + du(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau + du(t) \quad (\text{C.1})$$

anschreiben. Wenn das System absolut integrabel ist, folgt aus  $|u(t)| \leq a < \infty$  direkt

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau + du(t) \right| \\ &\leq \int_0^t |g(\tau) u(t-\tau)| d\tau + |du(t)| \\ &\leq a \left( \int_0^t |g(\tau)| d\tau + |d| \right) = b < \infty . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

BIBO-stabil  $\Rightarrow$  Impulsantwort ist absolut integrabel bzw. wird gezeigt durch Widerspruch Impulsantwort ist nicht absolut integrabel ( $\int_0^\infty |g(t)| dt = \infty$ )  $\Rightarrow$  System ist nicht BIBO-stabil, d.h., es existiert ein beschränkter Eingang  $u_a(t)$  mit  $|u_a(t)| \leq a < \infty$  so, dass die Ausgangsgröße  $y_a(t)$  nicht beschränkt ist.

Man wählt dazu für festes  $t$  die spezielle beschränkte Eingangsgröße  $u_a$  in der Form

$$u_a(t-\tau) = a \operatorname{sign}(g(\tau)) \quad \text{für } 0 < \tau \leq t \quad \text{und} \quad u_a(t) = a \operatorname{sign}(d) . \quad (\text{C.3})$$

Setzt man nun  $u_a$  in (C.1) ein, erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) u_a(t-\tau) d\tau + du_a(t) \\ &= a \left( \int_0^t |g(\tau)| d\tau + |d| \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Der Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  in (C.4) zeigt unmittelbar, dass  $y(t)$  unbeschränkt ist und zeigt damit, dass das System unter der Annahme  $\int_0^\infty |g(t)| dt = \infty$  auch nicht BIBO-stabil ist. ■

**Beweis zu Satz 3.8:** BIBO-stabil  $\Rightarrow G(s)$  hat nur Pole mit negativem Realteil: Zufolge von Satz 3.7 folgt aus der BIBO-Stabilität von  $G(s)$ , dass die Impulsantwort  $g(t)$  absolut integrabel ist. Die Laplace-Transformierte von  $g(t)$  errechnet sich aus (A.2) in der Form

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \quad (\text{C.5})$$

und mit  $s = \alpha + I\omega$  gilt die Abschätzung

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} |g(t)| dt . \quad (\text{C.6})$$

Da  $g(t)$  absolut integrierbar ist, gilt

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad \text{für} \quad \alpha \geq 0. \quad (\text{C.7})$$

Die Ungleichung (C.7) besagt, dass  $\hat{g}(s)$  für alle  $s$  mit  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  beschränkt ist bzw.  $\hat{g}(s)$  keinen Pol  $s_i$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene hat. Wegen  $G(s) = \hat{g}(s) + d$  gilt dies auch für  $G(s)$ .

**Aufgabe C.1.** *Beweisen Sie die Umkehrung:  $G(s)$  hat nur Pole mit negativem Realteil  $\Rightarrow$  BIBO-stabil* ■

**Beweis zu Satz 4.1:** intern stabil  $\Rightarrow$  Bedingungen (A) und (B): Die Übertragungsfunktionen  $T_{i,j}(s)$  von (4.22) lauten

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \begin{bmatrix} R(s) & -G(s)R(s) \\ G(s)R(s) & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Setzt man für  $R(s)$  und  $G(s)$  die Polynomdarstellung von (4.17) ein, dann ergibt sich (C.8) zu

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \frac{n_G(s)n_R(s)}{z_G(s)z_R(s) + n_G(s)n_R(s)} \begin{bmatrix} \frac{z_R(s)}{n_R(s)} & -\frac{z_G(s)z_R(s)}{n_G(s)n_R(s)} \\ \frac{z_G(s)z_R(s)}{n_G(s)n_R(s)} & \frac{z_G(s)}{n_G(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Da wegen der internen Stabilität alle Übertragungsfunktionen BIBO-stabil sind, müssen alle Nullstellen von  $z_G(s)z_R(s) + n_G(s)n_R(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen, womit die Bedingung (A) gezeigt ist.

