

3 Wärmeübertragung

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung von Wärmeübertragungsprozessen diskutiert. Unter Wärmeübertragung soll hier der Energietransport in und zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen zufolge von Temperaturunterschieden verstanden werden. Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie zufolge der ungeordneten mikroskopischen Bewegung der Atome und Moleküle eines Stoffes.

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [3.1, 3.2] wird bei Wärmeübertragung Energie vom Ort höherer Temperatur zum Ort geringerer Temperatur transferiert, d. h. es findet ein Temperatenausgleich statt. Besitzen zwei Körper die gleiche Temperatur, so befinden sie sich im thermischen Gleichgewicht und es findet kein weiterer Temperatenausgleich statt.

Wärme kann auf drei verschiedene Arten übertragen werden [3.3–3.6]:

1. Wärmeleitung

Der Energietransport durch *Wärmeleitung* stellt eine Interaktion zwischen benachbarten Atomen oder Molekülen eines Stoffes dar. Die von der Temperatur abhängige innere Energie fließt dabei von Atomen oder Molekülen mit höherem Energieniveau zu solchen mit kleinerem Energieniveau, wobei es durch zufällige mikroskopische Bewegungen und Vibrationen fortwährend zu Diffusions- und Kollisionsvorgängen kommt. Wärmeleitung tritt in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auf. In festen elektrischen Nichtleitern erfolgt die Interaktion ausschließlich durch Gitterschwingungen; in elektrischen Leitern trägt auch die translatorische Bewegung von Elektronen zur Wärmeleitung bei. Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom.

2. Konvektion

In Fluiden erfolgt der Transport von innerer Energie zusätzlich zu den zufälligen molekularen Diffusionsbewegungen durch makroskopische Materialströme, d. h. durch Massentransport. Wird eine solche Strömung durch eine äußere Einwirkung verursacht (z. B. durch ein Gebläse, eine Pumpe oder die Bewegung eines Fahrzeuges), so spricht man von *erzwungener Konvektion*. Bei *freier Konvektion* hingegen wird die Strömung durch den von temperaturbedingten lokalen Dichteunterschieden hervorgerufenen Auftrieb verursacht. Eine spezielle Form von Konvektion tritt bei Siede- oder Kondensationsvorgängen auf. Hierbei führen Temperaturunterschiede nicht nur zu veränderter Dichte sondern auch zu Übergängen zwischen flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand des Fluids.

3. Wärmestrahlung

Unter Wärmestrahlung versteht man den Energietransport mittels elektromagneti-

scher Wellen die durch die innere Energie von Materie, die sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ausgelöst wurden. Diese Merkmale unterscheiden Wärmestrahlung von anderen elektromagnetischen Wellen. Wärmestrahlen haben eine Wellenlänge im Bereich von $0.1 \mu\text{m}$ bis 1mm (bei Temperaturen von $60\text{--}1000 \text{K}$ liegen die Wellenlängen im Bereich von $50\text{--}3 \mu\text{m}$) und transportieren Energie mit Lichtgeschwindigkeit. Wärmestrahlung kann in Festkörpern, Flüssigkeiten, Gasen und im Vakuum auftreten.

Abbildung 3.1 zeigt die drei Arten von Wärmeübertragung am Beispiel einer Gebäudewand mit Radiatorheizung. Der Radiator arbeitet als Wärmequelle und gibt durch thermische Strahlung und freie Konvektion Wärme an die Raumluft und die Gebäudewand ab. In der Wand selbst fließt die Energie hauptsächlich durch Wärmeleitung zur äußeren Gebäudeoberfläche, wo die von einer Windströmung erzwungene Konvektion und gegebenenfalls auch Wärmestrahlung die Energie an die Umgebung abführt. Natürlich können die beteiligten Materialien und Medien auch thermische Energie speichern oder abgeben, was zu einer zeitlichen Änderung ihrer lokalen Temperatur führt (transiente Wärmeübertragung). In diesem Beispiel treten, wie auch in vielen anderen praktischen Anwendungen, mehrere Wärmeübertragungsmechanismen in Kombination auf.

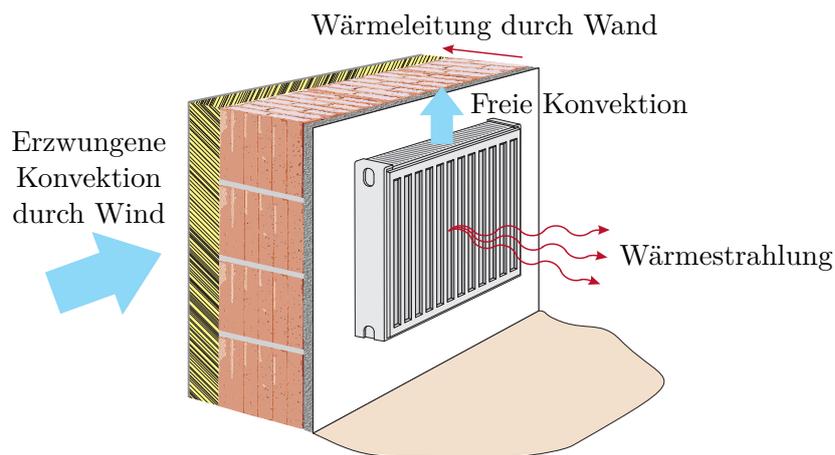


Abbildung 3.1: Arten der Wärmeübertragung.

Abschließend sei erwähnt, dass der Peltier-Effekt, ein thermo-elektrischer Effekt, einen Wärmestrom verursachen kann selbst wenn kein Temperaturunterschied vorhanden ist. Beim Peltier-Effekt wird der Wärmestrom ausschließlich durch die von einer elektrischen Potentialdifferenz ausgelösten Elektronenbewegungen, d. h. durch den Stromfluss, erzeugt.

In der vorliegenden Vorlesung werden Wärmeleitung in Festkörpern und einfache Formulierungen für die Wärmeübertragung an deren Rändern diskutiert. Es werden sowohl transiente als auch stationäre Wärmeübertragungsprobleme untersucht.

3.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom, kann in allen drei Aggregatzuständen eines Stoffes auftreten und wird auch als Wärmediffusion bezeichnet. Wie Jean Baptiste Joseph Fourier 1822 herausfand, ist bei Wärmeleitung die Wärmestromdichte $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ proportional zum lokalen Temperaturgradienten [3.3–3.5], d. h.

$$\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x}) . \quad (3.1)$$

Hierbei ist $T(t, \mathbf{x})$ die Temperatur zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} und die symmetrische Matrix $\mathbf{\Lambda}$ die im Allgemeinen orts- und temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit in $\text{W}/(\text{m K})$. In *isotropen* Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Raumrichtung der Wärmestromdichte, d. h. es gilt $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T)\mathbf{E}$ und die Wärmeleitfähigkeit kann durch die skalare positive Größe $\lambda(\mathbf{x}, T)$ beschrieben werden. In *homogenen* Materialien ist $\mathbf{\Lambda}$ unabhängig vom Ort.

Für ein festes Kontrollvolumen \mathcal{V} und ohne Materialbewegung gilt gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}}_{=\dot{Q}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V}}_{=\dot{W}} . \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet ρ die Dichte und $c_p(\mathbf{x}, T)$ die spezifische Wärmekapazität des im Kontrollvolumen \mathcal{V} befindlichen Materials. Die spezifische Wärmekapazität wird meist in $\text{kJ}/(\text{kg K})$ angegeben und beschreibt die Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 g einer Substanz um 1° zu erhöhen.

Da das Material sich nicht bewegt, spielen kinetische und potentielle Energie in (3.2) keine Rolle. \dot{Q} beschreibt den Wärmestrom der in das Kontrollvolumen hineinfließt, wobei \mathbf{n} den Flächennormalvektor der Berandung $\partial\mathcal{V}$ darstellt. \dot{W} beschreibt die in das System eingebrachte Arbeit, welche mangels Materialverschiebungen direkt in Wärme umgewandelt wird und hier durch die volumetrische Wärmequelle $g(t, \mathbf{x}, T)$ ausgedrückt wird. Ein Beispiel für g ist die Wärmeentwicklung in einem Ohmschen Widerstand (siehe auch Abschnitt 3.3).

Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes (A.1) auf (3.2) liefert

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) + g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} . \quad (3.3)$$

Aus der Überlegung, dass diese Beziehung für beliebig gewählte Kontrollvolumina \mathcal{V} erfüllt sein muss, und durch Einsetzen von (3.1) erhält man die *Fouriersche Wärmeleitgleichung*

$$\rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x})) + g(t, \mathbf{x}, T) . \quad (3.4)$$

Diese parabolische Differentialgleichung wird gelegentlich auch als Wärmediffusionsgleichung bezeichnet und stellt ein *Anfangs-Randwert-Problem* dar. Sie ist also noch mit Anfangs- und Randbedingungen zu versehen. Randbedingungen werden in Abschnitt

3.2 diskutiert. Anfangsbedingungen sind häufig in der Form $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ gegeben. Schwieriger aber praktisch gelegentlich bedeutend ist der Fall, dass $T_0(\mathbf{x})$ unbekannt ist und aus dem Zeitverlauf von Messwerten (z. B. Oberflächentemperaturen) rekonstruiert werden soll. Es handelt sich dabei um eine Beobachtungsaufgabe.

Bei *stationären* Problemstellungen gilt $\partial T/\partial t = 0$ (vgl. Abschnitt 3.4), die Angabe von Anfangsbedingungen entfällt natürlich und (3.4) reduziert sich zu einem *Randwertproblem* in Form einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Fall $g = 0$ ist für solche Differentialgleichungen bekannt, dass sowohl das Maximum als auch das Minimum der Lösung am Rand des Rechengebietes auftreten muss. Ähnliche weiterführende Aussagen auch für Fälle $g \neq 0$ finden sich z. B. in [3.7]. Weiters folgt aus (3.4), dass ρ und c_p auf die Lösung stationärer Wärmeleitungsprobleme keinen Einfluss haben. Dies gilt allgemein für stationäre Wärmeübertragungsprobleme ohne Massenströme.

Für die nachfolgenden Spezialisierungen von (3.4) wird angenommen, dass es sich um isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit λ handelt. In kartesischen Koordinaten gilt dann

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, x, y, z, T) \quad (3.5a)$$

für die Temperatur $T = T(t, x, y, z)$ am Punkt (x, y, z) . In Zylinderkoordinaten (siehe

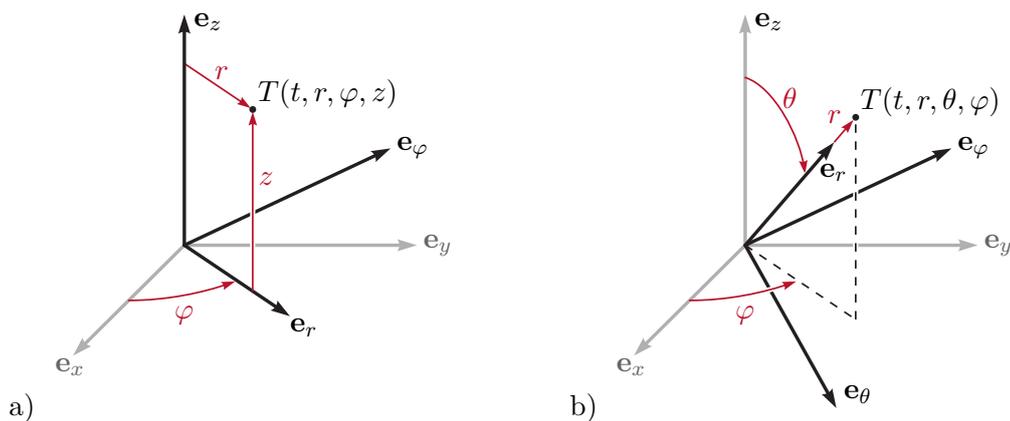


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme, a) Zylinderkoordinaten, b) Kugelkoordinaten.

Abbildung 3.2a) gilt für die Temperatur $T = T(t, r, \varphi, z)$ am Punkt (r, φ, z)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, r, \varphi, z, T) \quad (3.5b)$$

und in Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 3.2b) gilt für die Temperatur $T = T(t, r, \theta, \varphi)$ am Punkt (r, θ, φ)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + g(t, r, \theta, \varphi, T) . \quad (3.5c)$$

Aus (3.5) lassen sich sofort weitere Spezialisierungen für den 1-dimensionalen Fall oder radialsymmetrische Fälle ableiten. Häufig wird in (3.5) statt der Parameter ρ , c_p und λ die als *Temperaturleitfähigkeit* bezeichnete Abkürzung

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (3.6)$$

mit der Einheit m^2/s verwendet.

Aufgabe 3.1 (Wärmeleitgleichung in Zylinderkoordinaten). Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5b) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

und $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$.

Aufgabe 3.2 (Wärmeleitgleichung in Kugelkoordinaten). Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5c) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.8)$$

3.2 Randbedingungen

Zur vollständigen Definition und damit auch zur Lösbarkeit eines Wärmeleitproblems werden Randbedingungen im Randgebiet $\partial \mathcal{V}$ benötigt [3.3, 3.4]. Diese können eine Ortsabhängigkeit aufweisen, z. B. können sie abschnittsweise definiert sein.

Bei einer *Randbedingung erster Art* (Dirichletsche Randbedingung) ist die Temperatur am jeweiligen Randabschnitt $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$ in der Form

$$T(t, \mathbf{x}) = T_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}_a \quad (3.9a)$$

fest vorgegeben. Um eine solche Randbedingung herzustellen, kann z. B. eine Temperaturregelung verwendet werden. Ein weiteres Beispiel für diese Randbedingung ist die Temperatur eines Fluids bei Phasenumwandlungsvorgängen. Die das Fluid einschließende Oberfläche wird dann konstant auf Phasenumwandlungstemperatur gehalten.

Bei einer *Randbedingung zweiter Art* (Neumannsche Randbedingung) ist die Wärmestromdichte $\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} am jeweiligen Randabschnitt $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$ in der Form

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}_a \quad (3.9b)$$

fest vorgegeben. Dem Wärmeleitgesetz (3.1) folgend ist daher der Temperaturgradient entlang von \mathbf{n} festgelegt. Von einer *adiabaten* Randbedingung spricht man im Fall $\dot{q}_n = 0$.

Bei einer *Randbedingung dritter Art* (Newtonsche, Robinsche oder gemischte Randbedingung) gilt

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \alpha(x, y, z)(T(t, \mathbf{x}) - T_a(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9c)$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $\alpha \in \mathbb{R}$, der auch Wärmeübergangskoeffizient genannt wird. Diese Art von Randbedingung wird in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.2 zur Beschreibung von Konvektion und Wärmeleitung verwendet. Man beachte noch, dass (3.9c) für $\alpha \rightarrow \infty$ wieder auf (3.9a) führt.

Eine allgemeinere Randbedingung ist durch die nichtlineare Beziehung

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}, T(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9d)$$

gegeben. Diese Struktur tritt z. B. in Abschnitt 3.2.3 bei der Beschreibung von Wärmestrahlung auf.

Die Randbedingungen (3.9) stellen oft idealisierte oder makroskopische Näherungen für in der Realität komplexere Wärmeübertragungsvorgänge dar. Um bei Verwendung der obigen Ansätze dennoch möglichst exakt zu rechnen, ist daher eine sorgfältige Bestimmung der in den Gleichungen verwendeten Parameter notwendig. Dies soll im Folgenden beispielhaft für praktisch bedeutende Randbedingungen erläutert werden.

3.2.1 Erzwungene Konvektion

Erzwungene Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch eine äußere Einwirkung, z. B. einen Druckunterschied, verursacht wird [3.3, 3.4, 3.6, 3.8]. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel für erzwungene Konvektion; Luft streicht mit einer Geschwindigkeit u_∞ und einer Temperatur T_∞ parallel über eine stehende ebene Platte mit der Länge L . Für die Wärmeübertragung durch Konvektion sind die als homogen vorausgesetzte Oberflächentemperatur T_p der Platte sowie die Temperaturverteilung $T(x, y)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ in der Luft nahe über der Plattenoberfläche ($y = 0$) ausschlaggebend. Direkt an der Plattenoberfläche gilt die Haftbedingung, d. h. die Luft hat eine verschwindende Geschwindigkeit ($u(x, 0) = 0$) und die gleiche Temperatur wie die Plattenoberfläche ($T(x, 0) = T_p$). Oberhalb der Plattenoberfläche bilden sich in der Luft Grenzschichten mit einem charakteristischen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil $\delta_T(x)$ und $\delta_u(x)$ aus. Das Wärmeübertragungsverhalten hängt unter anderem von der Dicke dieser Grenzschichten ab und davon ob die Strömung in diesen Schichten laminar oder turbulent ist. Im laminaren Bereich ist die Strömung gleichmäßig und geordnet, so dass eindeutige Stromlinien identifiziert werden können. Im Gegensatz dazu ist im turbulenten Bereich die Bewegung der Fluidteilchen 3-dimensional, instationär und scheinbar zufällig (chaotisch). Es bilden sich ungeordnete Wirbel und Wellen, die sich wieder auflösen. Die Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 3.3 angedeutet. Im Folgenden werden die Berechnungsmethoden für den laminaren und den turbulenten Bereich nicht detailliert vorgestellt, sondern es wird lediglich das gemittelte Wärmeübertragungsverhalten beschrieben. Transiente Effekte werden dabei nicht berücksichtigt, d. h. die Strömung wird als voll ausgebildet und stationär betrachtet.

