B. Die z-Transformation

Die z-Transformation ist eine im Wesentlichen eineindeutige Zuordnung von Folgen von Funktionswerten (f_k) zu Funktionen einer komplexen Variablen z. Im Rahmen der (einseitigen) z-Transformation werden nur Folgen von kausalen Zeitfunktionen betrachtet, für die gilt $f_k = 0$ für $k < 0$.

Definition B.1 (z-Transformation)**.** Es sei angenommen, dass die Folgenwerte f_k, $k = 0, 1, \ldots$ der Ungleichung

$$|f_k| \leq M\gamma^k \tag{B.1}$$

für geeignete positive Konstanten γ und M genügen. Dann ist die Summe

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \tag{B.2}$$

für alle z mit $|z| > \gamma$ *absolut konvergent*. Man nennt die Funktion $f_z(z)$ auch die z-Transformierte von (f_k) und das Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| > \gamma\}$ den *Existenzbereich* von $f_z(z)$.

Als Beispiel berechne man die z-Transformierte $f_z(z)$ der Einheitssprungfolge gemäß Abbildung B.1

$$(f_k) = \left(1^k\right) = (1, 1, 1, \ldots) \tag{B.3}$$

und bestimme den zugehörigen Existenzbereich. Über die Auswertung von (B.2) mittels der geometrischen Reihe erhält man unmittelbar das Ergebnis

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\left\{\left(1^k\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{B.4}$$

für $\left|z^{-1}\right| < 1$ oder $|z| > 1$ und damit den Existenzbereich $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| > 1\}$.

In der etwas älteren Literatur wird die z-Transformation auch als diskrete Laplace-Transformation bezeichnet. Um den Zusammenhang zwischen der z- und der Laplace-Transformation zu erläutern, betrachte man die Folge von Abtastwerten (f_k) in Form einer Impulsfolge

$$(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a)\,\delta(t - kT_a) \tag{B.5}$$

und transformiere diese in den Laplace-Bereich

$$\mathcal{L}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathrm{e}^{-kT_a s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\mathrm{e}^{sT_a}\right)^{-k} \ . \tag{B.6}$$

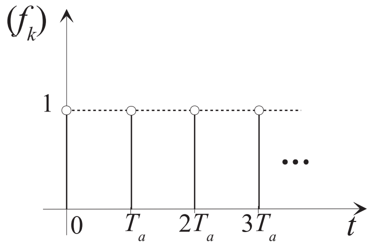

Abbildung B.1.: Sprungfolge $\left(1^k\right)$.

Führt man nun eine neue komplexe Variable z

$$z = \mathrm{e}^{sT_a} \tag{B.7}$$

ein, so gelangt man über (B.6) unmittelbar zur Definition der z-Transformation (B.2).

Die Rücktransformation einer z-Transformierten $f_z(z)$ in den Folgenbereich (f_k) erfolgt über die Theorie der Laurent-Reihen. Dazu sei angemerkt, dass jede komplexwertige Funktion $f_z(z)$, die in einem Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{ z \in \mathbb{C} |\ |z| > \gamma \}$ holomorph ist, eindeutig in eine in diesem Gebiet absolut konvergente *Laurent-Reihe* um den Punkt $z = 0$

$$f_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{1}{2\pi I} \oint_{\mathbf{C}_\gamma} f_z(z) z^{k-1} \mathrm{d}z \tag{B.8}$$

entwickelbar ist, wobei durch das Wegintegral das Gebiet $\mathbf{C}_\gamma$ im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) umlaufen wird.

B.1. Eigenschaften und Korrespondenzen der z-Transformation

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 (f_{1,k}) + c_2 (f_{2,k})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 f_{1,z}(z) + c_2 f_{2,z}(z)$

II. Erster Verschiebungssatz (Rechtsverschiebung):

Zeitbereich: (f_{k-n}) , $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^{-n}\left(f_z(z) + \sum_{j=1}^{n} f_{-j} z^j\right)$

bzw.

(f_{k-n}) , $n \in \mathbb{N}_+$

$z^{-n} f_z(z)$ für $f_j = 0$, $j < 0$

III. Zweiter Verschiebungssatz (Linksverschiebung):

Zeitbereich: (f_{k+n}) , $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^n\left(f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j}\right)$

IV. Dämpfungssatz:

Zeitbereich: $\left(c^k f_k\right)$, $c \in \mathbb{C}$ und $c \neq 0$

Bildbereich: $f_z\left(\frac{z}{c}\right)$

V. Differenzenbildung (Vorwärtsdifferenz):

Zeitbereich: $(f_{k+1} - f_k)$

Bildbereich: $(z-1)\, f_z(z) - z f_0$

VI. Differenzenbildung (Rückwärtsdifferenz):

Zeitbereich: $(f_k - f_{k-1})$

Bildbereich: $\frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$

VII. Summenbildung:

Zeitbereich: $\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\right)$

Bildbereich: $\frac{z}{z-1} f_z(z)$

VIII. Umkehrung zu V bzw. VI:

Zeitbereich: $(kT_a f_k)$

Bildbereich: $-T_a z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_z(z)$

IX. Umkehrung zu VII:

Zeitbereich: 0 für $k = 0$ und $\left(\frac{f_k}{kT_a}\right)$ für $k > 0$

Bildbereich: $\frac{1}{T_a} \int_z^{\infty} \frac{f_z(\sigma)}{\sigma} \mathrm{d}\sigma$