Die Bedingung (B) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass wenn  $z_G(s)$  und  $n_R(s)$  bzw.  $z_R(s)$  und  $n_G(s)$  eine gemeinsame Nullstelle  $s_i$  mit  $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$  hätten, diese auch Nullstelle von  $z_G(s)z_R(s) + n_G(s)n_R(s)$  sein müsste, was aber bereits ausgeschlossen wurde. Bedingungen (A) und (B)  $\Rightarrow$  intern stabil (durch Widerspruch): Es sei angenommen, dass  $s_i$  mit  $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$  eine Nullstelle von  $z_G(s)z_R(s) + n_G(s)n_R(s)$  ist. Dann muss aus  $n_G(s_i)n_R(s_i) = 0$  folgen, dass auch  $z_G(s_i)z_R(s_i) = 0$  ist. Dies widerspricht aber der Bedingung (B). Also muss  $n_G(s_i)n_R(s_i) \neq 0$  sein und die Bedingung

$$1 + \frac{z_G(s_i)z_R(s_i)}{n_G(s_i)n_R(s_i)} = 0 \quad (\text{C.10})$$

erfüllt sein. Dies widerspricht aber wiederum der Bedingung (A). ■

**Beweis zu Hilfssatz 7.1:** Aus  $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_k) = \operatorname{rang}(\mathbf{H}_{k+1})$  mit  $\mathbf{H}_k = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$  folgt, dass sich sämtliche Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}^k\mathbf{B}$  als Linearkombination der Spaltenvektoren von  $\mathbf{H}_k$  ausdrücken lassen, also

$$\mathbf{A}^k\mathbf{B} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_j \quad (\text{C.11})$$

für geeignete Matrizen  $\mathbf{D}_j \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Damit gilt aber weiters

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^k\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}\mathbf{D}_j = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_{j-1} + \mathbf{A}^k\mathbf{B}\mathbf{D}_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_{j-1} \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_j\mathbf{D}_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}(\mathbf{D}_{j-1} + \mathbf{D}_j\mathbf{D}_{k-1}) \quad \text{mit } \mathbf{D}_{-1} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

woraus man unmittelbar erkennt, dass sich für  $l = 2$  auch  $\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B}$  als Linearkombination der Spaltenvektoren von  $\mathbf{H}_k$  ausdrücken lässt. Über den Induktionsschluss gilt dies dann auch für alle weiteren  $l = 3, 4, \dots$

Der Beweis des zweiten Teiles des Hilfssatzes, dass aus  $\text{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$  mit  $\rho < n \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \rho$  kann durch Widerspruch erfolgen. Nehmen wir dazu an, dass gilt  $\text{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$  mit  $\rho < n$  und  $\text{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \kappa < \rho$ . Der Fall  $\text{rang}(\mathbf{H}_\rho) > \rho$  kann unmittelbar ausgeschlossen werden, da dann automatisch  $\text{rang}(\mathbf{H}_n) > \rho$  gelten muss. Wenn  $\text{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \kappa < \rho$  gilt, dann kann der Rang der Matrix  $\mathbf{H}_k$  von (7.12) nicht für jedes  $k = 1, \dots, \rho$  zunehmen. Es muss somit ein  $\bar{k}$  mit  $1 \leq \bar{k} < \rho$  so existieren, dass gilt  $\text{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}}) = \text{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}+1}) = \kappa$ . Damit folgt aber aufgrund des ersten Teiles des Hilfssatzes  $\text{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}}) = \text{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}+l}) = \kappa$  für alle  $l \geq 1$  und wegen  $n > \rho > \bar{k}$  auch  $\text{rang}(\mathbf{H}_n) = \kappa < \rho$ , was ein Widerspruch zur Annahme ist. ■