Der lokale Wärmestrom $\dot{q}_y(x)$ an der Stelle x in Richtung y errechnet sich in der Form

$$\dot{q}_y(x) = \alpha_y(x)(T_p - T_\infty) \quad (3.10)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α_y , d. h. die Wärmestromdichte ist proportional zur Temperaturdifferenz $T_p - T_\infty$.

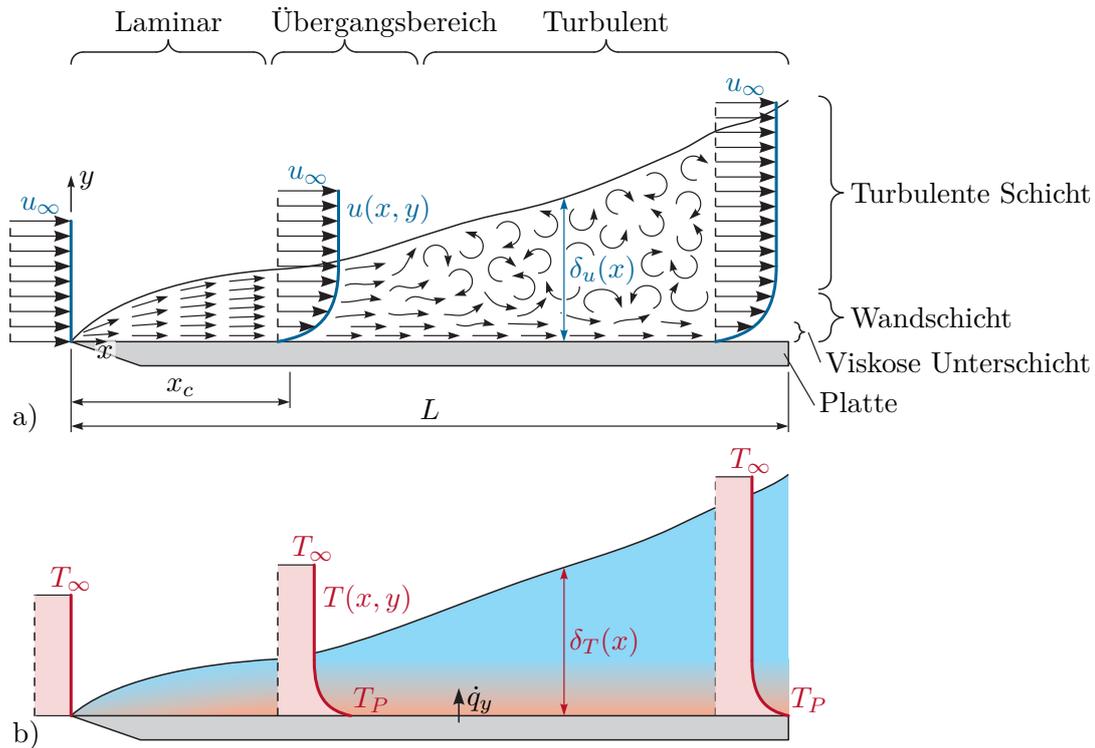


Abbildung 3.3: Grenzschichten bei erzwungener Konvektion an einer Platte, a) Strömungsgrenzschicht, b) thermische Grenzschicht.

Bemerkung 3.1. Der menschliche Körper nützt die in (3.10) dargestellte Proportionalität zur Temperaturregelung. Soll der Körper gekühlt werden, so werden die oberflächennahen Blutgefäße erweitert, es fließt mehr Blut durch und die Oberflächentemperatur ist so wie der kühlende Wärmestrom nach außen höher. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Oberflächentemperatur des Körpers T_P größer als die Umgebungstemperatur T_∞ ist. Soll der Wärmeverlust nach außen gemindert werden, wird die oberflächennahe Durchblutung durch Verengung der Blutgefäße reduziert.

Für die praktische Anwendung ist die über die Plattenlänge L gemittelte Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_y dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_y(x) dx (T_P - T_\infty) = \alpha (T_P - T_\infty) \quad (3.11)$$

mit dem mittleren Wärmeübergangskoeffizienten α von besonderem Interesse. Werte und Berechnungsvorschriften für die Wärmeübergangskoeffizienten bei unterschiedlichen Geometrien und Strömungsverhältnissen können der Literatur, beispielsweise [3.3–3.5, 3.8–3.15], entnommen werden.

Bemerkung 3.2. Abschließend sei noch erwähnt, dass erzwungene Konvektion nicht immer an der Oberfläche von Festkörpern auftreten muss; sie ist auch an Oberflächen von Flüssigkeiten möglich. In vielen Fällen ist es aufgrund von Dichte- und Viskositätsunterschieden zweier Fluide gerechtfertigt, ein Fluid als stehend zu betrachten. Ein Beispiel einer solchen Situation ist ein leichter Wind, der über die stehende Oberfläche eines Wasserbeckens streicht.

Bemerkung 3.3. Neben der erzwungenen Konvektion tritt auch freie Konvektion in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch temperaturbedingte lokale Dichteunterschiede (Auftrieb) und ohne eine äußere Einwirkung hervorgerufen wird. Diese Inhalte können z. B. in [3.3, 3.4, 3.6, 3.8, 3.14, 3.16] nachgelesen werden.

3.2.2 Wärmeleitung

Wärmeleitung tritt auch an den Kontaktflächen zwischen Festkörpern auf (vgl. Abbildung 3.4). Dort hängt das Wärmeleitvermögen von folgenden Faktoren ab [3.4]:

- Beschaffenheit (Rauigkeit) der sich berührenden Oberflächen
- Flächenpressung zwischen den sich berührenden Oberflächen
- allfällige (punktweise) Verschweißungen zwischen den sich berührenden Oberflächen
- Fluid, das kleine Hohlräume zwischen den sich berührenden Oberflächen füllt

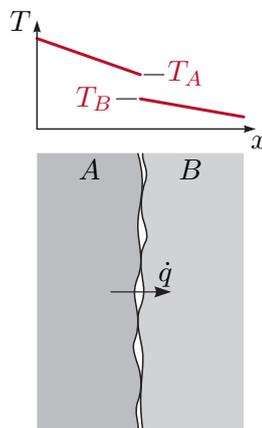


Abbildung 3.4: Wärmeleitung an der Kontaktfläche zweier Festkörper.

Das Wärmeleitverhalten an solchen Kontaktstellen entspricht im einfachsten Fall dem *Fouriertschen Wärmeleitgesetz* (vgl. (3.1)), d. h. die Wärmestromdichte ist linear proportional der Differenz der beiden Oberflächentemperaturen. Dies kann für zwei Kontaktflächen A und B mit den Temperaturen T_A und T_B mit Hilfe eines *Wärmeübergangskoeffizienten* α in der Form

$$\dot{q} = \alpha(T_A - T_B) \quad (3.12)$$

modelliert werden. Für ideale Kontaktbedingungen gilt $\alpha \rightarrow \infty$ und $T_A = T_B$.

Beispiel 3.1. Im Folgenden soll das Erhitzen von thermoplastischen Polymeren in einer zylinderförmigen Apparatur (siehe Abbildung 3.5) beschrieben werden. Um den Kunststoff im Inneren mit Temperatur T_p zum Schmelzen zu bringen, führen Heizmatten mit der Temperatur T_h auf der Außenseite eines Hohlzylinders aus Stahl der Länge L konstant die Leistung P zu. Bei der sogenannten Glasübergangstemperatur wird die kristalline Struktur des Polymeren in eine flüssige Schmelze gewandelt. Die dafür benötigte Energie kann ersatzweise durch eine von der Kunststofftemperatur T_p abhängige spezifische Wärmekapazität $c_{p,p} = c_{p,p}(T_p)$ beschrieben werden. Für den Außenraum wird eine konstante Temperatur T_∞ angenommen.

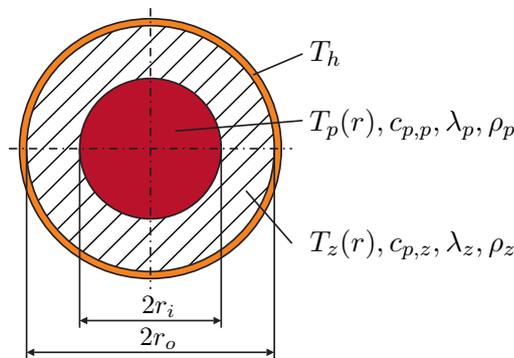


Abbildung 3.5: Aufschmelzen von thermoplastischen Polymeren in einer zylindrischen Anordnung.

Auf Grund der Symmetrie des Aufbaus wird eine rein radiale Verteilung der Temperaturen angenommen, d. h. $T_p(r, t)$ und $T_z(r, t)$. Die Heizmatten sind so dünn, dass ihre Temperaturverteilung als näherungsweise homogen und stationär angenommen wird. Damit lassen sich bereits die partiellen Differentialgleichungen für T_z und T_p anschreiben als

$$\begin{aligned} \rho_p c_{p,p}(T_p) \dot{T}_p(r, t) &= \lambda_p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) \right) \right) \\ \rho_z c_{p,z} \dot{T}_z(r, t) &= \lambda_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) \right) \right) \end{aligned}$$

mit den drei Randbedingungen

$$\begin{aligned}\lambda_p \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t)|_{r=r_i} &= \dot{q}_{zp} \\ \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_i} &= -\dot{q}_{zp} \\ \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_o} &= \dot{q}_{hz}.\end{aligned}$$

Die darin auftretenden Wärmestromdichten \dot{q}_{zp} und \dot{q}_{hz} koppeln die beiden partiellen Differentialgleichungen miteinander. Für den Übergang zwischen Polymer und Hohlzylinder wird ein Wärmeübergangskoeffizient α_{zp} angenommen, womit direkt

$$\dot{q}_{zp} = \alpha_{zp}(T_z(r_i, t) - T_p(r_i, t))$$

folgt. Die Wärmestromdichte \dot{q}_{hz} ist etwas komplizierter. Für den Fall vernachlässigter Wärmestrahlung lässt sich diese analog als $\dot{q}_{hz} = \alpha_{hz}(T_h(t) - T_z(r_o, t))$ anschreiben, die Temperatur T_h ist dabei jedoch unbekannt. Diese lässt sich aus der Leistungsbilanz der Heizmatten

$$P = 2r_o\pi L(\alpha_\infty(T_h(t) - T_\infty) + \alpha_{hz}(T_h(t) - T_z(r_o, t)))$$

bestimmen, wodurch sich letztlich der Wärmeübergangskoeffizient

$$\dot{q}_{hz} = \frac{\frac{\alpha_{hz} P}{\alpha_\infty A} + \alpha_{hz}(T_\infty - T_z(r_o, t))}{1 + \frac{\alpha_{hz}}{\alpha_\infty}}$$

ergibt.

3.2.3 Wärmestrahlung

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die Wärmestrahlung zwischen Festkörpern im Vakuum gegeben. Damit ist auch der Fall von Fluiden die Wärmestrahlung weder absorbieren noch emittieren (*transparente Fluide*) abgedeckt. Um die Berechnungen einfach zu halten, sollen ausschließlich graue, diffuse Strahler berücksichtigt werden. Was darunter zu verstehen ist, wird im Folgenden diskutiert. Für die hier nicht dargestellten Wärmestrahlungsfälle (absorbierende und emittierende Fluide, nicht-graue Strahler, nicht-diffuse Strahler) wird auf Fachbücher wie z. B. [3.3, 3.4, 3.14, 3.17, 3.18] verwiesen.

Damit gasförmige Fluide Wärmestrahlung absorbieren und emittieren können, müssen sie Festkörperpartikel enthalten (z. B. Staub) oder Moleküle, die in asymmetrischen Moden schwingen können [3.5], wie etwa CO₂, H₂O, O₃, CH₄ und NO₂. Gase mit ausschließlich einatomigen oder symmetrischen zweiatomigen Molekülen (z. B. N₂, O₂ und H₂) besitzen nur symmetrische Schwingungsmoden und sind praktisch transparent. Auch auf Luft trifft dies bei moderaten Temperaturen und Strahlungslängen im Bereich weniger Meter näherungsweise zu.

Thermische Strahlung hängt wesentlich von den Temperaturen und Eigenschaften der

beteiligten Oberflächen, den auftretenden Wellenlängen und der Raumrichtung ab. Ein *diffuser Strahler* liegt vor, wenn er in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt, wie dies eine ideal matte Oberfläche tut [3.3, 3.4, 3.17, 3.18]. Mit der Beschränkung auf diffuse Strahler kann nachfolgend eine Berücksichtigung der Raumrichtung entfallen.

Spektrale Ein- und Ausstrahlung

Für ein thermisch ausstrahlendes infinitesimales Oberflächenstück dA mit der Absoluttemperatur T sei zunächst die spektrale spezifische Ausstrahlung $E_\lambda(\lambda, T)$ in W/m^3 bei der Wellenlänge λ definiert. Damit emittiert das Oberflächenstück im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ die Gesamtenergie $E_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda$ in den darüberliegenden Halbraum (Hemisphäre). Max Planck fand heraus, dass die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung von schwarzen Körpern durch (*Plancksches Strahlungsgesetz*)

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)}, \quad (3.13)$$

mit der Planckschen Konstanten $h = (6.626\,068\,96 \pm 0.000\,000\,33)10^{-34}$ J s, der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,458$ m/s und der Boltzmann Konstanten $k = (1.380\,650\,4 \pm 0.000\,002\,4)10^{-23}$ J/K beschrieben werden kann [3.3, 3.17, 3.18]. Ein *schwarzer Körper* emittiert Strahlung mit einem ausschließlich von der Temperatur abhängigen Spektrum und absorbiert auftreffende elektromagnetische Strahlung vollständig (keine Spiegelung, Streuung oder Transmission). Insbesondere ist das Spektrum der emittierten Strahlung unabhängig von den Materialeigenschaften. Ein schwarzer Körper hat bei allen Wellenlängen das größtmögliche Emissions- und Absorptionsvermögen, d. h. keine andere Oberfläche kann mehr Wärmestrahlung absorbieren oder bei gleicher Temperatur emittieren.

Abbildung 3.6 zeigt die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung gemäß dem Planckschen Strahlungsgesetz (3.13). Das Maximum der Ausstrahlung tritt jeweils bei der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{0.002\,897\,768 \text{ m K}}{T} \quad (3.14)$$

auf. Gleichung (3.14) ist als *Wiensches Verschiebungsgesetz* bekannt und die dadurch beschriebene Linie ist in Abbildung 3.6 strichliert dargestellt.

Aufgabe 3.3 (Wiensches Verschiebungsgesetz). Beweisen Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz (3.14) basierend auf (3.13).

Um das Emissions- und Absorptionsvermögen von nicht-schwarzen Körpern zu beschreiben, werden dimensionslose Proportionalitätsfaktoren verwendet. Die *spektrale Emissivität*

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \in [0, 1] \quad (3.15)$$

vergleicht die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung einer Oberfläche mit jener

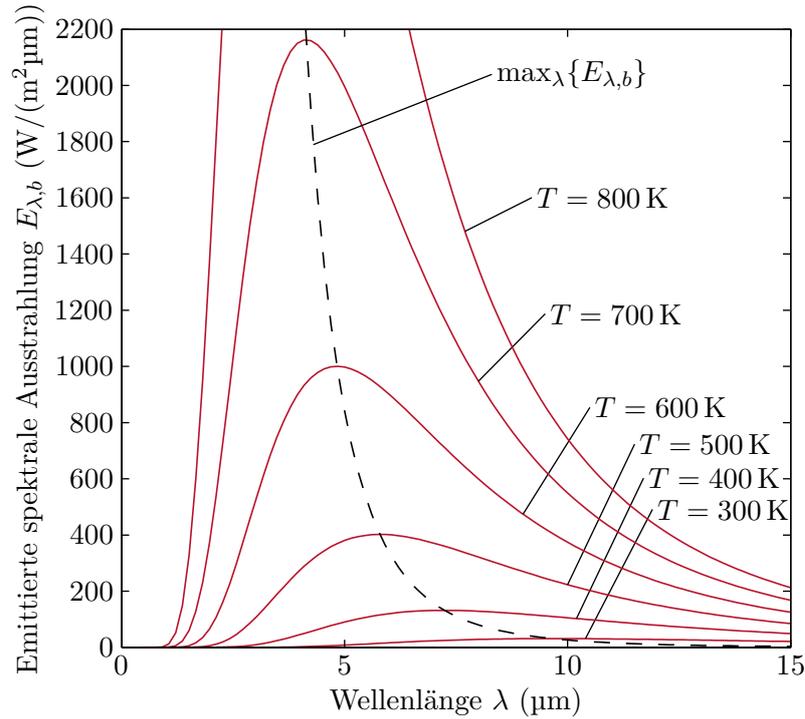


Abbildung 3.6: Emittierte spektrale Ausstrahlung von schwarzen Körpern.

eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur T . Folglich gilt

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} \quad (3.16)$$

und für einen schwarzen Strahler $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 1$.