X. Faltungssatz:

Zeitbereich: $(f_{1,k}) * (f_{2,k}) = \sum_{j=0}^{k} f_{1,k-j} f_{2,j} = \sum_{j=0}^{k} f_{1,j} f_{2,k-j}$

Bildbereich: $f_{1,z}(z)\, f_{2,z}(z)$

XI. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

Anfangswertsatz: $f_0 = \lim_{z\to\infty} f_z(z)$

Endwertsatz: $\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\, f_z(z)$

Die Berechnung der z-Transformation und insbesondere auch der inversen z-Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (B.2) bzw. (B.8), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabellen unter Verwendung der Eigenschaften der z-Transformation. In Tabelle B.1 sind einige wesentliche Korrespondenzen zusammengefasst:

Nr.	s-Bildbereich $\hat{f}(s)$	Zeitbereich $f(t)$	Abtastfolgen (f_k)	z-Bildbereich $f_z(z)$
I	1	$\delta(t)$	$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$	1
II	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
III	$\frac{1}{s^2}$	t	(kT_a)	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
IV	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\left(\mathrm{e}^{akT_a}\right)$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{aT_a}}$
V	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n \mathrm{e}^{at}$	$\left((kT_a)^n \mathrm{e}^{akT_a}\right)$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{aT_a}}$
VI	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$(\sin(bkT_a))$	$\frac{z\sin(bT_a)}{z^2-2z\cos(bT_a)+1}$
VII	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$(\cos(bkT_a))$	$\frac{z(z-\cos(bT_a))}{z^2-2z\cos(bT_a)+1}$
VIII	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$\mathrm{e}^{at}\sin(bt)$	$\left(\mathrm{e}^{akT_a}\sin(bkT_a)\right)$	$\frac{z\mathrm{e}^{aT_a}\sin(bT_a)}{z^2-2z\mathrm{e}^{aT_a}\cos(bT_a)+\mathrm{e}^{2aT_a}}$
IX	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$	$\left(\mathrm{e}^{akT_a}\cos(bkT_a)\right)$	$\frac{z\left(z-\mathrm{e}^{aT_a}\cos(bT_a)\right)}{z^2-2z\mathrm{e}^{aT_a}\cos(bT_a)+\mathrm{e}^{2aT_a}}$

Tabelle B.1.: Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Aufgabe B.1. Berechnen Sie zu den Folgen (f_k) der Zeitfunktionen $f(t)$ von Tabelle B.1 die jeweiligen z-Transformierten $f_z(z)$ und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

Hinweis: Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bkT_a) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{I}bkT_a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{I}bkT_a}}{2\mathrm{I}}$$
$$\cos(bkT_a) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{I}bkT_a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{I}bkT_a}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der z-Transformation.

Aufgabe B.2. Zeigen Sie, dass im Sinne des Anfangswertsatzes sämtliche Folgenwerte über die Vorschrift

$$\begin{gathered} f_1 = \lim_{z\to\infty} z\left(f_z(z) - f_0\right) \\ f_2 = \lim_{z\to\infty} z^2\left(f_z(z) - f_0 - f_1 z^{-1}\right) \\ \vdots \end{gathered}$$

rekursiv ermittelbar sind, sofern diese existieren.

Analog zur inversen Laplace-Transformation hat es sich auch bei der inversen z-Transformation als sinnvoll erwiesen, die rationalen Funktionen $f_z(z)$ mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* (siehe Satz A.1) in eine Summe einfacherer Ausdrücke zu zerlegen und diese dann mit Hilfe der Korrespondenztabelle B.1 in den Folgenbereich zurückzutransformieren. Als Beispiel betrachte man die z-Transformierte

$$f_z(z) = \frac{z-2}{(z-0.5)\left(z^2-z+0.5\right)} \,. \tag{B.9}$$

Die zugehörige Partialbruchzerlegung berechnet man über den Ansatz

$$f_z(z) = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B+Cz}{z^2-z+0.5} \tag{B.10}$$

in der Form

$$f_z(z) = \frac{-6}{z-0.5} + \frac{-2+6z}{z^2-z+0.5} \,. \tag{B.11}$$

Um direkt die Korrespondenzen von Tabelle B.1 nutzen zu können, empfiehlt es sich, in (B.11) jeweils Zähler und Nenner um z zu erweitern, d. h.