**Beweis zu Satz 7.5:** Der Beweis dieses Satzes soll nicht bis ins letzte Detail durchbesprochen werden, da er sich im Wesentlichen an dem Beweis von Satz 7.1 orientiert. In einem ersten Schritt betrachte man wiederum die allgemeine Lösung für die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$  von (7.32) zum Zeitpunkt  $t$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)}_{\mathbf{v}(t)} \quad (\text{C.13})$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$  (vergleiche dazu Satz 2.4). Da in (C.13) nach Definition 7.4 der Ausdruck  $\mathbf{v}(t)$  für  $0 \leq t \leq T$  bekannt ist, kann (C.13) in der Form

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{y}}(t)}_{\mathbf{y}(t) - \mathbf{v}(t)} = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 \quad (\text{C.14})$$

umgeschrieben werden und die Untersuchung der Beobachtbarkeit reduziert sich auf die Frage, ob aus Gleichung (C.14)  $\mathbf{x}_0$  eindeutig bestimmt werden kann, wobei  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  im Intervall  $0 \leq t \leq T$  bekannt ist. Aus diesem Grund kann im Weiteren ohne Einschränkung der Allgemeinheit bei der Beobachtbarkeitsuntersuchung des Systems (7.32) der Eingang  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , gesetzt werden.

**Beweis Satz 7.5 Teil 1:** vollständig beobachtbar  $\Rightarrow \text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})) = n$ : Dieser Teil des Beweises wird durch Widerspruch geführt - d.h., man nimmt an,  $\text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})) < n$ . Dann existiert ein nichttrivialer Vektor  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  so, dass gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.15})$$

Für Matrizen, die die Struktur der Beobachtbarkeitsmatrix (7.33) aufweisen, ist nun wiederum der Hilfssatz 7.1 anwendbar. Lösen Sie dazu nachfolgende Aufgabe:

**Aufgabe C.2.** Zeigen Sie, dass wenn für die Matrix

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

gilt  $\text{rang}(\mathbf{F}_k) = \text{rang}(\mathbf{F}_{k+1})$ , dann folgt  $\text{rang}(\mathbf{F}_k) = \text{rang}(\mathbf{F}_{k+l})$  mit  $l = 2, 3, \dots$ . Beweisen Sie, dass im Weiteren gilt, falls  $\text{rang}(\mathbf{F}_n) = \rho$  mit  $\rho < n$ , dann folgt  $\text{rang}(\mathbf{F}_\rho) = \rho$ .

Damit erhält man unmittelbar für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$  und  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , eingesetzt in (C.13) bzw. (C.14) die Beziehung

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{CA}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.17})$$

Dies bedeutet, dass zwei verschiedene Anfangswerte, nämlich  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$  und  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , zur selben Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$  führen und daher am Ausgang nicht unterschieden werden können. Da aber vorausgesetzt wurde, dass das System (7.32) vollständig beobachtbar ist und da wegen der Linearität von (7.32) die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet ist, muss gelten  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , was aber ein Widerspruch zur Annahme ist.

**Beweis Satz 7.5 Teil 2:**  $\text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})) = n \Rightarrow$  vollständig beobachtbar: Um dies zu zeigen, wird eine Vorschrift angegeben, wie man aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  auf dem Intervall  $0 \leq t \leq T$  sowie der Systemmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  errechnen kann. Dazu wird in Analogie zur Erreichbarkeit die sogenannte *Gramsche Matrix (observability gramian)* in der Form

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (\text{C.18})$$

eingeführt.

**Aufgabe C.3.** Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix  $\bar{\mathbf{G}}$  von (C.18) genau dann regulär ist, wenn die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  von (7.33) den Rang  $n$  hat.