Es sei $G_{\lambda}(\lambda)$ die auf ein infinitesimales Flächenstück dA auftreffende spektrale spezifische Einstrahlung in W/m^2 im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. D. h. für diesen Wellenlängenbereich ist $G_{\lambda}(\lambda) dA d\lambda$ die auftreffende Gesamtenergie. Natürlich hängt das Spektrum der auftreffenden Wärmestrahlung von den Temperaturen der sie verursachenden Strahlungsquellen ab. Von der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden spektralen Einstrahlung $G_{\lambda}(\lambda)$ werde der Anteil $G_{\lambda,a}(\lambda)$ absorbiert, der Anteil $G_{\lambda,r}(\lambda)$ werde reflektiert und der Anteil $G_{\lambda,t}(\lambda)$ strahle ungehindert durch den Körper durch (vgl. Abbildung 3.7). Damit lassen sich der *spektrale Absorptionsgrad*

$$\alpha_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \in [0, 1] , \quad (3.17a)$$

der *spektrale Reflexionsgrad*

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,r}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.17b)$$

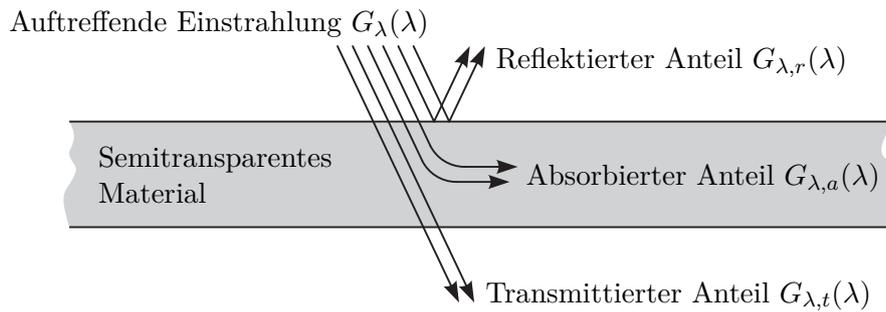


Abbildung 3.7: Absorption, Reflexion und Transmission der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden Einstrahlung.

und der *spektrale Transmissionsgrad*

$$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.17c)$$

definieren [3.4]. Aufgrund der Energieerhaltung gilt natürlich

$$G_\lambda(\lambda) = G_{\lambda,a}(\lambda) + G_{\lambda,r}(\lambda) + G_{\lambda,t}(\lambda) \quad (3.18a)$$

$$1 = \alpha_\lambda(\lambda) + \rho_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) . \quad (3.18b)$$

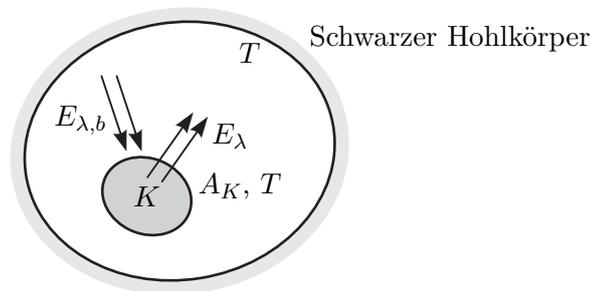


Abbildung 3.8: Körper in einem schwarzen Hohlkörper.

Wie Gustav Robert Kirchhoff im Jahr 1859 feststellte, müssen an für Wärmestrahlung undurchsichtigen Oberflächen, die sich mit ihrer Umgebung im vollständigen thermischen Gleichgewicht befinden (d. h. die gleiche Temperatur T aufweisen), die emittierte und absorbierte Strahlung übereinstimmen. Dies gilt auch für einzelne Bereiche des Spektrums, d. h. $E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)E_{\lambda,b}(\lambda, T) = G_{\lambda,a}(\lambda) = \alpha_\lambda(\lambda)G_\lambda(\lambda)$, woraus die gelegentlich als *Kirchhoffsches Gesetz* bezeichnete Beziehung

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \alpha_\lambda(\lambda) \quad (3.19)$$

folgt [3.4, 3.17, 3.18]. Um dies zu zeigen, betrachte man die in Abbildung 3.8 skizzierte Situation. Ein undurchsichtiger Körper K mit der Oberfläche A_K , der Temperatur T und dem spektralen Absorptionsgrad $\alpha_\lambda(\lambda)$ befindet sich im Inneren eines Hohlkörpers mit der Temperatur T und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers, d. h. aus Sicht des Körpers K gilt $G_\lambda(\lambda) = E_{\lambda,b}(\lambda, T)$. Damit der Körper K in diesem Gleichgewichtszustand verbleibt, d. h. das Temperaturniveau T beibehält, muss die totale absorbierte mit der totalen emittierten thermischen Strahlungsenergie übereinstimmen. Diese Gleichheit lässt sich nach Integration über das gesamte Spektrum in der Form

$$A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda = A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = A_K \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (3.20)$$

ausdrücken. Diese Beziehung muss für beliebige Werte $\alpha_\lambda(\lambda)$ gültig sein, woraus (3.19) folgt.

Obwohl (3.19) streng nur gilt, wenn alle beteiligten Oberflächen die gleiche Temperatur haben, wird diese Beziehung auch für moderate Abweichungen von diesem Gleichgewichtszustand verwendet. Nicht mehr gültig ist sie für Strahlungssituationen bei denen die Temperaturen der beteiligten Oberflächen sich um mehrere 100 K unterscheiden. Im Folgenden wird die Gültigkeit von (3.19) vorausgesetzt.

Totale Ein- und Ausstrahlung

Integration obiger spektraler Größen über das gesamte Spektrum liefert die emittierte totale Ausstrahlung

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (3.21)$$

und für den Spezialfall eines schwarzen Strahlers das *Stefan-Boltzmann Gesetz*

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} d\lambda = \sigma T^4 \quad (3.22)$$

mit der *Stefan-Boltzmann Konstanten* $\sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c_0^2 h^3} = (5.6704 \pm 0.00004) 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$.

Damit lässt sich die totale Emissivität

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (3.23)$$

berechnen. Sie hängt ausschließlich von der Temperatur T und den Eigenschaften der ausstrahlenden Oberfläche ab.

In ähnlicher Weise erhält man die totale Einstrahlung

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = G_a + G_r + G_t \quad (3.24)$$

mit ihren Komponenten

$$G_i = \int_0^\infty G_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda \quad \forall i \in \{a, r, t\} \quad (3.25)$$

für den absorbierten, reflektierten und transmittierten Anteil. Für den totalen Absorptions-, Reflexions- und Transmissionsgrad folgt

$$\alpha = \frac{G_a}{G}, \quad \rho = \frac{G_r}{G}, \quad \tau = \frac{G_t}{G}. \quad (3.26)$$

Natürlich gilt auch hier wieder

$$1 = \alpha + \rho + \tau. \quad (3.27)$$

Im Gegensatz zu $\varepsilon(T)$ hängen α , ρ und τ damit nicht nur von der Oberfläche selbst sondern auch vom Spektrum der auftreffenden Strahlung und damit der Temperatur und den Oberflächeneigenschaften der jeweiligen Strahlungsquelle ab.

Man beachte, dass aus dem Kirchhoffschen Gesetz (3.19) im Allgemeinen nicht die Beziehung $\varepsilon(T) = \alpha$ folgt, da

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} \neq \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} = \alpha. \quad (3.28)$$

Aus (3.28) erkennt man aber, dass $\varepsilon(T) = \alpha$ gilt, wenn die Faktoren $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$ und $\alpha_\lambda(\lambda)$ nicht von λ abhängen. *Graue Strahler* haben diese besondere Eigenschaft, d. h. die Faktoren $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon(T)$, $\alpha_\lambda(\lambda) = \alpha$, $\rho_\lambda(\lambda) = \rho$ und $\tau_\lambda(\lambda) = \tau$ sind unabhängig von λ [3.4]. Damit ist das von einem grauen Strahler emittierte Spektrum proportional zu dem eines schwarzen Strahlers mit der gleichen Temperatur T . Im Folgenden werden nur noch graue Strahler betrachtet. Ein spezieller grauer Strahler ist der schwarze Strahler, für den aufgrund von $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$, $\alpha_\lambda(\lambda) = 1$, $\rho_\lambda(\lambda) = 0$ und $\tau_\lambda(\lambda) = 0$ gilt. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass $\varepsilon(T) = \alpha$ streng nur dann gilt, wenn die Quelle der auftreffenden Einstrahlung ebenfalls die Oberflächentemperatur T hat.

Netto-Strahlungsmethode

Bislang wurden einige Grundlagen zur Wärmestrahlung an einer Oberfläche diskutiert. Für Wärmeübertragungsprobleme interessant ist der Wärmeaustausch durch thermische Strahlung zwischen zwei oder mehreren Körpern mit bekannten Oberflächentemperaturen. Für die Bestimmung dieses Wärmeaustausches stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, z. B. die Netto-Strahlungsmethode [3.3, 3.4, 3.14, 3.15], die Zonen-Methode [3.17–3.19], die Monte-Carlo Methode [3.17, 3.18] und die Methode der diskreten Ordinaten [3.17]. Im Folgenden wird die Netto-Strahlungsmethode kurz für graue, diffuse Strahler skizziert. Der Einfachheit halber werden ausschließlich intransparente Körper betrachtet, d. h. es gilt $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$; die Theorie lässt sich aber einfach auf semitransparente Körper erweitern.

Abbildung 3.9 zeigt zwei strahlende Oberflächen A_i und A_j mit jeweils homogen verteilten Oberflächentemperaturen T_i und T_j . Es sei nun G_i die auf A_i auftreffende totale Einstrahlung in W/m^2 und J_i die von A_i (gleichmäßig) abgehende totale Ausstrahlung in W/m^2 . Da J_i also neben der von A_i emittierten Ausstrahlung $\varepsilon_i \sigma T_i^4$ den reflektierten Anteil von G_i beinhaltet, gilt

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i. \quad (3.29)$$

Es sein nun $F_{ij} J_i$ jener Anteil von J_i , der auf A_j auftrifft. Die noch zu bestimmende dimensionslose Zahl $F_{ij} \in [0, 1]$ wird *Sichtfaktor* genannt und hängt ausschließlich von der

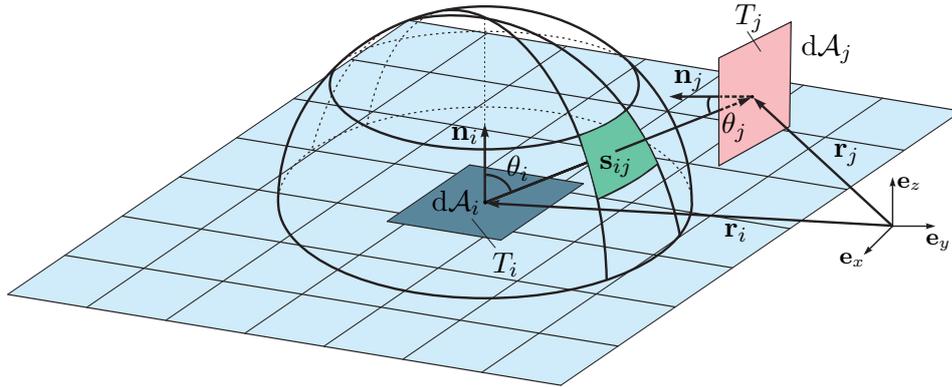


Abbildung 3.9: Zwei Flächen mit Strahlungsaustausch.

Form und relativen Position der Flächen A_i und A_j ab. Um eine Berechnungsformel für den Sichtfaktor herzuleiten, betrachte man Abbildung 3.9. Der Vektor $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ vom Flächenelement $d\mathcal{A}_i$ zum Flächenelement $d\mathcal{A}_j$ hängt mit den beiden Winkeln θ_i und θ_j in der Form

$$\cos(\theta_i) = \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{s}_{ij}}{\|\mathbf{s}_{ij}\|_2} \quad \text{und} \quad \cos(\theta_j) = -\frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{s}_{ij}}{\|\mathbf{s}_{ij}\|_2} \quad (3.30)$$

zusammen, wobei \mathbf{n}_i und \mathbf{n}_j die Flächennormalvektoren zu $d\mathcal{A}_i$ und $d\mathcal{A}_j$ bezeichnen. Die vom Flächenelement $d\mathcal{A}_i$ total abgehende Strahlungsenergie lautet $J_i d\mathcal{A}_i$ mit J_i gemäß (3.29), wovon der Anteil $J_i d\mathcal{A}_i \cos(\theta_i)$ in Richtung von \mathbf{s}_{ij} abgestrahlt wird. Die auf das Flächenelement $d\mathcal{A}_j$ auftreffende Strahlungsenergie errechnet sich zu $J_i d\mathcal{A}_i \cos(\theta_i) d\mathcal{A}_j \cos(\theta_j)$. Damit ergibt sich die auf der gesamten Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie, die von der gesamten Fläche A_i abgegeben wurde, zu

$$J_{ji} = J_i \frac{1}{\Gamma} \int_{A_i} \int_{A_j} \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i . \quad (3.31)$$

Man beachte, dass Γ in (3.31) einen noch zu bestimmenden Normierungsfaktor darstellt. Es muss nämlich gelten, dass für eine Halbkugel der Fläche A_j (mit dem Radius $s_{ij} = \|\mathbf{s}_{ij}\|_2$) die auftreffende Strahlungsenergie J_{ji} der von der Fläche A_i abgegebenen Strahlungsenergie J_i entspricht (siehe Abbildung 3.9), weshalb in diesem Fall die Beziehung

$$\frac{1}{\Gamma} \int_{A_i} \int_{A_j} \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i = 1 \quad (3.32)$$

erfüllt sein muss. Wertet man (3.32) für die Halbkugel mit dem Radius s_{ij} aus, so folgt $\theta_j = 0$ und man erhält

$$\int_{A_i} \cos(\theta_i) d\mathcal{A}_i = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta_i) s_{ij}^2 \sin(\theta_i) d\theta_i d\varphi = s_{ij}^2 \pi = \Gamma . \quad (3.33)$$

Aus (3.31) mit (3.33) erhält man unmittelbar die Definitionsgleichung für den Sichtfaktor als Verhältnis von J_{ji} (auf die Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie, die von der Fläche A_i abgegeben wurde) zu $A_i J_i$ (gesamte von der Fläche A_i abgegebene Strahlungsenergie)

$$F_{ij} = \frac{J_{ji}}{A_i J_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{s_{ij}^2 \pi} dA_j dA_i . \quad (3.34)$$

Aus (3.34) folgt unmittelbar das *Reziprozitätsgesetz*

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} . \quad (3.35)$$

Dies kann bei der Berechnung von Sichtfaktoren nützlich sein. Da für viele geometrische Fälle exakte Lösungsformeln für F_{ij} existieren (siehe z. B. [3.17, 3.18, 3.20]), entfällt häufig die Berechnung des Mehrfachintegrals in (3.34).

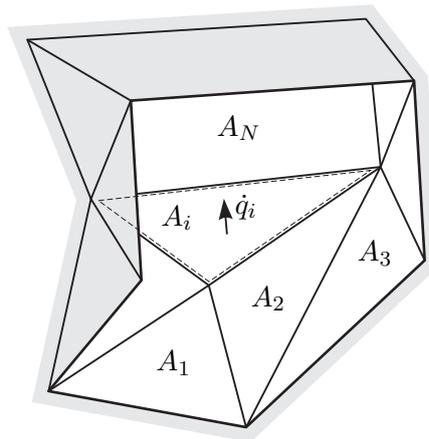


Abbildung 3.10: Schnitt durch einen geschlossenen Strahlungsraum.

Wie in Abbildung 3.10 angedeutet, bestehe ein geschlossener Strahlungsraum aus N Teilstücken mit den Oberflächen A_i ($i = 1, \dots, N$) und den zugehörigen homogenen Oberflächentemperaturen T_i . Eine Bilanz der von der Fläche A_i abgehenden totalen Ausstrahlung liefert

$$J_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (3.36)$$

und daher die als *Summationsregel* bekannte Beziehung

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (3.37)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.35) und der Summationsregel (3.37) wurden bereits zwei Formeln gefunden, die zur effizienten Berechnung von Sichtfaktoren ausgenutzt werden können. Weitere Vereinfachungen ergeben sich häufig, da für ebene Flächen und konvexe Körper $F_{ii} = 0$ gilt. Außerdem lassen sich Sichtfaktoren addieren und subtrahieren.