$$f_z(z) = \underbrace{\frac{1}{z}\frac{-6z}{z-0.5}}_{f_{1,z}(z)} + \underbrace{\frac{1}{z}\frac{z(-2+6z)}{z^2-z+0.5}}_{f_{2,z}(z)} \,. \tag{B.12}$$

Die Rücktransformation des ersten Terms $f_{1,z}(z)$ lautet demnach mit der Eigenschaft II der z-Transformation und der Korrespondenz IV von Tabelle B.1

$$(f_{1,k}) = -6 \times 0.5^{(k-1)} \quad \text{für} \quad k > 0 \,. \tag{B.13}$$

Aus dem Nenner von $f_{2,z}(z)$ und den Korrespondenzen VIII und IX von Tabelle B.1 folgen die Gleichungen

$$0.5 = \mathrm{e}^{2aT_a} \quad \text{sowie} \quad 1 = 2\mathrm{e}^{aT_a}\cos\left(bT_a\right) \tag{B.14}$$

bzw.

$$\mathrm{e}^{aT_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad bT_a = \frac{\pi}{4} \,. \tag{B.15}$$

Schreibt man nun den Zähler von $f_{2,z}(z)$ in der Form

$$f_{2,z}(z) = \frac{1}{z}\frac{6z\left(z-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{z^2-z+0.5} = \frac{1}{z}\frac{6z\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z^2-z+0.5} + \frac{1}{z}2\frac{\frac{1}{2}z}{z^2-z+0.5} \tag{B.16}$$

um, so kann aus der Korrespondenz unmittelbar die Rücktransformation

$$(f_{2,k}) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(k-1)} \cos\left(\frac{\pi}{4}(k-1)\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(k-1)} \sin\left(\frac{\pi}{4}(k-1)\right) \quad \text{für} \quad k > 0 \tag{B.17}$$

angegeben werden.

Aufgabe B.3. Bestimmen Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+2} - 1.5y_{k+1} + 0.5y_k = u_k$$

für $(u_k) = \left(1^k\right)$ und $y_0 = 0$ sowie $y_1 = 1$.

Lösung von Aufgabe B.3. Die Lösung lautet

$$y_k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2(k-1) \; .$$

Hinweis: Benutzen Sie in MAPLE die Befehle `ztrans`, `invztrans` sowie `rsolve`.

In vielen Fällen werden die Laplace- und die z-Transformation gleichzeitig benutzt. Möchte man beispielsweise zur Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ eines Zeitsignals $f(t)$ die z-Transformierte der Folge (f_k) wissen, dann berechnet sich diese nach der Vorschrift

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}(s)\right)\Big|_{t=+kT_a}\right)\right\} \; . \tag{B.18}$$

Die Beziehung (B.18) besagt, dass im ersten Schritt zu $\hat{f}(s)$ über die inverse Laplace-Transformation $\mathcal{L}^{-1}$ das Zeitsignal $f(t)$ bestimmt wird, dieses wird dann abgetastet, also $(f_k) = (f(kT_a))$ und anschließend z-transformiert. Um in weiterer Folge die Schreibweise abzukürzen, wird die Transformationsvorschrift (B.18) wie folgt

$$f_z(z) = \mathbf{Z}\left(\hat{f}(s)\right) := \mathcal{Z}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}(s)\right)\Big|_{t=+kT_a}\right)\right\} \tag{B.19}$$

angeschrieben.

Beispiel B.1. Als Beispiel berechne man zum Laplace-transformierten Zeitsignal

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} \tag{B.20}$$

die zugehörige z-Transformierte, also $f_z(z) = \mathbf{Z}\left(\hat{f}(s)\right)$. In einem ersten Schritt ermittelt man die Partialbruchzerlegung

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2} \tag{B.21}$$

und über die inverse Laplace-Transformation folgt das Zeitsignal zu

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}(s)\right) = \mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} \; . \tag{B.22}$$

Durch Abtastung mit der Abtastzeit T_a erhält man aus $f(t)$ die Folge von Abtastwerten

$$(f_k) = (f(kT_a)) = (1 - 2kT_a)\,\mathrm{e}^{-kT_a} \tag{B.23}$$

und mit der z-Transformation ergibt sich

$$f_z(z) = \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-T_a}} - 2\frac{zT_a\mathrm{e}^{-T_a}}{\left(z - \mathrm{e}^{-T_a}\right)^2} = \frac{z\left(z - (1 + 2T_a)\,\mathrm{e}^{-T_a}\right)}{\left(z - \mathrm{e}^{-T_a}\right)^2}\ . \tag{B.24}$$

Man beachte, dass das Ergebnis direkt aus der Korrespondenztabelle B.1 abgelesen werden kann.

B.2. Literatur

[B.1] G. Doetsch, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation*. München: Oldenbourg, 1967.

[B.2] G. F. Franklin, J. D. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. California: Addison Wesley, 1998.

[B.3] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, *Digitale Regelkreise*. München: Oldenbourg, 1991.