Multipliziert man nun (C.14) von links mit  $\bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^T \mathbf{C}^T$  und integriert von 0 bis  $T$ , dann erhält man

$$\int_0^T \bar{\mathbf{G}}^{-1} (e^{\mathbf{A}t})^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{y}}(t) dt = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \underbrace{\int_0^T (e^{\mathbf{A}t})^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt}_{\bar{\mathbf{G}}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad (\text{C.19})$$

und hat damit eine explizite Vorschrift gegeben, wie man  $\mathbf{x}_0$  berechnet. ■



Der Beweis für die vollständige Beobachtbarkeit folgt direkt aus dem Dualitätsprinzip vom Abschnitt 7.7. ■

**Beweis zu Satz 7.13:** Es ist sofort einsichtig, dass die Beziehungen (7.79) und (7.80) für alle  $s$  mit  $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$  erfüllt sind. Offensichtlich müssen nur jene  $s$ , die auch Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind, detaillierter untersucht werden.

$\text{rang}[s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n \Rightarrow$  System ist vollständig erreichbar: Wenn  $\text{rang}[s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n$ , dann existiert kein nichttrivialer Vektor  $\mathbf{w}^T \neq \mathbf{0}^T$  so, dass die nachfolgenden Gleichungen

$$\mathbf{w}^T [s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{b} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{A} = s\mathbf{w}^T \quad (\text{C.27})$$

gelten. Da wegen der letzten Beziehung in (C.27)  $\mathbf{w}^T$  ein Linkseigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$  mit zugehörigem Eigenwert  $s$  ist, folgt nach Satz 7.12, dass das System vollständig erreichbar ist.

**Aufgabe C.4.** *Beweisen Sie die Umkehrung: das System ist vollständig erreichbar  $\Rightarrow$   $\text{rang}[s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n$*

**Hinweis:** *Verwenden Sie die selben Argumente wie soeben beschrieben und nutzen Sie die Ergebnisse von Satz 7.12.*

Der Beweis für die Beobachtbarkeit erfolgt auf analoge Art und Weise. ■

**Beweis zu Satz 8.4:** Der Beweis beruht auf dem PBH-Eigenvektortest von Satz 7.12. Die Linkseigenvektoren  $\mathbf{w}_i^T = [\mathbf{w}_{1,i}^T, w_{2,i}]$  zu den Eigenwerten  $\lambda_i$  der Matrix  $\Phi_I$  berechnen sich aus der Beziehung

$$[\mathbf{w}_{1,i}^T, w_{2,i}] \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix} = \lambda_i [\mathbf{w}_{1,i}^T, w_{2,i}] \quad (\text{C.28})$$

bzw.

$$\mathbf{w}_{1,i}^T (\Phi - \lambda_i \mathbf{E}) - w_{2,i} \mathbf{c}^T = \mathbf{0}^T \quad \text{und} \quad w_{2,i} = \lambda_i w_{2,i} . \quad (\text{C.29})$$

Man erkennt unmittelbar aus (C.29), dass für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\Phi$ , die nach Voraussetzung ungleich 1 sind, gilt,  $w_{2,i} = 0$  und wegen der vollständigen Erreichbarkeit von  $(\Phi, \Gamma)$  folgt  $\mathbf{w}_i^T \Gamma_I = \mathbf{w}_{1,i}^T \Gamma \neq 0$ . Für den Eigenwert  $\lambda_i = 1$  des hinzugefügten Integrators ergibt sich aus (C.29) und der Invertierbarkeit der Matrix  $(\Phi - \mathbf{E})$  die Beziehung

$$\mathbf{w}_{1,i}^T = w_{2,i} \mathbf{c}^T (\Phi - \mathbf{E})^{-1} \quad \text{mit} \quad w_{2,i} \neq 0 \quad (\text{C.30})$$

und da  $G(z)|_{z=1} \neq 0$  ist mit

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma, \quad (\text{C.31})$$

folgt weiters

$$\mathbf{w}_i^T \Gamma_I = w_{2,i} \mathbf{c}^T (\Phi - \mathbf{E})^{-1} \Gamma \neq 0 . \quad (\text{C.32})$$

Damit ist aber gezeigt, dass kein Linkseigenvektor von  $\Phi_I$  orthogonal zu  $\Gamma_I$  ist, womit obiger Satz bewiesen ist. ■