Aufgabe 3.4 (Zusammenfassen von Flächen). Zeigen Sie, dass wenn zwei Flächen A_{i_1} und A_{i_2} zu einer Fläche $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$ zusammengefasst werden, basierend auf (3.34) $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$ für $j \neq i_1$, $j \neq i_2$ und $j \neq i$ sowie $A_i F_{ii} =$

$A_{i_1}(F_{i_1 i_1} + F_{i_1 i_2}) + A_{i_2}(F_{i_2 i_1} + F_{i_2 i_2})$ gilt.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich einfach Regeln für die Subtraktion von Flächen ableiten. Eine Bilanz der auf die Fläche A_j auftreffenden Strahlungsenergie liefert gemeinsam mit dem Reziprozitätsgesetz (3.35)

$$A_j G_j = \sum_{i=1}^N A_i J_i F_{ij} = \sum_{i=1}^N A_j J_i F_{ji} \quad (3.38)$$

und daher unter Verwendung von (3.29)

$$G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji} J_i = \sum_{i=1}^N F_{ji} (\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i) . \quad (3.39)$$

Nun sei

$$\dot{q}_i = J_i - G_i = \varepsilon_i (\sigma T_i^4 - G_i) \quad (3.40)$$

die Nettowärmestromdichte die die Oberfläche A_i verlässt (vgl. Abbildung 3.10). An dieser Stelle ist es günstig auf Matrixschreibweise mit $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1, \dots, N}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1, \dots, N}$, $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1, \dots, N}$, $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1, \dots, N}$ und $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, N}$ zu wechseln. Aus (3.39) und (3.40) folgen damit direkt die von den Oberflächen austretenden Nettowärmestromdichten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \sigma \mathbf{T}^4 \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \mathbf{T}^4 \end{aligned} \quad (3.41)$$

zufolge von thermischer Strahlung.

Aufgabe 3.5 (Wärmestromdichten zufolge von thermischer Strahlung). Berechnen Sie ausgehend von (3.39) und (3.40) beide in (3.41) dargestellten Ergebnisse.

Aufgabe 3.6 (Wärmestrahlung zwischen parallelen unendlich ausgedehnten Platten). Die beiden in Abbildung 3.11 skizzierten, durch Vakuum getrennten, unendlich ausgedehnten, ebenen, parallelen Platten haben die festen Temperaturen T_1 und T_2 . Die Oberflächen sind graue, diffuse Strahler, haben die Emissivitäten ε_1 und ε_2 und tauschen mittels thermischer Strahlung Energie aus.

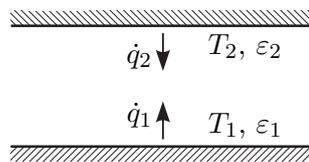


Abbildung 3.11: Unendlich ausgedehnte parallele Platten.

a) Begründen Sie formal warum hier für die Sichtfaktoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

gilt.

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$.

Lösung von Aufgabe 3.6.

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Beispiel 3.2 (Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel). Abbildung 3.12 zeigt den Querschnitt eines Rohrreaktors der durch eine Vakuumschicht isoliert ist. Aufgrund der im Innenrohr ablaufenden exothermen chemischen Reaktion wird stationär der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom \dot{q}° in W/m von der Reaktionskammer gleichmäßig an den Rohrmantel abgegeben. Alle Oberflächen sind graue, diffuse Strahler. Das Innenrohr mit dem Durchmesser d hat die Emissivität ε_1 . Das Außenrohr mit dem Durchmesser D hat beidseitig die Emissivität ε_2 . Es gibt durch Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α) Wärme an die umgebende Luft mit der festen Temperatur T_∞ ab. Zusätzlich geht Wärme über thermische Strahlung an die umgebenden Oberflächen, welche im Mittel ebenfalls die feste Temperatur T_∞ besitzen, verloren. Die Rohrwände seien vernachlässigbar dünn. Für die Berechnung der thermischen Strahlung sei der Reaktor im Vergleich zu den ihn umgebenden Oberflächen vernachlässigbar klein.

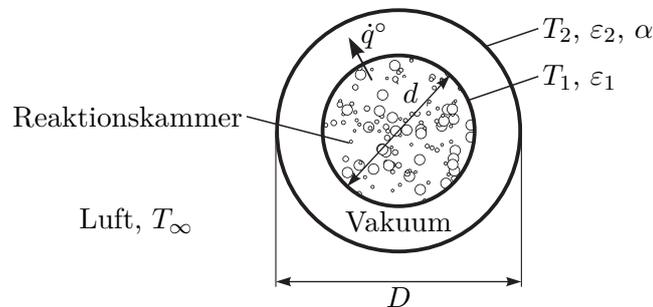


Abbildung 3.12: Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel.

a) Wie groß darf \dot{q}° maximal sein, damit das Außenrohr die bei Berührung durch Menschen ungefährliche Temperatur $T_{2,max}$ nicht überschreitet?

Da das innere Rohr von außen gesehen ein konvexer Körper ist, gilt für den Sichtfaktor $F_{11} = 0$ und aus der Summationsregel (3.37) folgt

$$F_{11} + F_{12} = F_{12} = 1 . \quad (3.44)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.35) und der Rohrlänge l erhält man

$$A_1 F_{12} = l d \pi F_{12} = A_2 F_{21} = l D \pi F_{21} \quad (3.45)$$

und damit

$$F_{21} = \frac{d}{D} . \quad (3.46)$$

Der Sichtfaktor F_{22} lässt sich wiederum über die Summationsregel (3.37) $F_{21} + F_{22} = 1$ zu

$$F_{22} = 1 - \frac{d}{D} \quad (3.47)$$

bestimmen. Mit der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d}{D} & 1 - \frac{d}{D} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

errechnen sich die Nettowärmeströme nach (3.41) in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -(1-\varepsilon_1) \\ -(1-\varepsilon_2)\frac{d}{D} & 1 - (1-\varepsilon_2)\left(1 - \frac{d}{D}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-(\mathbf{E}-\text{diag}(\varepsilon))\mathbf{F}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}}_{\text{diag}(\varepsilon)} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^4} \quad (3.49)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2) \frac{d}{D}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} . \quad (3.50)$$

Im stationären Fall muss der von der Reaktionskammer an den inneren Rohrmantel abgegebene Wärmestrom $\dot{q}^\circ / (d\pi)$ gleich dem Nettowärmestrom \dot{q}_1 und der vom äußeren Rohrmantel an die Umgebung abgegebene Wärmestrom zufolge Konvektion und Strahlung gleich dem Nettowärmestrom \dot{q}_2 sein, d. h.

$$\frac{\dot{q}^\circ}{d\pi} = \dot{q}_1 \quad \text{und} \quad -\alpha(T_2 - T_\infty) - \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) = \dot{q}_2 . \quad (3.51)$$

Da gemäß (3.50) gilt $\dot{q}_2 = -\frac{d}{D}\dot{q}_1$, folgt aus (3.51) unmittelbar die Beziehung

$$\dot{q}^\circ = D\pi \left\{ \alpha(T_2 - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \right\} \quad (3.52)$$

und daher muss der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom \dot{q}° die Ungleichung

$$\dot{q}^\circ \leq D\pi \left\{ \alpha(T_{2,\max} - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_{2,\max}^4 - T_\infty^4) \right\} \quad (3.53)$$

einhalten, damit die Temperatur T_2 am äußeren Rohrmantel den Wert $T_{2,\max}$ nicht übersteigt.

- b) Welche Temperatur T_1 stellt sich am Innenrohr ein, wenn der Reaktor bei der in Punkt a) berechneten Volllast betrieben wird?

Aus der Stationaritätsbeziehung $\dot{q}^\circ = d\pi\dot{q}_1$ (siehe (3.51)) lässt sich mit Hilfe von (3.50) und (3.53) die zu $T_{2,max}$ zugehörige Temperatur des inneren Rohrs $T_{1,max}$ zu

$$T_1 = \left(T_{2,max}^4 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{D}{\varepsilon_1 d} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \left(\alpha(T_{2,max} - T_\infty) + \sigma\varepsilon_2(T_{2,max}^4 - T_\infty^4) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.54)$$

berechnen.

Aufgabe 3.7. Die Sonne kann als eine strahlende Kugel mit dem Radius r_S und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers betrachtet werden. Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt l_{SE} . Als Solarkonstante E_0 bezeichnet man die Strahlungsleistung pro m^2 auf eine Fläche am äußersten Rand der Erdatmosphäre mit senkrecht einfallender Strahlung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Oberflächentemperatur T_S und der Solarkonstanten?

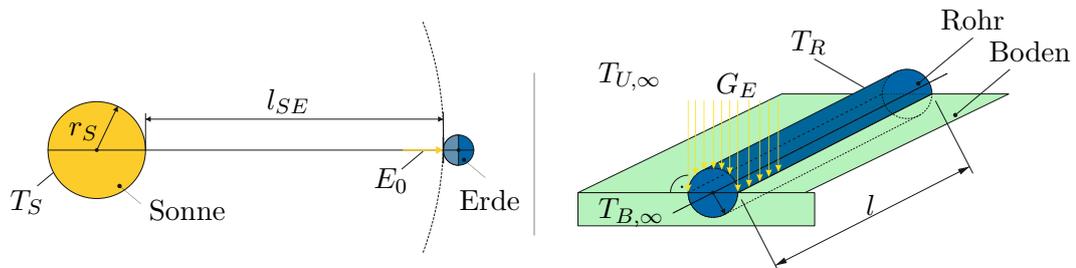


Abbildung 3.13: Sonnenabstrahlung und Erwärmung eines Rohres.

Die von der Sonne auf die Erde senkrecht eintretende Einstrahlung G_E erwärmt ein mit ruhendem Fluid gefülltes, dünnwandiges Rohr (Radius r , Länge l , Temperatur T_R). Das Rohr gibt seine Wärme in Form von Strahlung (Emissivität ε_R) und Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α_U) an die Umgebung mit der Umgebungstemperatur $T_{U,\infty}$ ab. Zudem wird dem Rohr durch Wärmeleitung über den Boden (Bodentemperatur $T_{B,\infty}$, Wärmeübergangskoeffizient α_B) Wärme entzogen. Ermitteln Sie eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächentemperatur des Rohres T_R (und damit der Temperatur des Fluids) für den stationären Fall.

Hinweis: Sonne und Rohr werden als graue Strahler angenommen. Aufgrund von $l \gg r$ können die Wärmeströme an den Stirnflächen des Rohres vernachlässigt werden. Die Bestimmungsgleichung muss nicht explizit nach der Rohrtemperatur T_R aufgelöst werden.

Lösung von Aufgabe 3.7.

$$T_S = \left(\frac{E_0(r_S + l_{SE})^2}{\sigma r_S^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$0 = 2\epsilon_R G_E - \pi \left(\epsilon_R \sigma T_R^4 + \alpha_U (T_R - T_{U,\infty}) + \alpha_B (T_R - T_{B,\infty}) \right)$$

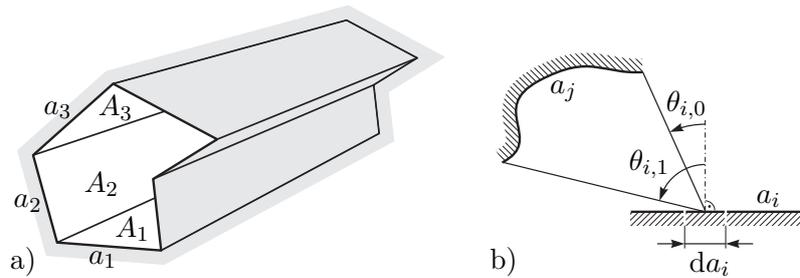


Abbildung 3.14: Vereinfachung bei 2-dimensionaler Geometrie, a) prismastrahlungsraum, b) Integration entlang einer Kontur.

Die bisherigen Ergebnisse können direkt auch für 2-dimensionale Geometrien verwendet werden, allerdings vereinfacht sich in diesem Fall die in (3.34) definierte Berechnung von Sichtfaktoren erheblich. Die Annahme einer 2-dimensionalen Geometrie ist dann exakt erfüllt, wenn es sich um einen prismastrahlungsraum (vgl. Abbildung 3.14a) mit unendlicher Längenausdehnung handelt. Die Flächen A_i sind dann vollständig durch die zugehörigen (nicht notwendigerweise geraden) Konturen mit den abgewinkelten Längen a_i definiert. Man kann zeigen, dass in solchen 2-dimensionalen Geometrien für den Sichtfaktor

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{2s_{ij}} da_j da_i = \frac{1}{2a_i} \int_{a_i} \sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0}) da_i \quad (3.55)$$

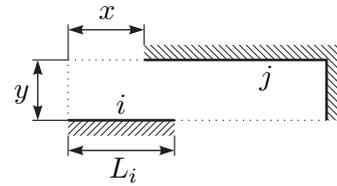
gilt. Die Winkel $\theta_{i,0}$ und $\theta_{i,1}$ sind in Abbildung 3.14b) definiert. In (3.55) kann das Integral entlang der Kontur a_i sehr häufig direkt analytisch berechnet werden. Ergebnisse für einige Fälle, wo eine analytische Berechnung leicht möglich ist, sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien.

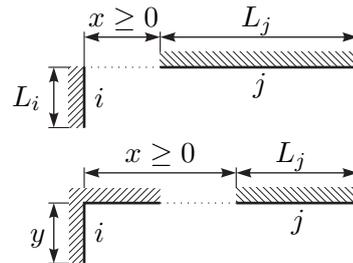
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(\sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$

Das Diagramm zeigt zwei rechteckige Flächen i und j in einem 2D-Raum. Die Fläche i hat die Länge L_i und die Fläche j die Länge L_j . Der horizontale Abstand zwischen den linken Kanten ist x , der vertikale Abstand ist y .

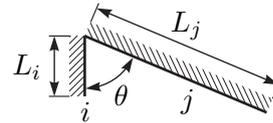
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



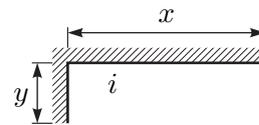
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_j + \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} \right)$$



$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_i L_j \cos(\theta)} \right)$$



$$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y + x}$$



Beispiel 3.3. In Abbildung 3.15 ist eine Dachschräge mit vertikal einfallender Sonneneinstrahlung schematisch dargestellt. Durch das trübe Dachfenster wird ein Teil der Sonnenstrahlung diffus ins Zimmer abgestrahlt und man möchte den relevanten Sichtfaktor F_{F-B} bestimmen.

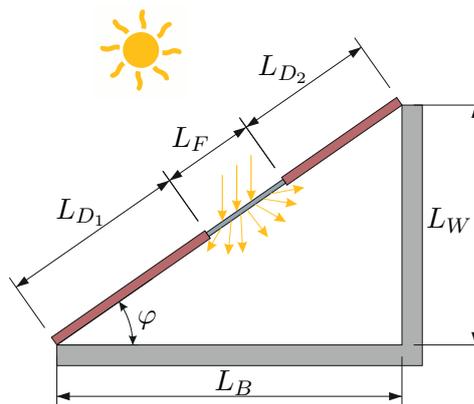


Abbildung 3.15: Zimmer mit Dachschräge.

Aus Kenntnis von F_{B-D_1} und F_{B-D_1F} folgt durch die Additivität von Flächen (siehe Aufgabe 3.4) direkt $F_{B-F} = F_{B-D_1F} - F_{B-D_1}$ und damit der gewünschte Sichtfaktor mittels Reziprozität

$$F_{F-B} = \frac{L_B}{L_F} (F_{B-D_1F} - F_{B-D_1}).$$

Zur Berechnung der benötigten Sichtfaktoren F_{B-D_1} und F_{B-D_1F} kann die vereinfachte Beziehung (3.55) verwendet werden, wodurch

$$F_{B-D_1} = \frac{1}{2L_B} \int_0^{L_B} 1 + \frac{L_{D_1} \cos(\varphi) - x}{\sqrt{x^2 + L_{D_1}^2 - 2xL_{D_1} \cos(\varphi)}} dx$$

und per Substitution $u(x) = x^2 + L_{D_1}^2 - 2xL_{D_1} \cos(\varphi)$

$$\begin{aligned} F_{B-D_1} &= \frac{1}{2L_B} \left(L_B - \int_{u(0)}^{u(L_B)} \frac{1}{\sqrt{u}} du \right) \\ &= \frac{1}{2L_B} \left(L_B + L_{D_1} - \sqrt{L_B^2 + L_{D_1}^2 - 2L_B L_{D_1} \cos(\varphi)} \right) \end{aligned}$$

folgt (vgl. Tabelle 3.1). Analog dazu erhält man den zweiten unbekanntem Sichtfaktor

$$F_{B-D_1F} = \frac{1}{2L_B} \left(L_B + L_{D_1} + L_F - \sqrt{L_B^2 + (L_{D_1} + L_F)^2 - 2L_B(L_{D_1} + L_F) \cos \varphi} \right).$$

Aufgabe 3.8 (Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien). Rechnen Sie die in Tabelle 3.1 angegebenen Ergebnisse nach.

3.3 Wärmequellen

Wärme kann nicht originär erzeugt werden, sondern entsteht aus anderen Energieformen durch Umwandlung. Derartige Umwandlungsvorgänge und die Rückumwandlung von Wärme in andere Energieformen (soweit diese möglich ist) werden z. B. in der Thermodynamik studiert. Typische andere Energieformen sind mechanische Energie, elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie und Kernenergie. Obwohl Wärme nur durch Umwandlung entstehen kann, ist es für Wärmebilanzen oft günstig von Wärmequellen zu sprechen. Im Folgenden werden einige Beispiele einfacher Umwandlungsvorgänge diskutiert.

Mechanische Reibung

In Abschnitt 2.2.5 wurde vorgestellt wie mechanische Arbeit durch Dissipation in Wärme umgewandelt werden kann. Reibung tritt typischerweise an der Berührfläche zweier Körper auf oder in sich deformierenden Körpern. Der Einfachheit halber wird hier nur der erste Fall behandelt.

Zufolge einer Reibkraft \mathbf{f}_r (resultierende Reibkraft) zwischen zwei Oberflächen, die sich

berühren, wird nur dann mechanische Energie in Wärme umgewandelt, wenn sich die zwei Flächen relativ zueinander verschieben. Tun sie dies mit der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} , so wird dem System mechanische Arbeit mit der Leistung

$$\dot{W}_r = -\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{v} \quad (3.56)$$

entzogen. Da die Reibkraft stets der Bewegung entgegenwirkt, gilt $\dot{W}_r \geq 0$. \dot{W}_r kann in mechanische Verformungsenergie (plastische Deformation der Reibflächen, Bildung von Kratzern und Abrieb) oder Wärmeenergie umgewandelt werden. Welcher Anteil tatsächlich in Wärme umgewandelt wird, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. In Bremssystemen beispielsweise soll ein möglichst großer Anteil in Wärme und nur ein geringer Anteil in Abriebenergie umgewandelt werden. Handelt es sich, anders als bei der für (3.56) postulierten translatorischen Relativbewegung, um einen rotatorischen Reibvorgang, so entspricht die Reibleistung alternativ zu (3.56) dem negativen inneren Produkt aus Reibmoment und Drehwinkelgeschwindigkeit.

Die durch Reibung entstehende Wärme wird direkt an der Reibfläche (oder im deformierten Volumen) frei. Es ist daher oft zweckmäßig, statt \dot{W}_r eine auf die Fläche (das Volumen) bezogene Wärmequelle, d. h. eine Quellendichte, in W/m^2 (W/m^3) zu verwenden.

Ohmsche Last

Fließt durch ein infinitesimales Volumenelement $d\mathcal{V}$ eines elektrischen Leiters Strom mit der Stromdichte $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$, so muss das Element gemäß dem Ohmschen Gesetz einem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T)\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \quad (3.57)$$

ausgesetzt sein [3.21]. Hier bezeichnet ρ_e den spezifischen Ohmschen Widerstand des Materials, der im Allgemeinen vom Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und der lokalen Temperatur T abhängt. Häufig wird die Formulierung

$$\rho_e(\mathbf{x}, T) = \rho_{e,0}(\mathbf{x})(1 + \gamma(\mathbf{x})(T - T_0)) \quad (3.58)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten γ und der Referenztemperatur T_0 zur Beschreibung dieses Effekts verwendet [3.21].

Der Stromfluss verursacht Interaktionen zwischen den sich bewegenden Elektronen und dem Atomgitter des Leiters, was zu einer Erhöhung der im Material gespeicherten thermischen Energie führt. In einem Ohmschen Widerstand wird daher am Punkt \mathbf{x} die Leistungsdichte

$$g(t, \mathbf{x}, T) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T)\|\mathbf{J}(t, \mathbf{x})\|_2^2 = \frac{\|\mathbf{E}(t, \mathbf{x})\|_2^2}{\rho_e(\mathbf{x}, T)} \quad (3.59)$$

[3.21] dissipiert, d. h. in Wärme umgesetzt. Diese Beziehung lässt sich aus dem Verlust an potentieller Energie, den Ladungsteilchen erfahren, wenn sie sich im elektrischen Feld bewegen, herleiten (vgl. [3.22]). Grundsätzlich stellt elektrisch leitendes Material mit einem spezifischen Widerstand $\rho_e > 0$ also eine volumetrische Wärmequelle dar. Integriert man

$g(t, \mathbf{x}, T)$ über das Volumen \mathcal{V} des Ohmschen Widerstandes R , so ergibt sich die gesamte in Wärme umgesetzte Leistung (*Joulesche Wärme*)

$$\dot{W}(t) = \int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} = U(t)I(t) = RI^2(t) = \frac{U^2(t)}{R}, \quad (3.60)$$

[3.21] wobei $U(t)$ die anliegende Spannung und $I(t)$ der durchfließende Strom ist. Bei dieser Integration kann das Gebiet \mathcal{V} gedanklich in infinitesimale Stromröhren zerlegt werden, über deren Berandung kein Strom fließt.

Wird ein Leiter von Wechselstrom üblicher Netzfrequenz durchflossen, so reicht es zur Temperaturanalyse meist aus, mit den zeitlichen Mittelwerten von $g(t, \mathbf{x}, T)$ und $\dot{W}(t)$ zu rechnen, d. h. mit Effektivwerten. Der Grund dafür ist, dass die Zeitkonstanten des thermischen Verhaltens meist signifikant höher sind als jene des elektrischen Verhaltens.

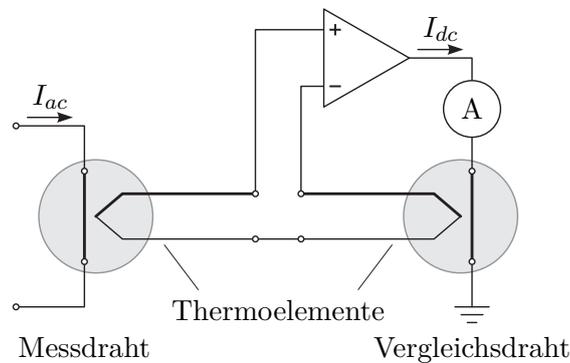


Abbildung 3.16: Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator zur Effektivwert-Messung des Stromes.

Bemerkung 3.4. Dieses Prinzip wird von sogenannten *Thermoumformern* zur Bestimmung von effektiven Stromwerten bei Frequenzen bis in den GHz-Bereich ausgenutzt. Dabei wird die Erwärmung eines stromdurchflossenen Widerstandsdrahtes gemessen. Dies erfolgt entweder direkt mit einem Thermoelement oder indirekt durch Erwärmung eines zweiten mit Gleichstrom betriebenen Vergleichsdrahtes. Der letztere, auch als Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator bekannte Fall ist in Abbildung 3.16 skizziert. Der mit dem Amperemeter gemessene Gleichstrom I_{dc} im Vergleichsdraht entspricht gerade dem Effektivwert des Stromes I_{ac} [3.23].

Aufgabe 3.9 (Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator). Für den in Abbildung 3.16 skizzierten Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator ist bekannt, dass der Messdraht und der Vergleichsdraht kreisrunde Querschnitte besitzen und aus dem gleichen Material gefertigt sind. Der Durchmesser des Messdrahtes sei D_{ac} ; jener des Vergleichsdrahtes D_{dc} . Die Drähte besitzen eine homogene Temperaturverteilung und werden ausschließlich durch Konvektion an der Mantelfläche gekühlt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient α und die Umgebungstemperatur T_{∞} bei beiden Drähten

ident sind. Es wird hochfrequenter Wechselstrom I_{ac} gemessen, weshalb der Skin-Effekt die effektive Leiterquerschnittsfläche des Messdrahtes auf 10 % reduziert. Mit welchem Durchmesser Verhältnis D_{ac}/D_{dc} muss das Messgerät gebaut werden, damit der Gleichstrom I_{dc} dem zu messenden Effektivwert von I_{ac} entspricht?

Lösung von Aufgabe 3.9.

$$\frac{D_{ac}}{D_{dc}} = \sqrt[3]{10} \quad (3.61)$$

3.4 Stationäre Wärmeübertragung

In diesem Abschnitt werden einige einfache Beispiele zur stationären Wärmeübertragung diskutiert.

3.4.1 Ebene Wand

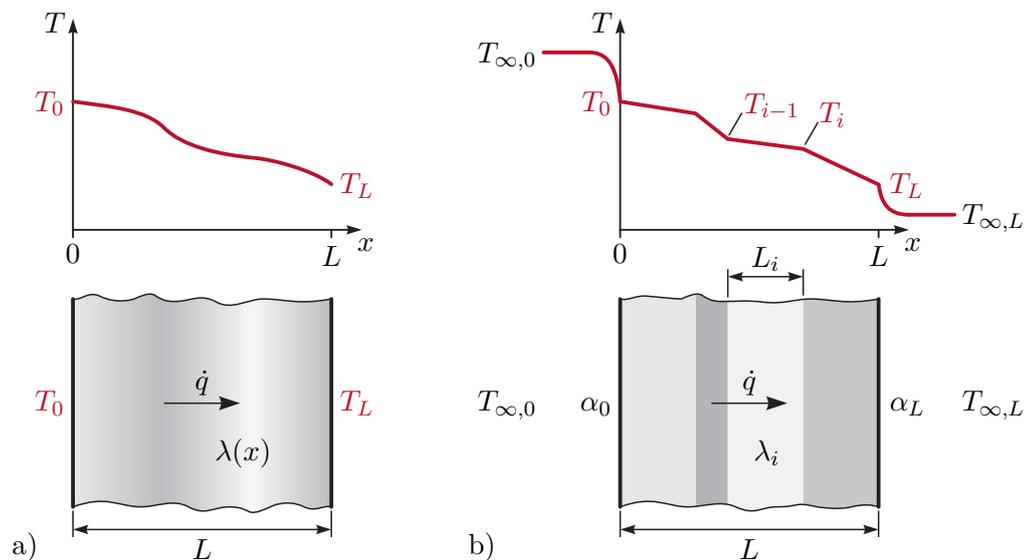


Abbildung 3.17: Stationäre Wärmeübertragung in ebener Wand, a) allgemeiner Wandaufbau mit Randbedingungen erster Art, b) schichtweise konstanter Wandaufbau mit Randbedingungen zweiter Art.

Die Bestimmung des Wärmestroms und des Temperaturprofils in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und mit Randbedingungen erster Art an beiden Oberflächen kann als 1-dimensionales Wärmeleitproblem in kartesischen Koordinaten aufgefasst werden. Im Folgenden soll von stationären Verhältnissen und isotropem Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x)$ ausgegangen werden. Wie in Abbildung 3.17a dargestellt, habe die Wand die Dicke L und die beiden Oberflächentemperaturen $T(0) = T_0$

und $T(L) = T_L$. Im stationären Zustand muss gemäß (3.4) die Temperatur $T(x)$ dem Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) \right) = 0 \quad \text{und} \quad T(0) = T_0, T(L) = T_L \quad (3.62)$$

genügen. Aus (3.62) folgt

$$\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) = C = \text{konst.} \quad (3.63)$$

und damit durch Integration

$$T(x) - T(0) = C \int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x} . \quad (3.64)$$

Setzt man in (3.64) für $x = L$ ein, so erhält man

$$C = \frac{T(L) - T(0)}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.65)$$

und damit das stationäre Temperaturprofil in der Wand in der Form

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} . \quad (3.66)$$

Die Wärmestromdichte \dot{q} gemäß (3.1) errechnet sich zu

$$\dot{q} = -\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) = -C = \frac{T_0 - T_L}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.67)$$

und für konstante Wärmeleitfähigkeit λ vereinfacht sich (3.67) zu

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L) . \quad (3.68)$$

Wegen $\lambda(x) > 0$ ist $T(x)$ entsprechend (3.66) monoton. Wie gemäß Abschnitt 3.1 zu erwarten war, haben die Massendichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c_p keinen Einfluss auf den Wärmestrom und das stationäre Temperaturprofil in der Wand.

Ist eine Wand aus mehreren Schichten mit abschnittsweise konstanten Materialparametern aufgebaut, wie dies in Abbildung 3.17b) gezeigt ist, dann vereinfacht sich die Berechnung der Wärmestromdichte \dot{q} gemäß (3.71) erheblich. Man nehme an, die Wand bestehe aus den Schichten $i = 1, \dots, N$ mit den jeweiligen Dicken L_i und Wärmeleitfähigkeiten λ_i . Außerdem soll nun von Randbedingungen zweiter Art mit den Wärmeübergangskoeffizienten α_0 und α_L und den festen Temperaturen $T_{\infty,0}$ und $T_{\infty,L}$ der umgebenden Fluide ausgegangen werden. Für die Wärmestromdichte \dot{q} folgt in diesem Fall (siehe Abbildung 3.17b)) unter Berücksichtigung von (3.11) und (3.68)

$$\dot{q} = \alpha_0 (T_{\infty,0} - T_0) = \frac{\lambda_1}{L_1} (T_0 - T_1) = \dots = \frac{\lambda_N}{L_N} (T_{N-1} - T_L) = \alpha_L (T_L - T_{\infty,L}) . \quad (3.69)$$

Der *Wärmedurchgangskoeffizient* k (gelegentlich auch k -Wert genannt) in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ beschreibt den Proportionalitätsfaktor zwischen der Differenz der Außentemperaturen ($T_{\infty,0} - T_{\infty,L}$) und der Wärmestromdichte \dot{q} . Aus (3.69) lassen sich einfach die Differenztemperaturen für jede Schicht berechnen und addieren

$$T_{\infty,0} - T_{\infty,L} = \underbrace{(T_{\infty,0} - T_0)}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_0}} + \underbrace{(T_0 - T_1)}_{\dot{q} \frac{L_1}{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{(T_{N-1} - T_L)}_{\dot{q} \frac{L_N}{\lambda_N}} + \underbrace{(T_L - T_{\infty,L})}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_L}}, \quad (3.70)$$

womit sich unmittelbar die Wärmestromdichte zu

$$\dot{q} = k(T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}} \quad (3.71)$$

ergibt. Man erkennt, dass die Wand besser isoliert, je kleiner der k -Faktor ist.

Beispiel 3.4 (Isolierverglasung). Bei der Auswahl der Fenster für ein neues Wohnhaus steht man vor der Entscheidung, konventionelle Fenster mit einer Einfachverglasung oder teurere Fenster mit einer Doppelverglasung zu wählen. Ein typisches Fenster mit Doppelverglasung ist in Abbildung 3.18 links dargestellt. Zum Vergleich der thermischen Eigenschaften soll das Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Einfach- und Doppelverglasung untersucht werden.

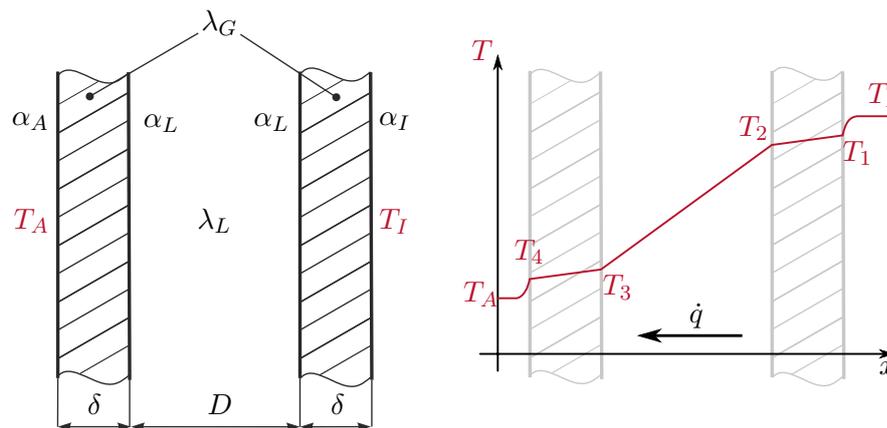


Abbildung 3.18: Querschnitt einer Doppelverglasung (links) mit typischem Temperaturverlauf (rechts).

Der Wärmeübergang von Glas auf Luft und umgekehrt wird im Scheibenzwischenraum vernachlässigt, d. h. $\alpha_L \rightarrow \infty$. Für den Fall $T_I > T_A$ ist ein typischer Temperaturverlauf in Abbildung 3.18 dargestellt. Da das gesamte Fenster von der selben Wärmestromdichte \dot{q} durchsetzt wird, ergeben sich für die einzelnen Segmente

die Beziehungen

$$\dot{q} = \alpha_I(T_I - T_1) \quad (3.72a)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_1 - T_2) \quad (3.72b)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_L}{D}(T_2 - T_3) \quad (3.72c)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_3 - T_4) \quad (3.72d)$$

$$\dot{q} = \alpha_A(T_4 - T_A), \quad (3.72e)$$

$$(3.72f)$$

welche ein lineares Gleichungssystem der unbekanntenen Größen T_1, T_2, T_3, T_4 und \dot{q} darstellen. Daraus folgt der Zusammenhang

$$\dot{q} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_I} + 2 \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A} \right)}_{\frac{1}{k_D}} = T_I - T_A, \quad (3.73)$$

woraus der Wärmedurchgangskoeffizient der Doppelverglasung abgelesen werden kann. Mit dem analog berechneten Wärmedurchgangskoeffizienten einer Einfachverglasung

$$\frac{1}{k_E} = \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A} \right) \quad (3.74)$$

ergibt sich das Verhältnis der beiden Durchgangskoeffizienten zu

$$\frac{k_E}{k_D} = 1 + \frac{\frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L}}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}}. \quad (3.75)$$

3.4.2 Zylinderförmige Wand

Für die in Abbildung 3.19 dargestellte aus N kreisförmigen Schichten bestehende Rohrwand soll für den stationären Fall ohne Wärmequellen der Temperaturverlauf und der Wärmestrom berechnet werden. Eine Schicht $i \in \{1, \dots, N\}$ habe den Innenradius r_{i-1} , den Außenradius r_i und die homogene, temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit λ_i . Im Rohr fließt ein Medium mit der festen Temperatur T_F und das Rohr wird von einem Medium mit der festen Temperatur T_∞ umströmt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohrrinnenseite (Radius r_0) sei α_0 ; an der Rohraußenseite (Radius r_N) sei er α_N . Alle Größen seien unabhängig von der Winkelkoordinate φ und der Längskoordinate z (vgl. Abbildung 3.2a), so dass die Annahme 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung der radialen Koordinate r gerechtfertigt ist. Aus (3.5b) folgt damit für eine beliebige Schicht $i \in \{1, \dots, N\}$

$$0 = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i). \quad (3.76)$$

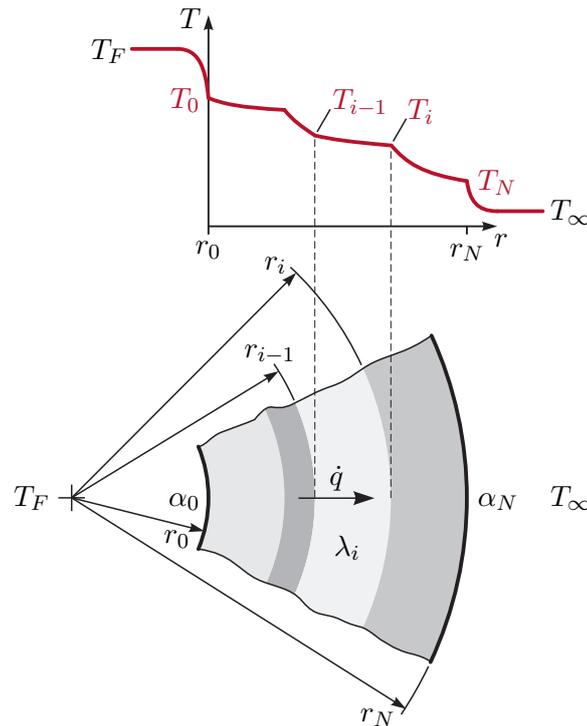


Abbildung 3.19: Stationäre Wärmeübertragung in zylinderförmiger Wand.

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$T(r) = T_{i-1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in [r_{i-1}, r_i] \quad (3.77)$$

mit $T_i = T(r_i)$ und $T_{i-1} = T(r_{i-1})$. Wie es sein muss, hängt die lokale Wärmestromdichte

$$\dot{q}(r) = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) \quad (3.78)$$

vom Radius r ab. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen zweiter Art ergibt sich daher für die mehrschichtige Wand

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty) \frac{1}{r} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k(r)}} \quad (3.79)$$

mit dem vom Radius abhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten $k(r)$ in $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$. Praktisch interessant ist auch noch der vom Radius unabhängige auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom

$$\dot{q}^\circ = (T_F - T_\infty) \frac{2\pi}{\underbrace{\frac{1}{r_0\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N\alpha_N}}_{=k^\circ}} \quad (3.80)$$

mit dem bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten k° in W/(mK).

Aufgabe 3.10 (Bezogener Wärmedurchgangskoeffizient bei schichtweisem zylinderförmigem Wandaufbau). Leiten Sie (3.80) ausgehend von (3.76) her. Beachten Sie, dass im Gegensatz zu (3.69) der Ausdruck $r\dot{q}(r)$ betrachtet werden muss.

3.4.3 Vorspringende Teile und Rippen

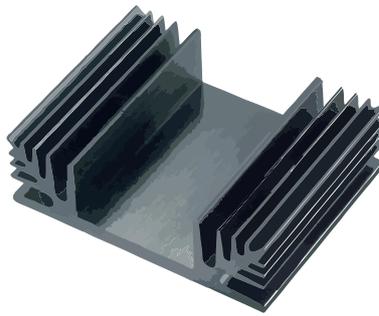


Abbildung 3.20: Kühlkörper für Elektronikbauteile.

Um den Wärmeübergang zwischen Festkörpern und Fluiden zu verbessern, wird häufig die wirksame Wärmeaustauschfläche konstruktiv vergrößert, z. B. durch Rippen. Abbildung 3.20 zeigt ein Beispiel eines mit Rippen versehenen Kühlkörpers für Elektronikbauteile.

Bemerkung 3.5. Auch in der Natur sind solche konstruktiv vergrößerten Wärmeaustauschflächen zu beobachten: Delfine nützen ihre Flossen auch zur Temperaturregulation. Bei afrikanischen Elefanten entfällt rund ein Sechstel der Körperoberfläche auf die kühlenden Ohren.

Da eine exakte Berechnung des Temperaturfeldes und Wärmeübertragungsverhaltens solcher Bauteile meist mit erheblichem Aufwand verbunden ist, beschränkt man sich oft auf Näherungen mit zahlreichen vereinfachenden Annahmen.

Mit diesen Ergebnissen lässt sich der Effekt von Rippen (oder anderen konstruktiven Elementen) auf den Wärmeaustausch an einer Oberfläche bestimmen. Ausschlaggebend ist die Form und das Material der Rippen sowie deren Einfluss auf die Wärmeübertragung an der Oberfläche (z. B. verringerter Wärmeübergangskoeffizient durch behinderte Strömung und verringerte Wärmestrahlung durch Schattenwurf). Zur Beurteilung, ob der Einsatz bestimmter Rippen zweckmäßig ist, ist der Gesamtwärmestrom durch den Basisquerschnitt (Befestigungsstelle $x = 0$ in Abbildung A.1) der Rippen sowie durch die zwischen den Rippen liegenden Flächen mit jenem Gesamtwärmestrom zu vergleichen, der ohne Rippen

auftreten würde. In diesem Zusammenhang wird häufig der Rippenwirkungsgrad

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}(0)}{\dot{Q}_{max}} \in [0, 1] \quad (3.81)$$

als Maßzahl verwendet. Er setzt den tatsächlich an der Befestigungsstelle $x = 0$ auftretenden Wärmestrom $\dot{Q}(0)$ ins Verhältnis zum Wärmestrom \dot{Q}_{max} , der auftreten würde, wenn die gesamte Rippenoberfläche die Temperatur T_0 (Temperatur an der Befestigungsstelle $x = 0$) hätte.

3.5 Transiente Wärmeübertragung

Meist ist das Finden einer exakten analytischen Lösung von transienten Wärmeübertragungsproblemen, die die Wärmeleitgleichung (3.4) beinhalten, eine herausfordernde Aufgabe. Für praktische Anwendungen werden daher oft numerische Näherungsverfahren zur Lösung verwendet (vgl. Abschnitt 3.6). In speziellen Fällen lassen sich jedoch geschlossene analytische Lösungen finden, die z. B. bei der Verifikation von numerischen Lösungsverfahren oder als Näherungslösung für ähnliche Problemstellungen dienlich sein können.

Aufgabe 3.11 (Einfaches transientes Wärmeleitproblem). Für ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem mit konstanter, homogener Temperaturleitfähigkeit a gelte $g = \lambda 2 \text{ K/m}^2$, d. h.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2a \quad x \in [0, 1], t > 0. \quad (3.82a)$$

Hinzu kommen die Anfangs- und Randbedingungen

$$T(0, x) = \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad x \in [0, 1] \quad (3.82b)$$

$$T(t, 0) = 1, \quad T(t, 1) = 0 \quad t > 0. \quad (3.82c)$$

Berechnen Sie die analytische Lösung $T(t, x)$ für dieses Problem. Sie können dabei die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit t verwenden.

Lösung von Aufgabe 3.11.

$$T(t, x) = e^{-a\pi^2 t} \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad (3.83)$$

Beispiel 3.5 (Tauchsieder). Der in Abbildung 3.21 skizzierte zylindrische Behälter ist

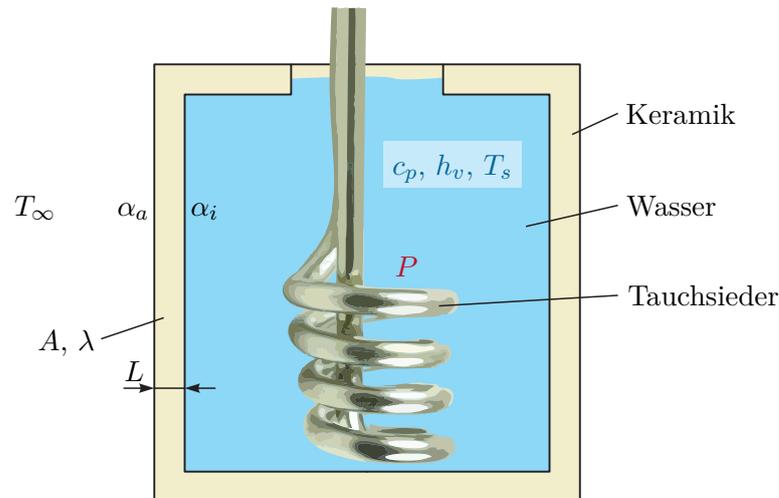


Abbildung 3.21: Wasserbehälter mit Tauchsieder.

zunächst vollständig mit Wasser (Masse m_0 , spezifische Wärmekapazität c_p im flüssigen Zustand, Verdampfungsenthalpie h_v in J/kg, Siedetemperatur T_s) mit einer anfänglichen Temperatur $T_0 = T_\infty$ gefüllt. Es wird angenommen, dass die Grundfläche und die mit einer Öffnung versehene Deckfläche des Behälters adiabatisch (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) sind.

Der Mantel des Zylinders hat eine Dicke L und eine Fläche A und besteht aus Keramik (Wärmeleitfähigkeit λ). Der Mantel tauscht durch freie Konvektion Wärme sowohl mit dem enthaltenen Wasser als auch mit der umgebenden Luft aus. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt innen α_i und außen α_a . Die wirksame Wärmeaustauschfläche ist proportional zum Füllstand des Behälters. Die Luft hat eine feste Temperatur T_∞ . Es ist von stationärer Wärmeübertragung durch den Behältermantel auszugehen, wobei die Wand aufgrund ihrer geringen Dicke als eben betrachtet werden kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein im Behälter eingebauter Tauchsieder eingeschaltet.

Es soll nun die Leistung P des Tauchsieders so dimensioniert werden, dass das Wasser zum Zeitpunkt t_s zu sieden beginnt. Dazu wird angenommen, dass die Wassertemperatur $T(t)$ homogen ist und die gesamte Leistung P in Wärme umgewandelt und vom Wasser aufgenommen wird. Nach (3.4) lautet die zugehörige Differentialgleichung

$$m_0 c_p \frac{d}{dt} T(t) = P - kA(T(t) - T_\infty), \quad T(0) = T_\infty \quad (3.84)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten gemäß (3.71)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}. \quad (3.85)$$

Die Lösung von (3.84) resultiert in

$$T(t) = T_\infty + \frac{P}{kA} \left(1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t} \right) \quad (3.86)$$

und damit folgt für die Leistung P (damit zum Siedezeitpunkt t_s gilt $T(t_s) = T_s$) die Beziehung

$$P = \frac{kA(T_s - T_\infty)}{1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t_s}}. \quad (3.87)$$

Wenn das Wasser die Siedetemperatur T_s erreicht, dann bedingt die durch den Tauchsieder zugeführte Wärmemenge, dass es zum Verdampfen des Fluids kommt und die Wassertemperatur $T(t) = T_s$ bleibt für alle Zeiten $t \geq t_s$ konstant. Da die wirksame Wärmeaustauschfläche proportional zum Füllstand des Behälters ist, folgt für den an die Umgebung abgegebenen Wärmestrom

$$\dot{Q}_{ab}(t) = -\frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad (3.88)$$

wobei $m_D(t)$ jene Wassermenge bezeichnet, die bereits in Dampf umgewandelt wurde. Aus der Energiebilanz erhält man

$$h_v \frac{d}{dt} m_D(t) = P - \frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad m_D(t_s) = 0 \quad (3.89)$$

und damit

$$m_D(t) = m_0 \left(1 - \frac{P}{kA(T_s - T_\infty)} \right) \left(1 - e^{-\frac{kA(T_s - T_\infty)}{h_v m_0} (t - t_s)} \right), \quad t \geq t_s. \quad (3.90)$$

Aus (3.90) erkennt man, dass die gesamte Wassermenge nach der Zeit

$$t = t_s + \ln \left(\frac{P}{P - kA(T_s - T_\infty)} \right) \frac{h_v m_0}{kA(T_s - T_\infty)} \quad (3.91)$$

verdampft ist.

3.6 Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen

Die Wärmeleitgleichung (3.4) ist ein Anfangs-Randwert-Problem und gehört zur Klasse der parabolischen Differentialgleichungen. Die Randbedingungen ergeben sich in Abhängigkeit der jeweiligen Aufgabenstellung. Für stationäre Problemstellungen vereinfacht sich (3.4) zu einer elliptischen Differentialgleichung. Zur numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen mit Wärmeleitung kommen daher alle Verfahren in Frage, die grundsätzlich für parabolische oder elliptische Differentialgleichungen geeignet sind. Dazu gehören z. B. die Finite Differenzen Methode [3.24], das Kollokationsverfahren, die Galerkin Methode, die Finite Volumen Methode und die Finite Elemente Methode [3.25]. Außer der Finiten Differenzen Methode sind all diese Verfahren Spezialisierungen der

Methode der gewichteten Residuen. Der vorliegende Abschnitt gibt eine erste Einführung in die Finite Differenzen Methode und eine daraus ableitbare konzentriert-parametrische Problemformulierung als thermisches RC-Netzwerk.

3.6.1 Finite Differenzen Methode

Bei der Finite Differenzen Methode wird das Rechengebiet örtlich und zumeist auch zeitlich in Gitter eingeteilt und die Lösung wird nur an den Gitterpunkten berechnet. Dazu werden die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt. Für eine allgemeine, hinreichend oft differenzierbare Funktion $y(x)$ sind in Tabelle 3.2 Beispiele für Differenzenquotienten gegeben, wenn das Gitter entlang der x -Achse eine gleichförmige Schrittweite Δx aufweist. Die Tabelle zeigt auch die Ordnung des Abschneidefehlers.

Tabelle 3.2: Differenzenquotienten.

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, zentrale Differenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
2. Ableitung, zentrale Differenz	$y''(x) = \frac{y(x - \Delta x) - 2y(x) + y(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Aufgabe 3.12 (Differenzenquotienten). Die Herleitung von Differenzenquotienten und die Berechnung der zugehörigen Abschneidefehler kann mittels Taylorreihenentwicklung am Punkt x erfolgen. Rechnen Sie auf diese Art die in Tabelle 3.2 angegebenen Differenzenquotienten nach.

Anhand des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \forall t > 0, x \in (0, L) \quad (3.92a)$$

mit $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ (homogenes Material, konstante Materialparameter, keine Quellterme) für die Temperatur $T(t, x)$ im Gebiet $x = [0, L]$ mit den Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.92b)$$

$$T(t, L) = T_L(t) \quad (3.92c)$$

und der Anfangsbedingung

$$T(0, x) = T_A(x) \quad (3.92d)$$

soll die Finite Differenzen Methode veranschaulicht werden. Das Rechengebiet wird örtlich in N Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) aufgeteilt, wobei

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}. \quad (3.93)$$

Außerdem soll die Zeitachse in Intervalle der festen Länge Δt unterteilt werden, so dass sich die Gitterpunkte

$$t_j = j\Delta t \quad (3.94)$$

ergeben. Für die Werte an den Gitterpunkten werden die Abkürzungen $T_i(t) = T(t, x_i)$ und $T_i^j = T(t_j, x_i) = T_i(t_j)$ verwendet. Aus einer Ersetzung der Ortsableitung in (3.92a) gemäß Tabelle 3.2 folgt das Anfangswertproblem

$$\dot{T}_i(t) = \frac{a}{\Delta x^2}(T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.95a)$$

$$\dot{T}_0(t) = \frac{2a}{\Delta x^2}(T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.95b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i(0) = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.95c)$$

In (3.95a) gilt natürlich $T_N(t) = T_L(t)$. Um (3.95b) zu erhalten, wurde ein virtueller Gitterpunkt an der Stelle x_{-1} eingeführt und die Randbedingung (3.92b) mit dem zentralen Differenzenquotienten ausgewertet. Dies führt auf

$$\frac{T_1(t) - T_{-1}(t)}{2\Delta x} = 0 \quad (3.96)$$

und damit die in (3.95b) verwendete Beziehung $T_{-1}(t) = T_1(t)$. Das Anfangswertproblem (3.95) ist linear und liegt bereits in Zustandsraumdarstellung vor. Es kann also direkt die Lösungsformel für lineare zeitinvariante Systeme zur Berechnung der Temperaturtrajektorien verwendet werden. Alternativ kann das Anfangswertproblem auch mit üblichen numerischen Methoden integriert werden. Das Euler-Vorwärtsverfahren, das aus der Anwendung des Vorwärtsdifferenzenquotienten (vgl. Tabelle 3.2) auf die linken Seiten von (3.95a) und (3.95b) folgt, ist eine solche Methode. Es führt auf die explizite Differenzengleichung

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2}(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.97a)$$

$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2}(T_1^j - T_0^j) \quad j \geq 0 \quad (3.97b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.97c)$$

Es ist unmittelbar einsichtig, dass dieses zeitdiskrete lineare System nicht für beliebige Werte $\Delta t a / \Delta x^2$ stabil ist. D. h. die Wahl der Zeitschrittweite Δt ist auf die Wahl der Ortsschrittweite Δx abzustimmen. Das Einhalten der Bedingung

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.98)$$

garantiert die Stabilität von (3.97). Auf den Beweis dieser Bedingung wird hier verzichtet – er kann z. B. in [3.26] nachgeschlagen werden.

Mit der hier beschriebenen Finite Differenzen Formulierung können bereits 1-dimensionale transiente Wärmeleitungsprobleme gelöst werden. Andere Arten der Diskretisierung, insbesondere der Zeitableitung in (3.92a) finden sich z. B. in [3.3, 3.4, 3.10]. Darunter sind auch Formulierungen die auf implizite Differenzengleichungen führen, deren Stabilität bedingungslos oder mit weniger stringenten Anforderungen an Δt und Δx gesichert ist. Die Anwendung des Verfahrens auf mehrdimensionale Wärmeleitprobleme wird z. B. in [3.4, 3.10, 3.11] beschrieben. Theoretische Grundlagen zur Finite Differenzen Methode finden sich z. B. in [3.24].

Aufgabe 3.13 (Differenzenquotienten für unregelmäßige Gitter). Auch die Anwendung der Finite Differenzen Methode mit unregelmäßigen Gittern und auf unregelmäßige Rechengebiete ist möglich. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Rechnungen. Es ist wie in Tabelle 3.2 von einer Funktion $y(x)$ auszugehen, wobei die x -Achse mit der nicht notwendigerweise regelmäßigen Schrittweite $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ zu diskretisieren ist.

- a) Zeigen Sie, dass die zunächst naheliegende Formulierung

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.99)$$

für den zentralen Differenzenquotienten 1. Ordnung einen Abschneidefehler von nur linearer Ordnung aufweist.

- b) Finden Sie unter Verwendung von $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ und $y(x_{i+1})$ eine bessere Formulierung für $y'(x_i)$, deren Abschneidefehler stets quadratische Ordnung besitzt.
- c) Finden Sie unter Verwendung von $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ und $y(x_{i+1})$ einen Differenzenquotienten, der eine Näherung für $y''(x_i)$ repräsentiert, und zeigen Sie, dass deren Abschneidefehler lineare Ordnung besitzt.

Lösung von Aufgabe 3.13.

- b)

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} + y(x_i) \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right) - y(x_{i-1}) \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.100)$$

- c)

$$y''(x_i) = 2 \frac{y(x_{i+1}) \frac{1}{\Delta x_i} - y(x_i) \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + y(x_{i-1}) \frac{1}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.101)$$

Aufgabe 3.14 (Stationäre Wärmeübertragung in einem umströmten Stab). Rechnen Sie mit Hilfe der Finiten Differenzen Methode die Ergebnisse (A.8) und (A.10) für die Parameterwerte $L = 0.5 \text{ m}$, $T_0 = 353 \text{ K}$, $T_L = T_\infty = 293 \text{ K}$, $\alpha = \alpha_L = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $P = 0.5 \text{ m}$, $A = 0.01 \text{ m}^2$ und $\lambda = 60 \text{ W}/(\text{m K})$ nach. Implementieren Sie dazu die Gleichung (A.7a) samt den jeweils zugehörigen Randbedingungen in einem Computernumerikprogramm. Ersetzen Sie dabei die Ortsableitungen durch zentrale Differenzenquotienten gemäß Tabelle 3.2 für ein regelmäßiges Gitter mit der Schrittweite Δx . Vergleichen Sie die Ergebnisse für unterschiedliche Schrittweiten mit den analytischen Resultaten (A.8) und (A.10).

Aufgabe 3.15 (Transiente Wärmeübertragung in einem umströmten Stab). Erweitern Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3.14 zu einer transienten Analyse. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $T(x, 0) = T_\infty$ und die Parameter $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$ und $c_p = 450 \text{ J}/(\text{kg K})$ und wählen Sie unter Berücksichtigung von (3.98) geeignete Schrittweiten Δt und Δx . Wie lange dauert es bis die maximale Differenz zwischen stationärem und transientem Temperaturprofil den Wert $0.05(T_0 - T_\infty)$ unterschreitet?

3.6.2 Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk

Ein meist zentraler Schritt bei der numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen ist der Übergang von einer verteilt-parametrischen zu einer konzentriert-parametrischen Formulierung, d. h. die räumliche Diskretisierung. Im vergangenen Abschnitt beruhte dieser Übergang rein auf mathematischen Überlegungen zur Berechnung von Ableitungen. Aufbauend auf diesen Resultaten zeigt der vorliegende Abschnitt eine physikalisch motivierte Möglichkeit zur räumlich diskreten Formulierung von Wärmeübertragungsproblemen. Diese Formulierung führt auf eine anschauliche Analogie zwischen elektrischen RC-Netzwerken und thermischen Netzwerken (thermische RC-Netzwerke). Die nachfolgend näher diskutierten korrespondierenden Größen sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Tabelle 3.3: Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken.

Elektrische Größe	Einheit	Thermische Größe	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	T	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	\dot{Q}	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	H	J
Elektrischer Widerstand	Ω	Thermischer Widerstand	R	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	C	J/K

Die Temperatur T stellt eine Zweipunktgröße dar, der Wärmestrom \dot{Q} eine Einpunktgröße. Ähnlich dem Ohmschen Gesetz in der Elektrotechnik gilt für die Temperaturdifferenz ΔT an den beiden Enden eines thermischen Widerstandes R

$$\Delta T = R\dot{Q} . \quad (3.102a)$$

Ferner kann das dynamische Verhalten der Temperatur T (Zustandsgröße) einer thermischen Kapazität C durch

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C} \quad (3.102b)$$

charakterisiert werden. Auch hier ist die Ähnlichkeit zur Strom-Spannungsbeziehung an elektrischen Kapazitäten unmittelbar ersichtlich. Bemerkenswerterweise findet sich im Bereich der Wärmeübertragung aber kein Analogon zur elektrischen Induktivität. Dies erklärt aus physikalischer Sicht, warum es in thermischen Netzwerken (ohne periodische Anregung) kein oszillierendes Verhalten geben kann. D. h. das linearisierte dynamische System besitzt ausschließlich rein reelle Eigenwerte.

Die Darstellung eines Wärmeübertragungsproblems als thermisches RC-Netzwerk kann hilfreich sein, weil die aus der Elektrotechnik bekannten Knoten- und Maschengleichungen zur Netzwerkanalyse genutzt werden können. Ferner können gängige Netzwerksimulationsprogramme zur Berechnung herangezogen werden.

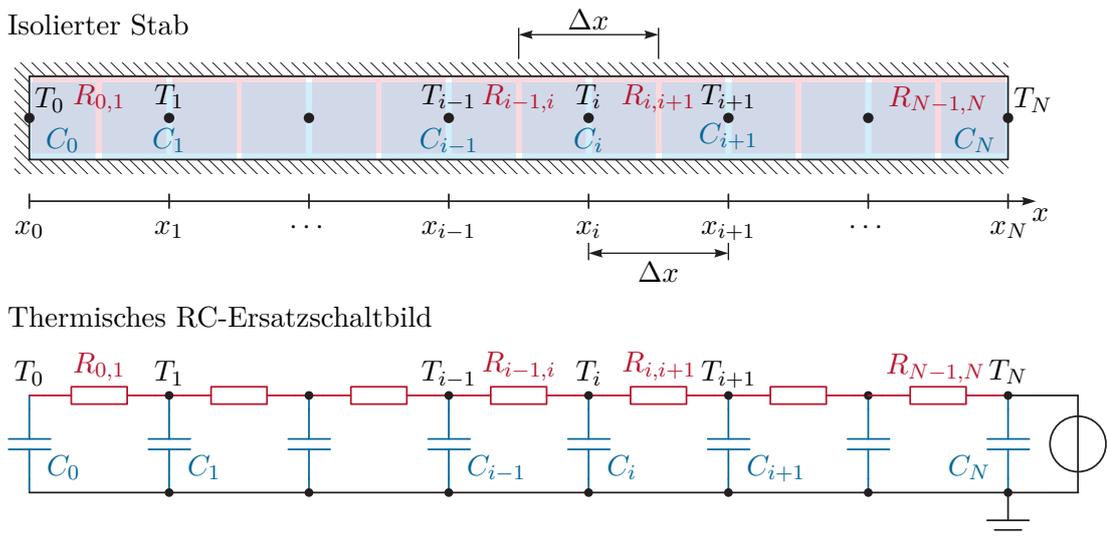


Abbildung 3.22: Finite Differenzen Formulierung als Kette von RC-Gliedern.

Abbildung 3.22 zeigt einen an der Mantelfläche und am Ende $x = 0$ isolierten Stab, dessen transienter Temperaturverlauf z. B. mit Hilfe von (3.95) berechnet werden kann. Die Diskretisierungspunkte x_i sind als schwarze Punkte in Abbildung 3.22 dargestellt. Die Querschnittsfläche des Stabes sei konstant A . Man kann nun in (3.95a) und (3.95b) durch

Umschreiben in die Form

$$\underbrace{\frac{\Delta x A \rho c_p}{2}}_{=C_i} \dot{T}_i(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.103a)$$

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.103b)$$

thermische Kapazitäten C_i und thermische Widerstände $R_{i,i+1}$ identifizieren und das in Abbildung 3.22 gezeigte Ersatzschaltbild erstellen. Es hat eine leiterförmige Struktur und wird auch Cauer Modell genannt. Der thermische Widerstand $R_{i,i+1}$ verbindet den Knoten x_i mit dem Knoten x_{i+1} . Die thermische Kapazität C_i verbindet den Knoten x_i mit der thermischen Masse. Da der Knoten x_0 am Rand des Rechengebietes liegt, ist seine thermische Kapazität C_0 nur halb so groß, wie die der Knoten im Inneren. Gleiches würde auch für den Randknoten x_N gelten, dessen thermische Kapazität C_N aber hier nicht von Bedeutung ist, da $T_N(t) = T_L(t)$ fest vorgegeben ist (Randbedingung erster Art).

An diesem einfachen Beispiel werden bereits einige der folgenden Prinzipien von thermischen RC-Netzwerken klar:

- Ein thermisches RC-Netzwerk beschreibt ein Anfangswertproblem (gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswerten, vgl. das Zustandsraummodell (3.95)).
- Thermische Widerstände stellen immer eine thermische Verbindungsstrecke zwischen zwei Knoten dar. Außerdem treten sie bei einigen Randbedingungen auf. Mit thermischen Widerständen lassen sich wärmeleitende Volumen und generell Wärmeübertragungsstrecken modellieren. Der in stationären Wärmeübertragungsproblemen häufig verwendete k -Wert (vgl. (3.71) und (3.79)) steht mit dem thermischen Widerstand über die Beziehung

$$R = \frac{1}{Ak} \quad (3.104)$$

in Verbindung, wobei A die Querschnittsfläche des Widerstandes ist.

- Volumetrische Wärmequellen können als zusätzliche in die Netzwerkknoten mündende Stromquellen modelliert werden (vgl. Abbildung 3.23d)).
- Thermische Kapazitäten sind immer direkt mit der thermischen Masse verbunden, d. h. alle Kapazitäten sind sternförmig um die thermische Masse angeordnet. Thermische Kapazitäten haben keinen Einfluss auf die stationäre Temperaturverteilung und das stationäre Wärmeübertragungsverhalten des Systems.
- Die Temperatur (das Potential) der thermischen Masse kann im Falle konstanter Materialparameter (spezifischer Wärmekapazität, Dichte, Leitfähigkeit) auf einen beliebigen Wert gesetzt werden.

- Eine Randbedingung erster Art (fest vorgegebene Temperatur T_a) kann als ideale Potentialquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.23a)).
- Eine Randbedingung zweiter Art (fest vorgegebener Wärmestrom \dot{Q}_a) kann als ideale Stromquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.23b)). (Entfällt im obigen Beispiel, da der Wärmestrom am Rand $x = 0$ verschwindet.)
- Eine Randbedingung dritter Art (temperaturabhängige Wärmestromdichte $\alpha(T_\infty - T_a)$), vgl. die Abschnitte 3.2.1 bis 3.2.2) kann mit Hilfe eines thermischen Widerstandes (Kontakt- oder Übergangswiderstand)

$$R_a = \frac{1}{A\alpha} \quad (3.105)$$

modelliert werden, wobei A die Fläche der Randbedingung ist. Ist eines der beiden Temperaturniveaus fest vorgegeben (gilt z. B. häufig für die Umgebungstemperatur T_∞), so ist der Widerstand an eine ideale Potentialquelle zu koppeln (vgl. Abbildung 3.23c)).

- Soll ein RC-Netzwerkmodell auch zur Abbildung nichtlinearer Effekte (z. B. Wärmestrahlung, vgl. Abschnitt 3.2.3) verwendet werden, so sind die konstitutiven Beziehungen (3.102) durch entsprechende nichtlineare Ausdrücke zu ersetzen. Außerdem ist es natürlich möglich den linearisierten Anteil des thermischen Verhaltens als lineares Netzwerk zu modellieren.

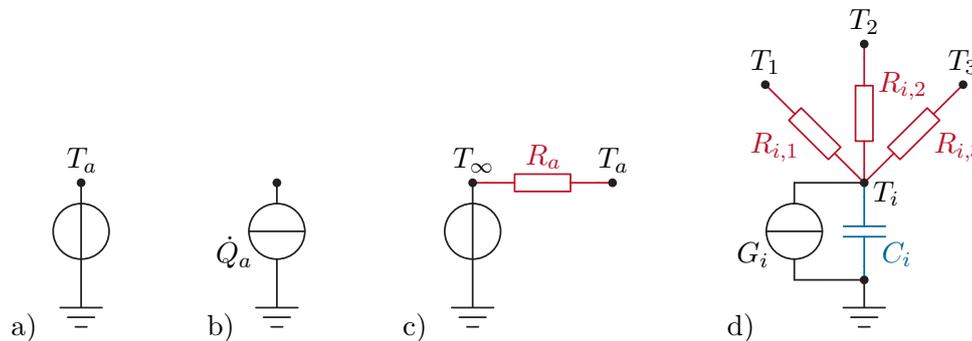


Abbildung 3.23: Basiselemente für thermische RC-Netzwerke, a) Randbedingung erster Art, b) Randbedingung zweiter Art, c) Randbedingung dritter Art, d) Knotenelement mit Wärmequelle.

Als Grundeinheit zur Erstellung thermischer RC-Netzwerke kann das in Abbildung 3.23d) gezeigte Knotenelement i dienen. Es ist über eine Kapazität C_i mit der thermischen Masse und über Widerstände $R_{i,j}$ mit den anderen Knoten $j = 1, 2, \dots$ verbunden und beinhaltet außerdem eine (volumetrische) Wärmequelle G_i . Eine andere als die in Abbildung 3.22 gezeigte sternförmige Anordnung der Kapazitäten rund um die thermische Masse kann durch Transformationen gefunden werden. Eine eindeutige physikalische Interpretation ist jedoch nur bei der sternförmigen Anordnung der Kapazitäten möglich.

Im obigen Beispiel wurde gezeigt, dass eine Finite Differenzen Formulierung eines Wärmeübertragungsproblems eine einfache Interpretation als thermisches RC-Netzwerk in Form eines Cauer Modells zulässt. Dieses Prinzip ist erweiterbar, denn das Modellierungsergebnis muss nicht zwingend ein Cauer Modell sein und der Ausgangspunkt der Modellierung ist zumeist keine Finite Differenzen Diskretisierung. Vielmehr kann ausgehend von einem physikalischen Modell durch benutzerdefinierte Partitionierung des Rechengebietes direkt manuell ein thermisches RC-Ersatzschaltbild erstellt werden. Daraus kann leicht ein Zustandsraummodell des Systems abgelesen werden.

Im Falle eines prismatischen, an der Mantelfläche isolierten Körpers mit der volumetrischen Wärmequelle g gilt (vgl. auch (3.95))

$$C_i = \Delta x_i A \rho c_p \quad (3.106a)$$

$$R_{i,i+1} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{A \lambda} \quad (3.106b)$$

$$G_i = \Delta x_i A g . \quad (3.106c)$$

In technischen Anwendungen mit komplexeren Geometrien werden diese Werte oft in Messungen oder numerischen Analysen bestimmt. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, können auch Serien- und Parallelschaltungen von thermischen Widerständen zumindest näherungsweise berechnet werden. In der darauffolgenden Aufgabe wird die passive Kühlung eines Elektronikbauteils untersucht.

Beispiel 3.6 (Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen). Abbildung 3.24 a) zeigt einen inhomogenen wärmeleitenden Quader mit der Länge L , der Breite B und der Höhe H (vgl. [3.4]). An der linken und an der rechten Seitenfläche werden homogen verteilte feste Randtemperaturen eingeprägt (Randbedingungen erster Art). Alle übrigen Oberflächen sind adiabat. Der Quader besteht aus den vier Blöcken a , b , c und d mit unterschiedlichen Materialien.

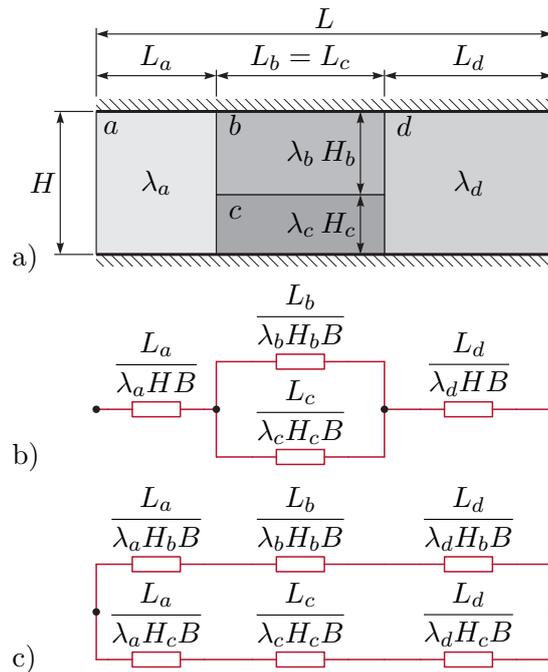


Abbildung 3.24: Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen (in Anlehnung an [3.4]), a) Aufbau, b) thermisches Ersatzschaltbild für untere Schranke des Gesamtwiderstandes, c) thermisches Ersatzschaltbild für obere Schranke des Gesamtwiderstandes.

Um den thermischen Widerstand R des Quaders zu ermitteln, müsste ein 2-dimensionales stationäres Wärmeleitproblem (numerisch) gelöst werden. Durch einfache Serien- und Parallelschaltungen von Teilwiderständen lassen sich aber untere und obere Schranken für R finden, die oftmals brauchbare Näherungen für R sind. Zur Erklärung kann man gedanklich von einer orthotropen Wärmeleitfähigkeit ausgehen. In horizontaler Richtung gelten die angegebenen Wärmeleitfähigkeiten λ_a , λ_b , λ_c und λ_d . Geht man davon aus, dass für die Wärmeleitfähigkeit in vertikaler Richtung $\lambda_v \rightarrow \infty$ gilt, so bedingt dies eine homogene Temperaturverteilung entlang vertikaler Schnittflächen innerhalb der Teilbereiche a und d und insbesondere an deren Grenzschichten. Die thermischen Widerstände der Bereiche b und c sind daher, wie in Abbildung 3.24b) dargestellt, an ihren Enden thermisch verbunden. Für dieses Ersatzschaltbild folgt

$$\underline{R} = \frac{L_a}{\lambda_a H B} + \frac{1}{\frac{\lambda_b H_b B}{L_b} + \frac{\lambda_c H_c B}{L_c}} + \frac{L_d}{\lambda_d H B}, \quad (3.107)$$

was eine untere Schranke des thermischen Gesamtwiderstandes R darstellt. Wird hingegen $\lambda_v = 0$ angenommen, womit kein Wärmestrom in vertikale Richtung möglich ist, so ergibt sich ein thermisches Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 3.24c) mit der

oberen Schranke

$$\bar{R} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_b B} + \frac{L_b}{\lambda_b H_b B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_b B}} + \frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_c B} + \frac{L_c}{\lambda_c H_c B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_c B}}} . \quad (3.108)$$

Beispiel 3.7 (Dimensionierung eines Kühlkörpers für einen Spannungsregler). Ein linearer Spannungsregler liefert am Ausgang $U_a = 5 \text{ V}$, wobei für die Eingangsspannung $6 \text{ V} \leq U_e \leq 20 \text{ V}$ gelten muss. Die angeschlossene Last zieht einen Gleichstrom $I_a = 0.5 \text{ A}$. Der gleiche Strom fließt auch eingangsseitig, d. h. der Spannungsregler reduziert nur die Eingangsspannung auf den gewünschten Ausgangswert U_a . Aus dem Datenblatt des Spannungsreglers sind außerdem die thermischen Widerstandswerte $R_{SB} = 5 \text{ K/W}$ und $R_{B\infty} = 60 \text{ K/W}$ bekannt. R_{SB} ist der thermische Widerstand zwischen Sperrschicht und Basisplatte und $R_{B\infty}$ ist der thermische Widerstand zwischen Basisplatte und Umgebungsluft. Die Basisplatte hat eine Masse $m_B = 0.002 \text{ kg}$ und eine spezifische Wärmekapazität $c_B = 385 \text{ J/(kg K)}$ (Kupfer). Die Wärmeübertragung über das Kunststoffgehäuse und die elektrischen Anschlusskontakte sei vernachlässigbar klein.

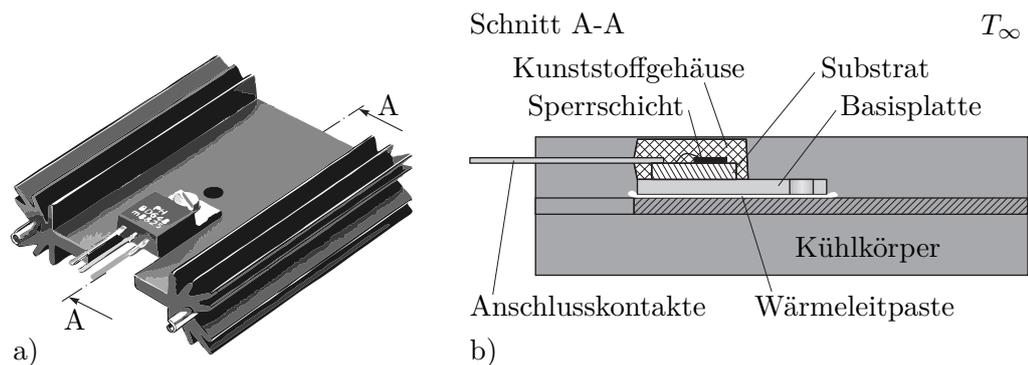


Abbildung 3.25: Spannungsregler mit Kühlkörper, a) Ansicht, b) innerer Aufbau.

Die Sperrschichttemperatur T_S soll den Wert $T_{S,max} = 403 \text{ K}$ nicht überschreiten, wobei die Umgebungsluft die feste Temperatur $T_\infty = 323 \text{ K}$ aufweist. Um die Kühlung zu verbessern, wird ein Kühlkörper (passive Kühlung) mit der Masse $m_K = 0.02 \text{ kg}$ und der spezifischen Wärmekapazität $c_K = 903 \text{ J/(kg K)}$ (Aluminium) aufgeschraubt. Der thermische Widerstand zwischen Kühlkörper und Umgebungsluft beträgt laut Datenblatt des Kühlkörpers $R_{K\infty} = 7 \text{ K/W}$. Durch die Verwendung von Wärmeleitpaste konnte der Übergangswiderstand zwischen Basisplatte und Kühlkörper im Vergleich zu einem Luftspalt deutlich reduziert werden. Die Paste besitzt eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0.8 \text{ W/(m K)}$ und wurde auf einer Fläche $A = 150 \text{ mm}^2$ mit einer Dicke $H = 30 \mu\text{m}$ aufgetragen. Durch Anwenden der konzentriert-parametrischen Formulierung sollen folgende Fragen geklärt werden:

- a) Wie hoch darf die Eingangsspannung U_e im stationären Fall mit bzw. ohne Kühlkörper maximal sein, damit die zulässige Sperrschichttemperatur $T_{S,max}$

eingehalten wird?

- b) Zur Untersuchung des Einflusses von Schwankungen der Eingangsspannung soll davon ausgegangen werden, dass die Eingangsspannung $U_e(t)$ sinusförmig zwischen 6 V und 20 V schwankt, d. h. den Verlauf $U_e(t) = \bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft)$ mit $\bar{U}_e = 13$ V und $\hat{U}_e = 7$ V besitzt. Welche Frequenz f muss das Signal mindestens haben, damit der Spannungsregler in der Konfiguration mit dem Kühlkörper nicht überhitzt?

Die in Abbildung 3.25 dargestellte Konfiguration lässt sich durch die thermischen Ersatzschaltbilder gemäß Abbildung 3.26 beschreiben, wobei P die Heizleistung des Spannungsreglers und R_P den Wärmeübergangswiderstand der Wärmeleitpaste bezeichnen.

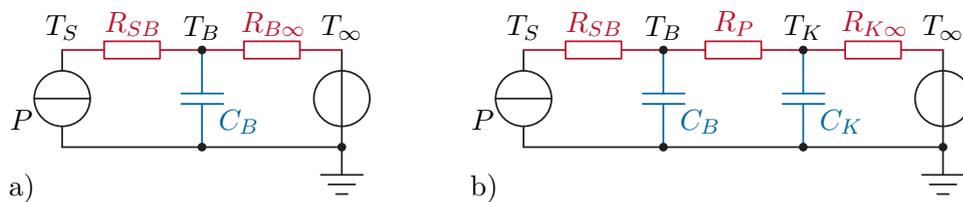


Abbildung 3.26: Thermische Ersatzschaltbilder, a) ohne Kühlkörper, b) mit Kühlkörper.

ad a) Die Heizleistung des Spannungsreglers beträgt

$$P = (U_e - U_a)I_a, \quad (3.109)$$

so dass

$$U_{e,max} = U_a + \frac{P_{max}}{I_a}. \quad (3.110)$$

Für die maximale Heizleistung gilt im stationären Fall

$$P_{max} = \frac{T_{S,max} - T_\infty}{R_{ges}}, \quad (3.111)$$

wobei ohne Kühlkörper für den Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = R_{SB} + R_{B\infty} \quad (3.112)$$

gilt und mit Kühlkörper

$$R_{ges} = R_{SB} + R_P + R_{K\infty}. \quad (3.113)$$

Hierbei ist

$$R_P = \frac{H}{\lambda A} \quad (3.114)$$

der Wärmeübergangswiderstand der Wärmeleitpaste. Damit kann die maximale Eingangsspannung $U_{e,max}$ direkt berechnet werden. Ohne Kühlkörper dürfen maximal 7.462 V und mit Kühlkörper maximal 18.061 V am Eingang anliegen.

ad b) Für die thermischen Kapazitäten gilt

$$C_B = m_B c_B, \quad C_K = m_K c_K \quad (3.115)$$

und für die Heizleistung im Spannungsregler erhält man

$$P(t) = (\bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft) - U_a) I_a = \underbrace{(\bar{U}_e - U_a) I_a}_{=\bar{P}} + \underbrace{\hat{U}_e I_a \cos(2\pi ft)}_{\hat{P}}. \quad (3.116)$$

Da es sich um ein lineares System handelt gilt für die Sperrschichttemperatur

$$T_S(t) = \bar{T}_S + \hat{T}_S \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (3.117)$$

mit dem konstanten Anteil

$$\bar{T}_S = T_\infty + \bar{P}(R_{SB} + R_P + R_{K\infty}), \quad (3.118)$$

der Amplitude

$$\hat{T}_S = |G(j2\pi f)| \hat{P} \quad (3.119)$$

und der Phase

$$\varphi = \arg(G(j2\pi f)). \quad (3.120)$$

Die hier verwendete Übertragungsfunktion

$$G(s) = R_{SB} + \frac{R_P(1 + sR_{K\infty}C_K) + R_{K\infty}}{(1 + sR_P C_B)(1 + sR_{K\infty}C_K) + sR_{K\infty}C_B} \quad (3.121)$$

lässt sich leicht anhand des in Abbildung 3.26b gezeigten RC-Netzwerks berechnen. Natürlich zeigt sie Tiefpassverhalten. Die gesuchte minimale Frequenz f_{min} lässt sich aus der Bestimmungsgleichung

$$\frac{T_{S,max} - \bar{T}_S}{\hat{U}_e I_a} = |G(j2\pi f_{min})| \quad (3.122)$$

berechnen. Man erhält z. B. durch numerisches Lösen von (3.122) $f_{min} = 1.429 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} = 5.146 \text{ h}^{-1}$.

3.7 Literatur

- [3.1] M. Moran und H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 6. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.2] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, *Thermodynamik, Band 1: Einstoffsysteme*, 18. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [3.3] H.D. Baehr und K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.4] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, T.L. Bergman und A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.5] J.H. Lienhard IV und J.H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3. Aufl. Cambridge, Massachusetts: Phlogiston Press, 2002.
- [3.6] J. Welty, C. Wicks, R. Wilson und G. Rorrer, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 5. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.7] M. Protter und H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*. New York: Springer, 1984.
- [3.8] W.M. Kays, M.E. Crawford und B. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer*, 4. Aufl. New York: McGraw Hill, 2005.
- [3.9] H. Schlichting und K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, 10. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.10] A. Bejan und A. Kraus, Hrsg., *Heat Transfer Textbook*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- [3.11] Y. Çengel und G. A.J., *Heat Transfer: A Practical Approach*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2011.
- [3.12] M. Favre-Marinet und S. Tardu, *Convective Heat Transfer: Solved Problems*, Ser. ISTE. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.13] J. Holman, *Heat transfer*, 10. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [3.14] Verein Deutscher Ingenieure, *VDI-Wärmeatlas*, 10. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.15] W. Wagner, *Wärmeübertragung: Grundlagen*, 7. Aufl., Ser. Kamprath-Reihe. Würzburg: Vogel Buchverlag, 2011.
- [3.16] Y. Çengel, J. Cimbala und R. Turner, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [3.17] M.F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, 3. Aufl. New York: Academic Press, 2013.
- [3.18] J. Howell, R. Siegel und P. Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [3.19] H.C. Hottel und A.F. Sarofim, *Radiative Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [3.20] J.R. Howell, *A catalog of radiation heat transfer configuration factors*, 3. Aufl. <<http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog>>, 2010.

-
- [3.21] M. Albach, *Grundlagen der Elektrotechnik 1: Erfahrungssätze Bauelemente Gleichstromschaltungen*, 3. Aufl. München: Pearson Studium, 2011.
 - [3.22] P. Tipler und R. Llewellyn, *Moderne Physik*, 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2010.
 - [3.23] E. Schrüfer, L. Reindl und B. Zagar, *Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen*, 10. Aufl. München: Hanser, 2012.
 - [3.24] J. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Ser. Texts in Applied Mathematics 22. New York: Springer, 1995.
 - [3.25] J.-M. Bergheau und R. Fortunier, *Finite Element Simulation of Heat Transfer*. Hoboken, NJ: Wiley, 2008.
 - [3.26] H.R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*, 6. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner, 2006.